

# Računalna dinamika fluida i metode vizualizacije strujanja tekućine

---

**Pilat, Matija**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:390530>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



*image not found or type unknown*

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Matija Pilat**

**Računalna dinamika fluida i metode vizualizacije strujanja tekućine**

**Završni rad**

**Rijeka, 2020.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Preddiplomski sveučilišni studij**

**Hidromehanika**

**Matija Pilat  
JMBAG: 0114029515**

**Računalna dinamika fluida i metode vizualizacije strujanja tekućine**

**Završni rad**

**Rijeka, rujan 2020.**

## **IZJAVA**

Završni rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Matija Pilat

U Rijeci, 24. kolovoza 2020.

## **IZJAVA**

Završni rad nastao je kao rezultat rada u okviru projekta

### **Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci**

Voditelj projekta     prof. dr. sc. Nevenka Ožanić  
Šifra projekta         RC.2.2.06-0001  
Financijer projekta   Europski fond za regionalni razvoj (EFRR)  
                              Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH  
Pravna nadležnost     Republika Hrvatska

U Rijeci, 24. kolovoza 2020.

Mentor:

---

Doc. dr. sc. Elvis Žic, dipl.ing.građ.

**Sažetak:**

U ovom završnom radu obrađena je tema Računalne dinamike fluida i metoda vizualizacije strujanja tekućina. Navedene su osnovne karakteristike tekućine od kojih je fokus dan na viskoznost i kompresibilnost. Definirana je strujnica i temeljne osnove strujanja tekućine što uključuje laminarno i turbulentno tečenje zajedno sa Reynoldsovim brojem  $Re$ . Objasnjene su osnove Računalne dinamike fluida. Razrađene su faze unutar numeričkog modeliranja unutar Računalne dinamike fluida i opisane metode za diskretizaciju domene. Prikazane su i objašnjene metode vizualizacije strujanja tekućine, te dani pojedini primjeri za svaku od metoda vizualizacije.

Ključni pojmovi: fluid, strujanje, Reynoldsov broj, Navier-Stokesove jednačbe, numeričko modeliranje, diskretizacija domene, metoda vizualizacije

**Summary:**

This final work deals with the topic of Computer Fluid Dynamics and methods of fluid flow visualisation. The basic properties of a liquid are given where viscosity and compressibility are important. The streamline and the basic principles of liquid flow are defined which includes laminar and turbulent flow together with the Reynolds number  $Re$ . The basics of Computational Fluid Dynamics are explained. The phases within the numerical modeling in Computational Fluid Dynamics are developed and the methods for domain discretization are described. Methods of fluid flow visualisation are presented and explained, and individual examples for each of the visualisation methods are given.

Keywords: fluid, flow, Reynolds number, Navier-Stokes equations, numerical modeling, domain discretization, visualisation method

## Sadržaj

<b>1. UVODNO</b> .....	1
<b>2. OSNOVNE KARAKTERISTIKE TEKUĆINE</b> .....	3
<b>2.1 Viskoznost</b> .....	3
<b>2.2 Površinska napetost</b> .....	5
<b>2.3 Kompresibilnost (stlačivost)</b> .....	6
<b>2.4 Karakteristike idealnog plina</b> .....	7
<b>3. TEMELJNE OSNOVE STRUJANJA TEKUĆINE</b> .....	9
<b>3.1 Strujnice i strujna cijev</b> .....	9
<b>3.2 Stacionarno i nestacionarno strujanje</b> .....	10
<b>3.3 3D, 2D i 1D strujanje kapljevina</b> .....	11
<b>3.4 Laminarno i turbulentno strujanje</b> .....	11
<b>3.5 Reynoldsov broj</b> .....	13
<b>3.6 Inkompresibilni i kompresibilni fluid</b> .....	14
<b>3.7 Rotacija i cirkulacija strujanja tekućine</b> .....	14
<b>4. RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA</b> .....	19
<b>4.1 Navier-Stokesove jednačbe</b> .....	20
<b>4.2 Metoda konačnih razlika (konačnih diferencija)</b> .....	21
4.2.1 Oznaka konačne razlike.....	21
4.2.2 Inkompresibilni fluid .....	23
4.2.3 Kompresibilni fluid .....	28
4.2.4 Turbulencija i modeli turbulencije .....	31
<b>4.3 Metoda konačnog volumena</b> .....	33
4.3.1 Metoda konačnog volumena za jednodimenzionalnu difuziju u stacionarnom stanju	35
<b>4.4 Metoda konačnih elemenata</b> .....	39
4.4.1 Podjela elemenata.....	39
4.4.2 Metoda ponderiranih (težinskih) ostataka.....	39
4.4.3 Interpolacijska funkcija .....	40
4.4.4 Primjenjivi slučajevi .....	43
<b>4.5 Metoda graničnog elementa</b> .....	44
<b>5. METODE VIZUALIZACIJE STRUJANJA TEKUĆINE</b> .....	46
<b>5.1 Klasifikacija tehnika za vizualizaciju strujanja tekućine</b> .....	46

<b>5.2</b>	<b>Eksperimentalne metode vizualizacije</b> .....	46
5.2.1	Wall-tracing metoda ( <i>eng. Wall-tracing method</i> ) .....	46
5.2.2	Tuft metoda ( <i>eng. Tuft method</i> ) .....	47
5.2.3	Metoda praćenja ubrizgavanjem ( <i>eng. Injection tracer method</i> ) .....	48
5.2.4	Metoda praćenja fluida uz kemijsku reakciju ( <i>eng. Chemical reaction tracer method</i> )	49
5.2.5	Električno kontrolirana metoda praćenja gibanja fluida ( <i>eng. Electrically controlled tracer method</i> ) .....	49
5.2.6	Optička metoda vizualizacije ( <i>eng. Optical visualisation method</i> ) .....	50
<b>5.3</b>	<b>Računalne metode vizualizacije</b> .....	51
5.3.1	Vizualizirana analiza slike ( <i>eng. Visualised image analysis method</i> ) .....	51
5.3.2	Numerička metoda vizualizacije podataka ( <i>eng. Numerical data visualisation method</i> )	53
5.3.3	Vizualizacija na temelju izmjerenih podataka ( <i>eng. Measured data visualisation method</i> )	54
<b>6.</b>	<b>ZAKLJUČAK</b> .....	56
<b>7.</b>	<b>LITERATURA</b> .....	58
<b>8.</b>	<b>POPIS SLIKA</b> .....	59



## 1. UVODNO

U ovom završnom radu obradit će se tema Računalne dinamike fluida, točnije metode za diskretizaciju domene određenog hidrodinamičkog problema u praksi. Računalna dinamika fluida se u praksi koristi u rješavanju svih problema u raznim granama industrije i znanosti gdje se javljaju fluidi (tekućine i plinovi) koji su u gibanju. Njene prednosti u praksi jesu da su smanjeni troškovi razvoja, te omogućuje inženjerima da simuliraju različite uvjete koji su ili skupi ili izuzetno složeni (ponekad nemoguće ostvarivi) za provedbu u laboratoriju.

Prvi dio završnog rada služi kao uvod u svojstva i karakteristike tekućine (kao dio fluida) kako bi se u nastavku mogla pratiti tematika i fokus završnog rada. Opisana su bitna svojstva tekućina kao što su viskoznost i kompresibilnost.

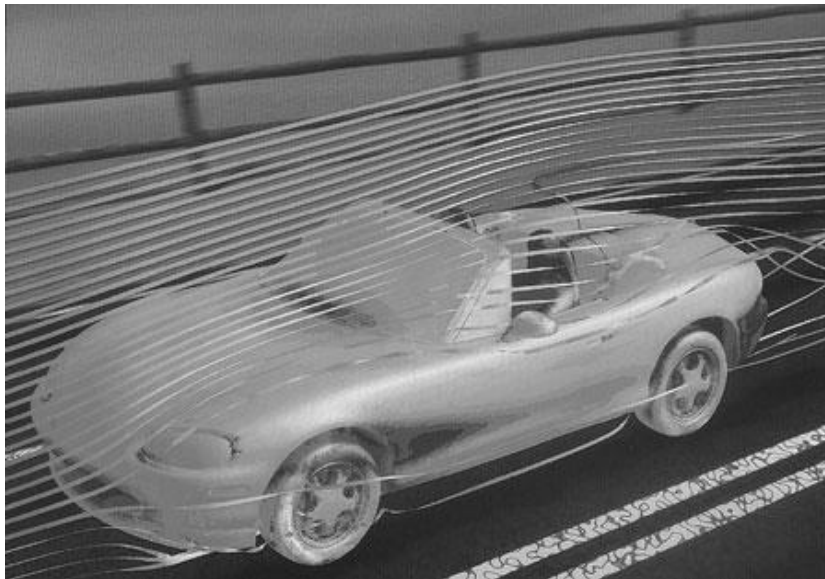
U drugom se dijelu završnog rada opisuju osnove strujanja tekućine. Naime, da bi se moglo govoriti o strujanju tekućine potrebno je pojasniti pojam strujnice te strujne cijevi. Opisana je razlika između stacionarnog i nestacionarnog strujanja. Nadalje, u trećem poglavlju su pojašnjena različita gibanja tekućine, laminarno i turbulentno, uz opis Reynoldsovog pokusa. Uz pokus se veže Reynoldsov broj ( $Re$ ), bezdimenzionalna veličina kojom se procjenjuje vrsta strujanja za danu tekućinu. Na kraju poglavlja opisane su rotacija i cirkulacija, dvije vrste vrtložnih strujanja.

U četvrtom dijelu završnog rada razrađena je tema Računalne dinamike fluida (*eng. Computational Fluid Dynamics, CFD*). Na početku je opisana primjena i svrha Računalne dinamike fluida. Nakon toga slijedi kratki uvod u Navier-Stokesove jednačbe. Zatim su opisane faze koje se provode unutar numeričkih modela kod CFD-a. Naposljetku su prikazane i opisane metode koje se koriste za diskretizaciju domene hidrotehničkih problema u praksi i rješavanje Navier-Stokesovih jednačbi u Mehanici fluida.

Peti dio završnog rada obuhvaća uvod u metode vizualizacije strujanja tekućine. Opisane su dvije tehnike koje se koriste, eksperimentalne i računalno potpomognute metode, te metode pojedine tehnike koje se koriste za vizualizaciju strujanja tekućine.

Računalna dinamika fluida (RDF), kao što je prije spomenuto, koristi se u raznim industrijama. Tako se RDF koristi u automobilskoj industriji za određivanje aerodinamičkog oblika auta (smanjenje otpora zraka) i dimenzioniranja spojlera na autu

(u svrhu smanjenja otpora strujanju zraka na repu automobila), u aerodinamici za formiranje adekvatnih oblika krila aviona (postizanje mjerodavnih sila uzgona i sl.), opstrujavanja fluida oko upornjaka mostova i slično (uglavnom svuda gdje se promatra gibanje određenog tijela/objekta kroz određeni medij (fluid – kapljevinu ili plinove) na temelju čega se ispituju njegovi otpori oblika i otpori trenja). Slika proizvedena Računalnom dinamikom fluida (*eng. CFD*) prikazana je na slici 1.



Slika 1: Polje strujanja fluida oko automobila simulirano metodama CFD-a [2]

Korištenje numeričkih modela i računalnih potpomognutih metoda vizualizacije u Mehanici fluida ne znači da one mogu zamijeniti eksperimentalne metode. Naime, nije moguće u potpunosti sva strujanja fluida simulirati na računalu. Numerička simulacija složenog strujanja, koje je prikazano na slici 1., općenito zahtijeva superračunalo.

## **2. OSNOVNE KARAKTERISTIKE TEKUĆINE**

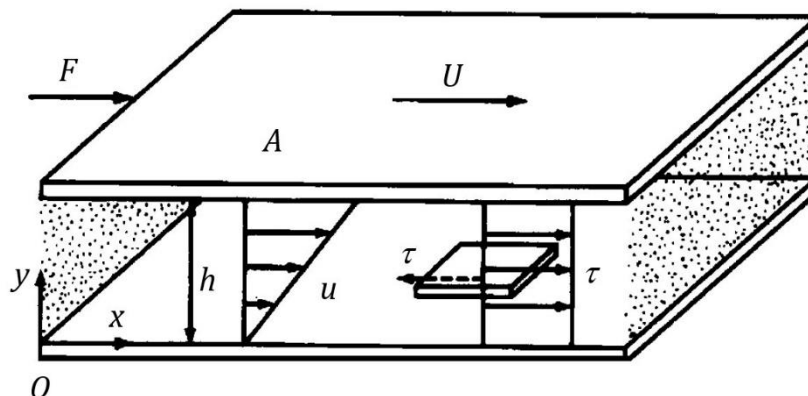
Fluide dijelimo na tekućine i plinove. Plin se lako stlačuje i potpuno se širi kako bi ispunio svoj spremnik. Stoga nema slobodne površine. Tekućinu je s druge strane teško istisnuti. Drevna izreka kaže „Voda ima oblik posude koja ju sadrži“, ona poprima oblik posude u kojoj se nalazi i oblikuje gornju slobodnu površinu [1]. Stoga je važna karakteristika fluida s gledišta mehanike fluida njegova stlačivost. Dok krutina pokazuje svoju elastičnost u napetosti, kompresiji ili smicanju, fluid to čini samo za kompresiju. Drugim riječima, fluid povećava svoj pritisak protiv kompresije, pokušavajući zadržati svoj izvorni volumen. Ova karakteristika se naziva stlačivost. Još jedna karakteristika je njegova viskoznost. Fluid pokazuje otpornost svaki put kad dva sloja kliznu jedan o drugi. Ta se karakteristika naziva viskoznost. Općenito, tekućine se nazivaju nekompresibilnim fluidima, a plinovi kompresibilnim. Ipak, za tekućine se mora voditi računa o kompresibilnosti kad god su pod velikim tlakom, a kompresibilnost plinova može se zanemariti kad god je promjena tlaka mala. Nepostojeći „pretpostavljen“ fluid bez viskoznosti ili stlačivosti naziva se idealnom tekućinom ili savršenom tekućinom. Fluid sa stlačivošću, ali bez viskoznosti se ponekad opisuje i naziva savršena tekućina. Nadalje, plin koji je predmet Boyle-Charlesova zakona nazvan je savršenim ili idealnim plinom [3].

### **2.1 Viskoznost**

Kao što je prikazano na slici 2., pretpostavlja se da tekućina ispunjava prazan prostor između dvije usko razmaknute paralelne ravne ploče površine  $A$  i razmaka  $h$  (donja je ploča fiksirana) a sila  $F$  je potrebna da bi se gornja ploča paralelno pomicala brzinom  $U$ . Ova geometrija modelira prostor između fiksne (nepokretne) i pokretne (pokretljive) ploče. Dok je vrijednost  $Uh/\nu < 1500$  ( $\nu = \mu/\rho$ , kinematička viskoznost), održava se laminarni protok i dobiva se linearna raspodjela brzine. Takav paralelni tok jednolikog gradijenta brzine naziva se Couetteovo strujanje. U ovom je slučaju sila po jedinici površine potrebna za pomicanje ploče, tj. posmično naprezanje (Pa) je proporcionalno brzini  $U$  i obrnuto proporcionalno udaljenosti  $h$ . Pomoću proporcionalne konstante  $\mu$  izraz se može zapisati na sljedeći način [3]:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h} \quad (2.1)$$

Proporcionalna konstanta  $\mu$  se naziva viskoznost, dinamička viskoznost ili koeficijent dinamičke viskoznosti.

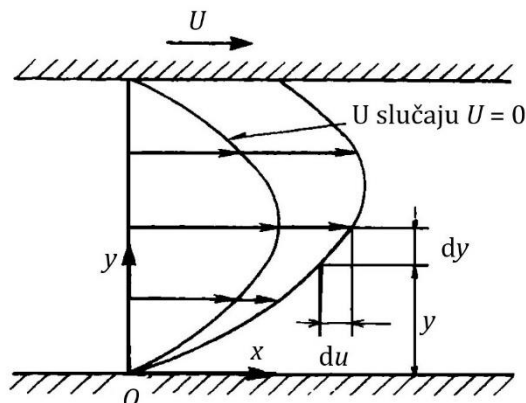


Slika 2: Prikaz Couettovog strujanja [3]

Takav tok gdje se brzina u smjeru  $x$  linearno mijenja u smjeru  $y$  naziva se smicanjem. Na slici 2. prikazan je slučaj kada tekućina u otvoru ne teče (giba se samo gornja ploča). Međutim, u slučaju kada tekućina teče, raspodjela brzine prikazana je na slici 3. Proširenjem jednadžbe (2.1) takvoga toka, posmično naprezanje  $\tau$  na dijelu  $dy$ , udaljenom za  $y$  od čvrstog zida, je dano sljedećom jednadžbom [3]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.2)$$

gdje omjer  $du/dy$  predstavlja promjenu brzine po vertikali. Ovaj odnos je otkrio Newton preko eksperimenta i nazvan je Newtonov zakon viskoznosti. Med, razna ulja te masti su neki od primjera koji imaju veliku viskoznost.



Slika 3: Strujanje tekućine između dviju usporednih ploča [3]

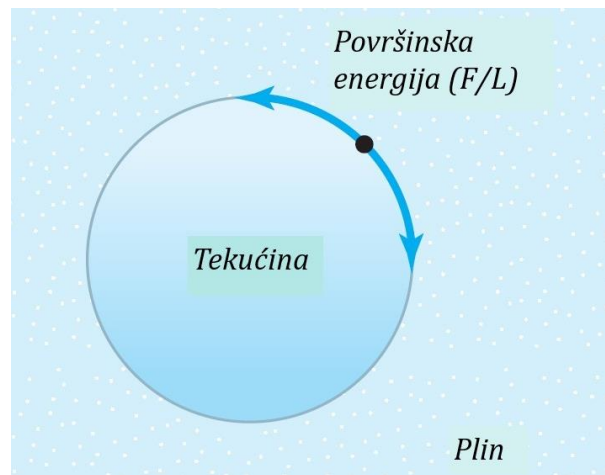
Prva posljedica viskoznosti fluida je otpornost na smicanje u skladu s Newtonovim zakonom viskoznosti (jedn. 2.2):  $\tau = \mu(du/dy)$ . Temperaturna ovisnost viskoznosti razlikuje se za plinove i tekućine. U slučaju plinova, povećana temperatura čini molekularno kretanje snažnijim i povećava miješanje molekula tako da se viskoznost povećava. U slučaju tekućine, kako njena temperatura dijelom povećava molekule koje su odvojene jedna od druge, smanjuje se privlačnost među njima i tako se viskoznost smanjuje. Dakle posmična viskoznost raste s temperaturom za plinove, ali opada s temperaturom za tekućine. Posmična viskoznost fluida je snažna funkcija temperature, ali slaba funkcija tlaka. Jedinice viskoznosti su Pas (Paskal sekunda) za SI sustav jedinica, te g/(cms) za CGS (Gaussov) sustav jedinica [2,3].

Dijeljenjem dinamičke viskoznosti  $\mu$  s gustoćom  $\rho$  dobiva se vrijednost  $\nu$  koja se zove kinematička viskoznost ili koeficijent kinematičke viskoznosti. Jedinica je  $m^2/s$  [3]:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.3)$$

## **2.2 Površinska napetost**

Molekule ispod površine tekućine imaju karakterističan broj najbližih susjeda. Ukupna energija fluidnog sustava je minimizirana kada svaka molekula ima "ispravan" broj susjednih molekula. Međutim, molekule na površini tekućine imaju različit broj najbližih susjednih molekula. Postoje dva načina za tumačenje ovog zapažanja. Prvi način tumači da će površinske molekule biti u višem energetsom stanju jer imaju "pogrešan" broj susjednih molekula. Višak energije povezan s molekulama na površini poznat je kao površinska energija. Površinska energija koja je predstavljena simbolom  $\sigma$  ima dimenzije energije po jedinici površine,  $\{FL / L^2\}$ , ili ekvivalentno,  $\{F / L\}$ , a izražava  $J/m^2$ . Drugi način prepoznaje da će površinske molekule tekućine biti snažnije privučene svojim susjednim molekulama ispod i u ravnini sučelja budući da one nemaju identične molekule iznad njih. Rezultat je sloj površinskih molekula koji se na makroskopskoj razini ponaša kao elastična membrana (Slika 4.). Odgovarajuća ukupna sila na molekuli u sučelju djeluje u ravnini površine u svim smjerovima i naziva se površinska napetost. Jedinice za površinsku napetost su  $N/m$  ili  $dyn/cm$  [2].



Slika 4: Ilustracija sferičnog tekućeg balona okruženog plinom [2]

Veličina površinske napetosti funkcija je fluida na obje strane sučelja. Stoga se površinska napetost na sučelju zrak-voda razlikuje od one na sučelju nafta-voda. Utjecaj obje tekućine na površinsku napetost odraz je činjenice da atomi u drugoj tekućini služe kao zamjena najbližih susjeda površinskim atomima u prvoj tekućini i obrnuto. Budući da bližnji susjedi molekule na sučelju utječu na rezultirajuću površinsku napetost, strane molekule adsorbirane na sučelje promijenit će površinsku napetost. Na primjer, sapuni i deterdženti smanjuju površinsku napetost na površini zraka i vode i na taj način omogućuju širenje vode na površinu. Isto tako zbog tendencije smanjivanja površinske napetosti, rosa koja se pojavljuje na lišću biljke je sfernog oblika [2].

