

Dinamički odgovor umanjenog jednokatnog modela na pobudu podloge

Srdoč, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:340094>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

Luka Srdoč

**DINAMIČKI ODZIV JEDNOKATNOG MODELA NA DINAMIČKU
POBUDU PODLOGE**

Završni rad

Rijeka, 2021.

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Preddiplomski sveučilišni studij
Mehanika 2**

**Luka Srdoč
JMBAG: 0114029284**

**DINAMIČKI ODZIV JEDNOKATNOG MODELA NA DINAMIČKU
POBUDU PODLOGE**

Završni rad

Rijeka, 2021.

51000 Rijeka, Radmile Matejčić 3, Tel.: 051/265-900, Fax: 265-998, žiro račun br. 2360000-1101407882, MB 3395855, OIB 92037849504

Naziv studija: preddiplomski sveučilišni studij građevinarstva
Znanstveno područje/područja: tehničke znanosti
Znanstveno polje/polja: temeljne tehničke znanosti
Znanstvena grana/grane: tehnička mehanika

Tema završnog/diplomskog rada

DINAMIČKI ODGOVOR UMANJENOG JEDNOKATNOG MODELA NA POBUDU PODLOGE
DYNAMIC RESPONSE OF A ONE-STOREY SMALL-SCALE MODEL SUBJECT TO A BASE
EXCITATION

Kandidat: **LUKA SRDOČ**

Kolegij: **MEHANIKA 2**

Završni/Diplomski rad broj: **21-P-42**

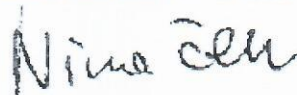
Zadatak:

Izvesti jednadžbu kretanja za slobodne neprigušene, prisilne neprigušene i slobodne prigušene oscilacije jednokatnog modela s koncentriranom masom na vrhu. Riješiti jednadžbu za slobodne neprigušene oscilacije analitički i pronaći vlastitu frekvenciju modela. Riješiti jednadžbe numerički. Osmisliti i provesti seriju eksperimenata umanjenog jednokatnog modela na potresnoj platformi s odabranim opterećenjem (harmonijskom funkcijom i potresnim zapisom). Mjerenja provesti optičkim metodama. Usporediti eksperimentalno i numerički i analitički dobivene rezultate te donijeti zaključke.

Tema rada je uručena: 30. 3. 2020.

Mentor:

doc. dr. sc. Nina Čeh



IZJAVA

Završni rad sam izradio samostalno, u suradnji s mentoricom uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Luka Srdoč

U Rijeci, 5. srpnja 2021.

IZJAVA

Završni/Diplomski rad nastao je kao rezultat rada u okviru projekta
Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci

Voditelj projekta prof. dr. sc. Nevenka Ožanić
Šifra projekta RC.2.2.06-0001
Financijer projekta Europski fond za regionalni razvoj (EFRR)
Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH
Pravna nadležnost Republika Hrvatska

U Rijeci, 5. 7. 2021.

Mentor:

doc. dr. sc. Nina Čeh

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorici dr. sc. Nini Čeh na mentorstvu, pomoći i stručnom vođenju pri izradi ovog završnog rada pod naslovom „Dinamički odziv jednokatnog modela na dinamičku pobudu podloge“. Također zahvaljujem se na dodatnom znanju koje sam stekao pri izradi završnog rada, kao i mogućnosti da dio rada odradim eksperimentalno u laboratoriju za konstrukcije.

Luka Srdoč.

Sadržaj

Popis oznaka.....	8
Popis slika	9
Popis tablica	10
Popis priloga.....	10
1 UVOD	11
2 OPIS PROBLEMA.....	12
3 JEDNADŽBE KRETANJA	14
3.1 Slobodne neprigušene oscilacije.....	14
3.1.1 Analitičko rješenje.....	15
3.1.2 Numeričko rješenje.....	18
3.2 Prisilne neprigušene oscilacije	20
3.2.1 Analitičko rješenje.....	20
3.2.2 Numeričko rješenje.....	22
3.3 Slobodne prigušene oscilacije	23
3.3.1 Analitičko rješenje.....	23
3.3.2 Numeričko rješenje.....	26
4 OPIS FIZIKALNOG MODELA OKVIRA.....	27
5 OPIS EKSPERIMENTA I OPREME	30
5.1 Quanser sustav.....	30
5.2 Aramis sustav	31
5.2.1 Kalibriranje kamere	32
5.3 Opis eksperimenta	32
6 REZULTATI.....	33
6.1 Eksperimentalni rezultati.....	33
6.1.1 Slobodne oscilacije.....	33
6.2 Analitički rezultati.....	40
6.2.1 Slobodne neprigušene oscilacije.....	40
6.2.2 Slobodne prigušene oscilacije.....	47
6.2.3 Usporedba neprigušenih i prigušenih oscilacija	50
6.3 Numerički rezultati.....	52
6.4 Prisilne oscilacije pod djelovanjem zapisa stvarnog potresa.....	55
7 USPOREDBA REZULTATA.....	59
8 ZAKLJUČAK	64
Literatura	65

Popis oznaka

DST – dijagram slobodnog tijela
DMA – dijagram masa akceleracija
x – pomak [m]
*x*₀ – početni pomak [m]
*v*₀ – početna brzina [$\frac{m}{s}$]
k – krutost tijela [Nm^{-1}]
m – masa tijela [kg]
ω – vlastita kružna frekvencija
t – vrijeme [s]
T – period titraja [s]
I – moment inercije [m^4]
A – amplituda
F – sila [N]
E – Young – ov modul elastičnosti
f – frekvencija [Hz]
ζ ili *c* – koeficijent prigušenja
e – matematička konstanta, Euler – ov broj
u – fleksija

Popis slika

Slika 1: Zgrada nakon potresa	12
Slika 2: Nedeformirani okvir.....	13
Slika 3: Deformirani okvir	13
Slika 4: Shema sustava.....	14
Slika 5: Jednostavni sustav za slobodno neprigušene oscilacije	14
Slika 6: DST i DMA dijagrami za slobodne neprigušene oscilacije	15
Slika 7: Jednostavni sustav za prisilne neprigušene oscilacije.....	20
Slika 8:DST i DMA dijagrami za prisilne neprigušene oscilacije	20
Slika 9: DST i DMA dijagram za slobodne prigušene oscilacije.....	23
Slika 10: Okvir na potresnoj ploči.....	27
Slika 11: Okvir na potresnoj ploči s promjenom težine na gornjoj stranici	28
Slika 12: Potresni stol (Quanser Innovate Educate, 2019).....	30
Slika 13: Software Quanser (Quanser Innovate Educate, 2019).....	31
Slika 14: Aramis sustav [6]	31
Slika 15: Kalibracijski objekt.....	32
Slika 16: Eksperiment 1, pobuda rukom, bez opterećenja	34
Slika 17: Eksperiment 2, pobuda rukom, opterećenje 2N	34
Slika 18: Eksperiment 3, pobuda rukom, opterećenje 2N	35
Slika 19: Eksperiment 1, srednja konačna razlika, bez opterećenja.....	35
Slika 20: Eksperiment 2, srednja konačna razlika, opterećenje 2N	36
Slika 21: Eksperiment 3, Srednja konačna razlika, opterećenje 4N.....	36
Slika 22: Eksperiment 1, nul točke.....	37
Slika 23: Eksperiment 2, nul točke.....	38
Slika 24: Eksperiment 3, nul točke.....	39
Slika 25: Usporedba rezultata, pobuda rukoom	39
Slika 26: Dijagram analitičkog rješenja eksperiment 1, bez opterećenja.....	40
Slika 27: Eksperiment 1, izračun valne duljine, bez opterećenja	41
Slika 28: Dijagram analitičkog rješenja eksperiment 2, opterećenje 2N.....	42
Slika 29: Eksperiment 2, izračun valne duljine, opterećenje 2N.....	43
Slika 30: Dijagram analitičkog rješenja eksperiment 3, opterećenje 4N.....	44
Slika 31: Eksperiment 3, izračun valne duljine, opterećenje 4N.....	45
Slika 32: Usporedba analitičkih rezultata.....	46
Slika 33: Dijagram analitičkog rješenja, bez opterećenja	47
Slika 34: Dijagram analitičkog rješenja, opterećenje 2N	48
Slika 35: Eksperiment 3, dijagram analitičkog rješenja, opterećenje 4N.....	49
Slika 36:Usporedba analitičkih rezultata.....	50

Slika 37: Usporedba slobodnih prigušenih i neprigušenih oscilacija za eksperiment 1 , bez opterećenja	50
Slika 38: Usporedba slobodnih prigušenih i neprigušenih oscilacija za eksperiment 2 , opterećenje 2N.....	51
Slika 39: Usporedba slobodnih prigušenih i neprigušenih oscilacija za eksperiment 3 , opterećenje 4N.....	51
Slika 40: Prvi eksperiment, grafički prikaz numeričkog rješenja, bez opterećenja.....	52
Slika 41: Grafički prikaz numeričkog rješenja, opterećenje 2N.....	53
Slika 42: Grafički prikaz numeričkog rješenja za treći eksperiment, opterećenje 4N.....	54
Slika 43: Eksperiment 7, Northridge potres X, bez opterećenja	55
Slika 44: Eksperiment 8, Northridge potres Y, bez opterećenja	56
Slika 45: Eksperiment 9, Northridge potres X, opterećenje 2N.....	56
Slika 46: Eksperiment 10, Northridge potres Y, opterećenje 2N.....	57
Slika 47: Eksperiment 11, Northridge potres X, opterećenje 4N.....	57
Slika 48: Eksperiment 12, Northridge potres Y, opterećenje 4N.....	58
Slika 49: Usporedba neprigušenih rješenja s eksperimentom 1	59
Slika 50: Usporedba prigušenih rješenja s eksperimentom 1	59
Slika 51: Usporedba neprigušenih rješenja s eksperimentom 2	60
Slika 52: Usporedba prigušenih rješenja s eksperimentom 2.....	60
Slika 53: Usporedba neprigušenih rješenja s eksperimentom 3	61
Slika 54: Usporedba prigušenih rješenja s eksperimentom 3.....	61
Slika 55: Usporedba eksperimenta 1 s analitičkim rješenjima.....	62
Slika 56: Usporedba eksperimenta 2 s analitičkim rješenjima.....	63
Slika 57: Usporedba eksperimenta 3 s analitičkim rješenjima.....	63

Popis tablica

Tablica 1: Dimenzije i karakteristike okvira	28
Tablica 2: Vrijednosti okvira s različitom težinom	29
Tablica 3: Informacije o provedenim eksperimentima.....	33

Popis priloga

[Eksperimentalni rezultati.xlsx](#)

[Numerički i analitički rezultati.xlsx](#)

1 UVOD

Projektiranje u građevinarstvu provodi se pomoću normi koje su donesene na području Europske Unije i prenamijenjene za Republiku Hrvatsku, koje se dijele po brojevima ovisno o godinama kada su izdane. Za projektiranje konstrukcija koristi se norma HRN EN 1990 ili Eurokod 0 : Osnove projektiranja konstrukcija, kao i za ovaj rad bitna norma HRN EN 1998 ili Eurokod 8: Projektiranje konstrukcija otpornih na potres. Norma EN 1990 utvrđuje načela i zahtjeve za sigurnost, uporabljivost i trajnost konstrukcija [1]. Kako bi bili sigurni da konstrukcija može izdržati predviđeno opterećenje, uvodi se koeficijent sigurnosti kod projektiranja. Pomoću njega smanjujemo nosivost ili povećavamo opterećenje u proračunu kada dimenzioniramo konstrukcijske elemente. Kod projektiranja konstrukcije pažnja se posvećuje na stabilnost i nosivost konstrukcije pri stalnom opterećenju, nastalu od težine konstrukcije i raznih elemenata, promjenjivom ili uporabnom opterećenju koja se odnose na čovjeka, te izvanredna opterećenja. U izvanredna opterećenja pripadaju i dinamičke pobude građevine. Eurokod propisi baziraju se na brojnim proračunima, eksperimentalnim ispitivanjima i iskustvima iz prošlosti, a naš cilj je bolje razumjeti samu mehaniku jednog relativno jednostavnog modela podvrgnutog dinamičkom opterećenju podloge na kojoj se nalazi

Dinamička pobuda može se dogoditi kao jaki udar vjetra, udar vozila u konstrukciju ili potres. Iako te situacije mogu biti rijetke, treba znati kakav utjecaj imaju na konstrukciju. Kada se dogodi dinamička pobuda, energija jednog tijela ili izvora prelazi na drugo tijelo, u ovom slučaju na konstrukciju koja je osloncima povezana s tlom. To nije značajan problem kada se konstrukcija nalazi na istoj razini kao i pobuda, odnosno kada je niska. Međutim, u građevini većina konstrukcija ima određenu visinu, te su sile i momenti koji nastaju zbog inercije sustava u konstrukciji značajni i ne mogu se zanemariti .

Ovaj završni rad bavi se problemom dinamičkog odziva jednokatnog modela na dinamičku pobudu, te proučava kako različita težina koncentrirana na gornjoj gredi modela utječe na pomake sustava. Najprije se objašnjava opis problema s kojim se ovaj rad susreće. Zatim se postavljaju jednadžbe kretanja za slobodne neprigušene, slobodne prigušene i prisilne neprigušene oscilacije. U kasnijim poglavljima opisuje se laboratorijska oprema i način na koji se ona koristi u eksperimentalnom djelu ovog rada, te nakon toga slijede rezultati. Prikazani su rezultati dobiveni analitički, numerički i eksperimentalno. Na kraju rada obaviti će se još jedan eksperiment s uzorkom zapisa potresa koji se dogodio 1994. godine u dolini San Fernanda u pokrajini Los Angelesa.

2 OPIS PROBLEMA

Pobuda dovodi fizički sustav u energijsko stanje više od osnovnog stanja, odnosno izmiče ga iz položaja statičke ravnoteže. Dinamička pobuda sastoji se od jačine, smjera i orijentacije. Kada govorimo o dinamičkim pobudama u građevinarstvu na građevinske konstrukcije najčešće djeluju potresi, vjetar, sudari te ekstremni slučajevi navedenih pobuda. Odgovor mnogih konstrukcija i sustava u građevinarstvu na dinamičku pobudu se može opisati kao vibracija ili titranje.

Vibracija je periodično ili ciklično gibanje mehaničkih sustava oko ravnotežnog položaja prouzročeno vanjskom silom ili odklonom iz ravnotežnog položaja [1]. Vibracije su česta pojava u svakodnevnom životu, iako se u građevini projektiraju i grade konstrukcije koje najprije moraju podnijeti statička djelovanja, ne smiju se zanemariti utjecaji dinamike konstrukcije njihovu na uporabljivost.

Vibracije konstrukcije ili nekog njenog dijela mogu izazvati velika naprezanja i deformacije u sustavu, pogotovo ako se dogodi rezonancija. Mehanička rezonancija nastaje kada na mehanički sustav djeluju vanjske periodične sile kojima su frekvencije podudarne frekvencijama svojstvenima sustavu. Svojstvene frekvencije nekog mehaničkoga sustava ovise o njegovoj masi, dimenzijama i unutarnjim silama naprezanja [1], što će biti detaljnije objašnjeno u nastavku.

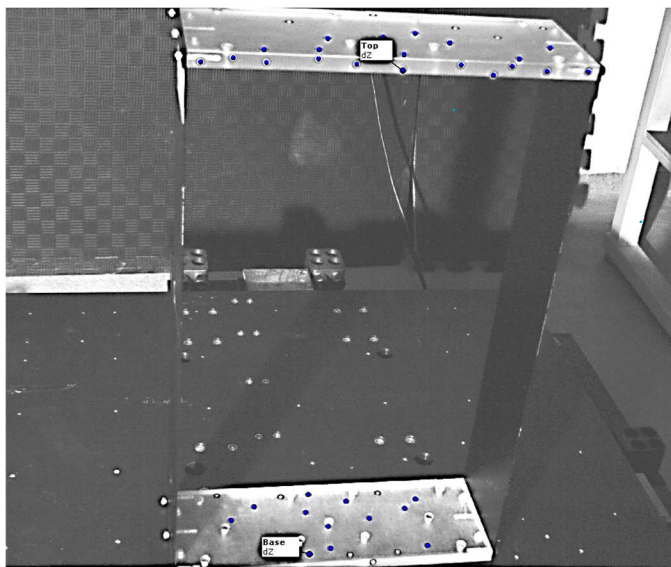
Nažalost, kada se zanemare dinamički odziv konstrukcije na dinamičku pobudu kod projektiranja može doći do velikih šteta. Primjer toga je zgrada nakon potresa koji se dogodio na Tajvanu 2018. godine magnitude 6.4 po Richterovoj ljestvici (Slika 1) [3].



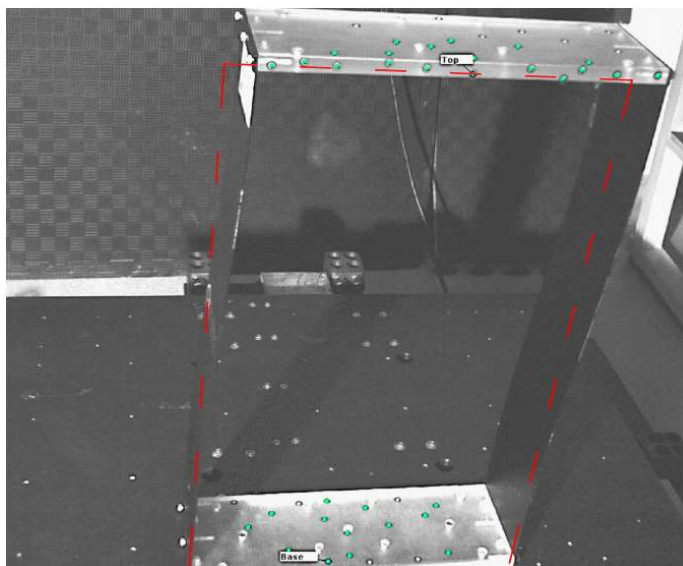
Slika 1: Zgrada nakon potresa

U građevini konstrukcije mogu biti vrlo složene. Međutim mnogobrojne konstrukcije se mogu svesti na jednostavne sustave promatrajući njih možemo bolje razumjeti ponašanje kompleksnijih konstrukcija.. U završnom radu promatrati će se jednostavni okvir s jednim stupnjem slobode na kojeg djeluje dinamička pobuda podloge(slika 2).

Završni rad se sastoji od analitičkog djela, numeričkog djela i eksperimentalnog djela. Dinamička pobuda djeluje paralelno s okvirom s jednim stupnjem slobode, na taj način će se promatrati najkritičniji dinamički odziv sustava. Pratit će se kako se sustav ponaša kod promjene mase na gornjoj gredi okvira, te kako će ta promjena utjecati na cjelokupni dinamički odziv.