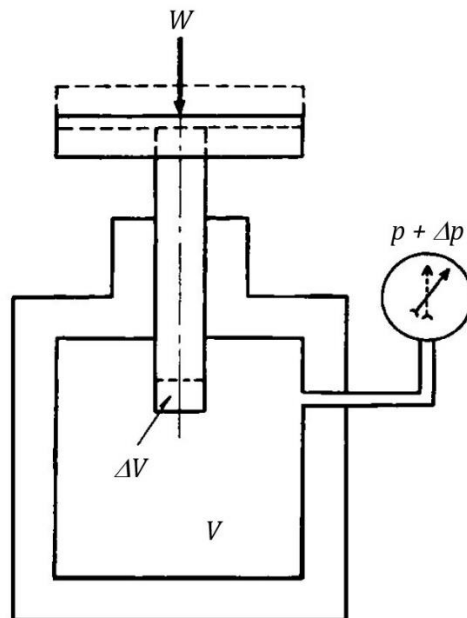
### 2.3 Kompresibilnost (stlačivost)

Kao što je prikazano na slici 4., pretpostavlja se da je tekućina volumena  $V$  pri tlaku  $p$  smanjila svoj volumen za  $\Delta V$  zbog daljnjeg povećanja tlaka za  $\Delta p$ . U ovom slučaju, budući da je kubična dilatacija tekućine  $\Delta V/V$  (relativna promjena volumena fluida), volumni modul stlačivosti  $K$  izražava se sljedećom jednačinom [3]:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -V \frac{dp}{dV} \quad (2.4)$$

Recipročna vrijednost volumnog modula stlačivosti jest stlačivost  $\beta$ , čija vrijednost izravno ukazuje koliko je fluid kompresibilan (stlačiv). Drugim riječima, stlačivost fluida jest promjena volumena fluida pod učinkom promjene tlaka. Za vodu normalne temperature/pritiska  $K=2,03 \cdot 10^9$  Pa, a za zrak  $K=1,4 \cdot 10^5$  Pa pretpostavljajući adijabatsku promjenu (termodinamički proces u kojem nema izmjene topline između

sustava i okoline – za idealni plin adijabatsko smanjivanje obujma (volumena) rezultira zagrijavanjem, a širenje hlađenjem) [1]. U slučaju vode,  $\beta = 4,85 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Pa}$ , a smanjuje se samo za oko 0,005 % čak i ako se atmosferski tlak poveća za 1 atm. Volumni modul stlačivosti tekućina obično se određuje iz brzine širenja zvuka u tekućini [3].



Slika 5: Mjerenje volumnog modula stlačivosti fluida [3]

Stavljajući  $\rho$  kao gustoću tekućine i  $M$  kao masu, budući da je  $pV=M=\text{konst.}$ , pretpostavlja se povećanje gustoće  $\Delta\rho$  svaki put kad se volumen smanji za  $\Delta V$ . Time je volumni modul stlačivosti  $K$  usko povezan sa brzinom tlačnog vala  $a$  koji se širi u tekućini, a koja je dana slijedećom jednadžbom [3]:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.5)$$

## 2.4 Karakteristike idealnog plina

Ukoliko se uzme da je  $p$  tlak plina,  $v$  specifični volumen,  $T$  apsolutna temperatura i  $R$  konstanta plina slijedi jednadžba koja rezultira Boyle-Charlesovim zakonom [3]:

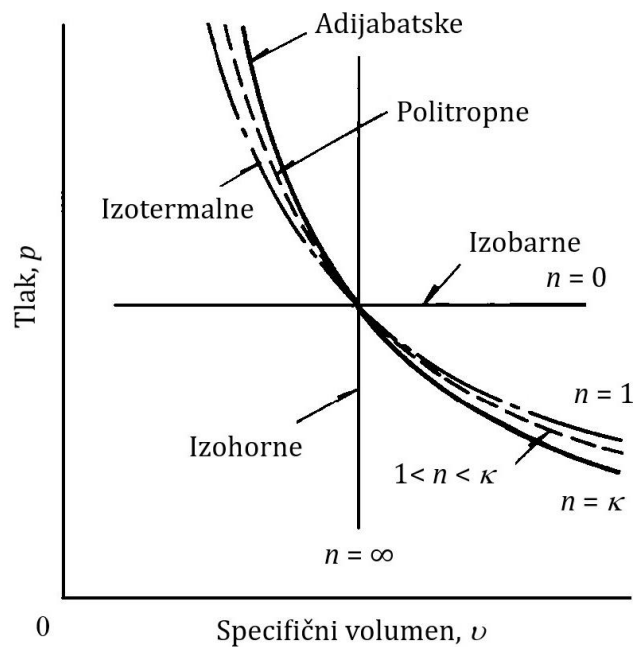
$$pv = RT \quad (2.6)$$

Ova jednadžba se naziva jednadžba stanja plina gdje je  $v = 1/\rho$ . Plin koji podleže jednadžbi (2.6) naziva se idealnim ili savršenim plinom. Strogo govoreći, svi stvarni plinovi nisu savršeni plinovi. Međutim, bilo koji plin na znatno višoj temperaturi od

temperature tekućeg stanja može se smatrati približno savršenim plinom. Promjena stanja savršenog plina izražena je sljedećom jednadžbom [3]:

$$pv^n = konst. \quad (2.7)$$

pri čemu se  $n$  naziva politropni eksponent. Kako se ta vrijednost mijenja od 0 do beskonačne vrijednosti, kao što je prikazano na slici 6., stanje plina čini pet vrsta promjena poznatih kao izobarne, izotermne (izotermalne), politropne, adijabatske i izohorne promjene. Konkretno, u slučaju adijabatske promjene dobiva se  $n=\kappa$ .  $\kappa$  je omjer specifične topline pri konstantnom tlaku  $c_p$  i specifične topline u konstantnom volumenu  $c_v$ , te se naziva omjer specifične topline (izentropni indeks) [3].



Slika 6: Promjene stanja idealnog plina [3]



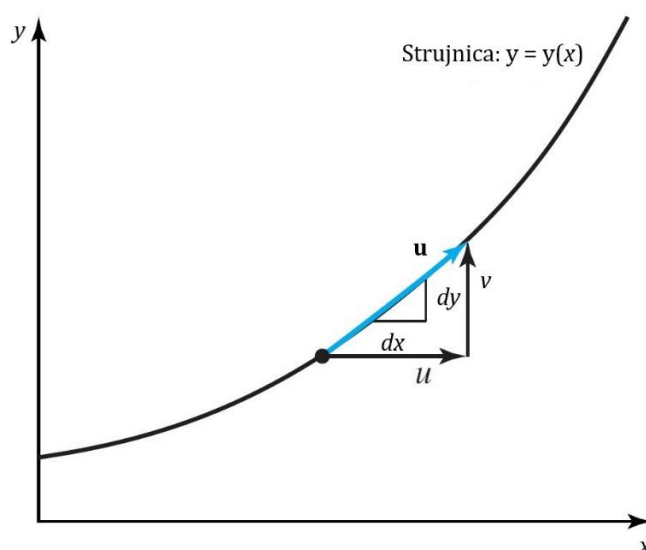
### 3. TEMELJNE OSNOVE STRUJANJA TEKUĆINE

Postoje dvije metode za proučavanje kretanja strujanja. Jedna je metoda koja slijedi bilo koju proizvoljnu česticu s njezinim kaleidoskopskim promjenama (dolazi do brzih promjena) brzine i ubrzanja. Ona se naziva Lagrangeova metoda ili Lagrangeov opis gibanja tekućine. Drugi je postupak kojim se promjene brzine i tlaka, umjesto praćenja bilo koje određene čestice fluida, proučavaju u fiksnim položajima u prostoru  $x, y, z$  i u vremenu  $t$ . Ova metoda se naziva Eulerova metoda ili opis gibanja tekućine. Danas je druga metoda u većini slučajeva češće primjenjivija i učinkovitija [3].

#### 3.1 Strujnice i strujna cijev

Krivulja formirana vektorima brzine svake čestice fluida u određenom vremenu naziva se strujnica (linija toka). Drugim riječima, to je krivulja koju trenutni lokalni vektori brzine tangiraju u svakom trenutku (Slika 7.). Uzimajući u obzir dvodimenzionalni protok, budući da je gradijent strujnice  $dy/dx$  i definirajući brzinu u  $x$  i  $y$  smjeru, jednako kao  $u$  i  $v$ , dobiva se sljedeća jednadžba strujnice [2,3]:

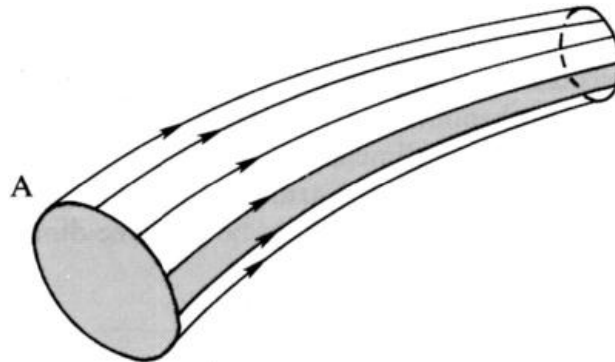
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (3.1)$$



Slika 7: Prikaz strujnice [2]

Ako se spoji veći broj strujnica u cjelinu dobije se strujna cijev (Slika 8.). Pošto je strujnica određena vektorima brzine, iz strujne cijevi ne dolazi do gubitaka tekućine jer

je ograničena rubnim strujnicama. Dakle smatra se da je fluid sličan fluidu koji teče u čvrstoj cijevi. Ova je pretpostavka prikladna za proučavanje fluida u stacionarnom kretanju [2,3].



Slika 8: Strujna cijev [3]

### 3.2 Stacionarno i nestacionarno strujanje

Kod tečenja fluida razlikujemo stacionarno i nestacionarno strujanje. Strujanje čije se stanje strujanja, izraženo brzinom, tlakom, gustoćom, ne mijenja s vremenom (strujnica ne mijenja oblik) naziva se stacionarnim strujanjem. Primjer stacionarnog strujanja je tečenje vode iz slavine kad je ventil otvoren (otvor je konstantan) (Slika 9.). Strujanje fluida čije se stanje strujanja mijenja s vremenom (strujnica mijenja oblik) naziva se nestacionarnim strujanjem [3].



Slika 9: Primjer stacionarnog strujanja [4]

### **3.33D, 2D i 1D strujanje kapljevina**

Sva opća strujanja fluida, poput aviona koji leti u zraku i strujanja fluida oko automobila u pokretu, imaju komponente brzine u smjerovima  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Ona se nazivaju trodimenzionalna strujanja. Izražavajući komponente brzine u aksijalnim smjerovima  $x$ ,  $y$  i  $z$  kao  $u$ ,  $v$  i  $w$ , tada vrijedi sljedeće [3]:

$$u = u(x, y, z, t) \quad v = v(x, y, z, t) \quad w = w(x, y, z, t) \quad (3.2)$$

Razmotrimo da voda teče između dviju paralelnih ploča, gdje je presjek okomit na ploče i paralelan sa strujanjem. Ako su stanja strujanja jednaka u svim ravninama paralelnima s presječenom ravninom, strujanje se naziva dvodimenzionalno strujanje jer se može opisati dvjema koordinatama  $x$  i  $y$ . Izražavajući komponente brzine u smjerovima  $x$  i  $y$  kao  $u$  i  $v$  respektivno, tada vrijedi [3]:

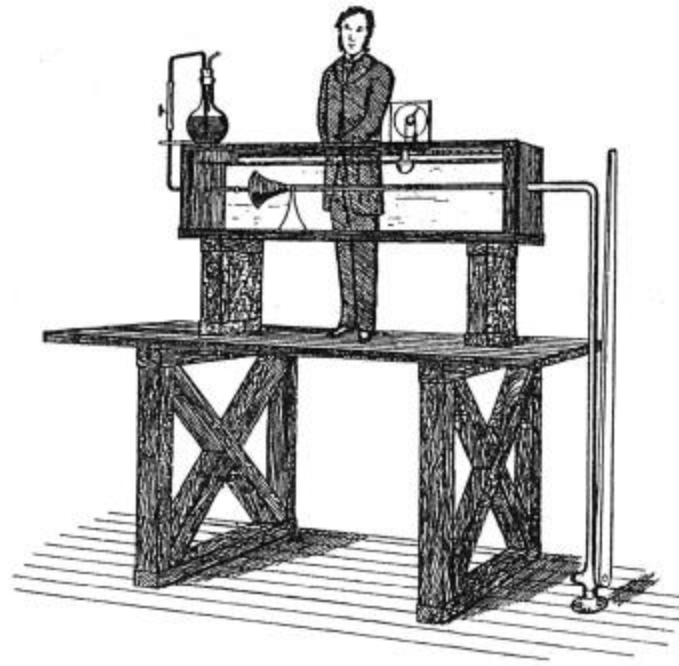
$$u = u(x, y, t) \quad v = v(x, y, t) \quad (3.3)$$

Kao još jednostavniji slučaj, ako se uzme da voda struji u cijevi s obzirom na prosječnu brzinu, tada strujanje ima brzinu samo u smjeru  $x$ . Strujanje čije je strujanje određeno samo jednom koordinatom  $x$  naziva se jednodimenzionalnim strujanjem. Njegova brzina  $v$  ovisi samo o koordinatama  $x$  i  $t$  [3]:

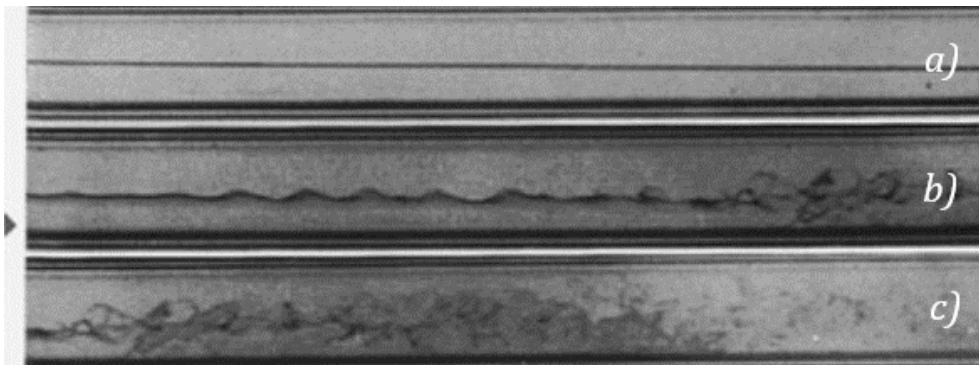
$$u = u(x, t) \quad (3.4)$$

### **3.4 Laminarno i turbulentno strujanje**

Postoje dva temeljna načina strujanja, laminarno i turbulentno. Irski znanstvenik Osborne Reynolds proučavao je ta dva načina strujanja jednostavnim pokusom. Obojenu tekućinu je upustio kroz središnji poprečni presjek cijevi u posudi s čistom vodom kako bi prikazao strujanje fluida (Slika 10.). Primijetio je da pri malim brzinama strujanja ne dolazi do miješanja označene vode s čistom (Slika 11.). Ovo je strujanje nazvao laminarnim (slojevitim) strujanjem. S druge strane, kod većih brzina strujanja dolazi do raspršivanja označene vode tj. dolazi do miješanja označene vode sa čistom vodom. Takvu je vrstu strujanja nazvao turbulentno strujanje, a brzinu strujanja kada se laminarno strujanje pretvori u turbulentno kritičnom brzinom [3].



Slika 10: Reynoldsov pokus ispitivanja laminarnog i turbulentnog strujanja [3]



Slika 11: Miješanje označene (obojene) vode sa čistom vodom: a) laminarno strujanje, b) prijelazno strujanje, c) turbulentno strujanje [2]

Dim cigarete je tipičan primjer na kojem se može uočiti prelazak iz laminarnog strujanja u turbulentno. Dim na vrhu cigarete ima laminarno strujanje da bi se kasnije raspršio u zraku te poprima karakteristike turbulentnog strujanja (Slika 12.).



Slika 12: Primjer laminarnog i turbulentnog strujanja [5]

### 3.5 Reynoldsov broj

Osborn Reynolds je otkrio da se laminarno strujanje pretvara u turbulentno kada vrijednost bezdimenzionalne količine  $\rho v d / \mu$  dostigne određenu vrijednost bez obzira na vrijednosti prosječne brzine  $v$ , promjera staklene cijevi  $d$ , gustoće vode  $\rho$  i dinamičke viskoznosti vode  $\mu$ . Kasnije, u spomen na Reynoldsovo postignuće, nazvan je Reynoldsovim brojem. Reynoldsov broj  $Re$  je omjer inercijskih sila (sila tromosti) i viskoznih sila (sila trenja):

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (3.5)$$

Strujanje je laminarno ako su viskozne sile dominantne. U protivnome, strujanje je turbulentno ukoliko su inercijske sile dominantne.

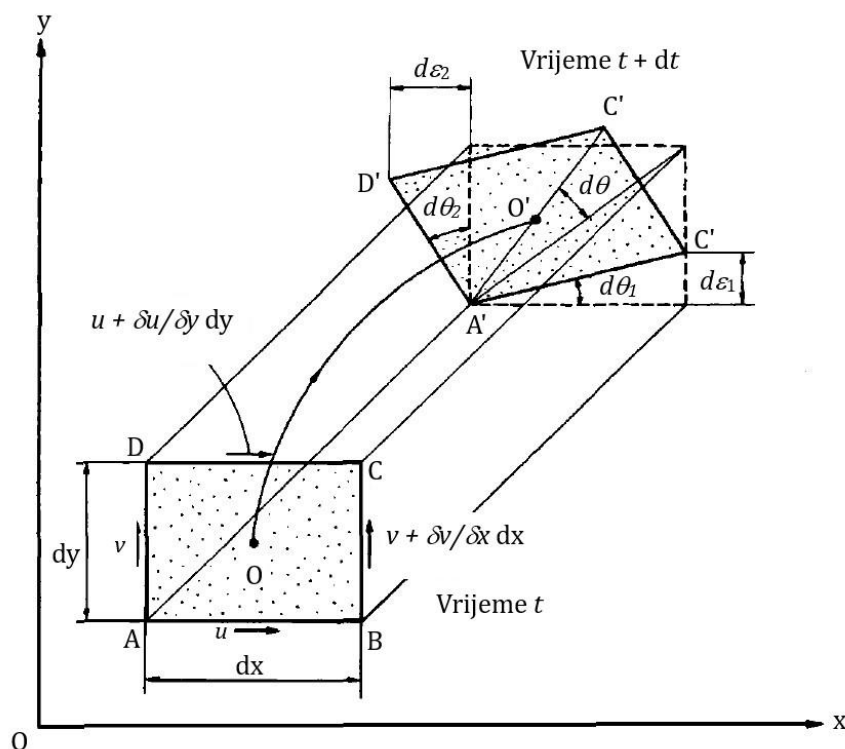
Pokusima je ustanovljeno da je vrijednost  $Re = 2320$  kritična vrijednost, odnosno granica prijelaza između laminarnog i turbulentnog strujanja. Za vrijednost Reynoldsovog broja manju od 2320 kažemo da je strujanje laminarno, dok za vrijednost veću od 2320 strujanje postaje turbulentno [3].

### 3.6 Inkompresibilni i kompresibilni fluid

Općenito, tekućina se naziva inkompresibilnim fluidom, a plin kompresibilnim fluidom. Ipak, čak i u slučaju tekućine, potrebno je uzeti u obzir kompresibilnost kad god je tekućina pod visokim tlakom, poput ulja u hidrauličkom stroju. Slično tome, čak i u slučaju plina, kompresibilnost se može zanemariti kad god je promjena tlaka mala. Kao kriterij ove presude koristi se  $\Delta\rho/\rho$  ili Machov broj  $Ma$ , čija vrijednost, međutim, varira u skladu s prirodom situacije [3].

### 3.7 Rotacija i cirkulacija strujanja tekućine

Čestice fluida koje prolaze kroz uski protok kanala podvrgnute su deformaciji i rotaciji. Pretpostavlja se da, kao što je prikazano na slici 13., elementarni pravokutnik fluida ABCD sa stranicama  $dx$ ,  $dy$ , koji se nalazi u središtu  $O$  u trenutku  $t$  pomiče se na  $O'$ , a pritom se kasnije deformira na  $A'B'C'D'$  za vrijeme  $dt$ .



Slika 13: Deformacija elementarnog pravokutnika tekućine [3]

Dužina AB u smjeru  $x$  kreće se prema  $A'B'$  dok se rotira za  $d\epsilon_1$ , a AD u smjeru  $y$  rotira se za  $d\epsilon_2$ . Tada vrijedi sljedeće [3]:

$$d\varepsilon_1 = \frac{\delta v}{\delta x} dx dt \quad d\varepsilon_2 = -\frac{\delta u}{\delta y} dy dt \quad (3.6)$$

$$d\theta_1 = \frac{d\varepsilon_1}{dx} = \frac{\delta v}{\delta x} dt \quad d\theta_2 = \frac{d\varepsilon_2}{dy} = -\frac{\delta u}{\delta y} dt \quad (3.7)$$

gdje  $\delta v/\delta x$  predstavlja promjenu brzine po horizontali unutar vremena  $dt$ , dok  $\delta u/\delta y$  promjenu brzine po vertikali unutar vremena  $dt$ . Promjena nagiba kuta pravokutnika jesu  $d\theta_1$  i  $d\theta_2$  [3].