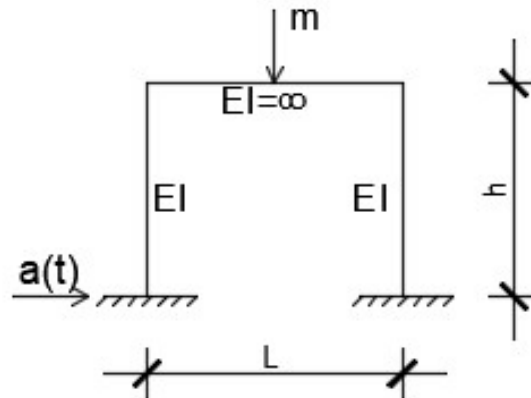
Slika 2: Nedeformirani okvir



Slika 3: Deformirani okvir

3 JEDNADŽBE KRETANJA

Za jednokatni model okvira s masom koncentriranom na vrhu najprije su izvedene jednačbe kretanja. Vibracijama se naziva promjena s vremenom veličine kojom se može opisati gibanje mehaničkog sustava gdje je veličina izmjenično veća ili manja od neke srednje vrijednosti [2]. Primjenjujemo li 2. Newtonov zakon na problem, dobijemo jednačbu kretanja na način da konstrukciju sagledamo kroz dijagram slobodnog tijela (u nastavku „DST“) i dijagrama masa puta ubrzanje (u nastavku „DMA“). Sustav koji promatramo prikazan je na slici 4. Na sustav djeluje dinamičko opterećenje u obliku funkcije ubrzanja podloge, označene kao $a(t)$. Umjesto funkcije ubrzanja podloge, nekada možemo promatrati i sustav podvrgnut funkciji pomaka podloge.

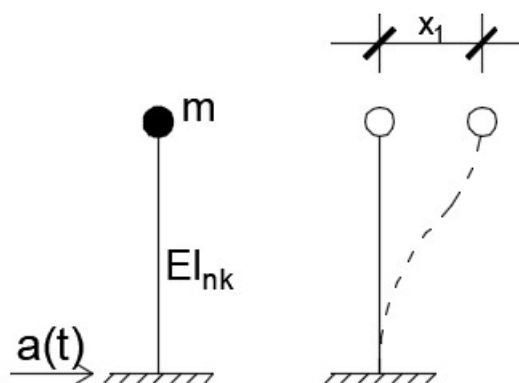


Slika 4: Shema sustava

Ukoliko pretpostavimo da horizontalni element (gređa) ima mnogo veću krutost od stupova, deformacije unutar te gređe su toliko male da njenu krutost možemo smatrati beskonačno velikom. S tom pretpostavkom sustav možemo pojednostaviti na sljedeći način (slika 5).

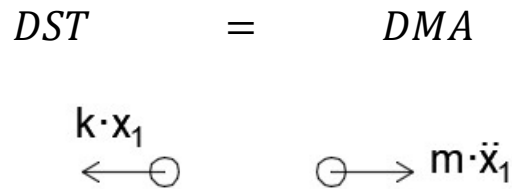
3.1 Slobodne neprigušene oscilacije

Prvo promatramo sustav na koji ne djeluje vanjska pobuda, odnosno slobodno neprigušene oscilacije.



Slika 5: Jednostavni sustav za slobodno neprigušene oscilacije

Ovaj sustav sada postaje štap s jednim stupnjem slobode(horizontalnim pomakom mase m) i jednim ukliještenim ležajem. Primijenimo li DST I DMA dijagrame na sustav dobijemo slijedeće izraze(slika 6). U nastavku su izvedene jednačbe kretanja za ovakav pojednostavljeni sustav tijekom slobodnih neprigušenih i slobodnih prigušenih te prisilnih neprigušenih oscilacija.



Slika 6: DST i DMA dijagrami za slobodne neprigušene oscilacije

$$m \cdot \ddot{x}_1 - k \cdot x_{el} = 0 \quad (1)$$

Jednačba (1) daje nam jednačbu kretanja sustava, međutim horizontalni pomaci i horizontalno ubrzanje su nam nepoznanice.

3.1.1 Analitičko rješenje

Jednačbu (1) je moguće riješiti analitički uz uvjete:

$$m, k > 0$$

Gdje pretpostavljamo da je nepoznanica x oblika

$$x = e^{rt} \quad (2)$$

a njene derivacije po vremenu:

$$\dot{x} = r \cdot e^{rt} \quad (3)$$

$$\ddot{x} = r^2 \cdot e^{rt} \quad (4)$$

Kada se jednačbe (2), (3) i (4) substituiraju u jednačbu (1), dobijemo:

$$m \cdot r^2 \cdot e^{rt} - k \cdot e^{rt} = 0 \quad (5)$$

Odnosno:

$$e^{rt}(m \cdot r^2 - k) = 0 \quad (6)$$

Član e^{rt} nikad nije jednak nuli, dakle izjednačavanjem dijela unutar zagrade u jednadžbi (6) dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$m \cdot r^2 - k = 0 \quad (7)$$

Dobivena jednadžba je nepotpuna kvadratna jednadžba. Kvadratna jednadžba može se napisati u sljedećem obliku:

$$r_{1,2} = -a \pm bi$$

Odnosno:

$$r_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (8)$$

Prema tome, rješenje jednadžbe (1), odnosno koordinate x vrha modela u vremenu je:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cdot e^{(-a+bi)t} + C_2 \cdot e^{(-a-bi)t} \\ x(t) &= e^{-at} \cdot (C_1 \cdot e^{ibt} + C_2 \cdot e^{-ibt}) \end{aligned} \quad (9)$$

Ukoliko se primjeni Eulerov zakon (10), koji definiira eksponencijalnu funkciju za kompleksne brojeve dobije se sljedeći izraz:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \cdot \sin\theta \quad (10)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (11)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (12)$$

Ubacivši jednadžbe (10), (11) u (12): dobijemo:

$$x(t) = e^{-at} \cdot [A \cdot \cos(bt) + B \cdot \sin(bt)] \quad (13)$$

U jednadžbi (8) dobili smo rješenje kvadratne jednadžbe. Član b koji iznosi $\sqrt{\frac{k}{m}}$ je zapravo vlastita kružna frekvencija koja se označava s ω . Član e^{-at} eksponencijalno umanjuje vrijednost $x(t)$ kroz vrijeme, odnosno može se reći da djeluje kao prigušenje sustava. S obzirom da se izvodi jednadžba za slobodne neprigušene oscilacije, taj član će biti jednak 1, te jednadžbu (13) možemo zapisati na sljedeći način

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad (14)$$

Kada deriviramo jednadžbu (14) dobijemo izraz za brzinu vrha modela kao:

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (15)$$

Jednadžba (14) i (15) moraju zadovoljavati početne uvjete sustava, odnosno uvjete daje:

$$\text{za } t = 0 \quad \text{početni položaj } x = x_0$$

$$\text{početna brzina } \dot{x} = v_0$$

Kada uvrstimo početne uvjete u jednadžbe (14) i (15) dobijemo vrijednosti konstatni.

$$x_0 = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) \quad \rightarrow A = x_0 \quad (16)$$

$$\dot{x} = v_0 = -A \cdot \omega \cdot \sin(0) + B \cdot \omega \cdot \cos(0) \quad \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} \quad (17)$$

Konačni oblik jednadžbe (14) nakon uvođenja konstanti A i B dobivenih iz početnih uvjet je:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \quad (18)$$

3.1.2 Numeričko rješenje

Rješenje jednadžbe (1) je moguće dobiti razvojem nepoznate funkcije x u Taylorov red, odnosno:

$$x_t = x_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_{t-\Delta t} + \dots \quad (19)$$

i

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-\Delta t} + \Delta t \ddot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{x}_{t-\Delta t} + \dots \quad (20)$$

Newmark je dao rješenje ovog skupa jednadžbi [2] kao:

$$x_t = x_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^3 \ddot{x} \quad (21)$$

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-\Delta t} + \Delta t \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t^2 \ddot{x} \quad (22)$$

Ukoliko se pretpostavi da je ubrzanje linearno unutar jednog vremenskog razmaka, može se zapisati sljedeća relacija:

$$\ddot{x} = \frac{(\ddot{x}_t - \ddot{x}_{t-\Delta t})}{\Delta t} \quad (23)$$

Jednadžba (23) se substituiru u jednadžbe (22) i (21). Time dobivamo Newmarkove jednadžbe u standardnom obliku:

$$x_t = x_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^3 \ddot{x}_t \quad (24)$$

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{x}_t \quad (25)$$

Iz jednadžbe (25) može se izlučiti \ddot{x}_t kao:

$$\ddot{x}_t = \frac{x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{\beta \Delta t^2} \quad (26)$$

Jednadžbu (1) možemo zapisati za neki trenutak t kao:

$$m \cdot \ddot{x}_t + k \cdot x_t = 0 \quad (27)$$

te u nju uvesti aproksimaciju ubrzanja danog u jednadžbi (26), čime dobivamo:

$$m \cdot \frac{x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{\beta \Delta t^2} + k \cdot x_t = 0 \quad / \cdot \beta \Delta t^2 \quad (28)$$

Jednadžbu (28) modificiramo tako da dobijemo nepoznanicu $x(t)$ na jednoj strani znaka jednakosti.

$$m \cdot (x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}) + \beta \Delta t \cdot k \cdot x_t = 0 \quad (29)$$

$$x_t \cdot (m + \beta \Delta t \cdot k) + m \cdot (x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}) = 0 \quad (30)$$

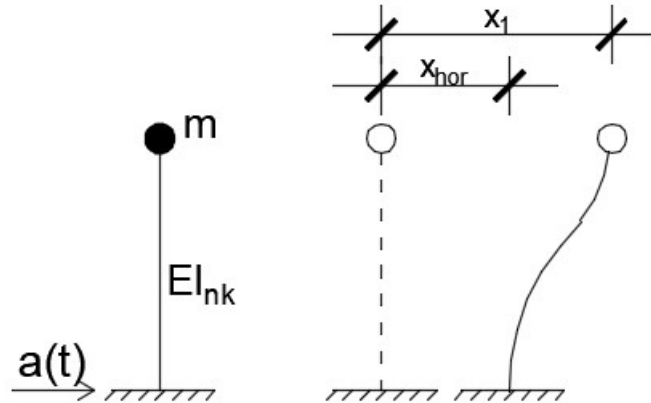
Konačno rješenje jednadžbe možemo dobiti kao:

$$x_t = - \frac{m \cdot (x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t})}{m + \beta \Delta t \cdot k} \quad (31)$$

Gdje su $x_{t-\Delta t}$, $\dot{x}_{t-\Delta t}$, $\ddot{x}_{t-\Delta t}$ položaj, brzina i ubrzanje iz prethodnog trenutka $t-\Delta t$, a β i γ Newmarkovi parametri [6].

3.2 Prisilne neprigušene oscilacije

Ukoliko na sustav djeluje pobuda podloge koja sustav pokušava izmaknuti iz stanja mirovanja u stanje kretanja, jednadžba kretanja se izvodi na temelju dijagrama prikazanih na slici 5 i glasi:



Slika 7: Jednostavni sustav za prisilne neprigušene oscilacije

$$DST = DMA$$

$$k \cdot (x_1 - x_{hor}) \quad \leftarrow \ominus \quad \ominus \rightarrow m \cdot x_1$$

Slika 8: DST i DMA dijagrami za prisilne neprigušene oscilacije

$$m \cdot \ddot{x}_1 + k \cdot x_1 = k \cdot x_{hor} \quad (32)$$

3.2.1 Analitičko rješenje

Jednadžba (32) je nehomogena diferencijalna jednadžba 2. reda. Rješenje te jednadžbe se sastoji od homogenog i partikularnog djela, odnosno:

$$x_1(t) = x_{1,H}(t) + x_{1,P}(t) \quad (33)$$

Homogeni dio jednadžbe možemo pronaći kako je opisano u dijelu 3.1.1..Partikularni dio rješenja (33) možemo pronaći pomoću metode neodređenih koeficijenata. Pobudu u jednadžbi možemo pretpostaviti kao harmonijsku silu, sila koja se mijenja prema funkciji sinus ili kosinus. Ukoliko se pretpostavi kao kosinus funkcija, jednadžbu (32) možemo riješiti na sljedeći način:

$$x_P(t) = d_0 \cos(\omega t) + d_1 \sin(\omega t) \quad (34)$$

$$\dot{x}_P(t) = -\Omega d_0 \sin(\omega t) + \Omega d_1 \cos(\omega t) \quad (35)$$

$$\ddot{x}_P(t) = -\Omega^2 d_0 \cos(\omega t) - \Omega^2 d_1 \sin(\omega t) \quad (36)$$

Kada smo dobili derivacije jednadžbe, uvrštavamo ih u početni izraz (31):

(34), (35), (36) u (32)

$$-m\Omega^2 d_0 \cos(\omega t) - m\Omega^2 d_1 \sin(\omega t) + k \cdot d_0 \cos(\omega t) + k \cdot d_1 \sin(\omega t) = k \cdot x_{hor} \quad (37)$$

Sada možemo izdvojiti lijevu i desnu stranu preko funkcije kosinus i sinus kao zasebne jednadžbe.

$$\text{Cos}(\omega t): -m\Omega^2 d_0 + k \cdot d_0 = F_0 \quad (38)$$

$$\text{Sin}(\omega t): -m\Omega^2 d_1 + k \cdot d_1 = 0 \quad (39)$$

$$\text{Cos}(\omega t): d_0 \cdot (k - m \cdot \Omega^2) = F_0 \rightarrow d_0 = \frac{F_0}{k - m \cdot \Omega^2} \quad (40)$$

$$\text{Sin}(\omega t): d_1 \cdot (k - m \cdot \Omega^2) = 0 \rightarrow d_1 = 0 \quad (41)$$

Konačno rješenje jednadžbe partikularnog dijela glasi:

$$x_P(t) = \frac{F_0}{k - m \cdot \Omega^2} \cdot \sin(\omega t) \quad (42)$$

Homogeni dio jednadžbe je jednak jednadžbi (7), te kada uvrstimo u jednadžbu (10) dobijemo konačnu jednadžbu za prisilne neprigušene oscilacije.

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) + \frac{F_0}{k - m \cdot \Omega^2} \cdot \sin(\omega t) \quad (43)$$

3.2.2 Numeričko rješenje

Da bismo riješili jednačbu (32), koristiti ćemo istu metodu rješavanja kao i za numeričko rješenje jednačbe za slobodne neprigušene oscilacije, odnosno supstituirat ćemo izraze, (24), (25) i (26) u (32):

$$m \cdot \frac{x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{\beta \Delta t^2} + k \cdot x_t = k \cdot x_{hor} \quad / \cdot \beta \Delta t^2 \quad (44)$$

Dakle, dobivamo:

$$m \cdot [x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}] + \beta \Delta t^2 \cdot k \cdot x_t = k \cdot x_{hor} \cdot \beta \Delta t^2 \quad (45)$$

Ili:

$$x_t \cdot (m + \beta \Delta t^2 \cdot k) + m \cdot [x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}] - \beta \Delta t^2 k \cdot x_{ho} = 0 \quad (46)$$

Konačno numeričko rješenje za jednačbu prisilnih neprigušenih oscilacija je:

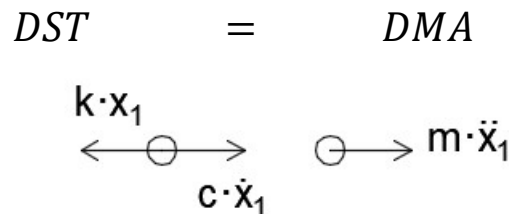
$$x_t = \beta \Delta t k \cdot x_{hor} - \frac{x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{m + \beta \Delta t^2 \cdot k} \quad (47)$$

Numeričko rješenje može poslužiti da dobijemo ponašanje sustava za bilo kakvu funkciju pobude x_{hor} , dakle ne moramo pretpostaviti njen oblik kao što smo morali da bismo dobili partikularni dio analitičkog rješenja.

3.3 Slobodne prigušene oscilacije

Do sada su se razmatrali idealni slučajevi, kada tijelo nema prigušenje ili je prigušenje dovoljno maleno da ga možemo zanemariti. Međutim, svaki sustav ima prirodno prigušenje koje smanjuje horizontalno gibanje sustava. Jednadžba kretanja slobodnih prigušenih oscilacija dobivena iz dijagrama na slici 7 glasi:

$$m \cdot \ddot{x}_1 - c \cdot \dot{x}_1 + k \cdot x_1 = 0 \quad (48)$$



Slika 9: DST i DMA dijagram za slobodne prigušene oscilacije

Izraze (2), (3) i (4) možemo supstituirati u jednadžbu (48):

$$-k \cdot x_1 + c \cdot \dot{x}_1 = m \cdot \ddot{x}_1 \quad (49)$$

Dobijemo sljedeći izraz:

$$m \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot \dot{x}_1 - k \cdot x_1 = 0 \quad (50)$$

3.3.1 Analitičko rješenje

Jednadžbu (48) možemo riješiti za iste uvjete koje smo postavili za slobodne neprigušene oscilacije:

Jednadžbe (2), (3) i (4) se substituiraju u jednadžbu (50):

$$mr^2 \cdot e^{rt} + cr \cdot e^{rt} - k \cdot e^{rt} = 0 \quad (51)$$

$$e^{rt}(m \cdot r^2 + cr - k) = 0 \quad (52)$$

Član e^{rt} nikad nije jednak nuli, dakle dobijemo karakterističnu jednadžbu kao:

$$m \cdot r^2 + cr - k = 0 \quad (53)$$

Dobivena kvadratna jednadžba se može napisati kao:

$$r_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (54)$$

Jednadžba (55) može se zapisati na drugi način:

$$r_{1,2} = \frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (55)$$

$$r_{1,2} = \frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}}$$

$$r_{1,2} = \frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{4mk - c^2}{4m^2}}$$

$$r_{1,2} = \frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

Član $\frac{c}{2m}$ možemo zapisati kao α , a s obzirom da je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, vrijedi:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4m^2}} \quad (56)$$

Odnos $\frac{c}{2m\omega}$ označava se sa grčkim slovom ζ i predstavlja koeficijent prigušenja, pa možemo zapisati:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\omega\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (57)$$

Član $\omega\sqrt{1 - \zeta^2}$ u jednadžbi (57) možemo označiti s β , dobije se sljedeći izraz:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (58)$$

S obzirom na vrijednosti ζ razlikujemo tri različita rješenja [4].

$$\zeta > 1 \quad r(t) = -\zeta\omega t \pm t \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (59)$$

$$\zeta = 1 \quad r(t) = -\zeta\omega t \quad (60)$$

$$\zeta < 1 \quad r(t) = -\zeta\omega t \pm i\omega t \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (61)$$

U prijašnjem poglavlju kompleksna jednačba je riješena pomoću Eulerov izraza, rješenje koje se traži je $\zeta < 1$ (odnosno podkritično prigušenje) je će jedino u tom slučaju sustav nastaviti vibrirati. [4]. Konačno rješenje jednačbe za slobodne prigušene oscilacije [3]:

$$x(t) = e^{\zeta\omega t} \cdot [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)] \quad (62)$$

$$x(t) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega_d t) \right] \cdot e^{-\zeta\omega t} \quad (62)$$

Gdje je: $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$ (63)

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (64)$$

3.3.2 Numeričko rješenje

Numeričko rješenje koje je izvedeno za slobodne neprigušene oscilacije može se primijeniti i za slobodne prigušene oscilacije, međutim moramo paziti na član koji se sastoji od koeficijenta c i brzine sustava.

$$m \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot \dot{x}_1 - k \cdot x_1 = 0 \quad (51)$$

U poglavlju 3.1.2. izvedene su Newmarkove jednadžbe za u nekom vremenskom trenutku i aproksimacija njegovih derivacija. Sada ćemo jednadžbe (25) i (26) uvrstiti u jednadžbu (51):

$$m \cdot \frac{x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{\beta \Delta t^2} + c \cdot [\dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t \dot{x}_t] - k \cdot x_t = 0 \quad / \cdot \beta \Delta t^2 \quad (65)$$

Dobivenu jednadžbu (65) moramo riješiti kako bi dobili x_t susptitucijom jednadžbi (26) u jednadžbu (65) dobivamo:

$$m \cdot \left[x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right] + c \beta \Delta t^2 \cdot \left[\dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t \frac{x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{\beta \Delta t^2} \right] - \beta \Delta t^2 k \cdot x_t = 0 \quad (66)$$

Iz toga slijedi.

$$m \cdot \left[x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right] + c \beta \Delta t^2 \cdot \left[\dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \frac{x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}}{\beta \Delta t} \right] - \beta \Delta t^2 k \cdot x_t = 0 \quad (67)$$

$$m \cdot \left[x_t - x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right] + c \beta \{ \Delta t^2 \dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t^3 \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t [-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}] \} + c \beta \gamma \Delta t x_t - \beta \Delta t^2 k \cdot x_t = 0 \quad (68)$$

$$m \cdot x_t + m \cdot \left[-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right] + c \beta \{ \Delta t^2 \dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t^3 \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t [-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}] \} + c \beta \gamma \Delta t x_t - \beta \Delta t^2 k \cdot x_t = 0 \quad (69)$$

$$x_t \cdot (m + c \beta \gamma \Delta t - \beta \Delta t^2 k) = -m \cdot \left[-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right] - c \beta \{ \Delta t^2 \dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t^3 \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t [-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}] \} = 0 \quad (70)$$

Konačno rješenje je:

$$x_t = - \frac{m \cdot \left[-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right] - c \beta \{ \Delta t^2 \dot{x}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t^3 \ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t [-x_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t}] \}}{(m + c \beta \gamma \Delta t - \beta \Delta t^2 k)} \quad (71)$$

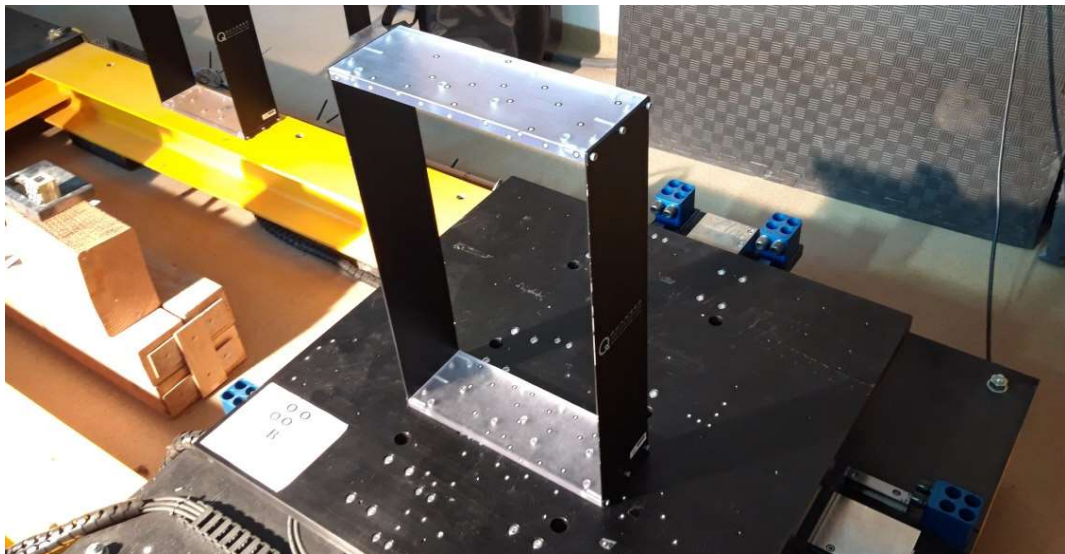
4 OPIS FIZIKALNOG MODELA OKVIRA

Eksperimentalna ispitivanja su provedena na modelu okvira, čije su karakteristike korištene za dobivanje analitičkih i numeričkih rezultata. Model je metalni okvir koji predstavlja okvir s jednim stupnjem slobode prikazan na *slici 10* i *slici 11*. Kako bi mogli riješiti problem, potrebno je naći vlastitu frekvenciju okvira. Izraz za frekvenciju već je napisan u prethodnom poglavlju 3.1. u jednadžbi (8)

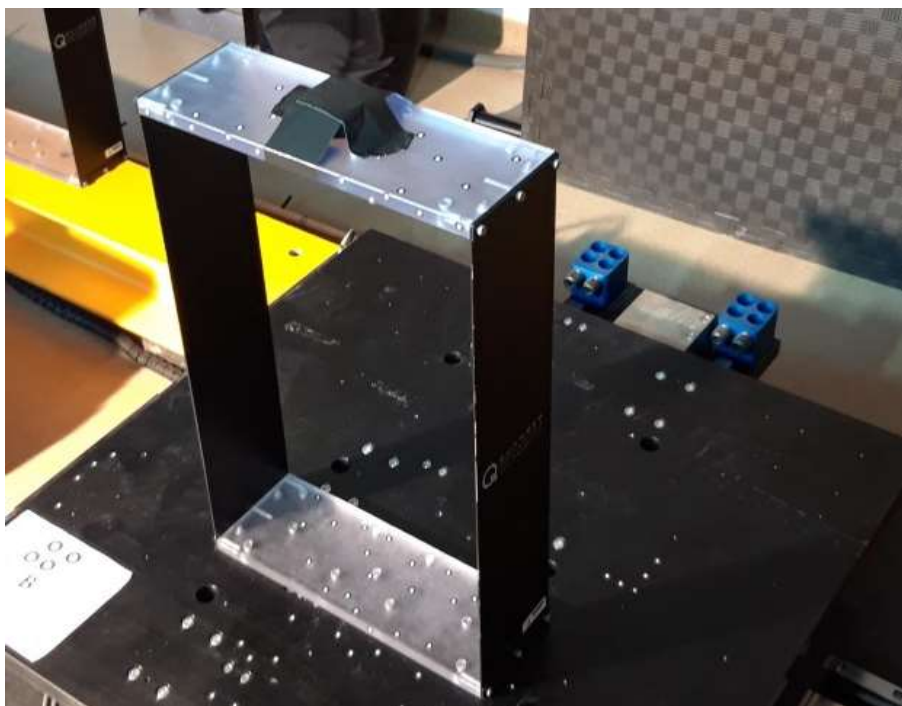
$$r_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (8)$$

odnosno:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (72)$$



Slika 10: Okvir na potresnoj ploči



Slika 11: Okvir na potresnoj ploči s promjenom težine na gornjoj stranici

Okvir koji se koristi u eksperimentu ima visinu od 500mm, širina iznosi 108 mm, debljina stijenke je 1,68 mm i masa samog okvira je 1177g (Tablica 1 i *slika 12*) bit će opterećen s tri različite mase. Prvi slučaj je okvir bez dodane mase, odnosno samo masa okvira. Za drugi slučaj na horizontalni dio okvira dodajemo masu odnosno težinu od 2N. Na trećem slučaju dodajemo težinu od 4N. Krutost okvira izračunata je eksperimentalno i iznosi 541,2765 N/m.

Visina (h)	500	mm
Širina (b)	108	mm
Debljina (t)	1,68	mm
Masa (m)	1177	g
Modul elastičnosti E	21000	kN/cm ²

Tablica 1: Dimenzije i karakteristike okvira

Potreban nam je moment inercije poprečnog presjeka stranice zida okvira, a dobit ćemo ga sljedećom jednažbom.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (73)$$

Dobivene su sljedeće vrijednosti:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,108 \cdot (1,68 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 4,267 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^4$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{541,2765}{1,177}} = 21,4447 \text{ Hz}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16,9968}{2\pi} = 3,413 \text{ Hz}$$

U tablici 2, prikazane su krutosti i vlastite frekvencije okvira nakon što smo dodali težinu od 2N i zatim od 4N.

$$2N = 2 \cdot \frac{1}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 0,204 \text{ kg}$$

$$4N = 4 \cdot \frac{1}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 0,408 \text{ kg}$$

$$m' = 1,1777 + 0,204 = 1,3738 \text{ kg}$$

$$m' = 1,1777 + 0,408 = 1,5857 \text{ kg}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{541,2765}{1,3738}} = 19,8494 \text{ Hz}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{541,2765}{1,5857}} = 18,4756 \text{ Hz}$$

	I (cm ⁴)	k (N/m)	ω (Hz)	f (Hz)
OKVIR A	4,267 · 10 ⁻¹¹	541,2765	21,4447	3,413
OKVIR B (2N)	4,267 · 10 ⁻¹¹	541,2765	19,8494	3,1591
OKVIR C (4N)	4,267 · 10 ⁻¹¹	541,2765	18,4756	2,9405

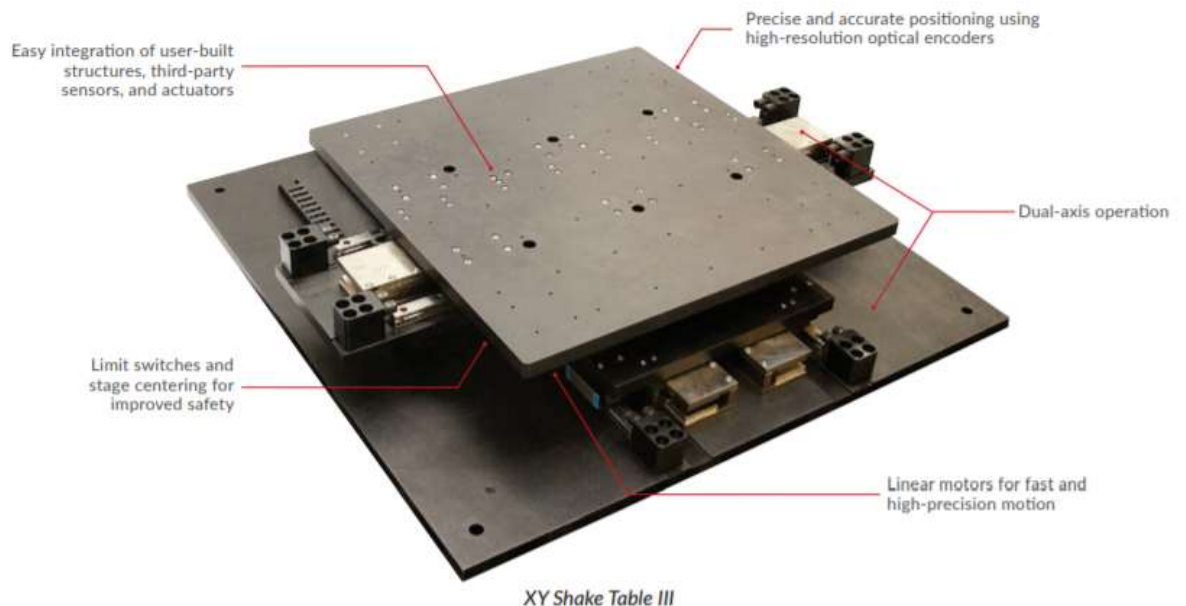
Tablica 2: Vrijednosti okvira s različitom težinom

5 OPIS EKSPERIMENTA I OPREME

Eksperimentalni dio ovog rada napravljen je u laboratoriju za konstrukcije na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Eksperiment su izvedeni na konstrukciji okvira (*slika 5*) sa promjenama težine na gornjoj gredi okvira (*slika 6*). Okvir je učvršćen na potresnu ploču Quanser STI-III koju kontrolira računalo pomoću software-a tvrtke Quanser Innovate Educate, a cijeli eksperiment mjeren je pomoću optičkog sustava GOM Aramis 4M. Detaljni postupak eksperimenta bit će objašnjen u nastavku. Pokus započinjemo s okvirom koji je opterećen samo svojom težinom.

5.1 Quanser sustav

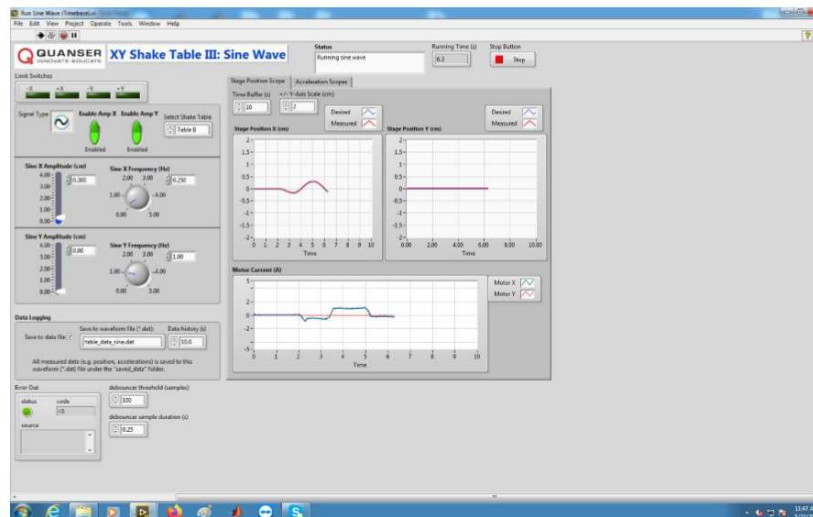
Quanser sustav za simulaciju potresa sadrži linearne pokretne stolove sa dva stupnja slobode koji su sposobni simulirati dinamičke pobude i potrese s različitim vremenskim zapisima. Sustavi rade bez hidraulike, jednostavni su za rukovanje, tihi i zahtijevaju jako malo održavanja (prikazano na *slici 14*) (Quanser Innovate Educate, 2019).



Slika 12: Potresni stol (Quanser Innovate Educate, 2019)

Potresni stol koji se nalazi u laboratoriju je Quanser Shake Table III XY, koji se sastoji od ploče koja se pokreće i ploče koja je nepomična na tlu. Gornju ploču pokreću tri linearna motora koji se mogu kretati u x ili y smjeru. Istovremeno djelovanje motora u oba smjera omogućava kretanje u XY ravnini. Dimenzije potresnog stola donje ploče je 106,7x106,4x20,3 cm, ukupna masa mu je 550 k a najveći pomak od +/- 10,8 cm u x i y smjeru [5].

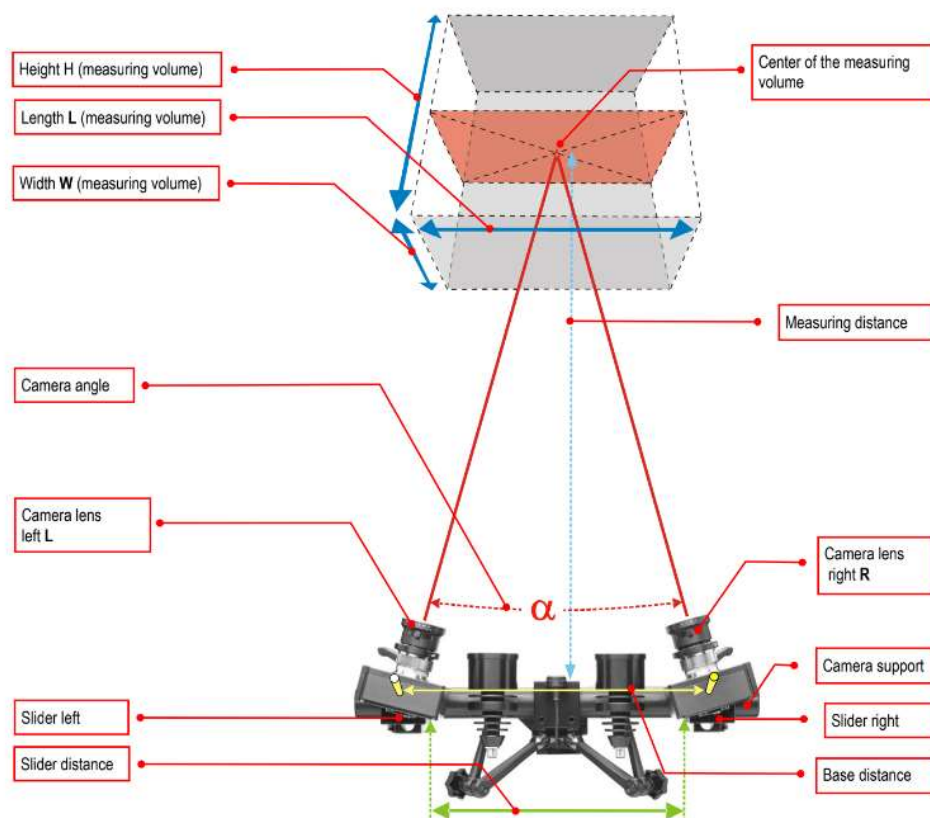
Potresnim stol upravljamo pomoću software-a u koji unosimo podatke o željenim pomacima. Unosimo informacije o vrsti funkcije pomaka kao što su harmonijska funkcija ili potresni zapis, trajanju eksperimenta, amplitudi i smjerovima u kojima želimo nanijeti pomak platforme(*slika 15*).



Slika 13: Software Quanser (Quanser Innovate Educate, 2019)

5.2 Aramis sustav

Aramis sustav je bezkontaktni 3D mjerni sustav za mjerenje pomaka i deformacija. Za 3D mjerenje koristimo 2 kamere koje su kalibrirane prije mjerenja. Sustav se sastoji od 2 kamere, stalka, svijetla, laserskog pokazivača i ARAMIS softver(slika 16) [6] .



Slika 14: Aramis sustav [6]

Sustav kamera prati položaj diskretnih točaka na površini nekog tijela sa 160 slika u sekundi. Kako bismo mjerili pomak okvira u eksperimentu, koristimo crno bijele točkice , koje naljepljujemo na okvir i čije položaje sustav prati tijekom cijelog eksperimenta. Aramis sustav je potrebno kalibrirati prije laboratorijskog ispitivanja. Da bi kalibrirali sustav koristimo službeni priručnik sustava. Detaljni opis kalibriranja kamera objašnjeno je u nastavku.

5.2.1 Kalibriranje kamere

Kalibracija je proces tijekom kojeg se mjerni sustav uz pomoć kalibracijskih objekata podešava da bi mjerenje u prostoru za zadani objekt bilo što točnije. Prilikom kalibracije moramo odrediti udaljenost objekta kojeg snimamo od kamera, u ovom slučaju odabrana udaljenost je 90 cm. Zatim moramo odrediti ± 20 cm od te udaljenosti jer nam to pomaže da kalibriramo na određeni mjerni volumen. Leće koje koristimo su promjera 20mm i razmak kamera od centralne osi nosača kamera iznosi 400mm. Svi ti podaci su nam potrebni za daljnje korake. Nakon što smo postavili nosač kamere, postavljamo kalibracijski objekt (*slika 11*) postavljen na magnetni oslonac koji je udaljen od centralne osi kamere za 90cm.