Kutne brzine od AB i AD su  $\omega_1$  i  $\omega_2$  te se mogu odrediti iz izraza:

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\delta v}{\delta x} \quad \omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\delta u}{\delta y} \quad (3.8)$$

gdje je  $d\theta_1/dt$  promjena nagiba kuta pravokutnika u vremenu  $dt$ .

Za središte O, prosječna kutna brzina  $\omega$  glasi:

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right) \quad (3.9)$$

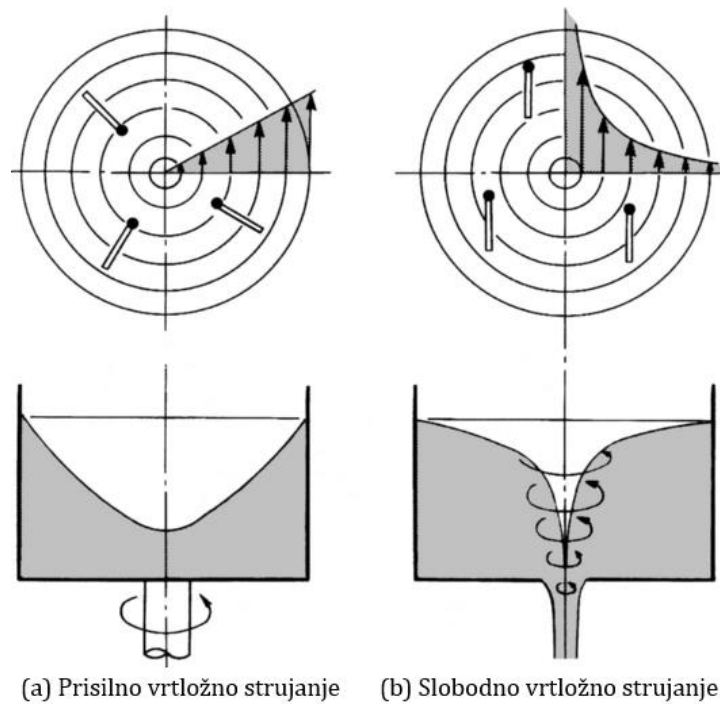
Pojam iz zagrade gornje jednadžbe daje ono što se naziva vrtlog oko z osi:

$$\zeta = \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \quad (3.10)$$

Irotacijsko strujanje je naziv za gibanje tekućine u slučaju kada je vrtlog jednak nuli:

$$\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} = 0 \quad (3.11)$$

Kao što je prikazano na slici 14(a), cilindrična posuda koja sadrži tekućinu vrti se oko vertikalne osi određenom kutnom brzinom. Tekućina čini rotacijski pokret duž linije strujanja, a ujedno se i sam element okreće. To je prikazano na gornjem dijagramu na slici 14(a), koji pokazuje kako drveni iver pluta, dobro proučen fenomen u praksi. U ovom se slučaju radi o rotacijskom strujanju, a naziva se prisilnim vrtložnim strujanjem. Na slici 14(b) je prikazan slučaj rotirajućeg strujanja koji se promatra kada tekućina teče kroz malu rupu na dnu posude. Iako se tekućina kreće rotacijski, njeni mikroelementi su uvijek usmjereni u istom smjeru bez vršenja rotacije. Ovo je slučaj irotacijskog strujanja koje se naziva slobodnim vrtložnim strujanjem [3].



Slika 14: Prikaz vrtložnog strujanja [3]

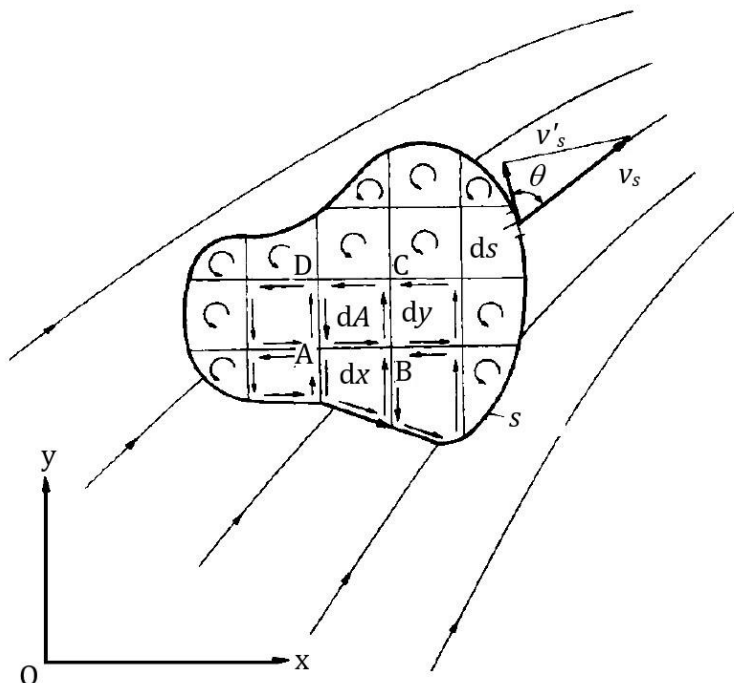
Uragani, vrtložne vodene struje i tornado (Slika 15.) poznati su primjeri prirodnih vrtloga. Iako je struktura ovih vrtloga složena, osnovna struktura ima prisilni vrtlog u svom središtu i slobodni vrtlog na njegovom obodu. Mnogi su prirodni vrtlozi ovakvog tipa [3].



Slika 15: Prikaz tornada u Sjedinjenim američkim državama [6]



Ako pretpostavimo zatvorenu krivulju  $s$  u  $x$  i  $y$  koordinatnom sustavu, kao što je prikazano na slici 16., integrirani  $v'_s$  (koji je komponenta brzine u tangencijalnom smjeru brzine  $v_s$  u određenoj točki na ovoj krivulji) duž te iste krivulje naziva se cirkulacija  $\Gamma$  [3].



Slika 16: Prikaz cirkulacije u gibanju tekućine [3]

U ovom se slučaju smjer rotacije suprotno od kazaljke sata uzima kao pozitivno. Kad se uzme da je kut između  $v_s$  i  $v'_s$  jednak  $\theta$ , onda je cirkulacija određiva preko izraza [3]:

$$\Gamma = \oint v'_s ds = \oint v_s \cos \theta ds \quad (3.12)$$

Zatim se podijeli područje okruženo zatvorenom krivuljom  $s$  u mikropodručja linijama paralelnim s osi  $x$  i  $y$ . Proučavajući cirkulaciju  $d\Gamma$  jednog takvog elementarnog pravokutnika ABCD (područje  $dA$ ), dobije se [3]:

$$d\Gamma = u dx + \left(v + \frac{\delta v}{\delta x} dx\right) dy - \left(u + \frac{\delta u}{\delta y} dy\right) dx - v dy = \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right) dx dy = \zeta dx dy = \zeta dA \quad (3.13)$$

pri čemu je  $\zeta$  dva puta veća od kutne brzine  $\omega$  rotacijskog strujanja (jednadžba (3.9)), a cirkulacija je jednaka proizvodu vrtložnosti po površini. Integrira se jednadžba za ukupno područje, a integracija sa svake strane se poništava ostavljajući samo integraciju na zatvorenoj krivulji  $s$ . Drugim riječima vrijedi sljedeće [3]:

$$\Gamma = \oint v'_s ds = \oint_A \zeta dA \quad (3.14)$$

Iz jednadžbe proizlazi da je površinski integral vrtložnosti  $\zeta$  jednak cirkulaciji. Taj je odnos uveo Stokes, a naziva se Stokesov teorem. Iz ovog otkrića, kad god nema vrtloga unutar zatvorene krivulje, tada je cirkulacija oko njega jednaka nuli. Ovaj se teorem koristi u dinamici fluida za proučavanje strujanja unutar rotora pumpi i puhala, kao i strujanja oko krila zrakoplova [3].

## 4. RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA

Računalna dinamika fluida (*eng. Computational Fluid Dynamics, CFD*) je znanost koja predviđa (numerički modelira) strujanje fluida, prijenos topline i srodnih pojava poput prijenosa mase i kemijskih reakcija, pomoću računalne (numeričke) simulacije. Koristi se numerički proces u kojem se rješavaju matematičke jednačbe. Tehnika je veoma snažna i obuhvaća široki raspon industrijskih i neindustrijskih područja primjene. Neki primjeri CFD analize jesu kod aerodinamike zrakoplova i vozila (primjena sile uzgona i opstrujavanje fluida oko vozila) te kod dizajna motora s unutarnjim izgaranjem. Proizvođači motornih vozila sada rutinski predviđaju sile trenja, strujanje zraka ispod poklopca motora i okruženje automobila s CFD-om. CFD sve više postaje vitalna komponenta u dizajnu industrijskih proizvoda i procesa. Rezultati CFD analize služe za detaljan razvoj proizvoda, rješavanje problema, konceptualne studije novih dizajna i redizajna. CFD analiza u konačnici smanjuje ukupno uloženo vrijeme i napor koji je potreban u laboratoriju, daje praktički neograničenu razinu detalja o rezultatima, te je moguće proučavati sustave u kojima su kontrolirani eksperimenti teško izvedivi ili su nemogući za izvesti u svakodnevnoj praksi.

CFD kodovi strukturirani su oko numeričkih algoritama koji mogu riješiti probleme strujanja fluida. Svi CFD kodovi sadrže tri glavna elementa: predprocesiranje (*eng. Pre-processing*), numerička rješenja (*eng. Solver*) i postprocesiranje – rezultati i obrada podataka (*eng. Post-processing*).

Prvi korak rada je predprocesiranje koje se sastoji od unošenja problema sa strujanjem u određeni CFD program pomoću sučelja prilagođenog operatoru i naknadne pretvorbe ovog ulaza u oblik pogodan za rješavanje numeričkih problema. Korisničke aktivnosti u fazi predprocesiranja uključuju definiranje ciljeva modeliranja, definiranje domene koja će se dimenzionirati, te konceptualnu izradu mreže. Dakle, u ovoj fazi modeliraju se 2D i 3D objekti, te se generira numerička mreža. Rješenje problema strujanja u vidu pojedinih fizikalnih veličina (brzina, tlak, temperatura itd.) definirano je na čvorovima unutar svake ćelije. Točnost CFD rješenja ovisi o broju ćelija u numeričkoj mreži. Općenito, što je veći broj ćelija, to je točnost rješenja određenog problema veća. Kolika će biti točnost rješenja i njegova cijena s obzirom na vrijeme izračuna i računalni hardver ovise o finoći mreže.

Drugi korak u rješavanju problema strujanja fluida je izbor i izvršavanje numeričkog rješenja (*eng. Solver Execution*) gdje se postavlja numerički model te se izračunavaju rješenja koja se analiziraju. U numeričkim tehnikama rješenja postoje četiri različita pristupa: metoda konačnih razlika (MKR), metoda konačnih volumena (MKV), metoda konačnih elemenata (MKE) i metoda temeljnog elementa (MTE). Numerički algoritam se sastoji od tri koraka. Prvo se vrši integracija vladajućih jednadžbi strujanja fluida kroz sve (konačne) kontrolne volumene domene. Nakon toga slijedi diskretizacija – pretvorba rezultirajućih integralnih jednadžbi u sustav algebarskih jednadžbi. Zadnji je korak algoritma numeričkih tehnika rješenja rješavanje algebarskih jednadžbi iterativnom metodom [3,7,8].

#### 4.1 Navier-Stokesove jednadžbe

Ove jednadžbe opisuju ponašanje Newtonovog fluida s promjenjivom gustoćom i viskoznošću. One su primjenjive na laminarne i turbulentne tokove tekućina i plinova kroz cijeli raspon brzina toka. One su osnovne jednadžbe koje svi komercijalni CFD kodovi koriste za rješavanje najopćenitijih problema Mehanike fluida. Jednadžbe Navier – Stokesa izuzetno su komplicirane i teško ih je riješiti. Moguće je pojednostaviti strujanja koja nas zanimaju budući da se mogu modelirati na način da se uzima konstantna gustoća i viskoznost fluida.

Ne ulazeći u sve pojedinosti, može se napisati jednadžba kontinuiteta i Navier-Stokesova jednadžba za slučaj konstantne gustoće i konstantne viskoznosti ( $\delta u / \delta x + \delta v / \delta y = 0$ ) [2,3]:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} \right) &= \rho f_x - \frac{\delta p}{\delta x} + \mu \left( \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\delta v}{\delta t} + u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} \right) &= \rho f_y - \frac{\delta p}{\delta y} + \mu \left( \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Iz gornjeg izraza primjećuju se tri komponente ravnoteže sile na fluid. Ova ravnoteža u vektorskom obliku se može zapisati kao [2]:

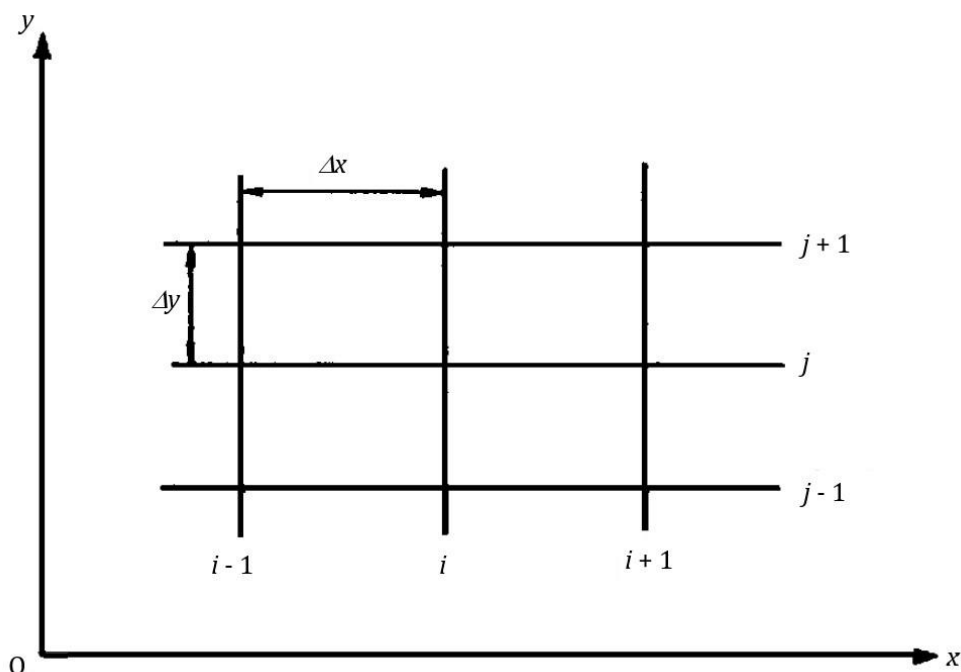
$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (4.2)$$

U jednadžbi (4.2) mogu se prepoznati inercijske sile po jedinici volumena  $\rho a = \rho(Du/Dt)$ , uravnotežene zbrojem sila koje djeluju na tijelo po jedinici volumena  $\rho f$ , tlačnim silama po jedinici volumena kao  $-\nabla p$ , i viskoznim silama po jedinici volumena  $\mu \nabla^2 u$ . Stoga je vektorska jednadžba  $\rho(Du/Dt) = \rho f - \nabla p + \mu \nabla^2 u$  još jedan način pisanja Navier-Stokesove jednadžbe za tekućinu stalne gustoće, konstantne viskoznosti [2].

## 4.2 Metoda konačnih razlika (konačnih diferencija)

### 4.2.1 Oznaka konačne razlike

Metoda konačne razlike je jedna od metoda koja se koristi za diskretizaciju jednadžbi strujanja numeričkog rješenja. Temeljna metoda za ukazivanje na djelomični diferencijalni koeficijent u obliku konačnih razlika jest kroz Taylorovo proširenje funkcija od nekoliko nezavisnih varijabli. Za primjer je pretpostavljena pravokutna numerička mreža (Slika 17.). Indeksi  $i$  i  $j$  naznačuju smjer  $x$  i  $y$  kao što je prikazano slikom. Prostorni inkrementi (koraci) mreže u smjerovima  $i$  i  $j$  su  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , a  $f$  predstavlja funkcionalni simbol [3].



Slika 17: Metoda konačnih razlika [3]

Prostor između  $i$  i  $j$  može se zapisati kao  $x_i = x_0 + i\Delta x$  u smjeru  $x$ , odnosno  $y_i = y_0 + j\Delta y$  u smjeru  $y$ . Desna, lijeva i centralna razlika diferencijalnog koeficijenta prvog reda  $\delta f / \delta x$  mogu se izazvati na način naveden u nastavku. Pod uvjetom da je funkcija  $f$  kontinuirana, te dopuštajući Taylorovo proširenje funkcija  $f_{i+1}$  i  $f_{i-1}$ , tada s obzirom na  $x$  smjer vrijedi [3]:

$$f_{i+1} = f_i + \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_i \Delta x^2 + \left. \frac{1}{6} \frac{\delta^3 f}{\delta x^3} \right|_i \Delta x^3 + \dots \quad (4.3)$$

$$f_{i-1} = f_i - \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_i \Delta x^2 - \left. \frac{1}{6} \frac{\delta^3 f}{\delta x^3} \right|_i \Delta x^3 + \dots \quad (4.4)$$

Rješavanjem jednadžbe (4.3) za  $\delta f / \delta x|_i$  dobije se [3]:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.5)$$

U jednadžbi (4.5)  $O(\Delta x)$  označava kombinaciju izraza reda  $\Delta x$ . Budući da je ova konačna razlika, izostavljajući  $O(\Delta x)$ , aproksimirana funkcionalnom vrijednošću  $f_i$  od  $x_i$  i funkcionalnom vrijednošću  $f_{i+1}$  u  $x_{i+1}$  na strani porasta u smjeru  $x$ , naziva se desna razlika. Naime ovaj pokazatelj konačne razlike ima grešku skraćanja reda  $\Delta x$  i kaže se da ima točnost prvog reda. Lijeva razlika pretpostavlja se funkcionalnom vrijednošću  $f_{i-1}$  na strani opadanja  $x$  i  $f_i$  kroz sličan postupak i dobije se [3]:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = \frac{f_{i-1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.6)$$

Rješavanjem jednadžbi (4.3) i (4.4) za  $\delta f / \delta x|_i$  te oduzimanjem jedne od druge dobije se sljedeća jednadžba:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.7)$$

Prikaz ove konačne razlike je aproksimiran funkcionalnim vrijednostima  $f_{i+1}$  i  $f_{i-1}$  s obje strane  $x_i$  i naziva se centralnom razlikom. Kao što se vidi iz (4.7), centralna razlika ima točnost drugog reda. Ova metoda prikaza primjenjiva je i na diferencijalni koeficijent za  $y$ . Nadalje, centralna razlika se za  $\delta^2 f / \delta^2 x|_i$  može dobiti zbrajanjem jednadžbi (4.3) i (4.4), te ima točnost drugog reda [3]:

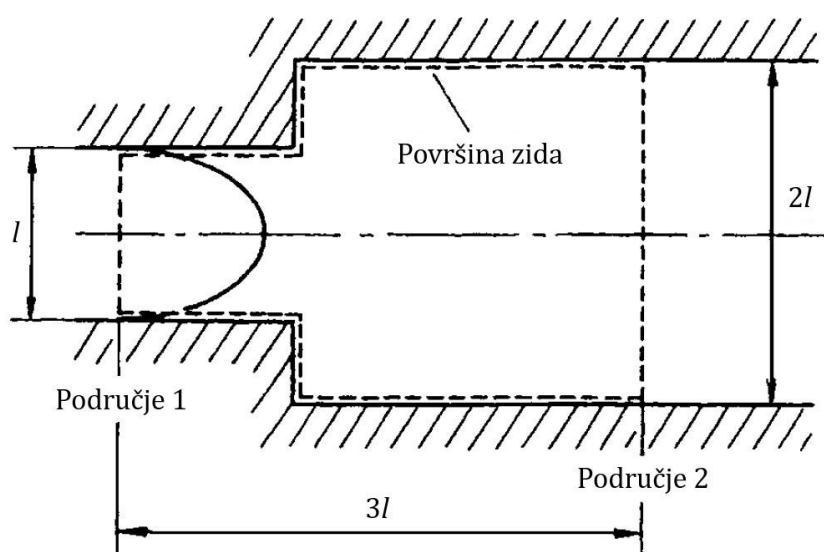
$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.8)$$

Na taj se način djelomični diferencijalni koeficijent izražava u obliku konačnih razlika kao algebarska jednačba, te se zamjenom ovih koeficijenata djelomična diferencijalna jednačba može pretvoriti u algebarsku jednačbu [3].

#### 4.2.2 Inkompresibilni fluid

##### Metoda koja koristi funkciju strujanja i vrtloga

Zadan je slučaj u kojem Navier-Stokesove jednačbe i jednačbe kontinuiteta upravljaju strujanjem. Na slici 18. uzorak strujanja je dobiven za dvodimenzionalno stacionarno strujanje inkompresibilnog i viskoznog fluida pri naglom širenju cijevi [3].



Slika 18: Strujanje fluida u naglom proširenju cijevnog sustava [3]

Ukratko, jednačba prijenosa vrtloga pokazuje da je promjena vrtloga zbog gibanja fluida jednaka difuziji vrtloga po viskoznosti. Izraz  $1/Re$  odgovara koeficijentu difuzije. Budući da manji  $Re$  znači veći koeficijent difuzije, difuzija vrtloga postaje i veća.

U slučaju stacionarnog strujanja, jednačba prijenosa vrtloga izvedena je iz Navier-Stokesove jednačbe i izražava se u bezdimenzionalnom obliku. Ona definira sljedeću jednačbu stavljanjem  $\delta\zeta/\delta t$  u jednačbu prijenosa vrtloga i dodatnim nadomještanjem odnosa  $u = \delta\psi/\delta y$  i  $v = -\delta\psi/\delta x$  ( $\psi$  je funkcija strujanja) [3]:

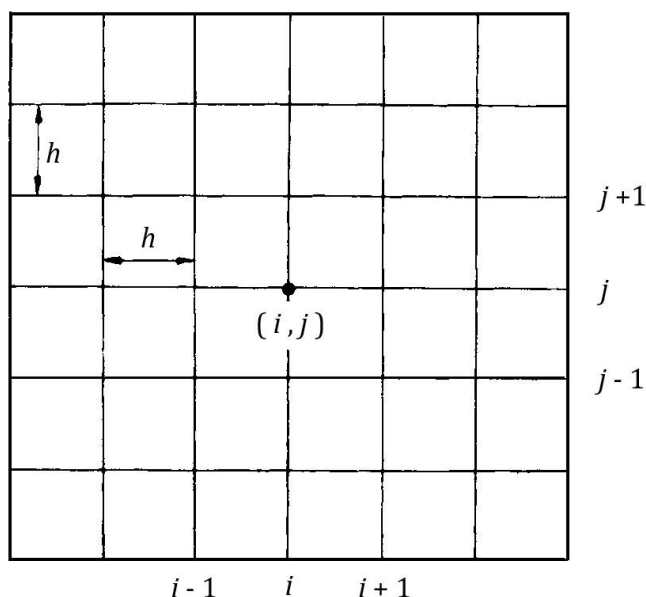
$$\frac{\delta\psi}{\delta y} \frac{\delta\zeta}{\delta x} - \frac{\delta\psi}{\delta x} \frac{\delta\zeta}{\delta y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\delta^2\zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\zeta}{\delta y^2} \right) \quad (4.9)$$

Također, jednačzba koja opisuje vrtlog (3.10) može se izraziti pomoću funkcije strujanja  $\psi$  koristeći odnos  $u = \delta\psi/\delta y$  i  $v = -\delta\psi/\delta x$ :

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = -\zeta \quad (4.10)$$

Stvarno numeričko računanje vrši se približavanjem gornjih parcijalnih jednačzbi s jednačzbbama konačnih razlika. Budući da je strujanje simetrično u odnosu na središnju liniju, u ovom je proračunu samo donja polovica cijevi računsko područje i prekrivena je paralelnom mrežom intervala  $h$  kao što je prikazano na slici 19. Koristeći jednačzbe (4.7) i (4.8) za  $\psi$  vrijedi sljedeće [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\psi}{\delta x} &\approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h} \\ \frac{\delta\psi}{\delta y} &\approx \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2h} \\ \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} &\approx \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{h^2} \\ \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} &\approx \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{h^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$



Slika 19: Mrežna rešetka i čvorovi rešetke [3]

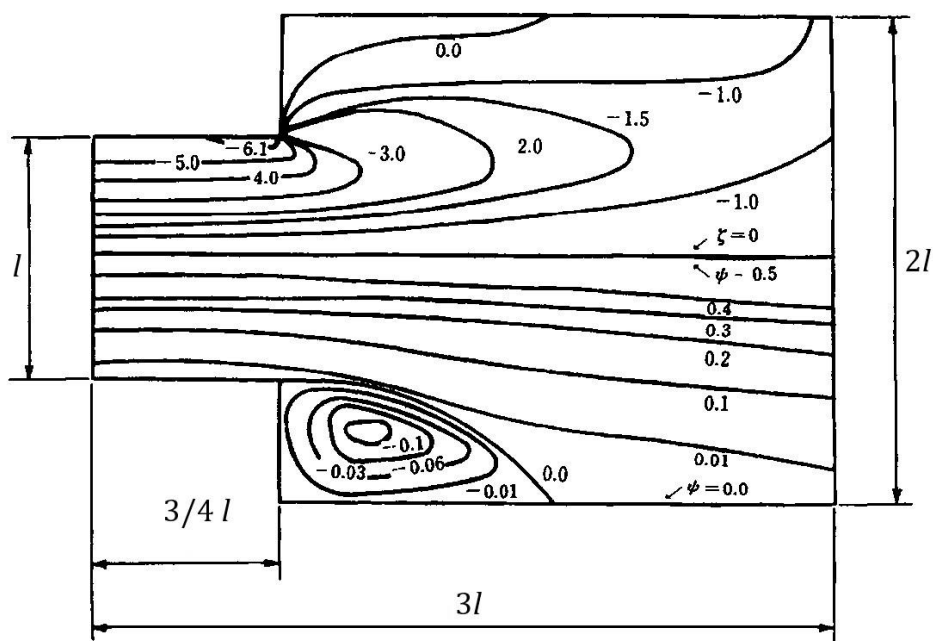
Za  $\zeta$  je dobivena slična približna jednačzba od jednačzbe (4.11). Zamjenom i stavljanjem izraza u jednačzbe (4.9) i (4.10) te preuređivanjem za  $\zeta_{ij}$  i  $\psi_{ij}$  dobije se sljedeće:

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j} = \frac{1}{4}(\zeta_{i-1,j} + \zeta_{i,j-1} + \zeta_{i+1,j} + \zeta_{i,j+1}) + \frac{Re}{16} [(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) - \\ (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j})] \end{aligned} \quad (4.12)$$



$$\psi_{i,j} = \frac{1}{4}(\psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j+1} + h^2\zeta_{i,j}) \quad (4.13)$$

Jednadžbe (4.12) i (4.13) prikazuju odnos između vrtloga  $\zeta_{ij}$ , (kao i funkcije strujanja  $\psi_{ij}$ ) u mrežnim točkama (i, j) na slici 19. i vrtloga (kao i za funkcije strujanja) u okruženju mrežnih točaka. Ukoliko su opisane za sve točke unutar mreže, dobivaju se istodobne jednadžbe. Uglavnom se takve jednadžbe rješavaju iteracijom, jer imaju mnogo nepoznanica i također su nelinearne. Drugim riječima, zamjene se dane vrijednosti graničnog stana na ulaznom djelu 1 (središnja linija i lice zida za  $\zeta$  i  $\psi$ ) u jednadžbu (4.12). Početna vrijednost za točke mreže unutar tog područja se postave na vrijednost nula. Vrijednosti  $\zeta$  i  $\psi$  će biti nove vrijednosti osim nule kada se njihove jednadžbe prvi put procjene. Postupak se ponavlja koristeći ove nove vrijednosti i vrijednost dobivenu ekstrapolacijom nepoznate granične vrijednosti na vanjskom području 2 iz vrijednosti na gornjoj unutarnjoj točki mreže. Tek kada su postignute zadovoljavajuće konvergentne vrijednosti mreže, računanje je završeno. Na slici 20. prikazane su strujnice (i u konačnici linije vrtložnosti) u cijevi dobivenim ovim postupkom pri Reynoldsovom broju  $Re=30$ . Ova metoda iteracije naziva se Gauss-Seidelova sekvencijalna iteracijska metoda. Obično se, međutim, za dobivanje stabilnog rješenja u ekonomičnom broju ponavljanja koristi metoda sukcesivne prekomjerne relaksacije (*eng. Method of successive over-relaxation, SOR*) [3].



Slika 20: Strujnice i linije vrtložnosti uslijed strujanja fluida kroz naglo proširenje u cijevnom sustavu [3]

Nadalje, kada se diskretizira lijeva strana jednadžbe (4.9) koristeći središnje razlike, teško je dobiti stabilno konvergentno rješenje za strujanje s velikim Reynoldsovim brojem. Da bi se to prevladalo, za ovu metodu konačnih razlika se najviše koristi Upwind metoda. Ta se metoda temelji na ideji da većina podataka o strujanju dolazi s gornje strane. Na primjer, ako se središnja razlika primjenjuje na prvi pojam lijeve strane  $\delta\psi/\delta y$ , a Upwind razlika (strujanje s gornje strane) na  $\delta\zeta/\delta x$ , dobivaju se sljedeće jednadžbe [3]:

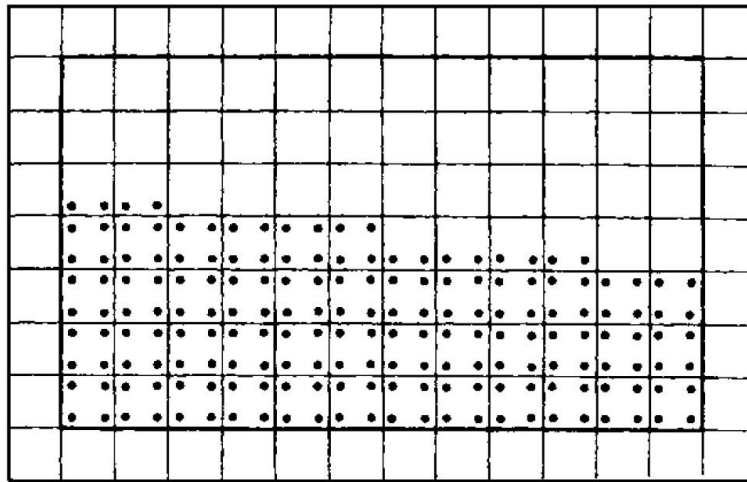
$$\frac{\delta\psi}{\delta y} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2h} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\zeta}{\delta x} &= \frac{\zeta_{i,j} - \zeta_{i-1,j}}{h} \quad (\psi_{i,j+1} \geq \psi_{i,j-1}, \text{ kada je } u_i \geq 0) \\ \frac{\delta\zeta}{\delta x} &= \frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{h} \quad (\psi_{i,j+1} < \psi_{i,j-1}, \text{ kada je } u_i < 0) \end{aligned} \quad (4.15)$$

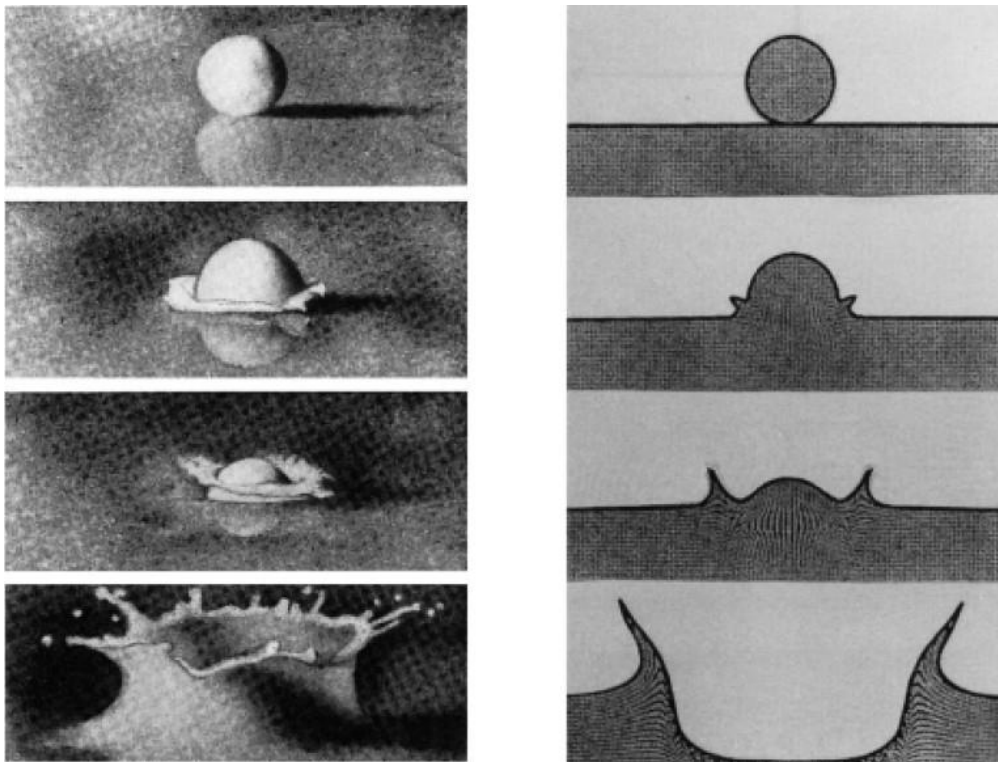
Jednadžba (4.15) je prvog reda točnosti i zato se mogu „nagomilovati“ brojčane pogreške, ponekad dovoljno snažne da rješenje bude nevažće.

### **Metoda koja koristi brzinu i tlak**

U prethodnom odlomku izračunavanje je učinjeno zamjenom brzine strujanja i tlaka funkcijom strujanja i vrtloga kako bi se smanjio broj zavisnih varijabli. Međutim, u slučaju složenog ili trodimenzionalnog toka, teško je uspostaviti funkciju strujanja na granici. U takvom slučaju, računanje se vrši tretiranjem brzine strujanja i tlaka u jednadžbi (4.1) kao zavisnih varijabli. Tipična za takve metode je MAC (*eng. Marker And Cell*) metoda, koja je razvijena kao numeričko rješenje za strujanje sa slobodnom površinom, ali je kasnije poboljšana kako bi bila primjenjiva za različita strujanja. U ranom razvoju MAC metode, markeri (koji su beztežinske čestice koje ukazuju na postojanje fluida) su stavljeni u mrežaste jedinice nazvane ćelije, kao što je prikazano na slici 21., i takve čestice su bile praćene. Jedan od primjera prikazan je na slici 22., gdje je napravljena usporedba između fotografije kada kap tekućine padne na tanki sloj tekućine i izračunatog rezultata MAC metodom [3].

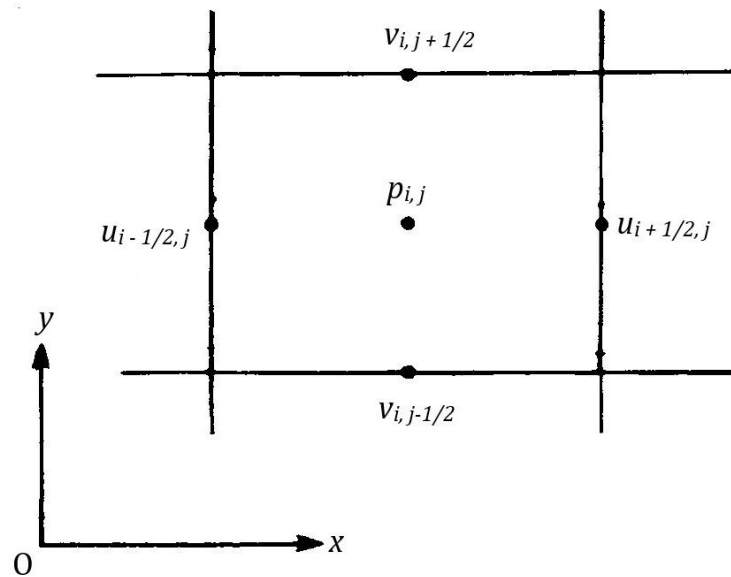


Slika 21: Izgled ćelija i markera čestica koji se koriste za računanje strujanja na nagnutoj slobodnoj površini kod MAC metode [3]



Slika 22: Kap tekućine pada na tanak sloj slobodne površine tekućine [3]

No u novije vrijeme, tehnika s varijablama brzine strujanja i tlaka koje su odvojeno smještene (koristeći razgraničenu mrežu) kao što je prikazano na slici 23. prilagođena je iz MAC metode. Marker nisu potrebni, ali se koriste samo za predstavljanje rezultata [3].



Slika 23: Raspored varijabli u MAC metodi [3]

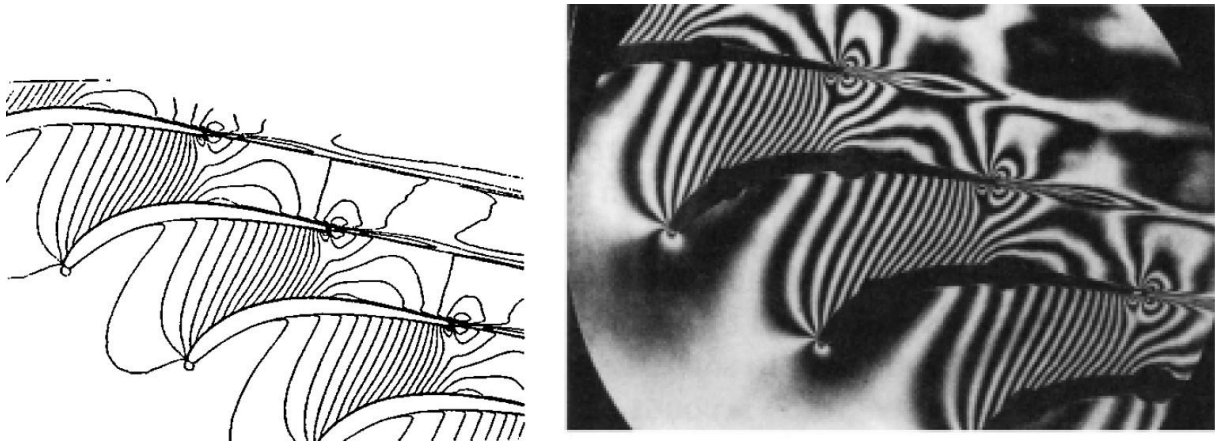
#### 4.2.3 Kompresibilni fluid

##### **Time-marching metoda**

Za fluid koji se može stlačiti mora se procijeniti jednadžba termodinamičke veličine uz jednadžbe kontinuiteta i momenta. Jednodimenzionalna izentropska strujanja i slična strujanja analitički su rješiva. Međutim, razvoj višedimenzionalnog udarnog vala može se riješiti samo numeričkim metodama. Na primjer, u MacConnack metodi, diferencijalna jednadžba je razvijena iz oblika očuvanja mase, momenta i energije, zanemarujući utjecaj viskoznosti [3,7].

Jedna od metoda koja se koristi za rješavanje kompresibilnih Navier-Stokesovih jednadžbi uzimajući u obzir viskoznost je IAF (eng. *Implicit Approximate Factorisation*) metoda koja se ponekad naziva Beam-Warming metodom. Na slici 24. primjenjuje se na kaskadu transoničnih turbina. Rješenje se proizvodi ovom metodom samo za područje u blizini kaskade turbina, dok se za ostala područja koristi metoda konačnih elemenata. Dobivaju se rezultati koji se dobro podudaraju s eksperimentalnim rezultatima. Kao primjer trodimenzionalnog slučaja, slika 24. prikazuje rezultat dobiven rješavanjem kompresibilne Navier-Stokesove jednadžbe za raspodjelu gustoće strujanja na

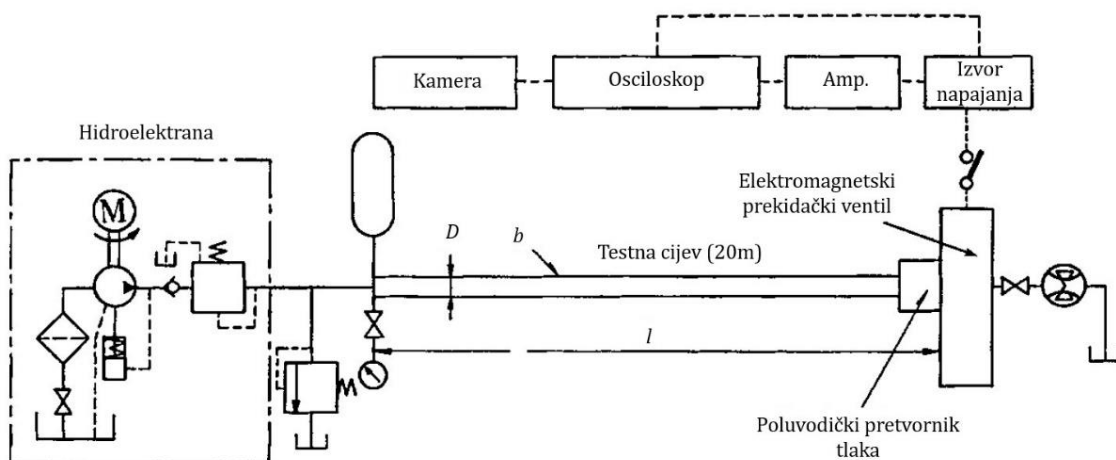
rotirajućim lopaticama ventilatora i centrifuge nadzvučnog turbo ventilatora pomoću IAF metode [3].



Slika 24: Dijagram jednakosti transonične kaskadne turbine: a) numerički model (lijevo); b) fizikalni model - eksperiment (desno) [3]

### Metoda karakteristika

Na slici 25. nalazi se eksperimentalni model za ispitivanje vodnog (hidrauličkog) udara u cijevnom sustavu pod tlakom za vodu (testna cijev) koja može izmjeriti oblik valnog odziva pomoću tlačnog pretvarača postavljenog tik iznad preklopnog ventila. Kad se prekidač ventila naglo zatvori, tlak  $p$  raste i širi se duž cijevi kao tlačni val. Da bi se dobilo njegovo numeričko rješenje, valni fenomen izražava se hiperboličkom jednažbom, a koristi se takozvana metoda karakteristika [3].