Slika 15: Kalibracijski objekt

Nakon postavljanja kalibracijskog objekta pomoću laserskog pokazivača koji se nalazi u kameri, namještamo kamere tako da im je fokus u središtu kalibracijskog objekta. Sljedeći korak je podešavanje oštine leća i svijetlosti. Kada je sve podešeno počinje kalibracija kamere pomoću softwera. Kalibracija se sastoji do 13 različitih pozicija kamere. Prvi korak je kalibracija kamere na udaljenosti 90cm od kalibracijskog objekta, zatim približavamo kameru, a potom udaljimo kameru za ± 20 cm. Kada su ti koraci uspješno napravljeni sljedeći je namjestiti kamere na središte kalibracijskog objekta i kalibracijski objekt nagnuti za 40 stupnjeva unazad, zatim tako nagnuti objekt zarotirati za 180 stupnjeva. Nakon toga potrebno je kalibracijski objekt ponovno nagnuti na 0 stupnjeva, i dok je objekt zarotiran za 180 stupnjeva pomaknuti stalak kamere na način da lijeva kamera gleda okomito na objekt. Sljedeći korak je rotiranje kalibracijskog objekta na 270 stupnjeva, zatim na 0 stupnjeva i na kraju na 90 stupnjeva. Kada je lijeva kamera kalibrirana moramo kalibrirati desnu kameru na način da pomaknemo desnu kameru da je leća okomita na sredinu kalibracijskog objekta dok je objekt i dalje zarotiran na 90 stupnjeva. Zatim okrećemo kalibracijski objekt na 190 stupnjeva, potom na 270 stupnjeva i na kraju vraćamo na 0 stupnjeva. Nakon toga kalibracija je uspješno provedena i možemo početi snimati eksperiment.

5.3 Opis eksperimenta

Eksperiment je zamišljen tako da bazu okvira pomoću vijaka pričvrstimo za okvir, te za tri okvira s različitim masama na gornjoj gredi okvira provodimo eksperiment s jednakom pobudom odnosno da su amplituda, frekvencija i vrijeme trajanja uvijek istog iznosa. Svaki eksperiment se provodi kroz 15 sekundi. Provedene su tri serije eksperimenata s tri različite pobude. Prva pobuda je izazvana rukom na način da je gornja ploha izmaknuta iz početnog položaja i otpuštena iz stanja mirovanja. Druga pobuda je harmonijsko gibanje podloge, a treća pobuda je primjer potresa u Norhtridge-u koji se dogodio 17. siječnja 1994. godine magnitude 6,7. Počinjena šteta tog potresa je dvadeset milijuna dolara i nažalost potres je uzeo 57 života [7].

6 REZULTATI

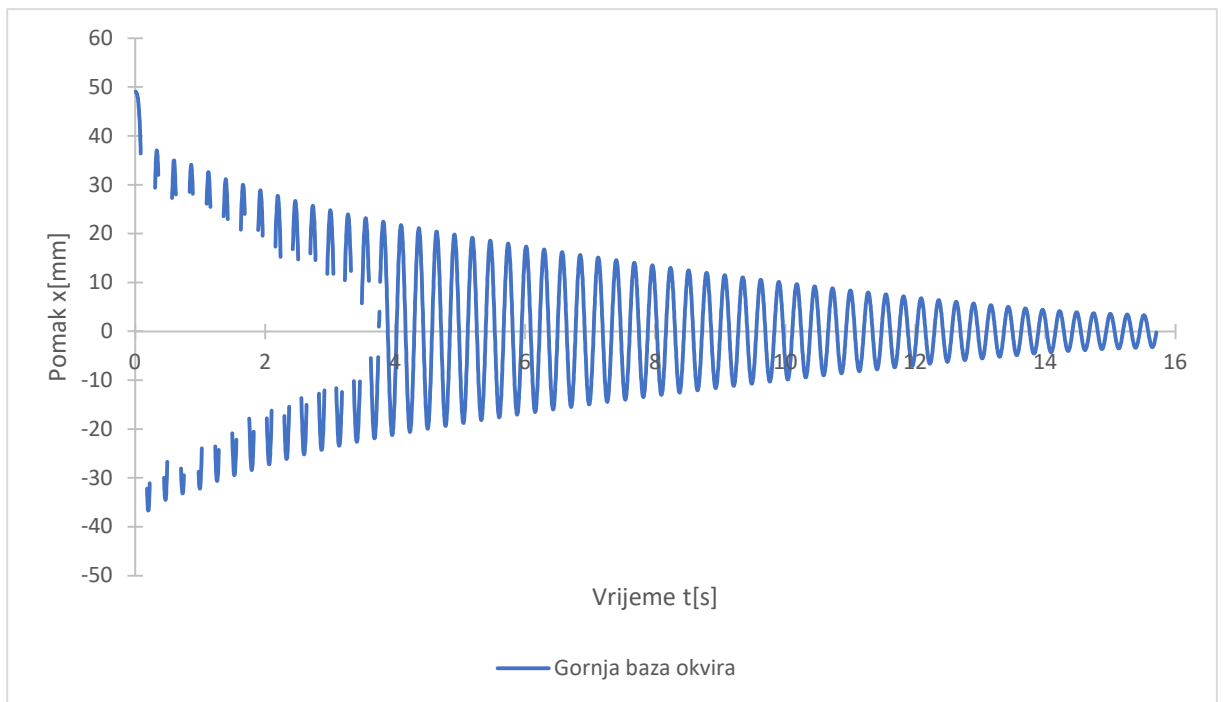
6.1 Eksperimentalni rezultati

Dodana masa	Pobuda	Naziv
0	slobodne oscilacije	Exp1
1x2N	slobodne oscilacije	Exp2
2x2N	slobodne oscilacije	Exp3
2x2N	Sinesweep (u = 0,2 cm; f = 1...5 Hz)	Exp4
0	Sinesweep (u = 0,2 cm; f = 1...5 Hz)	Exp6
0	Norridge	Exp7
0	Norridge	Exp8
1x2N	Norridge	Exp9
1x2N	Norridge	Exp10
2x2N	Norridge	Exp11
2x2N	Norridge	Exp12

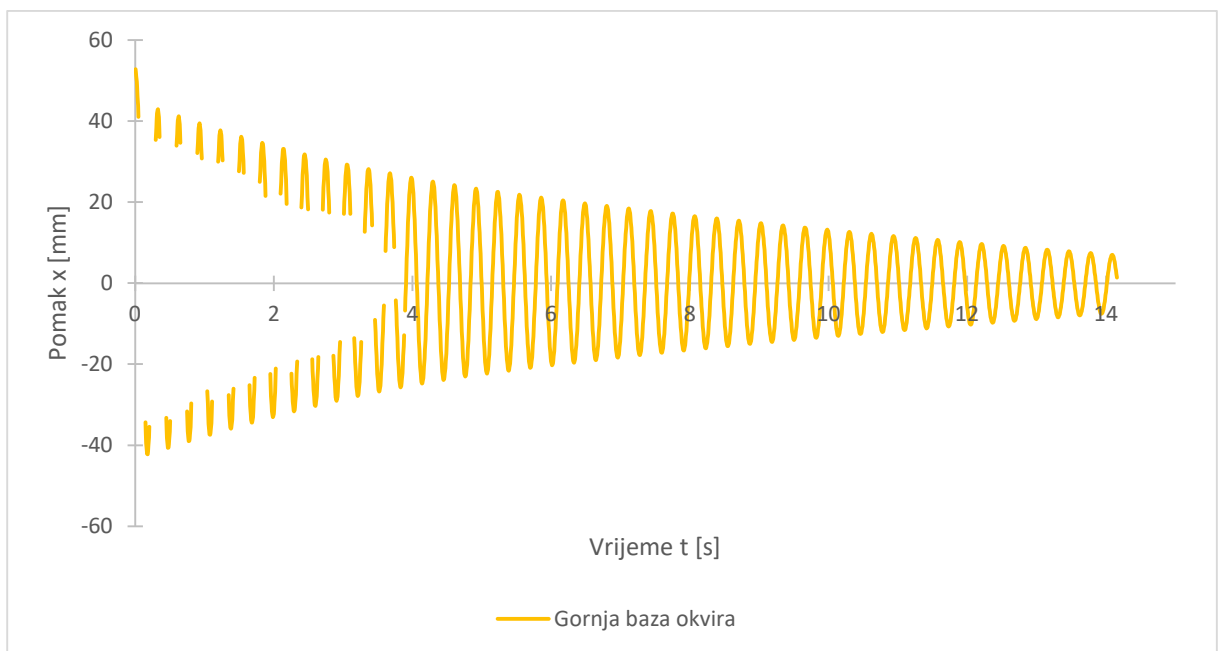
Tablica 3: Informacije o provedenim eksperimentima

6.1.1 Slobodne oscilacije

Početak pokusa konstrukcija se kreće deformirati u stranicama okvira. Nakon određenog vremena njihanje dostiže svoj maksimum, zbog različite frekvencije tijela s frekvencijom vibracije, konstrukciji je potrebno neko vrijeme da se prestane nekontrolirano njihati. Po završetku pokusa, nakon pomnog promatranja primjećujemo da se konstrukcija koja ima veću masu na gornjoj horizontalnoj plohi prije vrati minimalnom njihanju. Konstrukcija koja ima veću masu na gornjoj plohi ima manje horizontalne i vertikalne pomake.



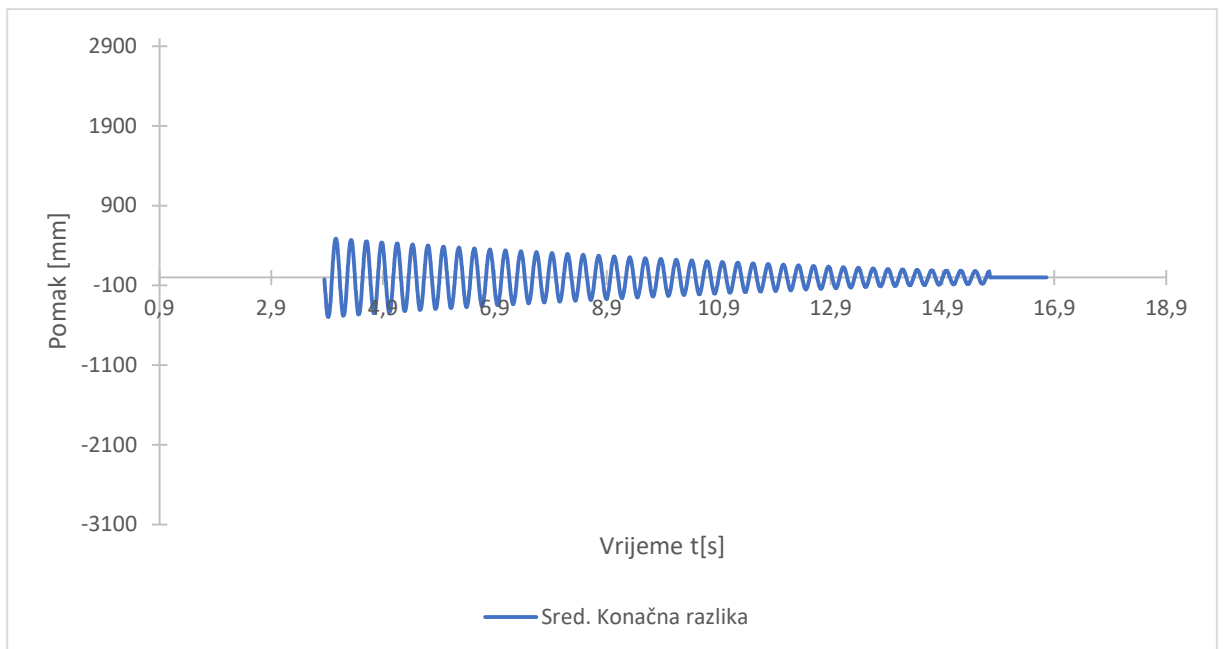
Slika 16: Eksperiment 1, pobuda rukom, bez opterećenja



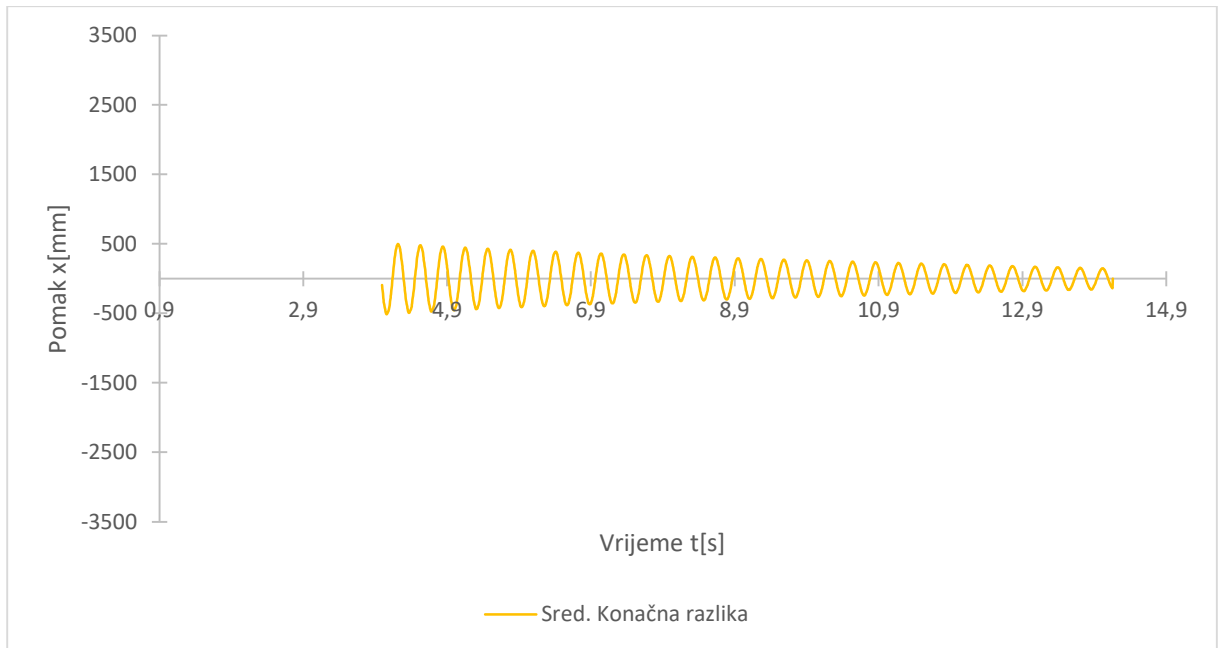
Slika 17: Eksperiment 2, pobuda rukom, opterećenje 2N



Slika 18: Eksperiment 3, pobuda rukom, opterećenje 2N



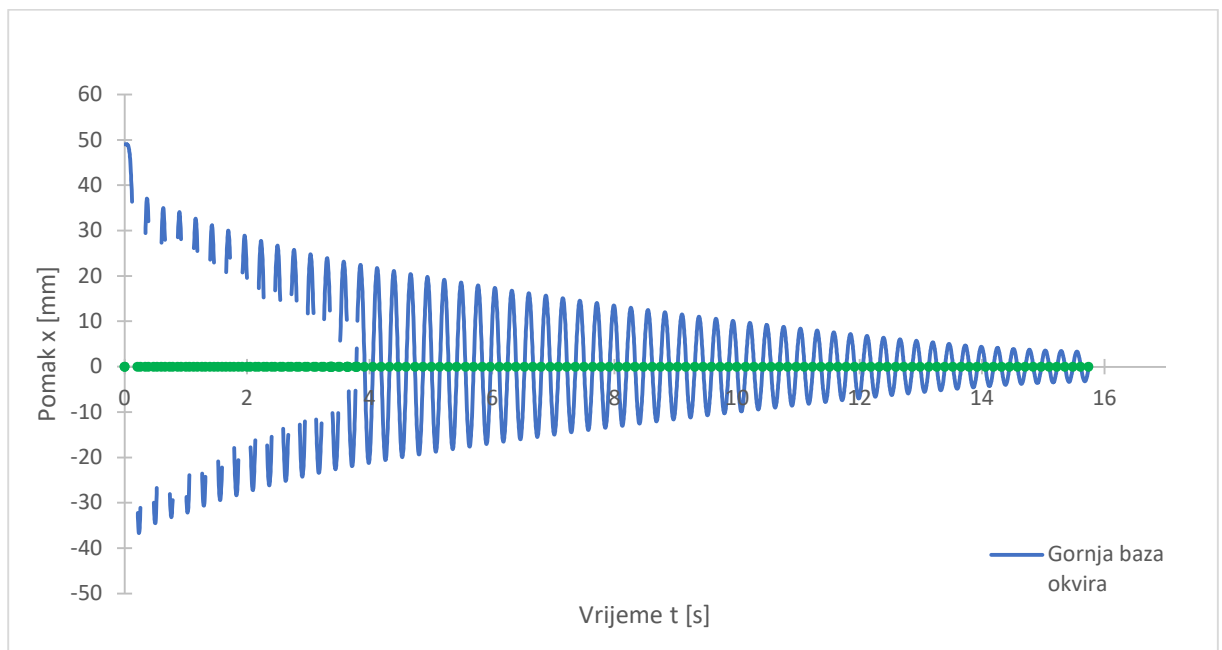
Slika 19: Eksperiment 1, srednja konačna razlika, bez opterećenja



Slika 20: Eksperiment 2, srednja konačna razlika, opterećenje 2N



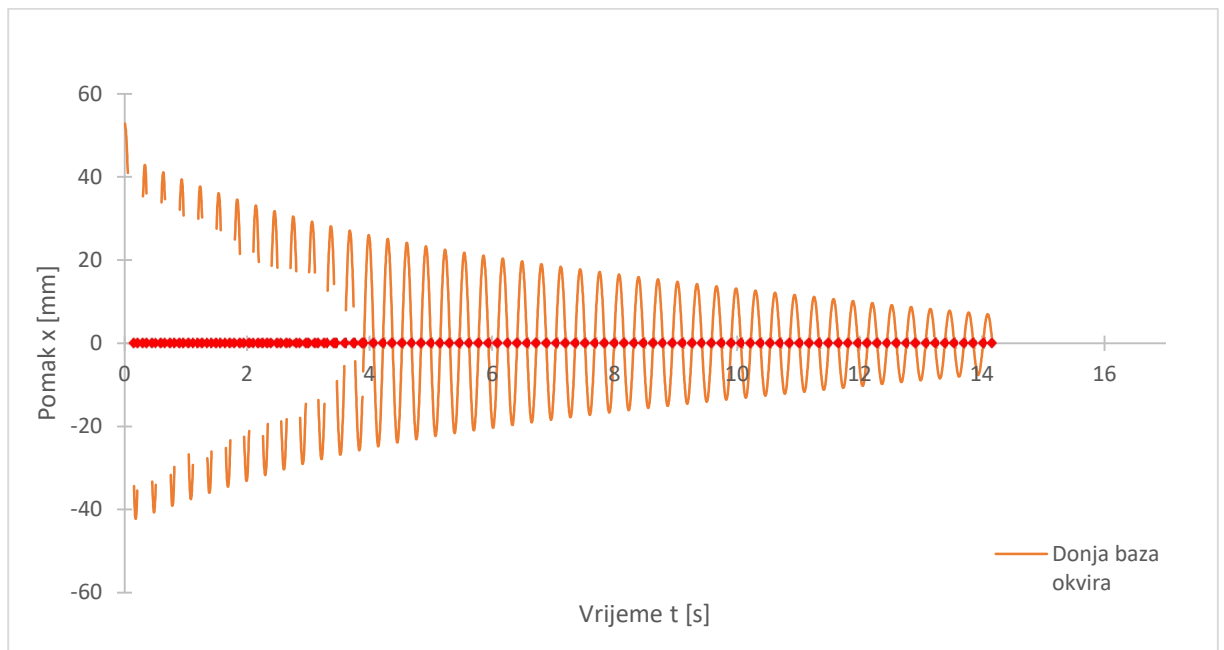
Slika 21: Eksperiment 3, Srednja konačna razlika, opterećenje 4N



Slika 22: Eksperiment 1, nul točke

Izračun prosječne valne duljine se računa tako da se nađe nulte točke dijagrame. Oduzmu se dvije vrijednosti vremena kako bi se dobila valna duljina, zatim se nađe srednja vrijednost valne duljine. S obzirom da ima jako puno točaka za ovaj dijagram, izračun je napravljen u Excel-u priloženog na dnu rada.