Slika 25: Uređaj za ispitivanje vodnog udara u sustavu pod tlakom [3]

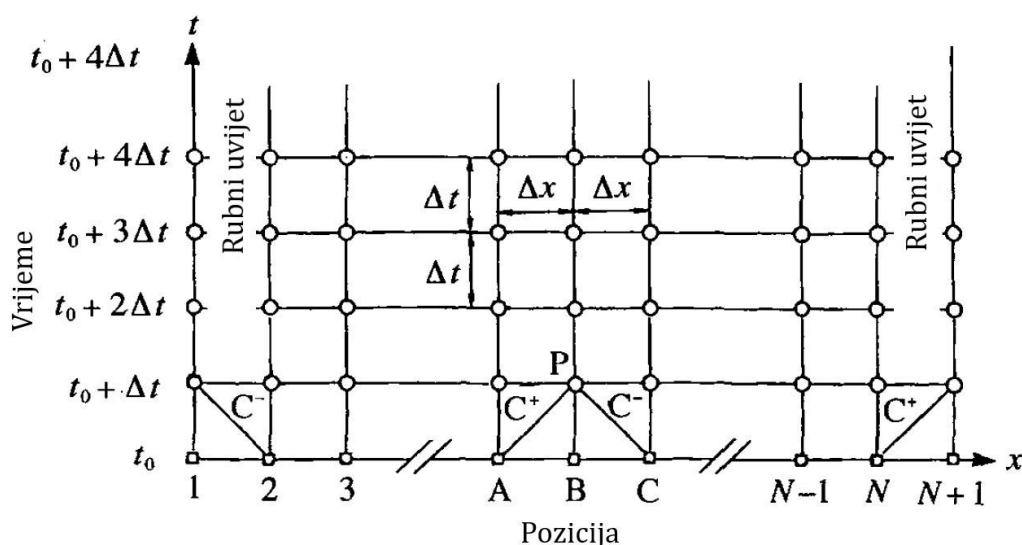
Stavljajući  $f$  kao koeficijent trenja cijevi i  $a$  kao brzinu širenja tlačnog vala, linearno se kombinira jednačba kontinuiteta, koja je jednodimenzionalna jednačba  $(\delta\rho/\delta t + \delta(\rho u)/\delta x + \delta(\rho v)/\delta y) = 0$  i jednačba (4.1), te sve skupa množeći momentnu jednačbu  $\lambda$  puta, dobije se slijedeći izraz [3]:

$$\frac{\lambda}{\rho a^2} \left[ \frac{\delta p}{\delta t} + \left( v + \frac{a^2}{\lambda} \right) \frac{\delta p}{\delta x} \right] + \left[ \frac{\delta v}{\delta t} + (v + \lambda) \frac{\delta v}{\delta x} \right] + \frac{f}{2D} v|v| = 0 \quad (4.16)$$

Ovdje se pretpostavlja da je:

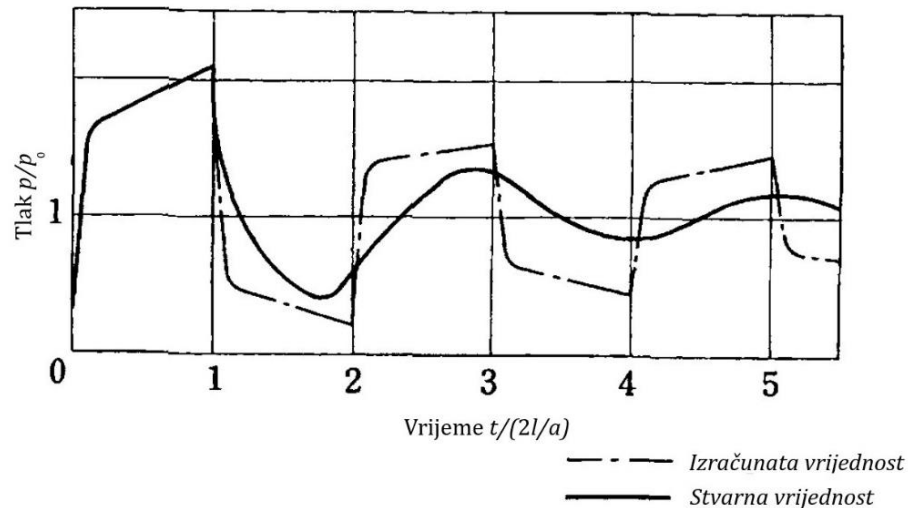
$$v + \frac{a^2}{\lambda} = \frac{dx}{dt} \quad v + \lambda = \frac{dx}{dt} \quad (\lambda = \pm a) \quad (4.17)$$

i parcijalna diferencijalna jednačba (4.16) se pretvara u običnu diferencijalnu jednačbu. Nadalje, diskretiziranjem izraza, kao što je prikazano na slici 26.,  $v$  i  $p$  točke P nakon vremenskog intervala  $\Delta t$  dobivaju se kao sjecište krivulja  $C^+$  ( $\lambda = a$ ) i  $C^-$  ( $\lambda = -a$ ) koje su izražene po jednačbi (4.17) iz početnih vrijednosti brzine  $v$  i tlaka  $p$  na A i C [3].



Slika 26:  $x$ - $t$  mreža za rješavanje jedne cijevi [3]

Na slici 27. prikazana je usporedba tako izračunatih tlačnih valova i stvarno izmjerenih vrijednosti. Razlika između njih proizlazi iz činjenice da se trenje cijevi koja ovisi o frekvenciji ne uzima u obzir u jednačbi (4.16) [3].

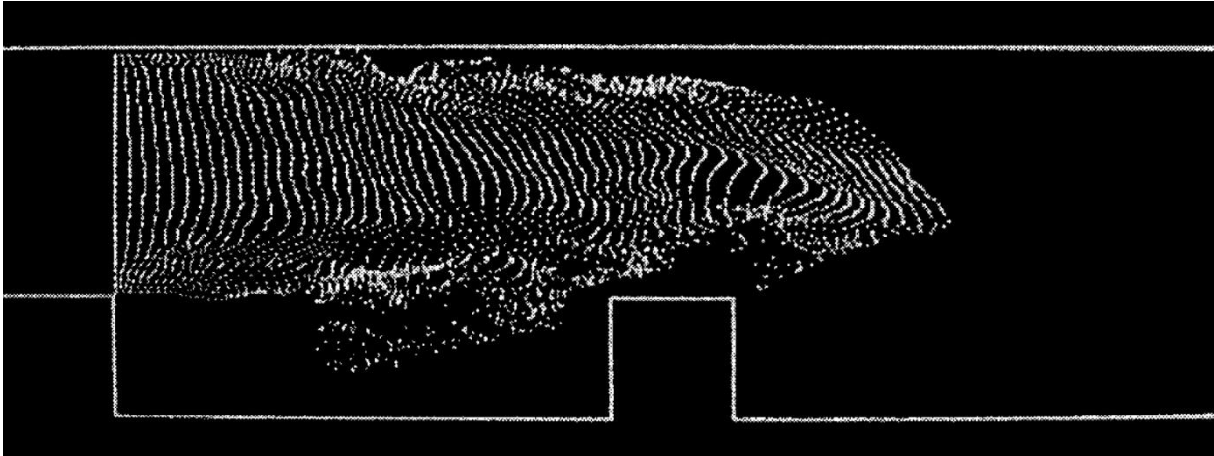


Slika 27: Usporedba izračunatih tlačnih valova i stvarno izmjenjenih vrijednosti [3]

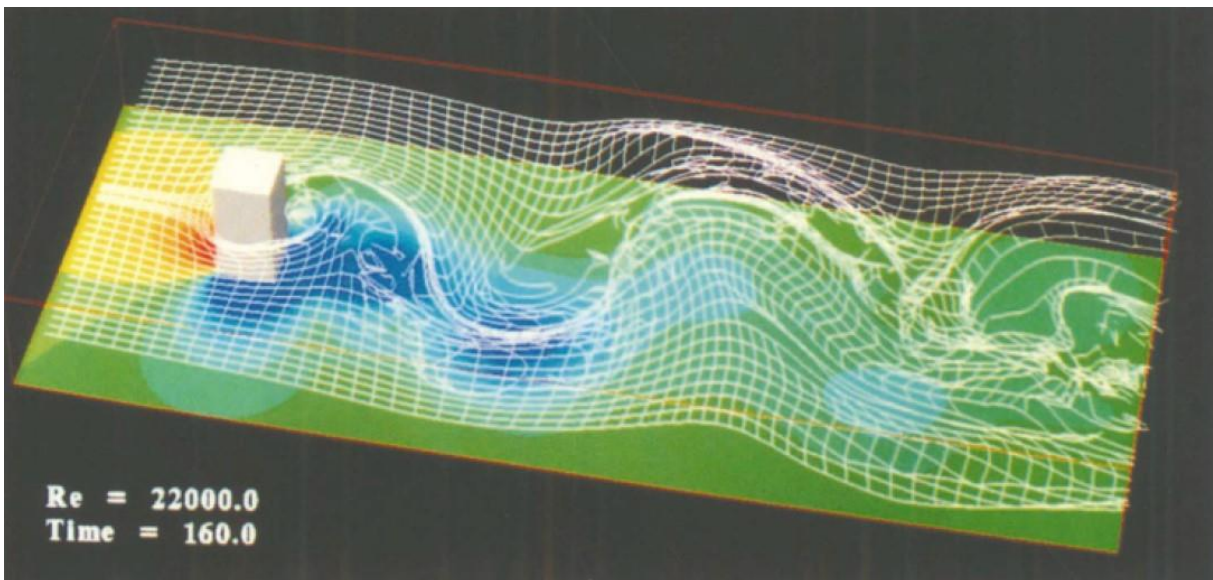
#### 4.2.4 Turbulencija i modeli turbulencije

##### **LES model turbulencije (eng. *Large Eddy Simulation*)**

U proračunima temeljenim na prosječnoj vremenskoj Navier-Stokesovoj jednadžbi koristeći modele turbulencije, vrijeme je prosječno i promjena turbulencije tretira se kao glatka. Međutim, metoda kojom se pomoću računanja može pratiti promjena u nepravilnom mijenjanju turbulencije radi razjašnjenja fizičkih pojava itd. je LES metoda. LES je metoda u kojoj se računanje vrši samo modeliranjem vrtloga koji su dovoljno mali da ostanu unutar mreže u smislu lokalne srednje vrijednosti (mrežasti srednji model), dok se veliki vrtlozi ne modeliraju, već izračunavaju onakvi kakvi jesu. Na slici 28. izračunava se turbulentno strujanje preko stepenice (kaskade) uslijed opstrujavanja fluida i grafički su prikazane strujnice u vremenu. Slika 29. prikazuje rezultate dobivene numeričkim modeliranjem za turbulentno strujanje oko pravokutnog stupa [3].



Slika 28: Turbulento strujanje preko stepenice (kaskade) [3]



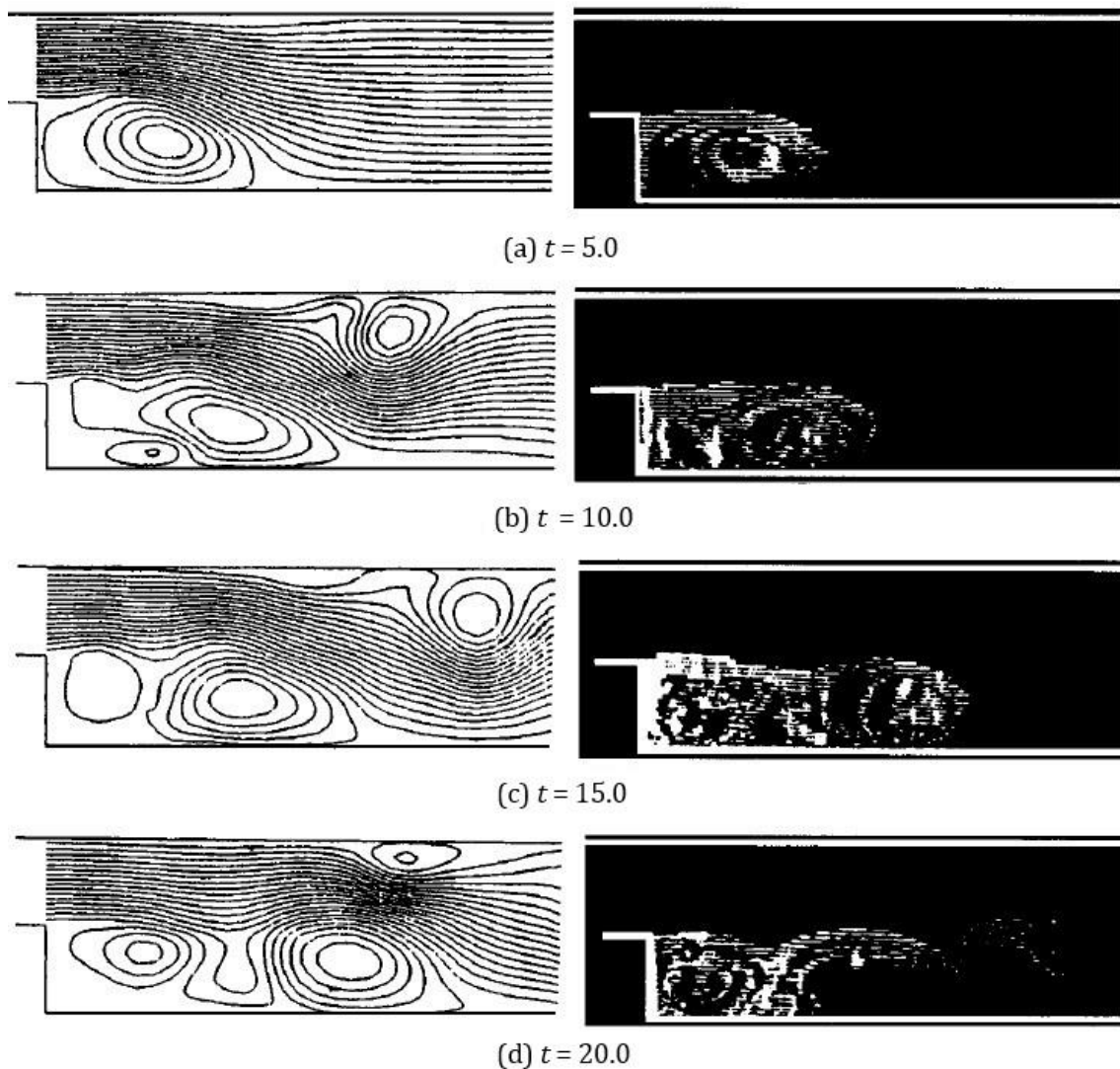
Slika 29: Turbulentno strujanje oko stepenice (kaskade) (LES model turbulencije) (*eng. time=vrijeme, Re=Reynoldsov broj*) [3]

### **Izravna simulacija**

Ako se jednačba kontinuiteta i jednačba Navier-Stokesa izračunaju izravno onakve kakve jesu, tada se turbulencija može izračunati bez korištenja modela. To se naziva izravnom simulacijom turbulencije. Čak i uz broj mrežnih točaka na posljednjem velikom računalu, mogu se naći samo veći turbulentni vrtlozi. Ipak, dobiveni su rezultati velike strukture turbulencija. Naime, ovim je metodama simulirano kretanje velikog vrtloga tako da je točnost kod Upwind sheme višeg reda dosta velika (Slika 27.). Kao jedan takav primjer, izračunata i vizualizirana strujanja iza stepenice prikazana su na slici 30. Može



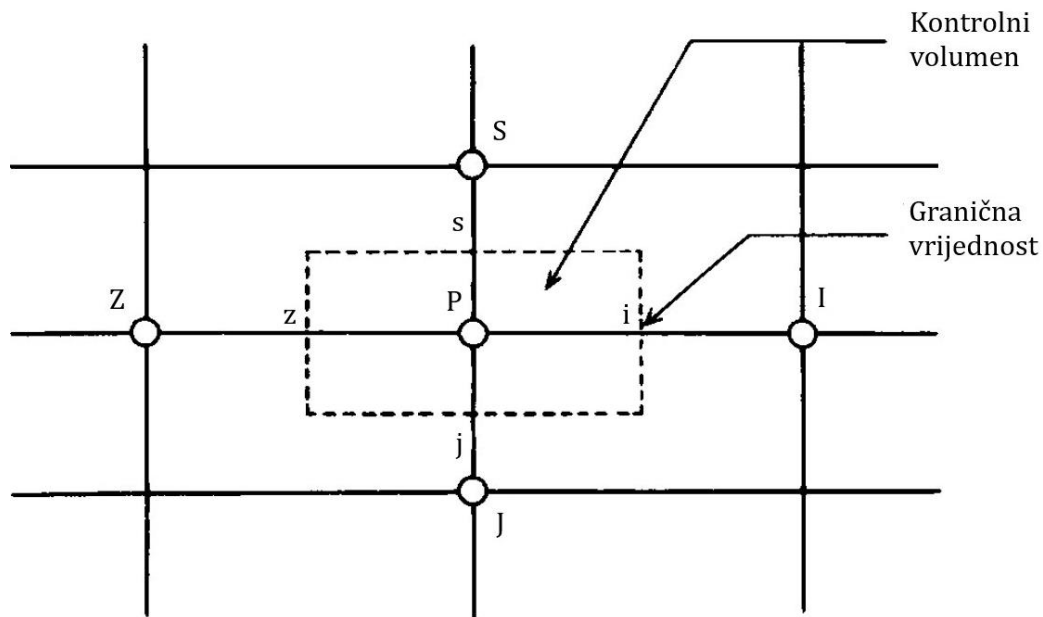
se vidjeti da je kretanje vrtloga iza kaskade (stepenice) dobro simulirano prostornim i vremenskim inkrementima u modelu [3].



Slika 30: Opstrujavanja fluida iza stepenice (kaskade) u vremenu ( $t$  u sekundama) [3]

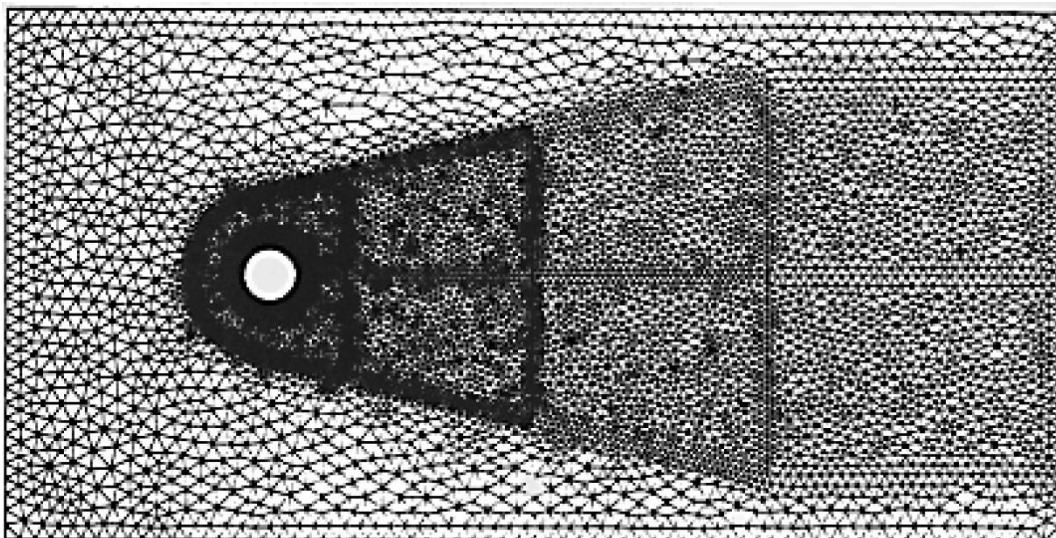
### 4.3 Metoda konačnog volumena

Metoda konačnog volumena (MKV) je tehnika kojom se u malom području (kontrolni volumen prikazan na slici 31.) diskretizira jednačina integracije jednačine kontinuiteta i Navier-Stokesove jednačine napisane u konzervativnom obliku [3].



Slika 31: Kontrolni volumen kod primjene metode konačnih volumena [3]

Granični volumeni se zatim dobivaju pomoću susjednih točaka rešetke. U prošlim primjerima rešetka je bila redovna strukturirana mreža u liniji. Međutim, kasnije je korištena i granično ugrađena rešetka koja slijedi nakon nepravilne granice ili nestrukturirane mreže. U metodi konačnog volumena ove se nove rešetke lakše primjenjuju. Primjena ovih tehnika na nestrukturiranu rešetku trokuta, strujanje oko stupa, mrežu i proračunsku vektorsku shemu raspodjele tlaka i brzine prikazani su na slici 32. [3].



Slika 32: Nestrukturirana rešetka u primjeni metode konačnih volumena [3]

Kao primjer slijedi razvijanje metode konačnog volumena koja se temelji na integraciji regulacijskog volumena razmatranjem najjednostavnijeg transportnog procesa: čista difuzija u stacionarnom stanju. Jednadžba (4.18) je tzv. transportna jednadžba za svojstvo  $\phi$  (difuzni tok) te se koristi kao polazna točka za računске postupke u metodi konačnog volumena [7].

$$\frac{\delta(\rho\phi)}{\delta t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (4.18)$$

Jednadžba jasno naglašava različite transportne procese: termin promjene i konvektivni izraz na lijevoj strani, te difuzni pojam ( $\Gamma$  = koeficijent difuzije) i termin izvora s desne strane. Vladajuća jednadžba stalne difuzije može se lako izvesti iz opće transportne jednadžbe (4.18) za svojstvo  $\phi$  brisanjem prolaznih i konvektivnih izraza [7]:

$$\text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi = 0 \quad (4.19)$$

Integracija kontrolnog volumena, koja tvori ključni korak metode konačnog volumena koji ga razlikuje od svih ostalih CFD tehnika, daje sljedeći oblik (CV – kontrolni volumen) [7]:

$$\int_{cv} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV + \int_{cv} S_\phi dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{cv} S_\phi dV = 0 \quad (4.20)$$

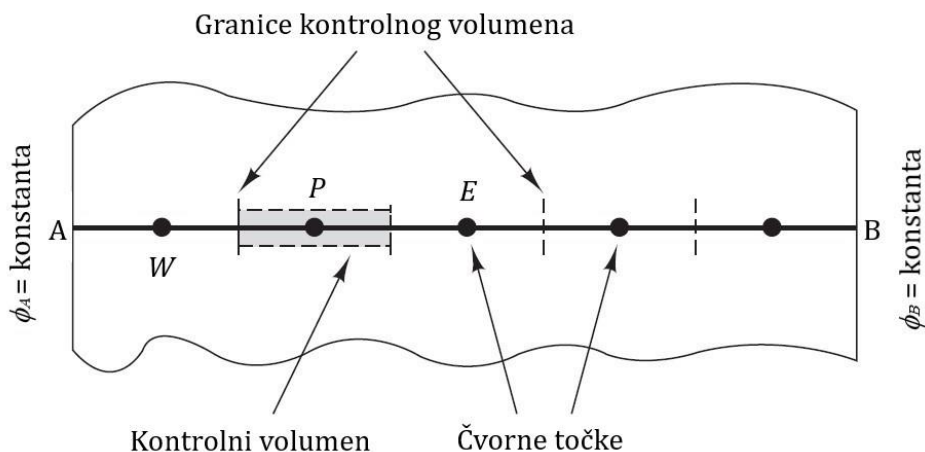
Radom s jednodimenzionalnom jednadžbom difuzije u stacionarnom stanju uvode se aproksimacijske tehnike potrebne za dobivanje tzv. diskretnih jednadžbi. Metoda se još proširuje na dvodimenzionalne i trodimenzionalne probleme difuzije [7].

#### 4.3.1 Metoda konačnog volumena za jednodimenzionalnu difuziju u stacionarnom stanju

Razmatra se difuzija u stacionarnom režimu svojstva  $\phi$  u jednodimenzionalnoj domeni definiranoj na slici 33. Cjelokupni fizikalni proces se može opisati kao:

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.21)$$

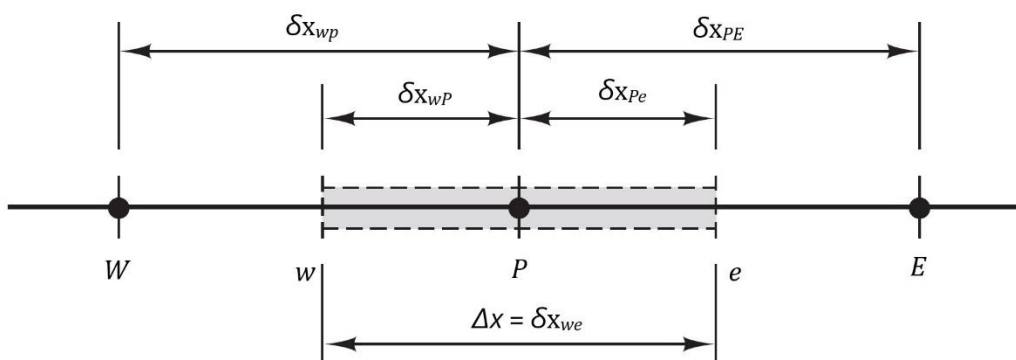
gdje je  $\Gamma$  koeficijent difuzije, a  $S$  izvor. Propisane su granične vrijednosti  $\phi$  u točkama A i B.



Slika 33: Granice kontrolnog volumena [7]

### Korak 1: Stvaranje rešetke

Prvi korak u metodi konačnog volumena je podijeliti domenu na diskretne kontrolne volumene. Slijedi postavljanje nekoliko čvornih točaka u prostor između A i B. Granice (ili plohe) kontrolnih volumena smještene su na sredini puta između susjednih čvorova. Tako je svaki čvor okružen kontrolnim volumenom ili ćelijom. Uobičajena je praksa postavljanje kontrolnih volumena blizu ruba domene na način da se fizičke granice podudaraju s granicama kontrolnog volumena. Slika 34. prikazuje uobičajen sustav obilježavanja unutar CFD-a [7].



Slika 34: Obilježavanje volumena unutar CFD-a [7]

Opću čvornu točku identificiraju  $P$  i njezini susjedi u jednodimenzionalnoj geometriji. Čvorovi prema zapadu i istoku identificiraju se sa  $W$  (eng. *west*) i  $E$  (eng. *east*). Zapadna strana kontrolnog volumena označava se  $w$ , a istočna strana sa  $e$ . Udaljenosti između čvorova  $W$  i  $P$ , te između čvorova  $P$  i  $E$ , označavaju se s  $\delta x_{WP}$  i  $\delta x_{PE}$ . Na sličan način

udaljenost između plohe  $w$  i točke  $P$  te između  $P$  i plohe  $e$  označena je s  $\delta x_{wP}$ , odnosno  $\delta x_{Pe}$ . Na slici 34. je prikazano da je širina kontrolnog volumena  $\Delta x = \delta x_{we}$  [7].

Korak 2: Diskretizacija

Ključni korak metode konačnog volumena je integracija vladajuće jednadžbe preko kontrolnog volumena kako bi se dobila diskretizirana jednadžba u njenoj čvornoj točki  $P$ . Za prethodno definirani kontrolni volumen vrijedi [7]:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4.22)$$

Ovdje je  $A$  područje poprečnog presjeka stranice kontrolnog volumena,  $\Delta V$  je volumen, a  $\bar{S}$  prosječna vrijednost izvora  $S$  u odnosu na kontrolni volumen. Upečatljivo je obilježje metode konačnog volumena da diskretna jednadžba ima jasnu fizičku interpretaciju. Jednadžba (4.22) se može opisati na način da je difuzni tok  $\phi$  koji napušta istočnu stranu minus difuzni tok  $\phi$  koji ulazi u zapadno lice jednak generiranju  $\phi$ , to jest, predstavlja jednadžbu ravnoteže za  $\phi$  preko kontrolnog volumena.

Da bi se dobili korisni oblici diskretnih jednadžbi potrebni su koeficijent difuzije  $\Gamma$  i gradijent  $d\phi / dx$  na istoku ( $e$ ) i zapadu ( $w$ ). Slijedom dobro utvrđene prakse, vrijednosti svojstva  $\phi$  i koeficijent difuzije definiraju se i procjenjuju u čvornim točkama. Za izračunavanje gradijenata na kontrolnom volumenu koristi se približna raspodjela svojstava između čvornih točaka. Linearne aproksimacije su očit i najjednostavniji način izračunavanja vrijednosti koeficijenata difuzije i gradijenata. Ta se praksa naziva centralnim razlikovanjem. U jednoličnoj rešetki linearno interpolirane vrijednosti za  $\Gamma_w$  i  $\Gamma_e$  su izražene od [7]:

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2} \quad (4.23)$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \quad (4.24)$$

a difuzijski se odnosi toka procjenjuju kao:

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (4.25)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) \quad (4.26)$$

U praktičnim situacijama, termin izvora  $S$  može biti funkcija ovisne varijable. U takvim slučajevima, metoda konačnog volumena aproksimira izvorni pojam pomoću linearnog oblika [7]:

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p \phi_P \quad (4.27)$$

Zamjena jednadžbi (4.25), (4.26) i (4.27) u jednadžbu (4.22) daje:

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \quad (4.28)$$

Jednadžba (4.28) se može preurediti u oblik:

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p\right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) \phi_E + S_u \quad (4.29)$$

Identificiranjem koeficijenata  $\phi_W$  i  $\phi_E$  u jednadžbi (4.29) kao  $a_W$  i  $a_E$ , a koeficijent  $\phi_P$  kao  $a_P$ , gornja jednadžba može se zapisati kao:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (4.30)$$

Vrijednosti  $S_u$  i  $S_p$  mogu se dobiti iz izvornog modela (4.27):  $\bar{S}\Delta V = S_u + S_p \phi_P$ . Jednadžbe (4.30) i (4.27) predstavljaju diskretizirani oblik jednadžbe (4.19). Ova vrsta diskretizirane jednadžbe središnja je točka svih daljnjih razvoja [7].

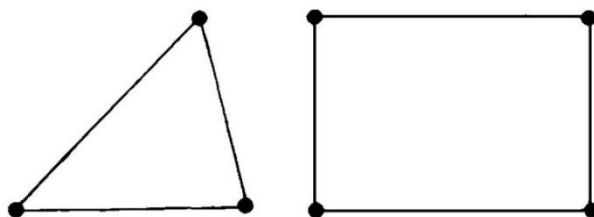
Korak 3: Rješenja jednadžbi

Diskretizirane jednadžbe izraza (4.30) moraju se postaviti u svaku od čvornih točaka kako bi se riješio problem. Za kontrolne volumene koji su susjedi granicama domene opća diskretna jednadžba (4.30) je modificirana da uključi granične uvjete. Rezultirajući sustav linearnih algebarskih jednadžbi rješava se kako bi se dobila raspodjela svojstva  $\phi$  u čvornim točkama. Postoji više metoda matričnih rješenja koje su posebno dimenzionirane za CFD postupke [7].

## 4.4 Metoda konačnih elemenata

### 4.4.1 Podjela elemenata

Metoda konačnih razlika je matematička metoda kojom se diferencijalni račun koji se pojavljuje u vladajućoj jednačbi izravno aproksimira jednačbama konačnih razlika. Međutim, u metodi konačnih elemenata, koristeći fizičke aproksimacije za diskretizaciju diferencijalnih jednačbi, razvijaju se istovremeno algebarske jednačbe za čitave elemente. Tako se dobiva približno rješenje diferencijalnih jednačbi koje zadovoljavaju granične uvjete. Područje strujanja je podijeljeno u pravokutnu mrežu u metodi konačnih razlika. Međutim, metodom konačnih elemenata dijeljenjem područja na trokutaste ili četverokutne elemente pravilne veličine, kao što je prikazano na slici 35., može se obraditi bilo koje područje složenog oblika. Rubovi trokuta ili četverokuta nazivaju se čvornim točkama u kojima su definirane takve varijable poput  $x, y, u, v$  i  $p$  [3].



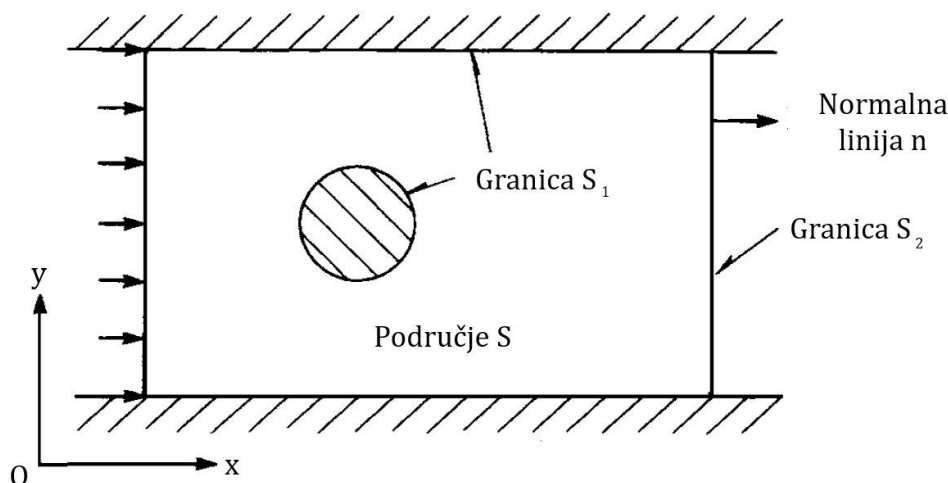
Slika 35: Dvodimenzionalni elementi u metodi konačnih elemenata [3]

### 4.4.2 Metoda ponderiranih (težinskih) ostataka

Za diskretizaciju metodom konačnih elemenata koristi se varijacijski princip ili metoda ponderiranih ostataka. Načelo varijacije naziva se i princip minimalne energije, koji koristi princip da je potencijalna energija minimalna u stanju ravnoteže. Kako ova metoda ima ograničenu primjenu, metoda ponderiranih ostataka široko se koristi. Razmotreno je potencijalno strujanje oko cilindra smještenog između ravnih ploča kako je prikazano na slici 36 [3].

$$\left. \begin{array}{l} \text{U području } S \text{ koje sadrži fluid} \quad \frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} = 0 \\ \text{Na ulazu i na površini zida } S_1 \quad \psi = \bar{\psi} \\ \text{Na izlazu } S_2 \text{ koji je slobodna granica} \quad \frac{\delta \psi}{\delta n} = \frac{\delta \bar{\psi}}{\delta n} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

gdje oznake crtica iznad pojedina fizikalne veličine označavaju da su primjenjive vrijednosti one na granici.



Slika 36: Strujanje fluida oko cilindra [3]

Nadalje, da bi se dobila funkcija strujanja  $\psi$ , svako se područje u jednadžbi (4.31) množi sa funkcijom  $\psi^*$  (na granici  $S_1$  množimo sa zadanom funkcijom koja je  $\psi^*=0$ ). Zatim se vrši integracija cijelog područja, te se dobije sljedeća jednadžba [3]:

$$\int_S \left( \frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} \right) \psi^* dA + \int_{S_2} \left( \frac{\delta \psi}{\delta n} - \frac{\delta \psi}{\delta n} \right) \psi^* dS = 0 \quad (4.32)$$

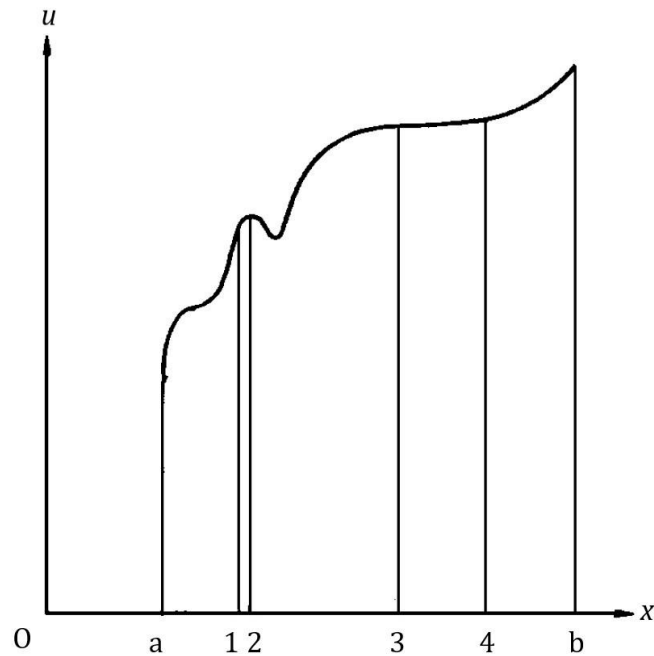
Ovdje se funkcija  $\psi^*$  naziva funkcijom ponderiranja. U jednadžbi (4.32) pretpostavimo da su funkcija  $\psi^*$  i njegov derivat  $\delta\psi/\delta n$  približne vrijednosti. Prvi pojam na lijevoj strani izražava količinu dobivenu množenjem pogreške diferencijalne jednadžbe na području (ovdje nazvanom zaostatak) s zadanom funkcijom i integriranjem za cijelo područje. Isto tako, drugi pojam izražava količinu dobivenu primjenom sličnog postupka na ostatak na granici  $S_2$ . To se naziva izraz ponderiranog ostatka. Kad se dobije ispravno rješenje, ova jednadžba vrijedi strogo za zadanu funkciju  $\psi^*$ . Približno rješenje koje distribuira grešku radi zadovoljavanja funkcije  $\psi^* = 0$  naziva se metodom ponderiranih ostataka [3].

#### 4.4.3 Interpolacijska funkcija

U metodi konačnih elemenata poboljšanje se postiže primjenom algebarske jednadžbe dobivene korištenjem vrijednosti u čvornim točkama za približavanje nepoznanica u svakom elementu. Ova jednadžba naziva se interpolirajuća funkcija. Ako se odabere jednaka funkcija istog tipa, ona se naziva Galerkinova metoda. Nije lako dobiti približnu funkciju koja je učinkovita u svim odjeljcima  $[a, b]$  za jednodimenzionalnu funkciju  $\psi = \psi(x)$  prikazanu na slici 37. Ipak, odjeljak  $[a, b]$  se može podijeliti u velike i male linearne

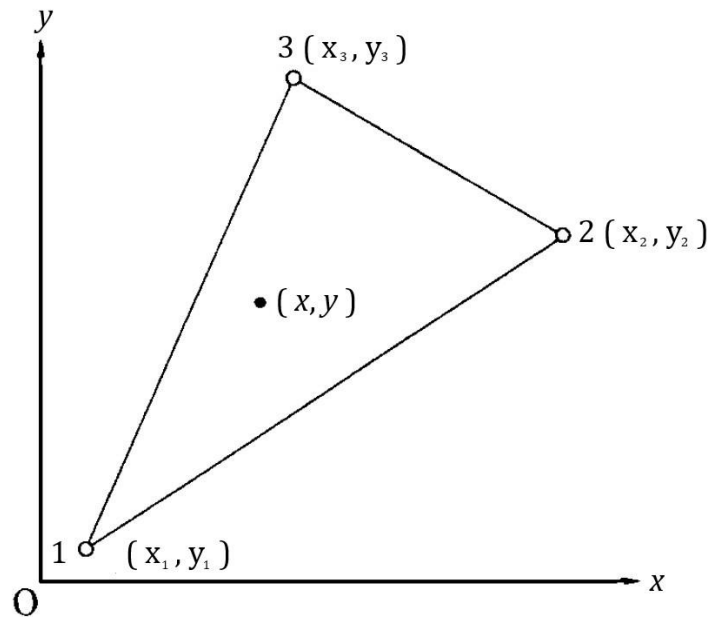


elemente. Na primjer, podijeli se pododjeljak gdje se funkcija naglo mijenja u (1,2), a pododjeljak blage promjene se podijeli na (3,4). Tada se za svaki od njih  $\psi$  može izraziti jednodimenzionalnom (linearnom) funkcijom [3].



Slika 37: Jednodimenzionalna interpolacijska funkcija u metodi konačnih elemenata [3]

U dvodimenzionalnom slučaju, kao što je prikazano na slici 38., pomoću trokutastih elemenata njihova se veličina može odrediti do te mjere da su funkcije izražene jednodimenzionalnom funkcijom koordinata prema tome kako se naglo ili blago očekuje promjena funkcije [3].



Slika 38: Trokutasti element u dvodimenzionalnom slučaju [3]

Drugim riječima:

$$\psi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4.33)$$

Ako se pretpostavi da su vrijednosti funkcija u kutevima trokuta 1, 2 i 3 jednake  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  i  $\psi_3$ , tada vrijedi sljedeće [3]:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Iz gornjeg izraza:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Zamjenom jednadžbe (4.35) u jednadžbu (4.33) dobije se:

$$\psi = \phi_1 \psi_1 + \phi_2 \psi_2 + \phi_3 \psi_3 = \sum_{i=1}^3 \phi_i \psi_i \quad (4.36)$$

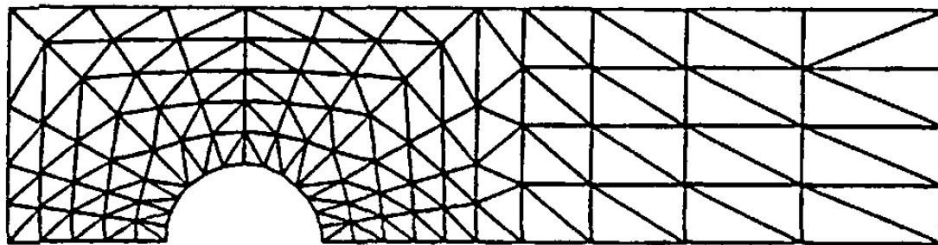
Drugim riječima,  $\psi$  je interpolacijska funkcija izražena kao linearna kombinacija čvornih vrijednosti  $\psi_i$ :

$$\phi_i = a_i + b_i x + c_i y \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.37)$$

Jednadžba (4.37) naziva se funkcija oblika, a  $a_i$ ,  $b_i$ , i  $c_i$  su određeni koordinatama čvornih točaka [3].

#### 4.4.4 Primjenjivi slučajevi

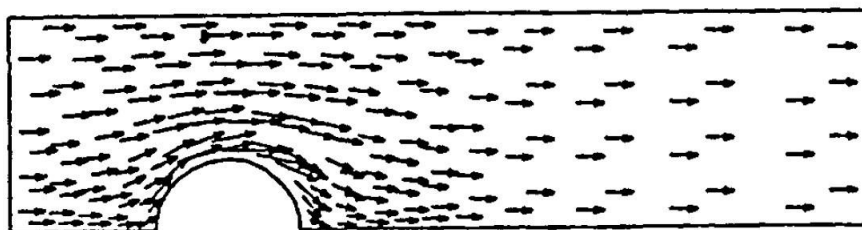
Da bi se izračunalo strujanje prikazano na slici 36., budući da je to simetrično strujanje, samo gornja polovica strujanja podijeljena je na velike i male trokutaste elemente kao što je prikazano na slici 39. Za metodu konačnih elemenata dovoljno je, za razliku od metode konačnih razlika, samo što bolje podijeliti dio oko cilindra oko kojeg fluid struji, gdje se brzina naglo mijenja (na mjestima očekivanih većih brzina numeričku mrežu treba progustiti). Izračunato strujanje i vektor brzine prikazani su na slici 40. [3].