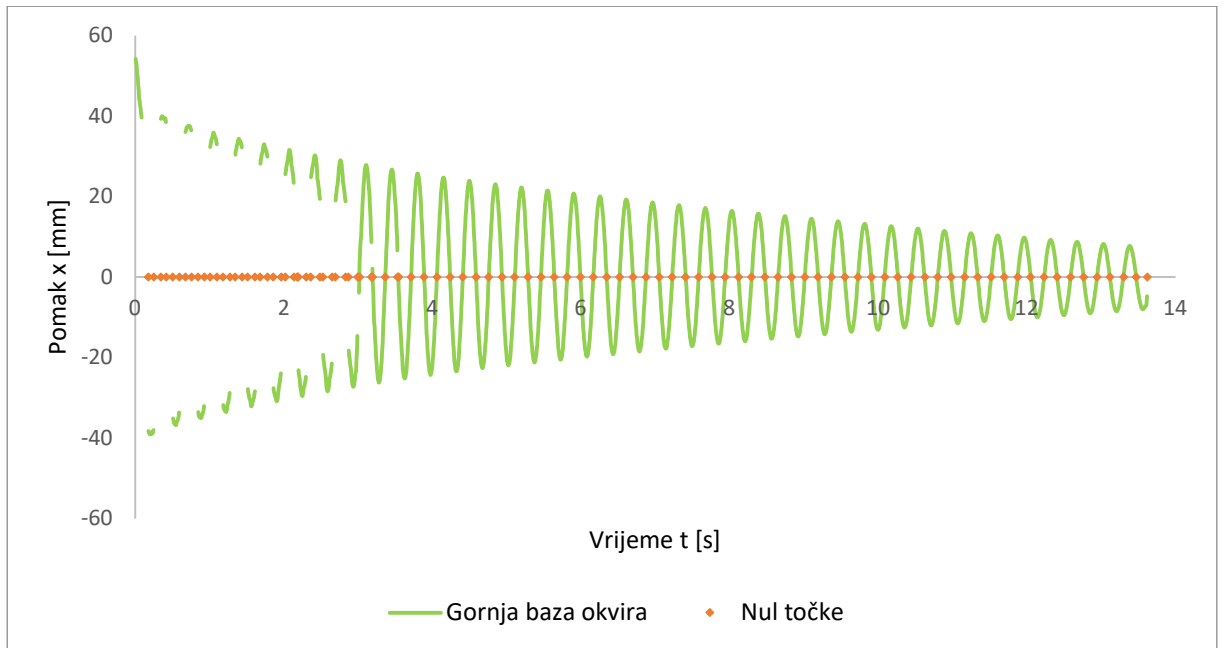
$$\lambda_{sred.} = 0,2098s$$



Slika 23: Eksperiment 2, nul točke

Izračun prosječne valne duljine se računa tako da se nađe nulte točke dijagrame. Oduzmu se dvije vrijednosti vremena kako bi se dobila valna duljina, zatim se nađe srednja vrijednost valne duljine. S obzirom da ima jako puno točaka za ovaj dijagram, izračun je napravljen u Excel-u priloženog na dnu rada.

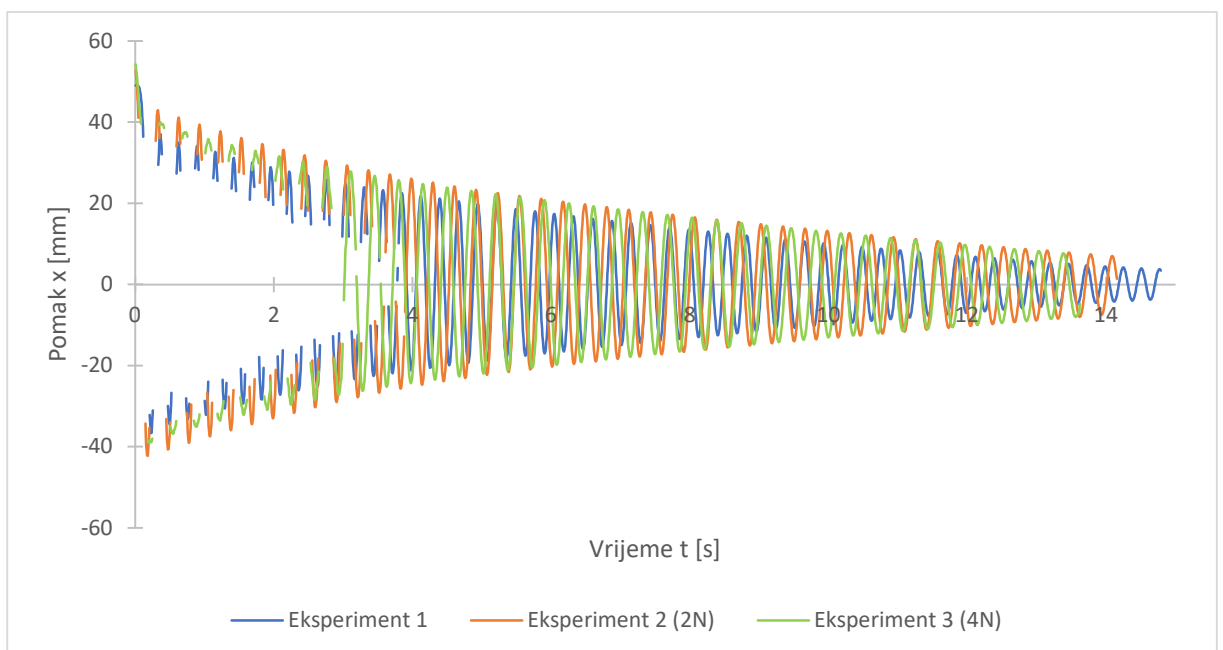
$$\lambda_{sred.} = 0,2335s$$



Slika 24: Eksperiment 3, nul točke

Izračun prosječne valne duljine se računa tako da se nađe nulte točke dijagrama. Oduzmu se dvije vrijednosti vremena kako bi se dobila valna duljina, zatim se nađe srednja vrijednost valne duljine. S obzirom da ima jako puno točaka za ovaj dijagram, izračun je napravljen u Excel-u priloženog na dnu rada.

$$\lambda_{sred.} = 0,2713s$$



Slika 25: Usporedba rezultata, pobuda rukoom

6.2 Analitički rezultati

6.2.1 Slobodne neprigušene oscilacije

Kako bi odredili pomake analitičkim postupkom uzet ćemo početni položaj očitano iz dijagrama prvog eksperimenta, zatim izračunati za svaki vremenski pomak do 15s u razmaku od 0,025s.

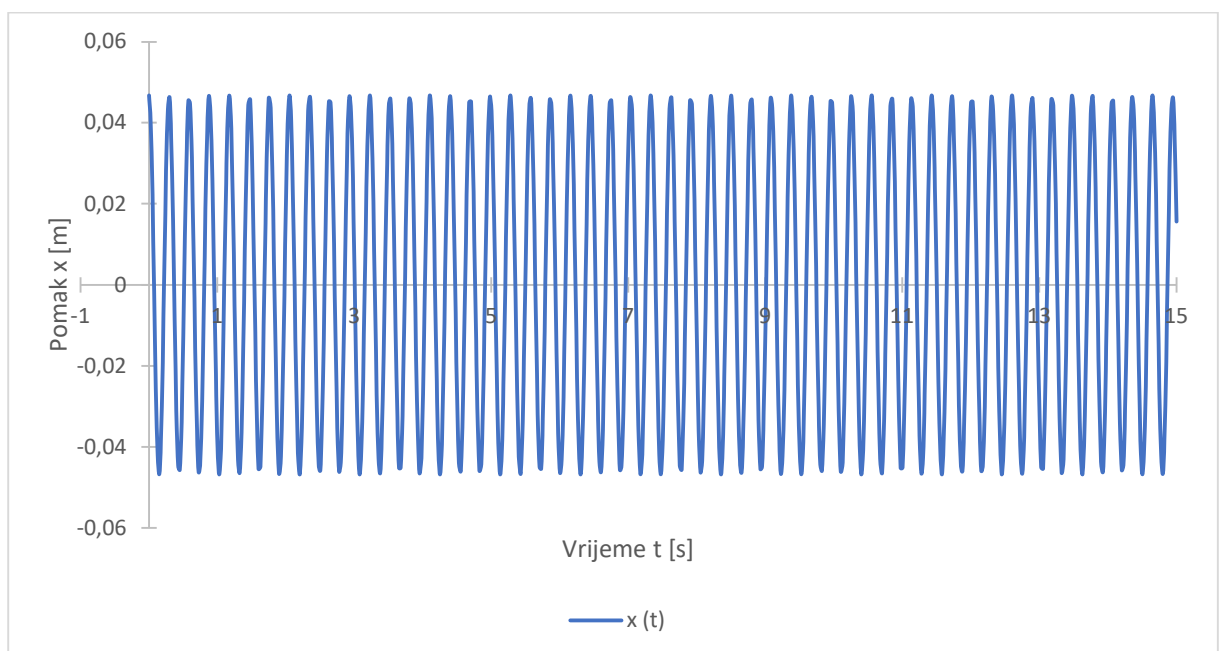
$$\begin{aligned}x_0 &= 0,0468 \text{ m} \\f &= 3,4130 \text{ Hz} \\ \Delta t &= 15 \text{ s}\end{aligned}$$

Prvi vremenski korak za $t = 0,025 \text{ s}$

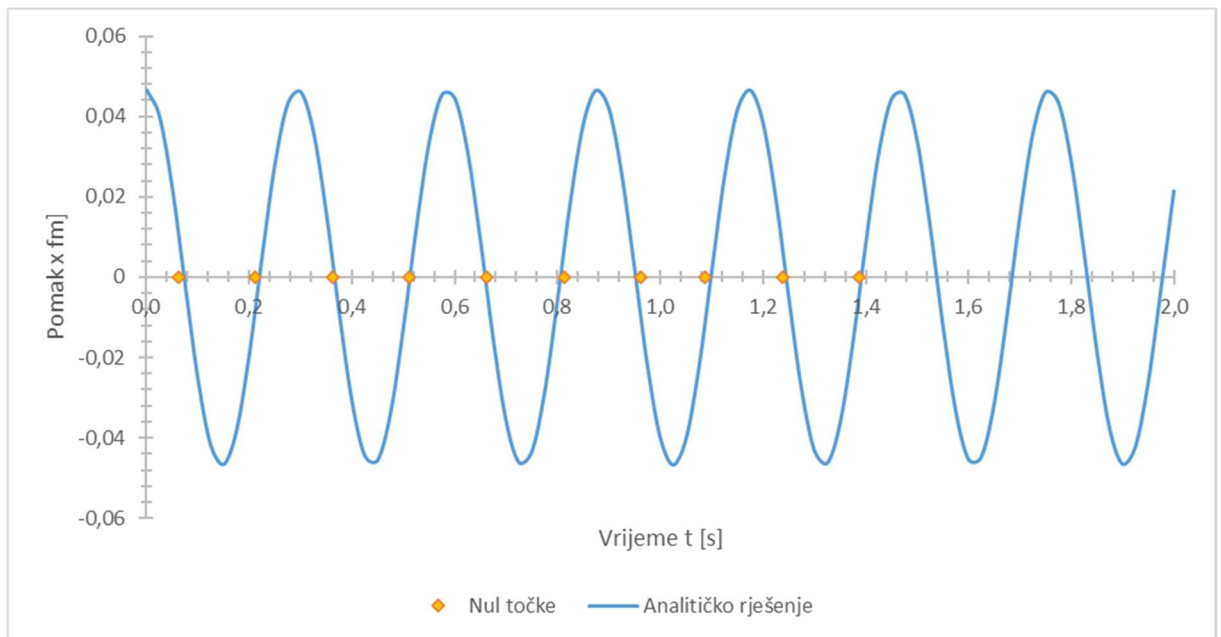
$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \quad (18)$$

$$x(0,025 \text{ s}) = 0,0468 \cdot \cos(21,4447 \cdot 0,025) + 0 = 0,04023 \text{ m}$$

Ostali vremenski koraci raditi će se u tablici za ovaj izračun kao i za svaki sljedeći, biti će izračunati pomoću Excel programa. Proračun se nalazi u prilogima na kraju rada.



Slika 26: Dijagram analitičkog rješenja eksperiment 1, bez opterećenja



Slika 27: Eksperiment 1, izračun valne duljine, bez opterećenja

Izračun prosječne valne duljine se računa tako da se nađe nulte točke dijagrama. Oduzmu se dvije vrijednosti vremena kako bi se dobila valna duljina, zatim se nađe srednja vrijednost valne duljine.

$$t_1 = 0,0625 \text{ m}$$

$$t_2 = 0,3625 \text{ m}$$

$$t_3 = 0,6625 \text{ m}$$

$$t_4 = 0,9625 \text{ m}$$

$$t_5 = 1,2375 \text{ m}$$

$$t_6 = 1,5375 \text{ m}$$

$$t_7 = 1,8375 \text{ m}$$

$$\lambda_1 = t_2 - t_1 = 0,3625 - 0,0625 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = t_3 - t_2 = 0,6625 - 0,3625 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_3 = t_4 - t_3 = 0,9625 - 0,6625 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_4 = t_5 - t_4 = 1,2375 - 0,9625 = 0,275 \text{ m}$$

$$\lambda_5 = t_6 - t_5 = 1,5375 - 1,2375 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_6 = t_7 - t_6 = 1,8375 - 1,5375 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_{sred.} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6}{6} = \frac{0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,275 + 0,3 + 0,3}{6} = 0,2958s$$

$$\lambda_{sred.} \text{ jednaka je } \frac{1}{f} \text{ odnosno } \lambda_{sred.} = 0,2958 = \frac{1}{f} = \frac{1}{3,413} = 0,293s$$

Eksperiment 2:

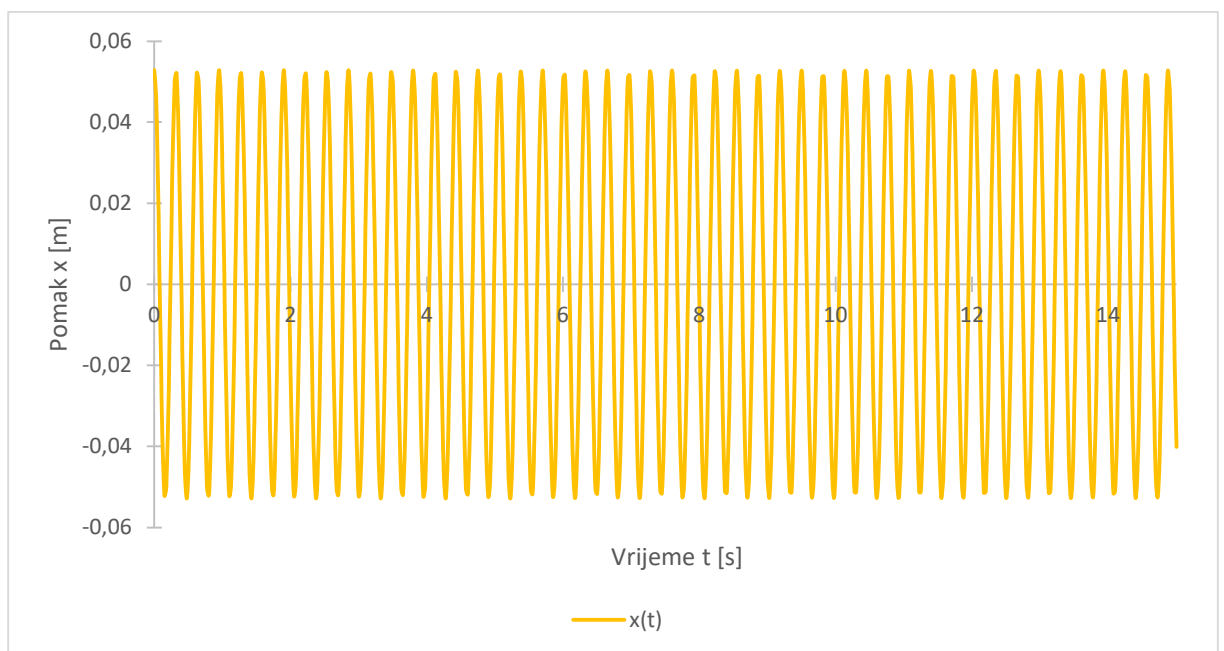
$$x_0 = 0,05285 \text{ m}$$

$$f = 3,1591 \text{ Hz}$$

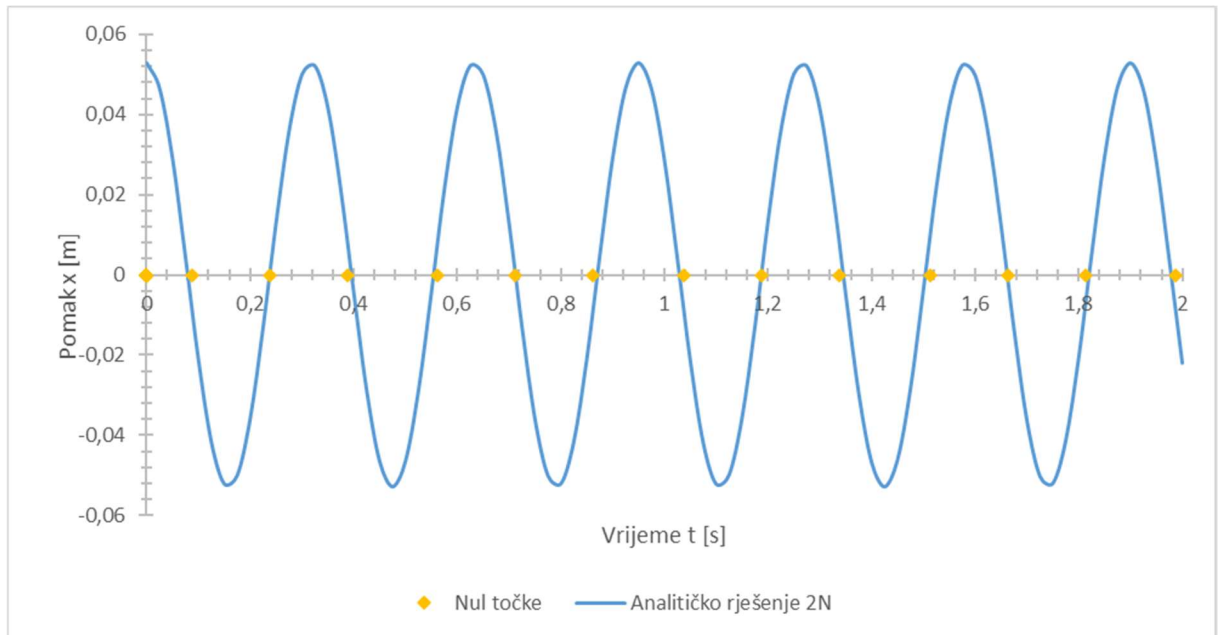
Prvi vremenski korak za $t = 0,025 \text{ s}$

$$x(0,025 \text{ s}) = 0,05285 \cdot \cos(19,84 \cdot 0,025) + 0 = 0,046476 \text{ m}$$

Ostali vremenski koraci raditi će se u tablici za ovaj izračun kao i za svaki sljedeći, biti će izračunati pomoću Excel programa. Proračun se nalazi u priložima na kraju rada.



Slika 28: Dijagram analitičkog rješenja eksperiment 2, opterećenje 2N



Slika 29: Eksperiment 2, izračun valne duljine, opterećenje 2N

Izračun prosječne valne duljine se računa tako da se nađe nulte točke dijagrama. Oduzmu se dvije vrijednosti vremena kako bi se dobila valna duljina, zatim se nađe srednja vrijednost valne duljine.

$$t_1 = 0,0875 \text{ m}$$

$$t_2 = 0,3875 \text{ m}$$

$$t_3 = 0,7125 \text{ m}$$

$$t_4 = 1,0375 \text{ m}$$

$$t_5 = 1,3375 \text{ m}$$

$$t_6 = 1,6625 \text{ m}$$

$$t_7 = 1,9875 \text{ m}$$

$$\lambda_1 = t_2 - t_1 = 0,3875 - 0,0875 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = t_3 - t_2 = 0,7125 - 0,3875 = 0,325 \text{ m}$$

$$\lambda_3 = t_4 - t_3 = 1,0375 - 0,7125 = 0,325 \text{ m}$$

$$\lambda_4 = t_5 - t_4 = 1,3375 - 1,0375 = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda_5 = t_6 - t_5 = 1,6625 - 1,3375 = 0,325 \text{ m}$$

$$\lambda_6 = t_7 - t_6 = 1,9875 - 1,6625 = 0,325 \text{ m}$$

$$\lambda_{sred.} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6}{6} = \frac{0,3 + 0,325 + 0,325 + 0,3 + 0,325 + 0,325}{6} = 0,3167 \text{ s}$$

$$\lambda_{sred.} \text{ jednaka je } \frac{1}{f} \text{ odnosno } \lambda_{sred.} = 0,3167 = \frac{1}{f} = \frac{1}{3,159} = 0,3165 \text{ s}$$

Eksperiment 3:

Za treći eksperiment, moramo povećati težinu za 4N, i tu težinu podijeliti na dva jednaka djela i dodati početnoj masi.

$$x_0 = 0,04909 \text{ m}$$

$$f = 2,396 \text{ Hz}$$

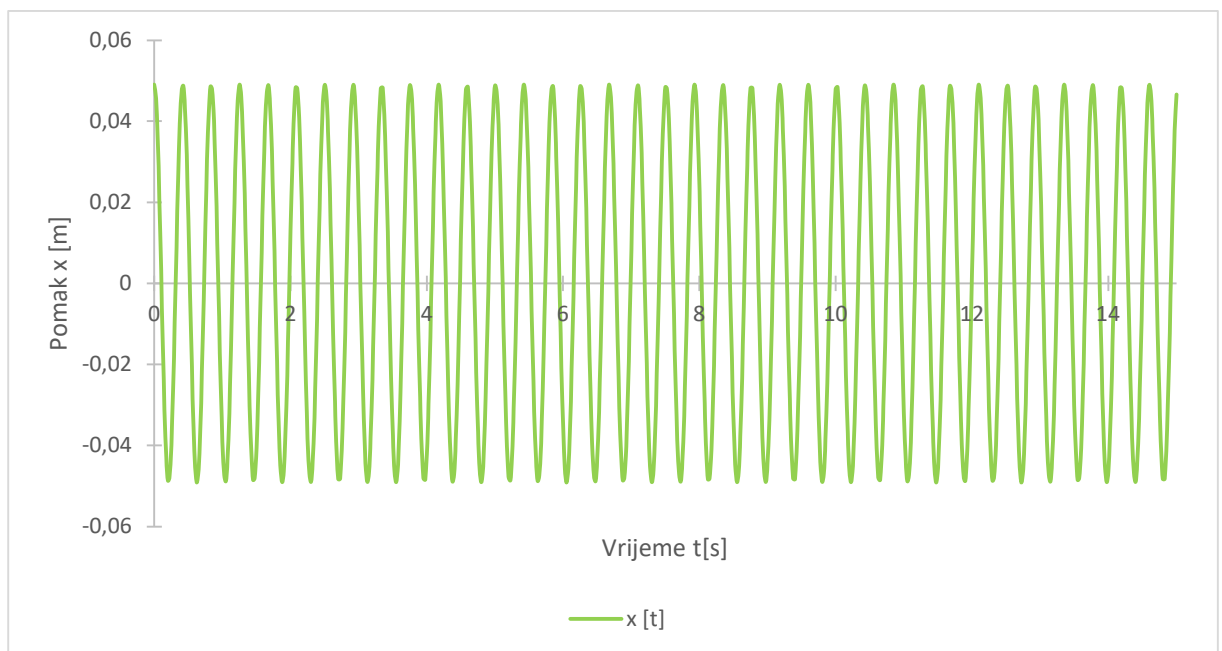
Riješenje:

Prva iteracija za $t = 0,025\text{s}$

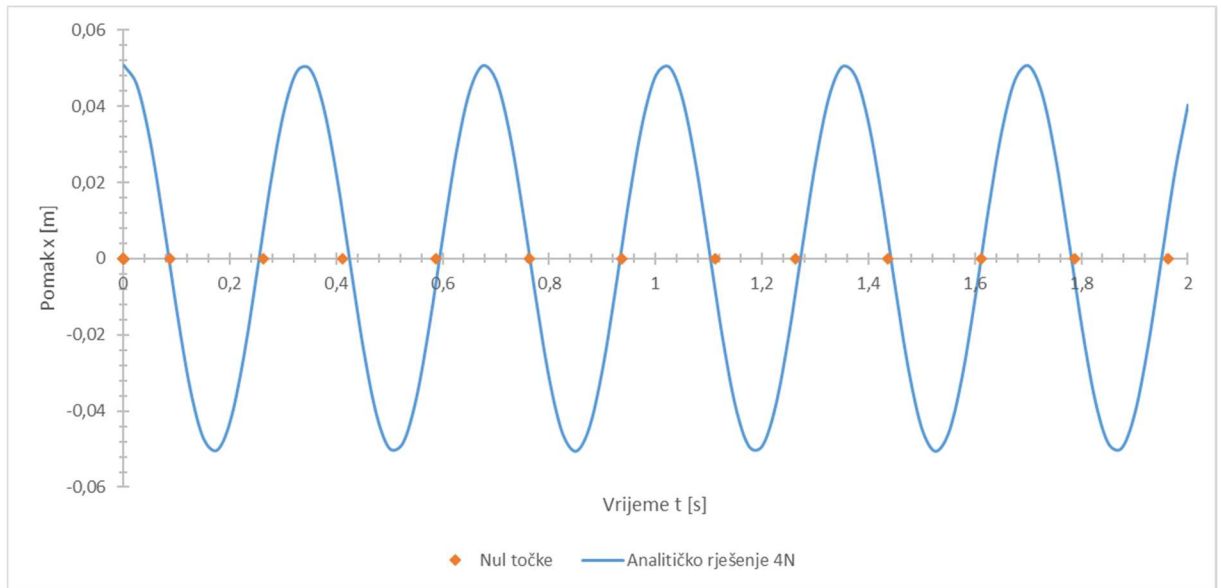
$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \quad (18)$$

$$x(0,5\text{s}) = 0,4909 \cdot \cos(15,058 \cdot 0,025) + 0 = 0,4565 \text{ cm}$$

Ostali vremenski koraci raditi će se u tablici za ovaj izračun kao i za svaki sljedeći, biti će izračunati pomoću Excel programa. Proračun se nalazi u prilogima na kraju rada.



Slika 30: Dijagram analitičkog rješenja eksperiment 3, opterećenje 4N



Slika 31: Eksperiment 3, izračun valne duljine, opterećenje 4N

Izračun prosječne valne duljine se računa tako da se nađe nulte točke dijagrama. Oduzmu se dvije vrijednosti vremena kako bi se dobila valna duljina, zatim se nađe srednja vrijednost valne duljine.

$$t_1 = 0,0875 \text{ m}$$

$$t_2 = 0,4125 \text{ m}$$

$$t_3 = 0,7625 \text{ m}$$

$$t_4 = 1,1125 \text{ m}$$

$$t_5 = 1,4375 \text{ m}$$

$$t_6 = 1,7875 \text{ m}$$

$$t_7 = 2,1125 \text{ m}$$

$$\lambda_1 = t_2 - t_1 = 0,4125 - 0,0875 = 0,325 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = t_3 - t_2 = 0,7625 - 0,4125 = 0,35 \text{ m}$$

$$\lambda_3 = t_4 - t_3 = 1,1125 - 0,7625 = 0,35 \text{ m}$$

$$\lambda_4 = t_5 - t_4 = 1,4375 - 1,1125 = 0,325 \text{ m}$$

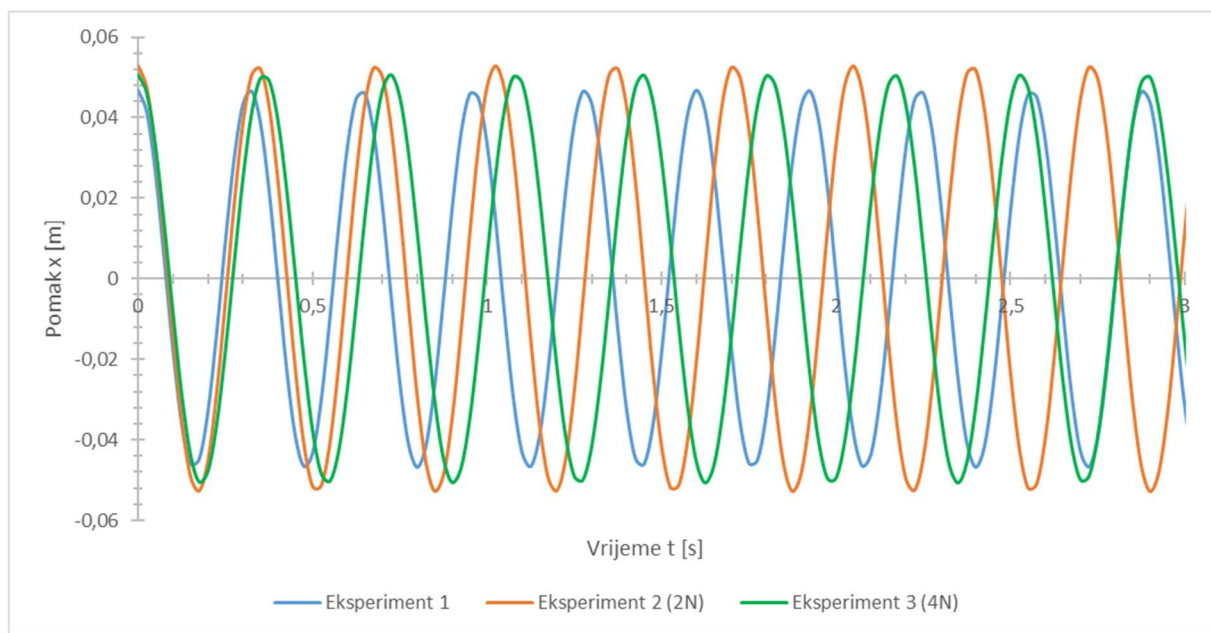
$$\lambda_5 = t_6 - t_5 = 1,7875 - 1,4375 = 0,35 \text{ m}$$

$$\lambda_6 = t_7 - t_6 = 2,1125 - 1,7875 = 0,325 \text{ m}$$

$$\lambda_{sred.} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6}{6} = \frac{0,325 + 0,35 + 0,35 + 0,325 + 0,35 + 0,325}{6} = 0,3375s$$

$$\lambda_{sred.} \text{ jednaka je } \frac{1}{f} \text{ odnosno } \lambda_{sred.} = 0,3375 = \frac{1}{f} = \frac{1}{2,947} = 0,3392s$$

Kako se može vidjeti iz računskog postupka, povećanjem mase na gornjoj gredi okvira smanjuje se vlastita frekvencija, odnosno povećava vlastiti period gibanja(slika 34).



Slika 32: Usporedba analitičkih rezultata

6.2.2 Slobodne prigušene oscilacije

U prijašnjem poglavlju problem je riješen jednačbom za slobodne neprigušene oscilacije, sada će se ponoviti isti postupak samo s jednačbom za slobodne prigušene oscilacije. S obzirom da je koeficijent prigušenja nepoznanica, pretpostavljamo ga i pomoću Excela pretpostavljamo vrijednost koeficijenta na način da uskladimo eksperimentalni dijagramom s analitičkim dijagramom.

Eskperiment 1:

$$x_0 = 0,0468 \text{ m}$$

$$f = 3,413 \text{ Hz}$$

$$\zeta = 0,02$$

Rješenje:

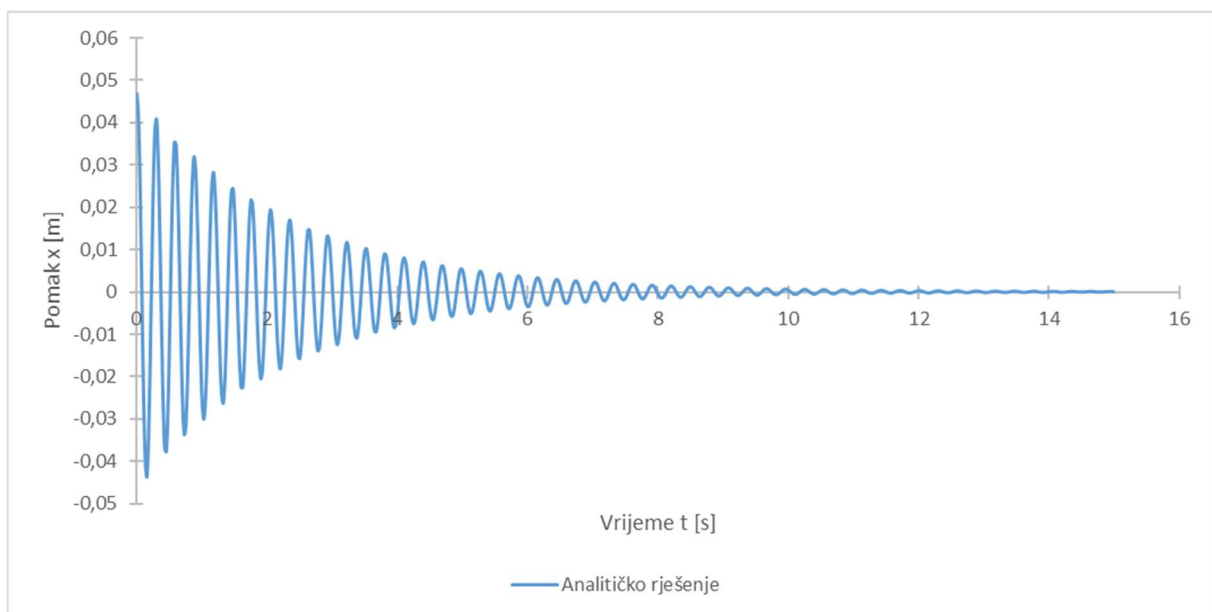
$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} = 21,444 \cdot \sqrt{1 - 0,02^2} = 21,4405$$

$$\psi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0,02}{\sqrt{1 - 0,02^2}} \right) = 0,02$$

Prvi vremenski korak za $t = 0,025 \text{ s}$

$$x(t) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega_d t) \right] \cdot e^{-\zeta \omega t}$$

$$x(0,025) = \left[\frac{0,0468}{\sqrt{1 - 0,02^2}} \cos(21,4405 \cdot 0,025 - 0,02) \right] \cdot e^{-0,02 \cdot 21,444 \cdot 0,025} = 0,04028 \text{ m}$$



Slika 33: Dijagram analitičkog rješenja, bez opterećenja

Eskperiment 2:

$$x_0 = 0,05285 \text{ m}$$

$$f = 3,1591 \text{ Hz}$$

$$\zeta = 0,01$$

Rješenje:

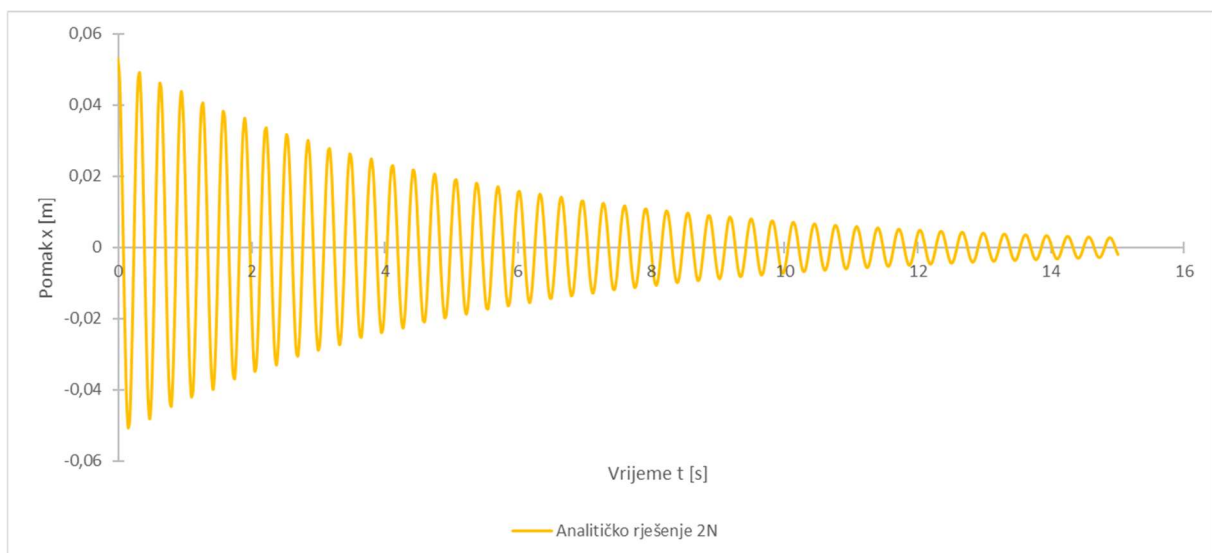
$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} = 19,8494 \cdot \sqrt{1 - 0,01^2} = 19,8484$$

$$\psi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0,01}{\sqrt{1 - 0,01^2}} \right) = 0,01$$