Slika 39: Numerička mreža kreirana trokutastim elementima pri strujanju fluida oko cilindričnog tijela (180 elemenata i 115 čvorova) [3]



(a)



(b)

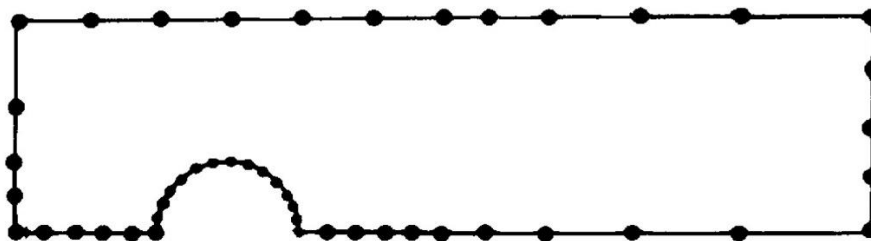
Slika 40: Strujanje fluida oko cilindričnog tijela: (a) prikaz strujnicama; (b) prikaz vektorima brzina [3]

#### 4.5 Metoda graničnog elementa

Umjesto da se riješi jednačba razlike koja upravlja kretanjem fluida u zadanim graničnim uvjetima, metoda graničnog elementa koristi integralnu jednačbu koja mora zadovoljiti vrijednosti na granici. Za dobivanje integralne jednačbe može se koristiti metoda korištenjem Greenove formule i metoda ponderiranih ostataka. Greenova metoda formule dugo se koristi za analizu potencijalnog strujanja, a u novije vrijeme sistematizirana je kao "panel metoda", koja se koristi za analizu vanjskih protoka oko zrakoplova, automobila i sl. Brebbia je dobio jednačbu općenitijom metodom ponderiranih ostataka sa širom primjenjivosti, a nazvali su je metodom graničnih elemenata. Često se uspoređuje s metodom konačnih elemenata i koristi se u mnogim područjima primjene. U ovoj metodi je funkcija ponderiranja u metodi ponderiranih ostataka odabrana tako da zadovoljava Laplaceovu jednačbu (4.31) unutar područja  $S$  i pretvorena je u integralnu jednačbu na granici  $S_2$  koja okružuje područje kao što je prikazano sljedećom jednačbom [3]:

$$\int_{S_2} \psi^* \frac{\delta\psi}{\delta n} dS - \int_{S_2} \psi \frac{\delta\psi^*}{\delta n} dS = 0 \quad (4.38)$$

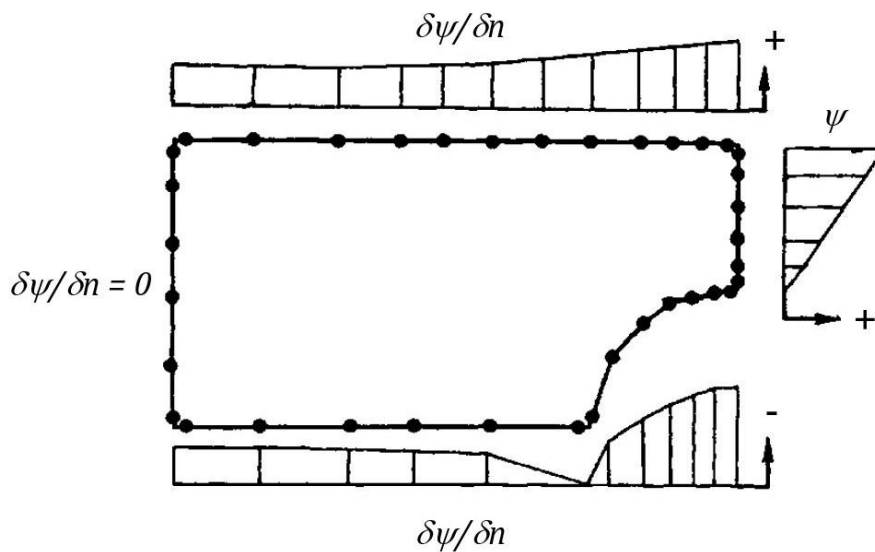
Zatim se granica dijeli na niz elemenata linijskog segmenta. Na primjer, u slučaju strujanja prikazanog na slici 39, mreža podjele je prikazana na slici 41. Zatim se vrijednost u određenoj točki elementa izražava u vrijednosti čvorne točke interpolacijskom jednačbom (4.36) u metodi konačnih elemenata. Tada se može riješiti istodobna linearna jednačba za vrijednost u čvornim točkama [3].



Slika 41: Izrada numeričke mreže metodom graničnih elemenata pri strujanju fluida oko cilindričnog tijela [3]

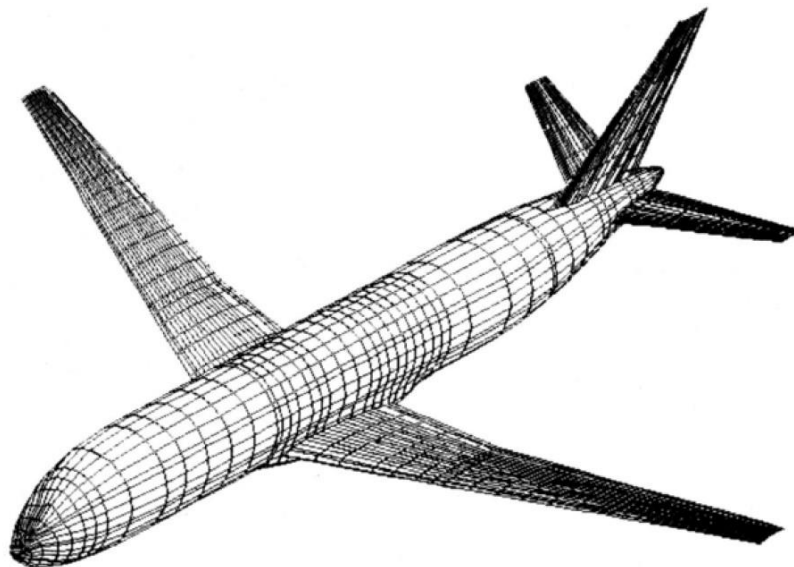
Računski rezultat za slučaj sa slike 41. prikazan je na slici 42. Ovdje  $\delta\psi/\delta n$  izražava brzinu strujanja duž granice. Budući da metoda graničnog elemenata zahtijeva samo

podjelu granice područja u elemente, popularna je u slučajevima kada je potrebno postići brzinu ili raspodjelu tlaka na površini tijela [3].



Slika 42: Rješenje problema metodom graničnog elementa [3]

Slika 42. prikazuje numeričku mrežu za slučaj strujanja fluida oko punog modela transoničnog zrakoplova primjenom metode ploče.



Slika 42: Numerička mreža za računanje strujanja fluida oko punog modela transoničnog zrakoplova primjenom metode ploče [3]

## **5. METODE VIZUALIZACIJE STRUJANJA TEKUĆINE**

Vizualizacija strujanja može se koristiti za razumijevanje i optimiziranje dizajna uređaja koji uključuju strujanja tekućina i plinova. Golim okom je vidljivo strujanje vode ali ne i strujnice ili raspodjela brzine. Konsolidirana znanost koja analizira ponašanje fluida nevidljivog za oko, te analizira hidrodinamička i aerodinamička strujanja u vidu konačnih slika naziva se „vizualizacija strujanja“. Analitička istraživanja koja su pokušavala razjasniti dosadašnja nejasna strujanja i razvojna istraživanja strujanja u strojevima i oko njih uvelike su bile od pomoći od ove znanosti. Velika otkrića u području zakona sličnosti su napravljena vizualizacijom strujanja prije otprilike jednog stoljeća do kojega je došao irski znanstvenik Osborne Reynolds. U moderno vrijeme, napretkom superračunala, upotreba metode vizualizacije strujanja fluida poboljšana je obradom slika. Također, računalno potpomognuta vizualizacija strujanja (*eng. Computer-Aided Flow Visualisation, CAFV*), koja prikazuje slike numeričkih računanja i izmjerenih rezultata, bilježi veliki napredak [3].

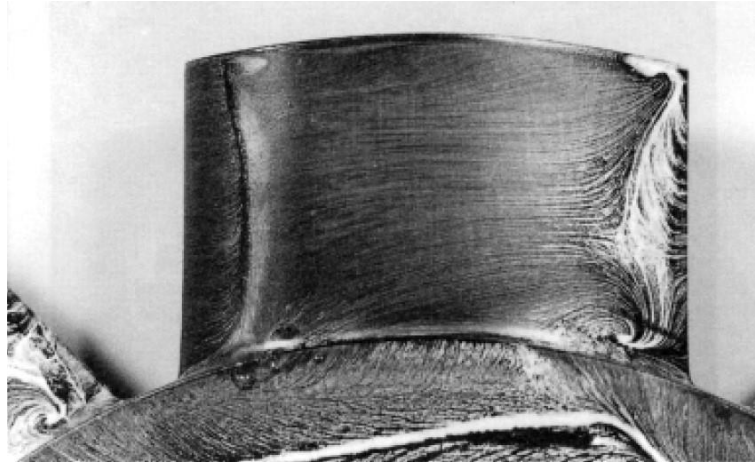
### **5.1 Klasifikacija tehnika za vizualizaciju strujanja tekućine**

Tehnike vizualizacije grubo su podijeljene na eksperimentalne metode i računalno potpomognute metode vizualizacije. U nastavku rada govorit će se nešto više o istim tehnikama.

### **5.2 Eksperimentalne metode vizualizacije**

#### **5.2.1 Wall-tracing metoda (*eng. Wall-tracing method*)**

Metoda sa uljnim filmom (*eng. Oil-film method*), tipična za ovu tehniku, odavno se koristi, pa je tehnika dobro uspostavljena. Mnogo je primjena ove metode te se koristi za strujanje vode i zraka. Promatra se strujanje u blizini površine tijela, strujanje zida u unutrašnjosti strojeva, itd. Na slici 43. prikazan je tanak sloj ulja na površini lopatice Wellsove turbine za proizvodnju valova. Iz tog se uzorka može nadgledati priroda unutrašnjeg strujanja [3,7,8].



Slika 43: Ograničavanje strujnica Wellsove turbine za proizvodnju valova (smjer okretanja je suprotan kazaljki na satu) u vodi, brzina strujanja 3,2 m/s, kut strujanja fluida 11° [3]

#### 5.2.2 Tuft metoda (*eng. Tuft method*)

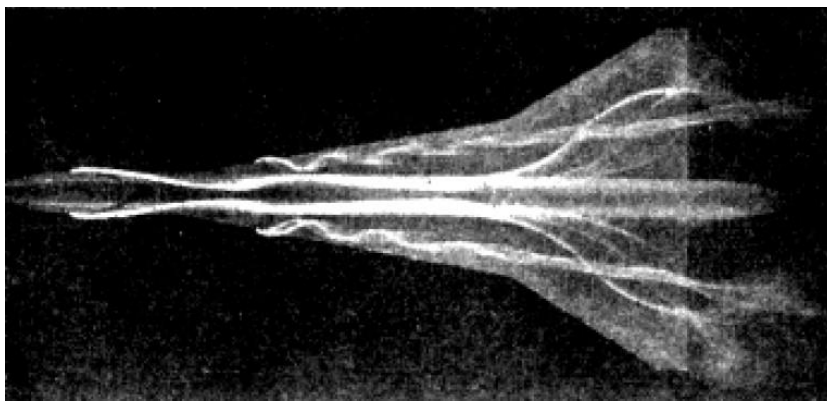
Iako je ovo neodređena metoda koja se već neko vrijeme široko koristi za eksperimente s fluidima, nedavno je postala jednostavnija i informativnija jer su napravljeni detaljni eksperimenti i analize statičkih i dinamičkih karakteristika. Tuft metoda se može usko povezati sa samim pojmom „tufta“ koji definira mali skup izduženih fleksibilnih izdanaka pričvršćenih ili zbijenih zajedno u bazi i slobodnih na suprotnim krajevima. Koristi se za vizualizaciju strujanja u blizini površina i oko površina zrakoplova, trupa i automobila, unutarnjih strujanja crpki i puhala i ventilacije u prostorijama. Na slici 44. prikazan je primjer vizualiziranog strujanja fluida oko automobila koristeći tuft metodu.



Slika 44: Strujanje fluida oko automobila (površinska „tuft“ metoda) [9]

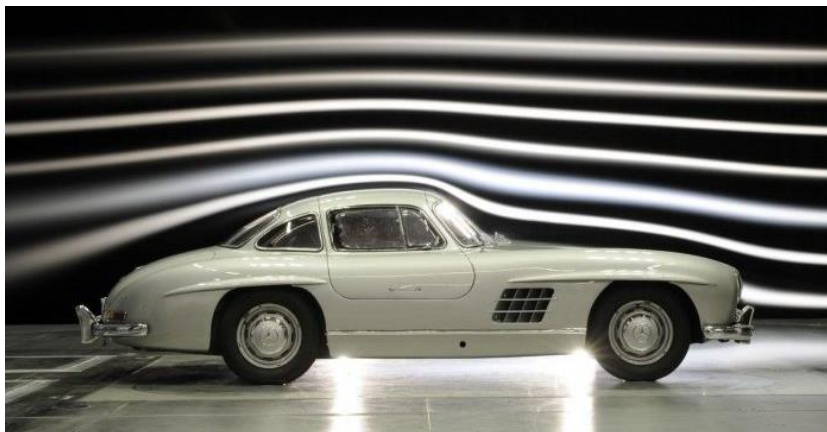
### 5.2.3 Metoda praćenja ubrizgavanjem (*eng. Injection tracer method*)

Za strujanje vode već se dugo koristi metoda traga u boji. U metodi suspenzije koristi se aluminijski prah ili čestice polistirena, dok se u metodi praćenja površinskog gibanja koriste piljevina i aluminij. Postoji mnogo primjera za vizualizaciju strujanja oko ili iza krila aviona, trupa broda, automobila, zgrada i mostova, kao i za unutarnje strujanje cjevovoda, krvnih žila i pumpi. Slika 45. prikazuje strujanje fluida oko zrakoplova s dvostrukim delta krilom te je vizualizirano pomoću strujanja vode. Može se vidjeti kako se razvijaju različiti vrtlozi. Ti vrtlozi djeluju na način da povećaju podizanje potrebno za dostizanje velikih brzina letjelica [3].



Slika 45: Strujanje fluida oko zrakoplova s dvostrukim delta krilom u vodi, koristeći metodu traga u boji [3]

Slika 46. prikazuje strujanje oko automobila koristeći metodu opstrujavanja zrakom. Zračna metoda ili metoda opstrujavanja zrakom se koristi pri strujanju zraka. Linije strujanja se jasno vide na slici.

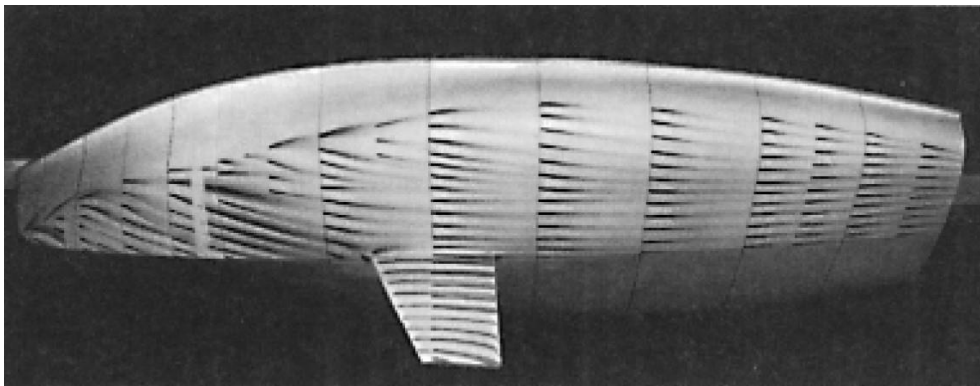


Slika 46: Strujanje zraka oko automobila (metoda opstrujavanja zrakom) [10]



#### 5.2.4 Metoda praćenja fluida uz kemijsku reakciju (*eng. Chemical reaction tracer method*)

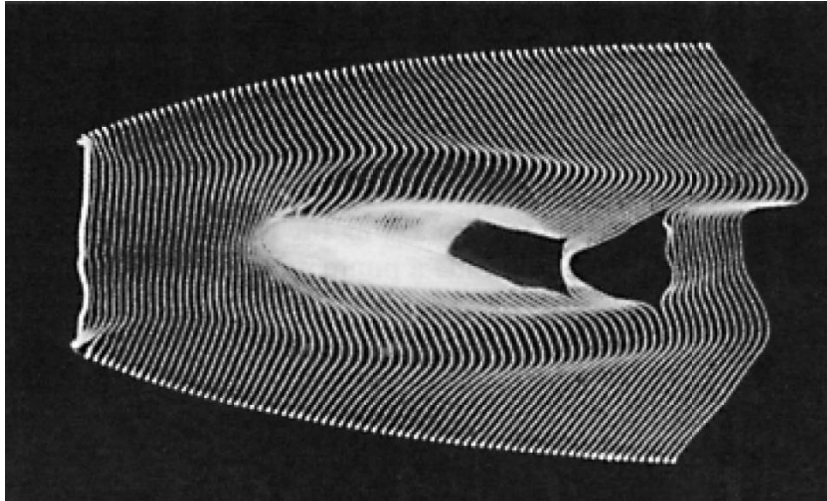
Postoje razne tehnike i metode praćenja fluida pomoću kemijski reaktivnih tvari. Budući da imaju zanemarivu promjenu gustoće uslijed kemijske reakcije, brzina taloženja „tragača“ je mala, pa su mnogi od njih prikladni za vizualizaciju strujanja male brzine. Metoda se koristi za vizualizaciju strujanja fluida oko i iza ravne ploče, krila i trupa te kod strujanja unutar pumpe. Slika 47. prikazuje promatranje strujanja pomoću tragova razvijenih ubrizgavanjem zasićenog tekućeg amonijevog sulfida kroz finu cijev na smjesu bijelog olova i brzosušćeg ulja koje je nanoseno na površinu modela jahte [3].



Slika 47: Strujanje na modelu jahte (metodom bojanja površinskog filma) u vodi, brzina strujanja 1 m/s, model duljine 1,5 m,  $Re = 1,34 \cdot 10^6$  koristeći bijelo olovo i amonijev sulfid [3]

#### 5.2.5 Električno kontrolirana metoda praćenja gibanja fluida (*eng. Electrically controlled tracer method*)

U ovu su metodu uključene tri kategorije: metoda mjehurića vodika, metoda traženja iskre i tzv. metoda dimne žice (*eng. Smoke-wire method*). Bilo koja od njih sposobna je osigurati kvantitativno mjerenje. Pomoću ovih metoda moguće je opažanje strujanja fluida oko cilindra i formiranje vrtloga iza cilindra, strujanja fluida na ravnim pločama, sferama, krilima aviona, zrakoplova i trupa broda, strujanje u cilindru, strujanje oko ventila, kao i strujanje u kompresoru. Slika 48. prikazuje strujanje fluida oko krila aviona metodom traženja iskre (*eng. Spark tracing method*) [3].



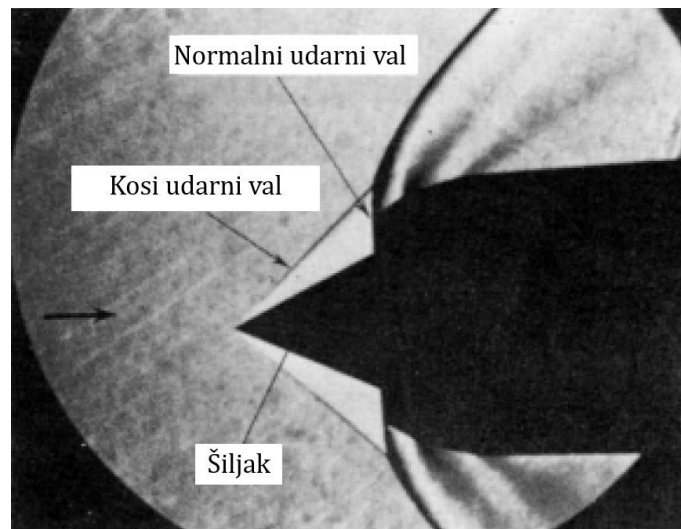
Slika 48: Strujanje fluida oko krila aviona (metodom traženja iskre) u zraku, brzina strujanja 28 m/s, strujanje zraka pod kutom od  $10^\circ$ ,  $Re = 7,4 \cdot 10^4$  [3]

#### 5.2.6 Optička metoda vizualizacije (*eng. Optical visualisation method*)

Ova metoda se široko koristi u praksi. Najznačajnija karakteristika ove metode jest sposobnost cjelovite vizualizacije bez utjecaja na strujanje fluida. Schlierenova metoda koristi promjenu brzine difrakcije uslijed promjene gustoće (temperature). Difrakcija ili ogib jest fizikalna pojava koja nastaje zbog skretanja valova iza ruba zapreke na koju valovi naiđu [1,2]. Interferencijska metoda koja koristi činjenicu da je broj interferencijskih granica proporcionalna razlici gustoće, uglavnom se primjenjuje na strujanje zraka. Za strujanje vode slobodne površine koristi se stereofotografska metoda (*eng. Stereophotography method*). Neravnine na površine tekućine se stereo fotografiraju (fotografska tehnika kojom se pomoću para dvodimenzionalnih slika stvara dojam trodimenzionalnosti) kako bi se utvrdila razlika u visini površine tekućine i na taj način je poznato stanje strujanja fluida. Moiré metoda ili metoda mramorastog izgleda (*eng. Moiré method*) se također koristi za vizualizaciju strujanja vode. Stanje strujanja vode provjerava se dobivanjem kontura svijetlih i tamnih pruga koje ukazuju na neravnine površine tekućine. Različiti primjeri optičke vizualizacijske metode prikazani su na slikama 49. i 50. [3].