Prvi vremenski korak za $t = 0,025\text{s}$

$$x(t) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega_d t) \right] \cdot e^{-\zeta \omega t}$$

$$x(0,025) = \left[\frac{0,05285}{\sqrt{1 - 0,01^2}} \cos(19,8484 \cdot 0,025 - 0,01) \right] \cdot e^{-0,01 \cdot 19,8494 \cdot 0,025} = 0,0465 \text{ m}$$



Slika 34: Dijagram analitičkog rješenja, opterećenje 2N

Eskperiment 3:

$$x_0 = 0,0507m$$

$$f = 2,9049 \text{ Hz}$$

$$\zeta = 0,016$$

Rješenje:

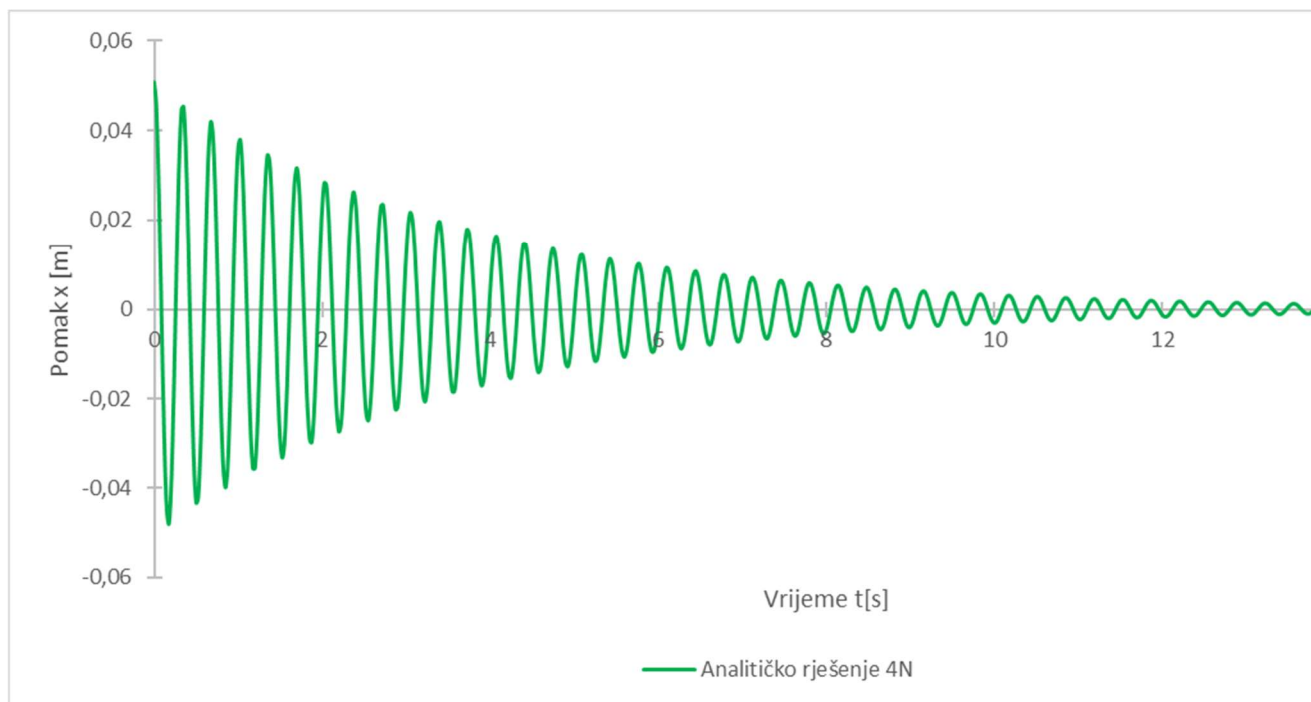
$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} = 18,4756 \cdot \sqrt{1 - 0,016^2} = 18,4733$$

$$\psi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0,016}{\sqrt{1 - 0,016^2}} \right) = 0,016$$

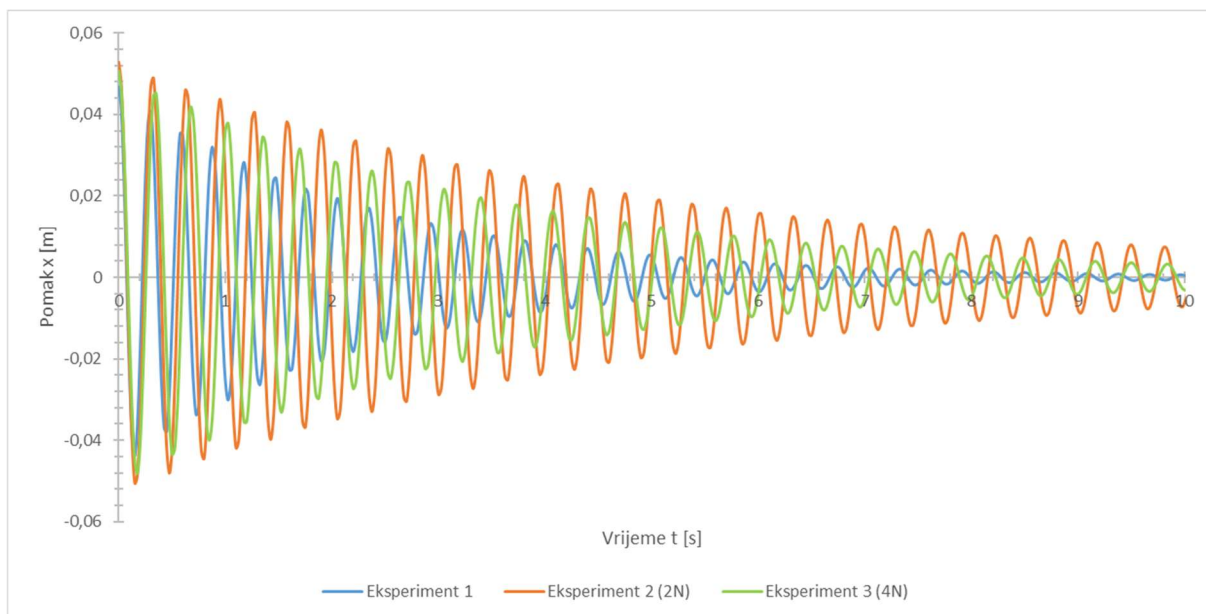
Prvi vremenski korak za $t = 0,025s$

$$x(t) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega_d t) \right] \cdot e^{-\zeta \omega t}$$

$$x(0,025) = \left[\frac{0,0507}{\sqrt{1 - 0,016^2}} \cos(18,4733 \cdot 0,025 - 0,016) \right] \cdot e^{-0,016 \cdot 18,4756 \cdot 0,025} = 0,04541m$$

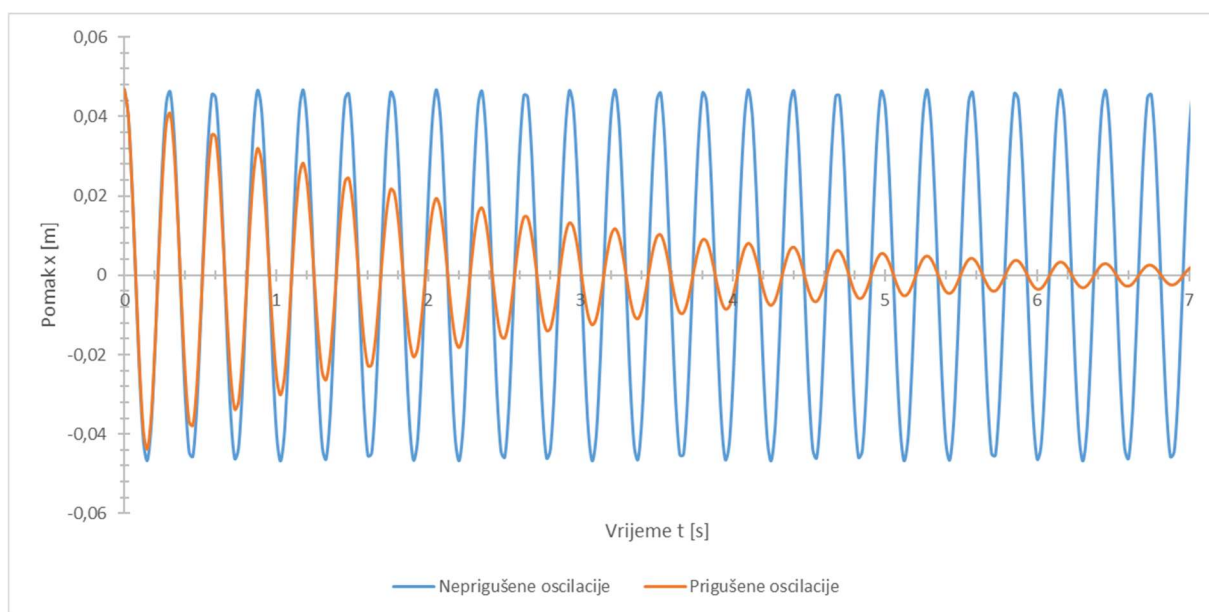


Slika 35: Eksperiment 3, dijagram analitičkog rješenja, opterećenje 4N

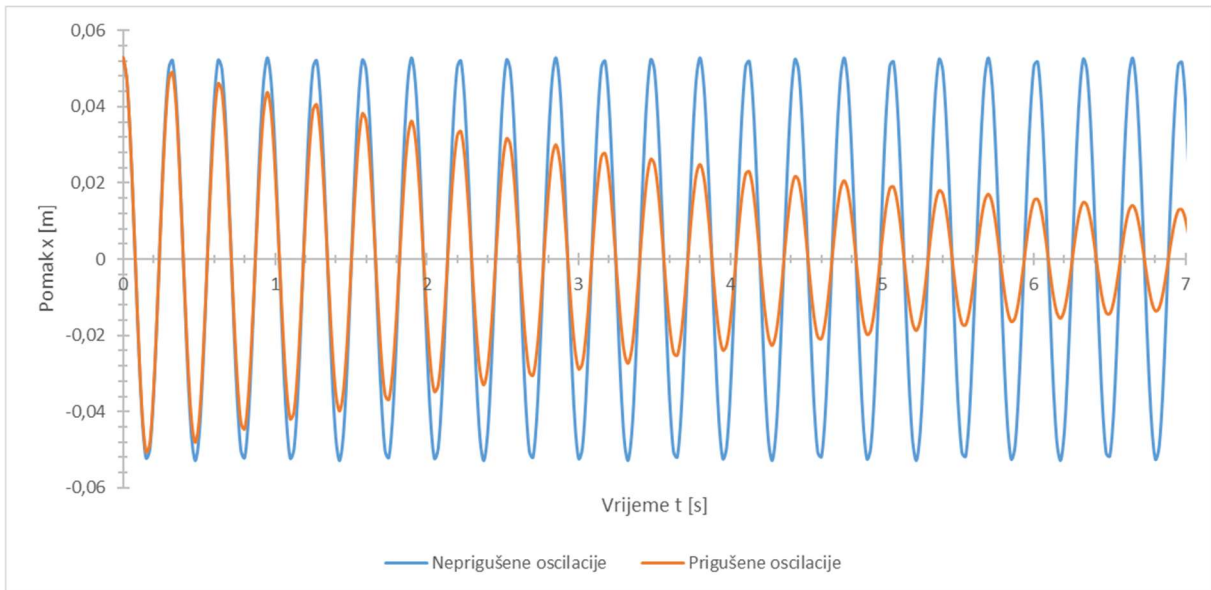


Slika 36:Usporedba analitičkih rezultata

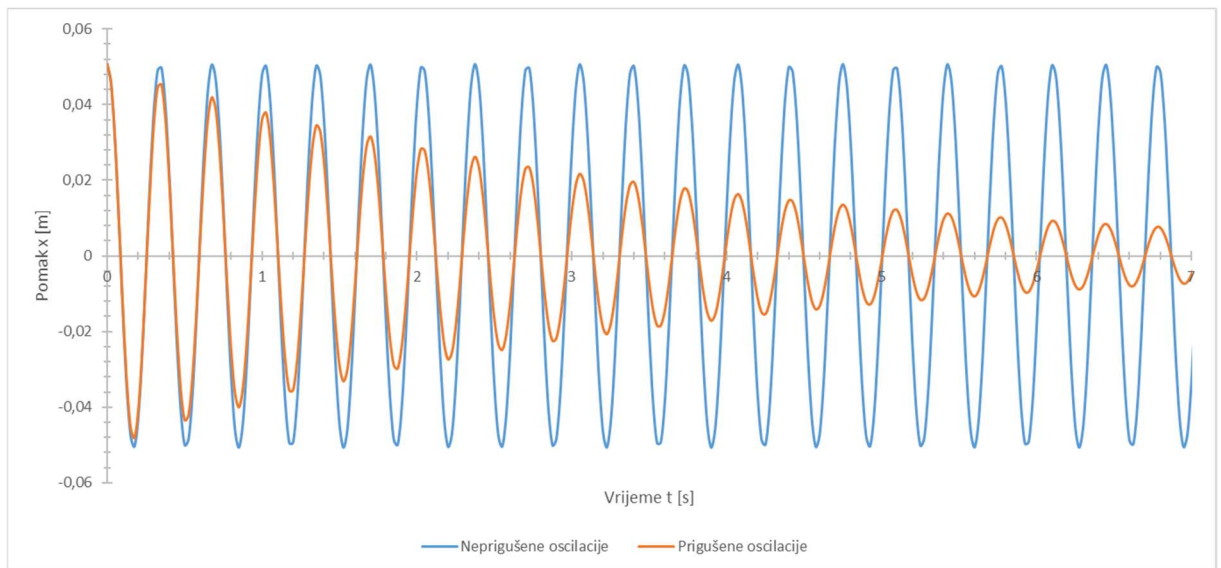
6.2.3 Usporedba neprigušenih i prigušenih oscilacija



Slika 37: Usporedba slobodnih prigušenih i neprigušenih oscilacija za eksperiment 1 , bez opterećenja



Slika 38: Usporedba slobodnih prigušenih i neprigušenih oscilacija za eksperiment 2 , opterećenje 2N



Slika 39: Usporedba slobodnih prigušenih i neprigušenih oscilacija za eksperiment 3 , opterećenje 4N

6.3 Numerički rezultati

Vrijednosti vibracije koja djeluje na tijelo uzet ćemo amplitudu vrijednosti koju smo dobili pri prvom eksperimentalnom pokusu 15s. Koeficijente beta i gamma uzet će se kao preporučene vrijednosti prema Newmarku.

Eksperiment 1, koristi se okvir A:

$$x_0 = 0,0468 \text{ m}$$

$$f = 3,413 \text{ Hz}$$

$$\Delta t = 0,001 \text{ s}$$

$$\beta = 0,5$$

$$\gamma = 0,25$$

Za $t = 0,001 \text{ s}$

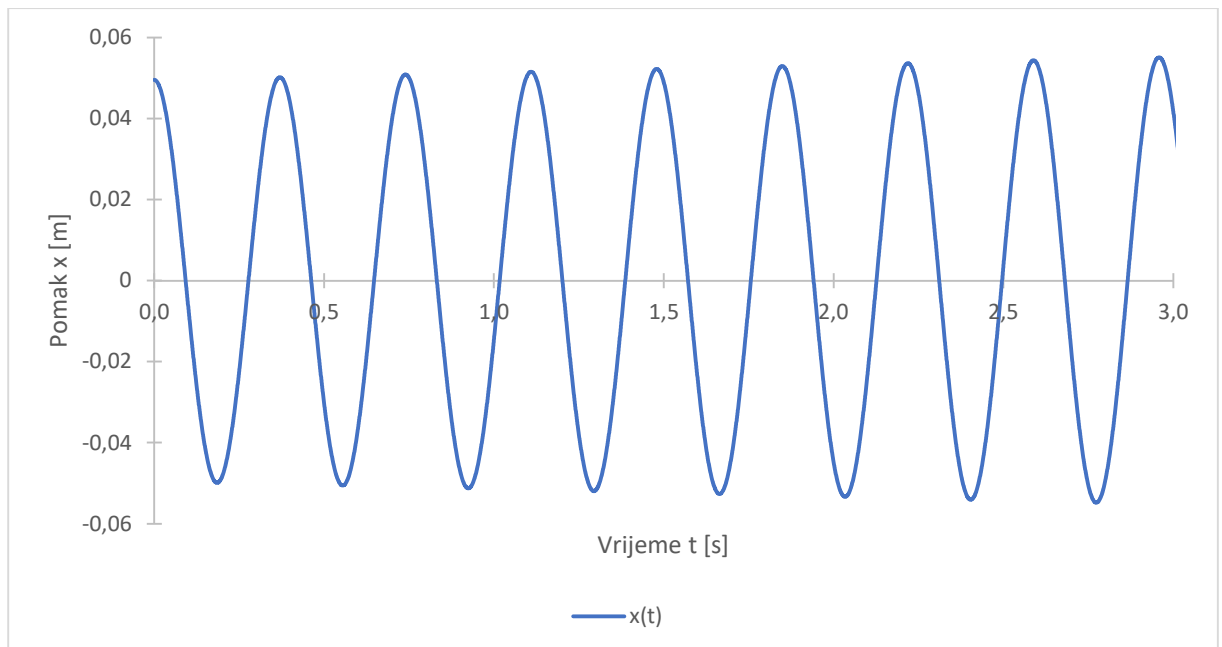
$$A = m + \beta \Delta t^2 \cdot k = 1,177 + 0,5 \cdot 0,001^2 \cdot 541,2765 = 1,18 = \text{const. za cijeli proračun}$$

$$\ddot{x}_{t-\Delta t} = -k \cdot \frac{x_{t-\Delta t}}{m} = -541,2765 \cdot \frac{0,0468}{1,177} = -21,51735 \text{ m/s}^2$$

$$B = m \cdot \left(-x_{t-\Delta t} + \Delta t \cdot \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right)$$

$$= 1,177 \cdot \left(-0,0468 - 0,001 \cdot 0 - \left(\frac{1}{2} - 0,5 \right) \cdot 0,001^2 \cdot (-21,51735) \right) = -0,06$$

$$x_{0,001} = -\frac{B}{A} = -\frac{(-0,06)}{1,53} = 0,046789 \text{ m}$$



Slika 40: Prvi eksperiment, grafički prikaz numeričkog rješenja, bez opterećenja

Eksperiment 2, koristi se okvir B:

Za drugi pokus, moramo povećati težinu za 2N, i tu težinu podijeliti na dva jednaka djela i dodati početnoj masi.