Slika 49: Strujanje fluida na dnu mrtve točke vertikalno vibrirajućeg krila (Schlierenova metoda) u zraku, brzina strujanja 5 m/s, duljina akorda 100 mm,  $Re = 3 \cdot 10^4$ , vibracijska frekvencija 90 Hz, jednostruka amplituda 4 mm [3]



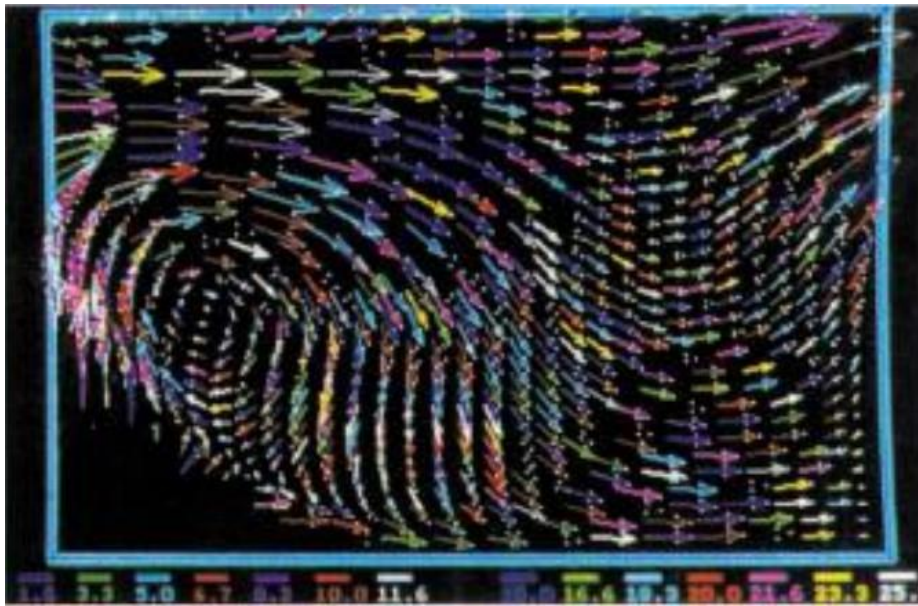
Slika 50: Strujanje fluida na ulazu zraka nadzvučnog zrakoplova (Schlierenova metoda boje),  $M=2,0$ ,  $Re = 1,0 \cdot 10^7$  [3]

### 5.3 Računalne metode vizualizacije

#### 5.3.1 Vizualizirana analiza slike (*eng. Visualised image analysis method*)

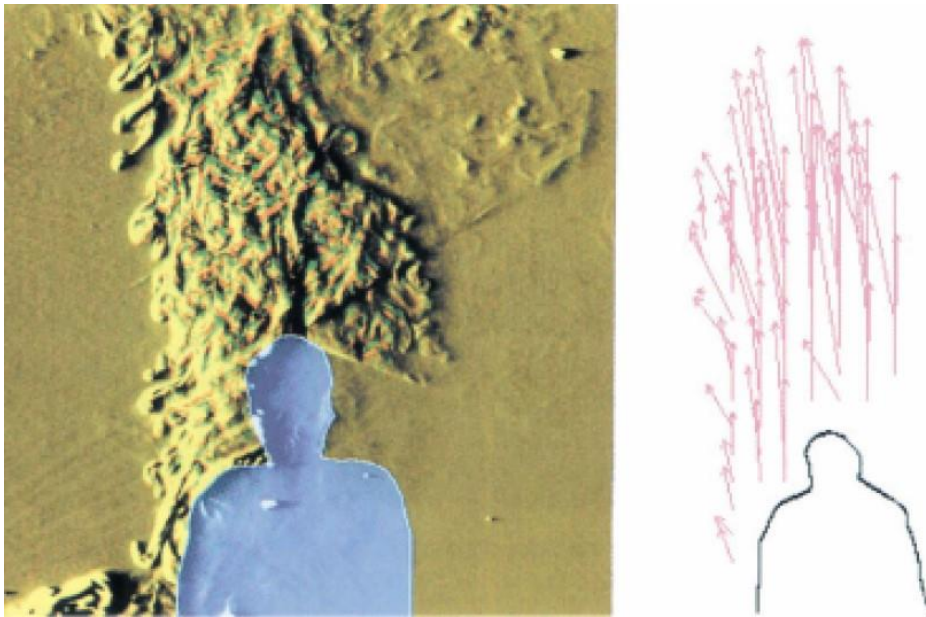
U ovoj se metodi vizualizirana slika izrađuje u fotografiju tako da se vrijednosti gustoće digitaliziraju. Potom se stavlja u računalo gdje će se fotografija analizirati analitički, statistički, u raspodjeli boja ili na neki drugi način, čime ju je i puno lakše protumačiti. Razvijene su različite tehnike za ovu metodu. Među njima je posebno popularna u zadnje

vrijeme PIV metoda (*eng. Particle Imaging Velocimetry Method*). PIV metoda ili tehnika se koristi za dobivanje trenutnih mjerenja brzina i srodnih svojstava u fluidu. U fluidu se nalaze čestice (koje se prethodno ubace u fluid) koje se prate te slijede dinamiku strujanja fluida. Fluid je osvijetljen tako da su vidljive čestice u njemu. Kretanje čestica koristi se za izračunavanje brzine i smjera strujanja koji se proučava. Slika 51. prikazuje vektore brzine dobivene za strujanje kroz cilindar pateći, s vremena na vrijeme, sferne plastične čestice koje su suspendirane u vodi [3].



Slika 51: Vektori brzine strujanja kroz kružni cilindar u vodi (PIV metoda) [3]

Slika 52. je primjer slike koja je tretirana metodom korelacije gustoće. Slika je dobivena ubrizgavanjem plina (dima) koji se prati u sobu sa poda ispod stolice na kojoj je čovjek sjedio, a vizualizirana je prirodna konvekcija (razlika u temperaturi) oko ljudskog tijela.



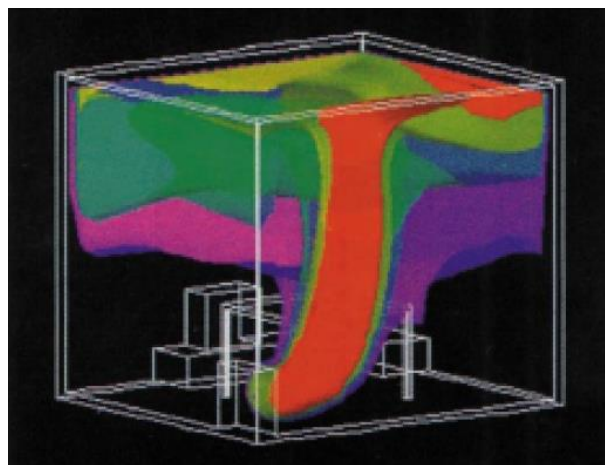
Slika 52: Prirodna konvekcija temperature oko ljudskog tijela (metoda korelacije gustoće), maksimalna brzina uzlazne mase je oko 0,2 m/s [3]

### 5.3.2 Numerička metoda vizualizacije podataka (*eng. Numerical data visualisation method*)

U ovoj metodi, polje strujanja se numerički analiza pomoću računala, a njegov računski izlaz predstavljen je lako razumljivim izrazom ili slikom pomoću računalne grafičke tehnike. Vrste prikaza uključuju: konture gdje su fizički jednake vrijednosti povezane krivuljom; bojanje područja, gdje su područja obojena bojama odgovaraju fizičkim količinama područja; izopovršina, gdje se fizički jednake vrijednosti trodimenzionalno očituju na površinama; količinski prikaz, pri čemu se razine izražene u površinskim površinama očituju promjenom stupnja transparentnosti; i vektorski, gdje se veličine i smjerovi brzine toka itd. očituju vektorima. Prezentacija (vizualni prikaz) može biti u vidu animacije ili grafova. Primjeri konturnog prikaza su slika 20., gdje se očituju strujnice (koje su konture funkcije strujanja fluida) i konture vrtloga, i slika 53. gdje je vizualni prikaz izveden trodimenzionalno. Konturni primjer obojenja područja (objekta koji se analizira) je prikazano na slici 54. gdje je prikazana raspodjela temperature. Primjer konturnog prikaza površinske promjenjivosti fizikalne veličine (gustoće) prikazan je na slici 53., dok se primjer vektorskog prikaza vidi na slici 40. [3].



Slika 53: Raspodjela gustoće na rotirajućim lopaticama ventilatora i centrifuge, vanjski promjer 450 mm, brzina rotacije 12 700 o/min (plava boja: niska rotacija, crvena boja: visoka rotacija), (metoda konačnih razlika) [3]

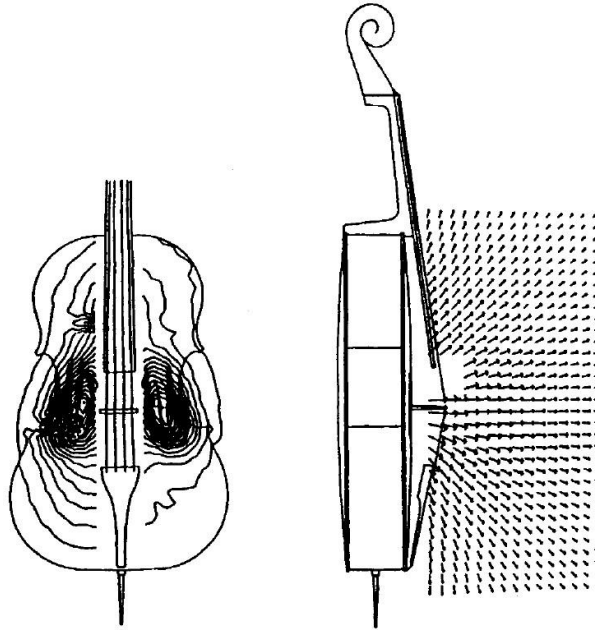


Slika 54: Raspodjela temperature u klimatiziranoj prostoriji (metoda manifestacije izopovršine), crvena boja prikazuje toplija područja [3]

### 5.3.3 Vizualizacija na temelju izmjerenih podataka (*eng. Measured data visualisation method*)

Ako je polje strujanja minutno izmjereno Pitotovom cijevi, anemometrom vruće žice, laserskim doplerovim brzinomjerom, mjaeračem tlaka, termometrom itd., takvi se

rezultati mogu obraditi pomoću računala i na taj način se fizikalne pojave vizualiziraju kao slike. Na slici 55. akustično strujanje žica iz violončela prikazano je metodom akustičkog intenziteta. Veličina i smjer energije strujanja u svakoj točki dobiva se računskim postupkom iz križnog vektora od signala zvučnog tlaka na mikrofону [3].



Slika 55: Strujanje zračenja fluida na violončelu (metoda zvučnog intenziteta) [3]

## **6. ZAKLJUČAK**

U ovom završnom radu tema je bila vezana za područje Računalne dinamike fluida (RDF). Opisane su i prikazane faze koje se provode unutar numeričkih modela kod RDF-a i metode za diskretizaciju domene hidrotehničkih problema i rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi u Mehanici fluida. U prvom i drugom dijelu završnog rada utvrđene su teorijske osnove neophodne za olakšano praćenje numeričkih metoda kod RDF-a te za samo razumijevanje RDF-a. Pojašnjena su bitna svojstva tekućine, definirana je strujnica, definirane su dvije vrste strujanja, dva tipa gibanja tekućine, objašnjen je Reynoldsov broj i sl. Naposljetku, obrađena je tema metode vizualizacije strujanja tekućine. Objasnjene su dvije tehnike korištenja, eksperimentalne i računalno potpomognute metode, te ujedno i metode pojedine tehnike koje se koriste za vizualizaciju strujanja tekućine.

Osnovni fokus rada bio je analiza i opisivanje faza unutar numeričkih modela kod RDF-a (metoda konačnih razlika, metoda konačnog volumena, metoda konačnih elemenata, metoda graničnog elementa). Kroz te metode se vrši integracija vladajućih jednadžbi strujanja fluida, nakon čega slijedi diskretizacija (proces separacije („razbijanja“) ogromnog volumena fluida na manje volumene ili elemente) jednadžbi. Jednadžbe se rješavaju kako bi se moglo prikazati polje strujanja. Naime, ako se diskretizacija provede krivo, konačno će rješenje simulacije biti krivo ili neće uopće biti rješivo, stoga ju je vrlo važno točno provesti. RDF je snažan inženjerski alat koji omogućava razne simulacije, te hidrodinamičke i aerodinamičke proračune raznih fizikalnih pojava i situacija koji su prisutni kod fluida, neizostavljajući eksperimentalni pristup. Pomoću metoda vizualizacije strujanja možemo jasno uvidjeti stvarne konture (uzorke) strujanja fluida.

Opisane su razne tehnike koje se koriste za prikaz strujanja zraka i tekućine, te su široko primjenjive u raznim industrijama i znanosti. Kod eksperimentalnih tehnika, „tuft“ metoda i „wall-tracing“ metoda se koriste za pružanje informacija o stanju graničnog sloja na površini (za otkrivanje odvajanja strujanja i ponovnog spajanja). Točniji način vizualizacije slobodnog strujanja jest uporaba dima ili laserskih listova. Čestice dima se kreću sa strujanjem i stoga daju neke naznake kako se strujanje fluida kreće oko modela. Schlierenova metoda se koristi za strujanja s velikom promjenom u gustoći fluida.



Koristi se kod vjetroelektrana za pronalaženje udarnih valova, koji spadaju u vrlo uska područja s velikim gradijentima gustoće (može se koristiti i za proučavanje izgaranja).

## 7. LITERATURA

- [1] *Hrvatska enciklopedija*, znanstveno područje, broj 5, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2003.
- [2] Nakayama, Y., Boucher, R.F.: *Introduction to Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1999.
- [3] Shaughnessy, E.J., Katz, I.M., Schaffer, J.P.: *Introduction to Fluid Mechanics*, Oxford University, Oxford, 2005.
- [4] Istjecanje vode iz cijevnog sustava pod tlakom, <https://ak.picdn.net/shutterstock/videos/15654259/thumb/1.jpg> (preuzeto dana 5.8.2020.)
- [5] Dim cigarete, <https://indoorscience.com/wp-content/uploads/2018/04/cigarette-smoke.jpg> (preuzeto dana 5.8.2020.)
- [6] Pojava tornada u Sjedinjenim američkim državama, <http://srpskacafe.com/wp-content/uploads/2019/04/Tornado-rumunija.png> (preuzeto dana 5.8.2020.)
- [7] Versteeg, H. K., Malalasekera, W.: *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Pearson Education Limited, 2007.
- [8] Žic, E.: Materijali sa 3. ljetne škole pod nazivom „3rd Summer School of Computational Fluid Dynamics, CFD“, Fakultet tehničkih nauka, Sveučilište u Novom Sadu, Novi Sad, 5-10.7.2019.
- [9] Strujanje fluida oko automobila, <http://www.allpar.com/photos/racing/mopar-missile/aero-tests/aerodynamics.jpg> (preuzeto dana 18.8.2020.)
- [10] Opstrujavanje zraka oko automobila, <https://1a8eua2erhxa2dmmwp4axgod-wpengine.netdna-ssl.com/wp-content/uploads/sites/3/2017/03/Aerodynamics Main-700x454.jpg> (preuzeto dana 18.8.2020.)

## **8. POPIS SLIKA**

<b>Popis slika</b>	<b>Stranica</b>
1. Polje strujanja fluida oko automobila simulirano metodama CFD-a, [2]	2
2. Prikaz Couettovog strujanja, [3]	4
3. Strujanje tekućine između dviju usporednih ploča, [3]	4
4. Ilustracija sferičnog tekućeg balona okruženog plinom, [2]	6
5. Mjerenje volumnog modula stlačivosti fluida, [3]	7
6. Promjene stanja idealnog plina, [3]	8
7. Prikaz strujnice, [2]	9
8. Strujna cijev, [3]	10
9. Primjer stacionarnog strujanja, [4]	10
10. Reynoldsov pokus ispitivanja laminarnog i turbulentnog strujanja, [3]	12
11. Miješanje označene (obojene) vode sa čistom vodom: a) laminarno strujanje, b) prijelazno strujanje, c) turbulentno strujanje, [2]	12
12. Primjer laminarnog i turbulentnog strujanja, [5]	13
13. Deformacija elementarnog pravokutnika tekućine, [3]	14
14. Prikaz vrtložnog strujanja, [3]	16
15. Prikaz tornada u Sjedinjenim američkim državama, [6]	16
16. Prikaz cirkulacije u gibanju tekućine, [3]	17
17. Metoda konačnih razlika, [3]	21
18. Strujanje fluida u naglom proširenju cijevnog sustava, [3]	23
19. Mrežna rešetka i čvorovi rešetke, [3]	24
20. Strujnice i linije vrtložnosti uslijed strujanja fluida kroz naglo proširenje u cijevnom sustavu, [3]	25
21. Izgled ćelija i markera čestica koji se koriste za računanje strujanja na nagnutoj slobodnoj površini kod MAC metode, [3]	27
22. Kap tekućine pada na tanak sloj slobodne površine tekućine, [3]	27
23. Raspored varijabli u MAC metodi, [3]	28
24. Dijagram jednakosti transonične kaskadne turbine: a) numerički model (lijevo); b) fizikalni model - eksperiment (desno), [3]	29
25. Uređaj za ispitivanje vodnog udara u sustavu pod tlakom, [3]	29
26. x-t mreža za rješavanje jedne cijevi, [3]	30

27. Usporedba izračunatih tlačnih valova i stvarno izmjerenih vrijednosti, [3]	31
28. Turbulento strujanje preko stepenice (kaskade), [3]	32
29. Turbulentno strujanje oko stepenice (kaskade) (LES model turbulencije) (eng. time=vrijeme, Re=Reynoldsov broj), [3]	32
30. Opstrujavanja fluida iza stepenice (kaskade) u vremenu (t u sekundama), [3]	33
31. Kontrolni volumen kod primjene metode konačnih volumena, [3]	34
32. Nestrukturirana rešetka u primjeni metode konačnih volumena, [3]	34
33. Granice kontrolnog volumena, [2]	36
34. Obilježavanje volumena unutar CFD-a, [2]	36
35. Dvodimenzionalni elementi u metodi konačnih elemenata, [3]	39
36. Strujanje fluida oko cilindra, [3]	40
37. Jednodimenzionalna interpolacijska funkcija u metodi konačnih elemenata, [3]	41
38. Trokutasti element u dvodimenzionalnom slučaju, [3]	42
39. Numerička mreža kreirana trokutastim elementima pri strujanju fluida oko cilindričnog tijela, [3]	43
40. Strujanje fluida oko cilindričnog tijela: (a) prikaz strujnicama; (b) prikaz vektorima brzina, [3]	43
41. Izrada numeričke mreže metodom graničnih elemenata pri strujanju fluida oko cilindričnog tijela, [3]	44
42. Rješenje problema metodom graničnog elementa, [3]	45
43. Ograničavanje strujnica Wellsove turbine za proizvodnju valova (smjer okretanja je suprotan kazaljki na satu) u vodi, brzina strujanja 3,2 m/s, kut strujanja fluida 11° [3]	47
44. Strujanje fluida oko automobila (površinska tuft metoda), [9]	47
45. Strujanje fluida oko zrakoplova s dvostrukim delta krilom u vodi, koristeći metodu traga u boji, [3]	48
46. Strujanje zraka oko automobila (metoda opstrujavanja zrakom), [10]	48
47. Strujanje na modelu jahte (metodom bojanja površinskog filma) u vodi, [3]	49
48. Strujanje fluida oko krila aviona (metodom traženja iskre) u zraku, [3]	50
49. Strujanje fluida na dnu mrtve točke vertikalno vibrirajućeg krila (Schlierenova metoda) u zraku, [3]	51

50. Strujanje fluida na ulazu zraka nadzvučnog zrakoplova, [3]	51
51. Vektori brzine strujanja kroz kružni cilindar u vodi (PTV metoda), [3]	52
52. Prirodna konvekcija temperature oko ljudskog tijela (metoda korelacije gustoće), [3]	53
53. Raspodjela gustoće na rotirajućim lopaticama ventilatora i centrifuge, [3]	54
54. Raspodjela temperature u klimatiziranoj prostoriji (metoda manifestacije izopovršine), [3]	54
55. Strujanje zračenja fluida na violončelu (metoda zvučnog intenziteta), [3]	55

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Preddiplomski sveučilišni studij  
Građevinarstvo  
Hidromehanika**

**Matija Pilat  
JMBAG:0114029515**

**Računalna dinamika fluida i metode  
vizualizacije strujanja tekućine**

**Završni rad**

**Rijeka, rujan 2020.**