$$x_0 = 0,05285 \text{ m}$$

$$f = 3,1591 \text{ Hz}$$

$$\Delta t = 0,001 \text{ s}$$

$$\beta = 0,5$$

$$\gamma = 0,25$$

$$\text{Za } t = 0,001 \text{ s}$$

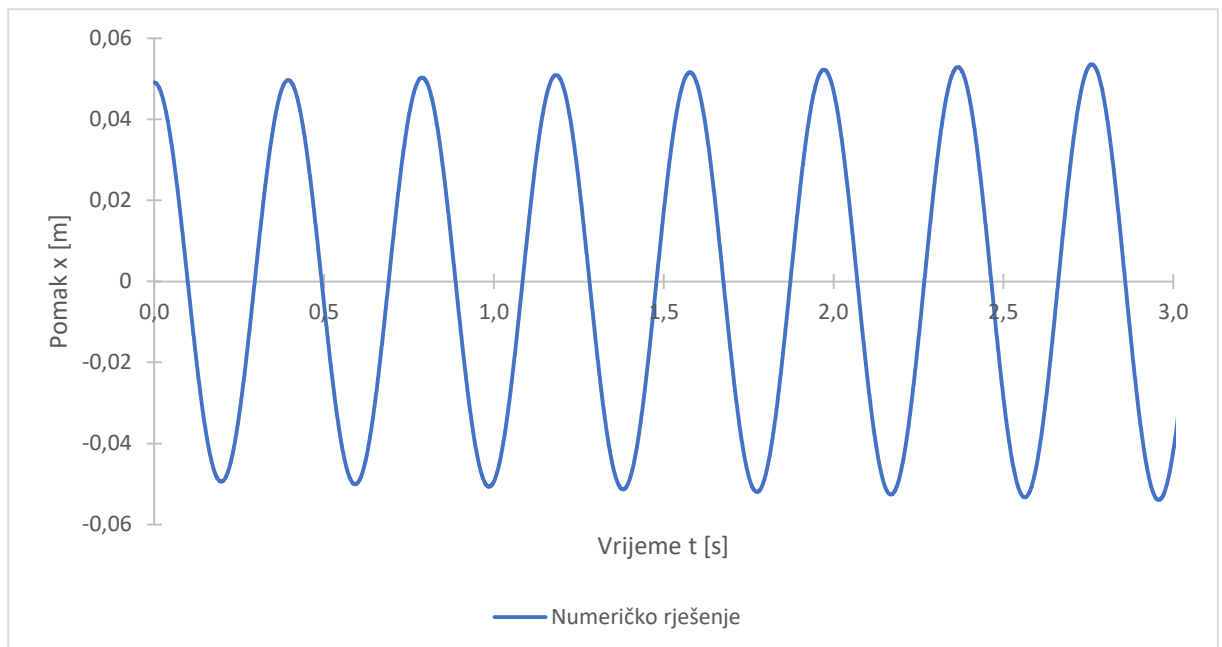
$$A = m + \beta \Delta t^2 \cdot k = 1,3738 + 0,5 \cdot 0,001^2 \cdot 541,2765 = 1,37 = \text{const. za cijeli proračun}$$

$$\ddot{x}_{t-\Delta t} = -k \cdot \frac{x_{t-\Delta t}}{m} = -541,2765 \cdot \frac{0,05285}{1,37} = -20,822 \text{ m/s}^2$$

$$B = m \cdot \left(-x_{t-\Delta t} + \Delta t \cdot \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} \cdot \beta \right) \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_{t-\Delta t} \right)$$

$$= 1,3738 \cdot \left(-0,05285 - 0,001 \cdot 0 - \left(\frac{1}{2} - 0,5 \right) \cdot 0,001^2 \cdot (-20,822) \right) = -0,07$$

$$x_{0,0001} = -\frac{B}{A} = -\frac{(-0,07)}{1,37} = 0,052848 \text{ m}$$



Slika 41: Grafički prikaz numeričkog rješenja, opterećenje 2N

Eksperiment 3, koristi se okvir C:

Za treći eksperiment, moramo povećati težinu za 4N, i tu težinu podijeliti na dva jednaka djela i dodati početnoj masi.

$$x_0 = 0,050692 \text{ m}$$

$$f = 2,9479 \text{ Hz}$$

$$\Delta t = 0,001 \text{ s}$$

$$\beta = 0,5$$

$$\gamma = 0,25$$

$$\text{Za } t = 0,001 \text{ s}$$

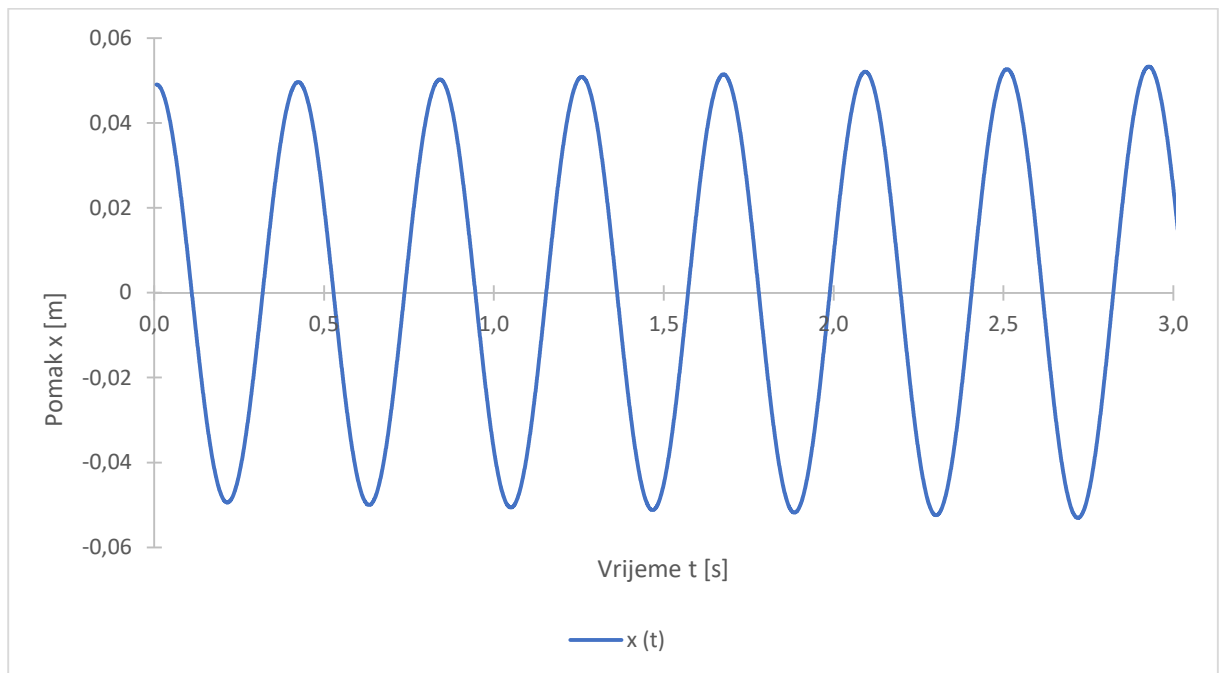
$$A = m + \beta \Delta t^2 \cdot k = 1,577 + 0,5 \cdot 0,001^2 \cdot 541,2765 = 1,58 = \text{const. za cijeli proračun}$$

$$\ddot{x}_{t-\Delta t} = -k \cdot \frac{x_{t-\Delta t}}{m} = -541,2765 \cdot \frac{0,05069}{1,577} = -17,3884 \text{ m/s}^2$$

$$B = m \cdot \left(-x_{t-\Delta t} + \Delta t \cdot \dot{x}_{t-\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{x}_{t-\Delta t} \right)$$

$$= 1,577 \cdot \left(-0,050692 - 0,001 \cdot 0 - \left(\frac{1}{2} - 0,5 \right) \cdot 0,001^2 \cdot (-17,3884) \right) = -0,08$$

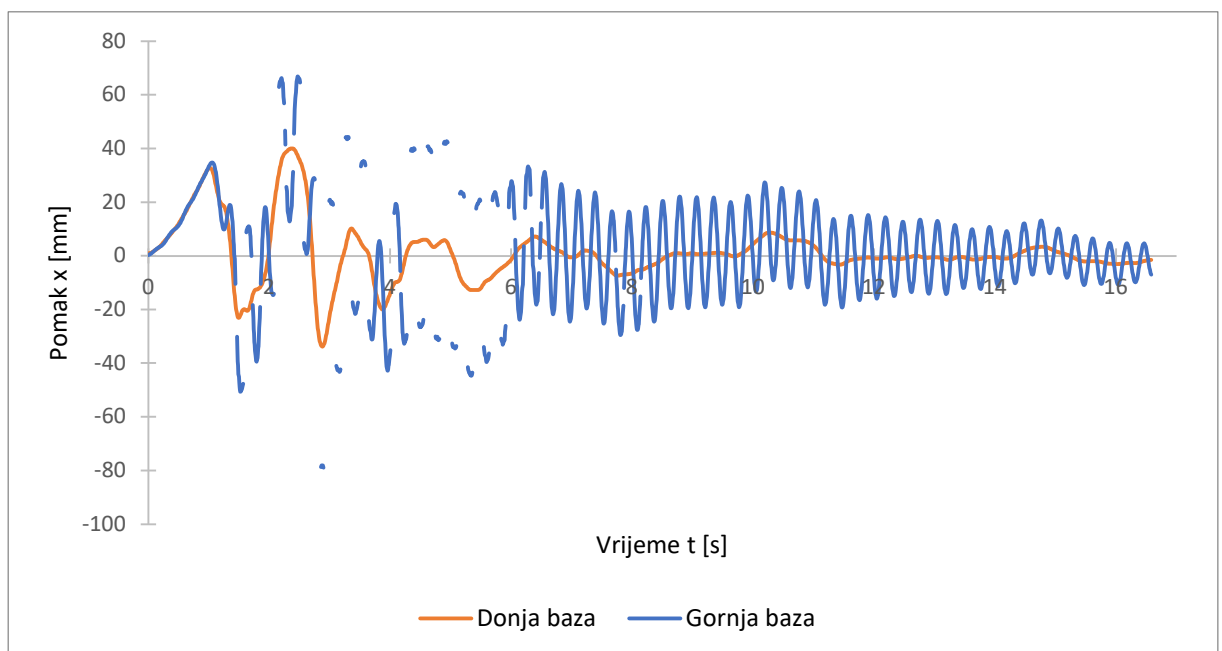
$$x_{0,001} = -\frac{B}{A} = -\frac{(-0,08)}{1,58} = 0,050683 \text{ m}$$



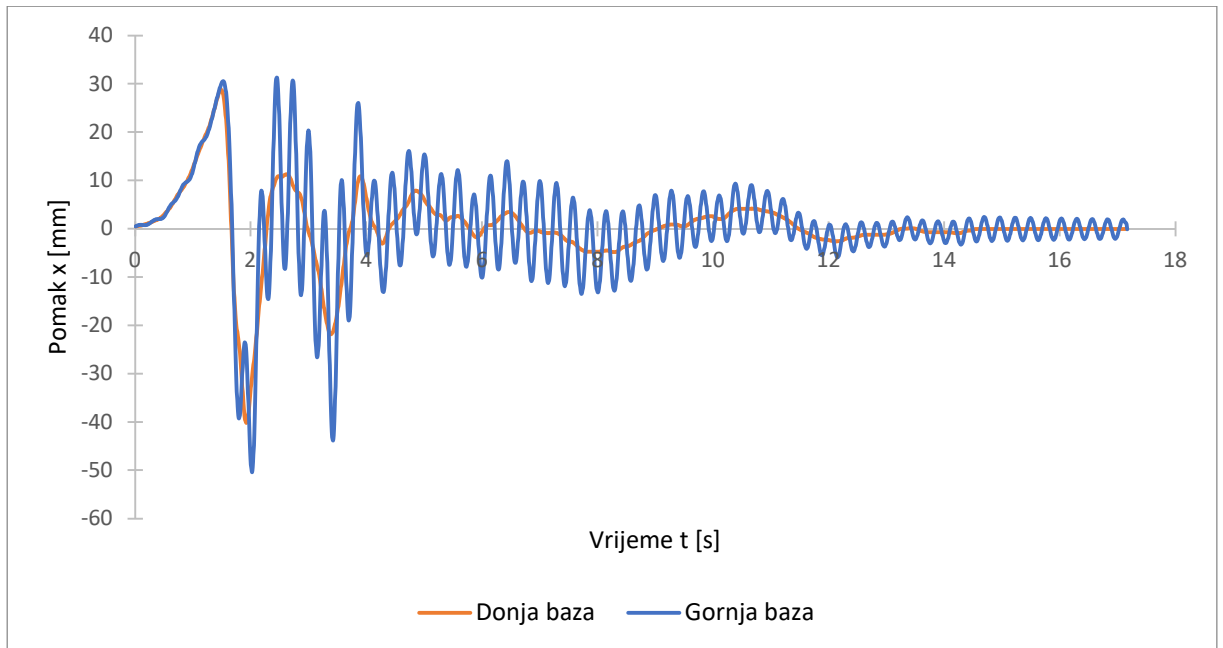
Slika 42: Grafički prikaz numeričkog rješenja za treći eksperiment, opterećenje 4N

6.4 Prisilne oscilacije pod djelovanjem zapisa stvarnog potresa

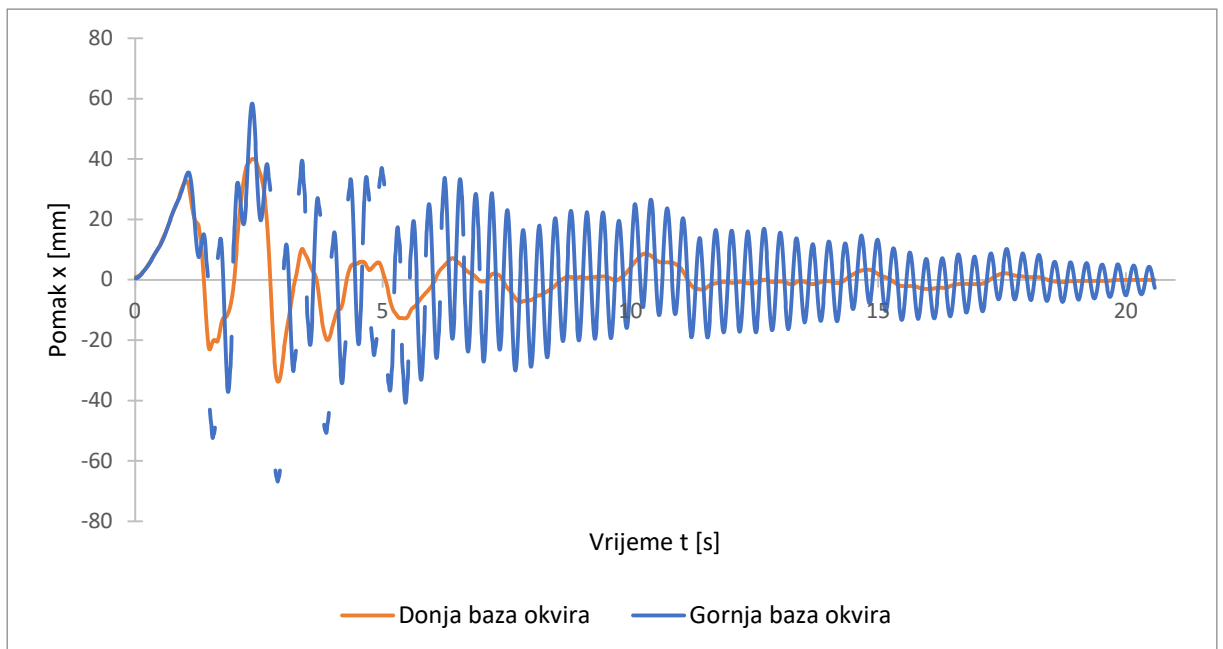
U trećem pokusu umjesto pretpostavljenih vrijednosti koristile su se vrijednosti jednog značajnog potresa. Vrijednosti potresa su skalirane pomoću korelacije dijagrama pomak-ubrzanje koji je stanica za mjerenje učitala, te se podaci skaliraju na mjerilo i veličinu potresne ploče. Potres od kojeg smo uzeli vrijednosti dogodio se 17. siječnja 1994 godine. Magnituda potresa iznosila je 6,7 na Richterovoj ljestvici. Potres se dogodio u San Fernando-voj dolini, trajanje potresa bilo je između 10-20s, što je idealno za trajanje ovog i prijašnjih pokusa. Ovaj pokus se razlikuje od prošlog u tome što sinusoida potresa nije pravilna. Pokus se vrši kao i prethodni, mentor podešava software za snimanje te obavještava studenta kada treba pokrenuti potresni stol. Za vrijeme prvog eksperimenta okvir je opterećen samo svojom težinom, te nakon pokretanja potresnog stola prati se ponašanje okvira. Kada pokus završi software za snimanje računa mjerenje, a na okvir se postavlja koncentrirano opterećenje od 1N. Kada je taj eksperiment gotov na okvir se postavlja opterećenje do 2N te se obavlja zadnji eksperiment za harmonijske vibracije.



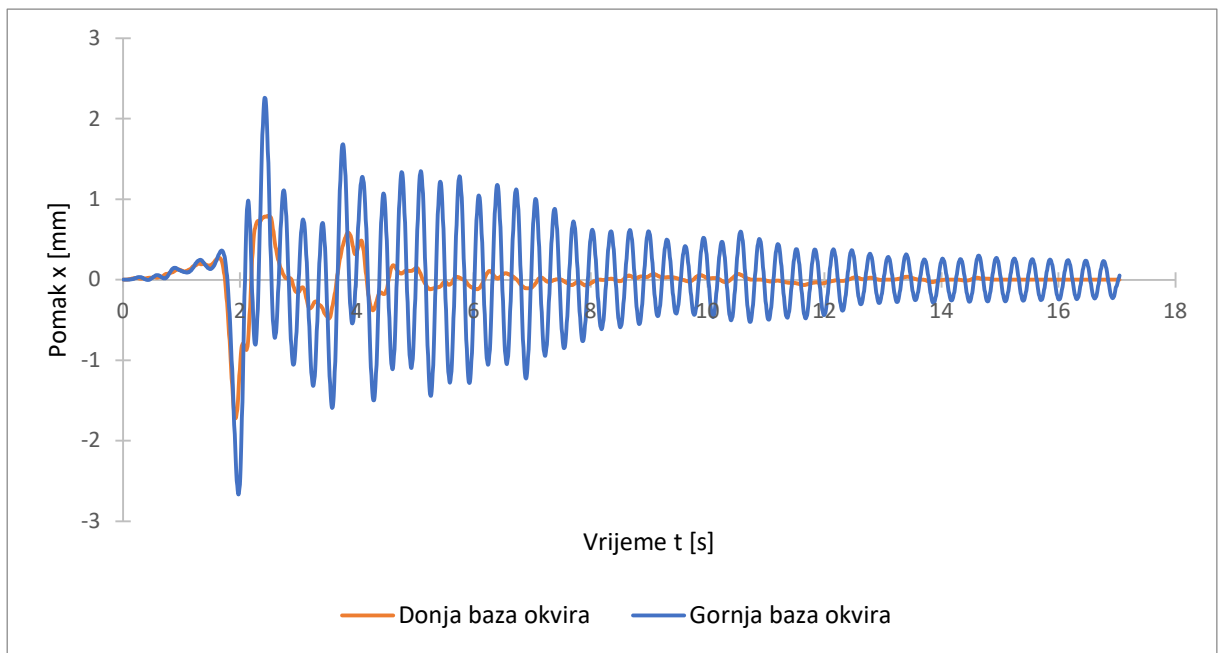
Slika 43: Eksperiment 7, Northridge potres X, bez opterećenja



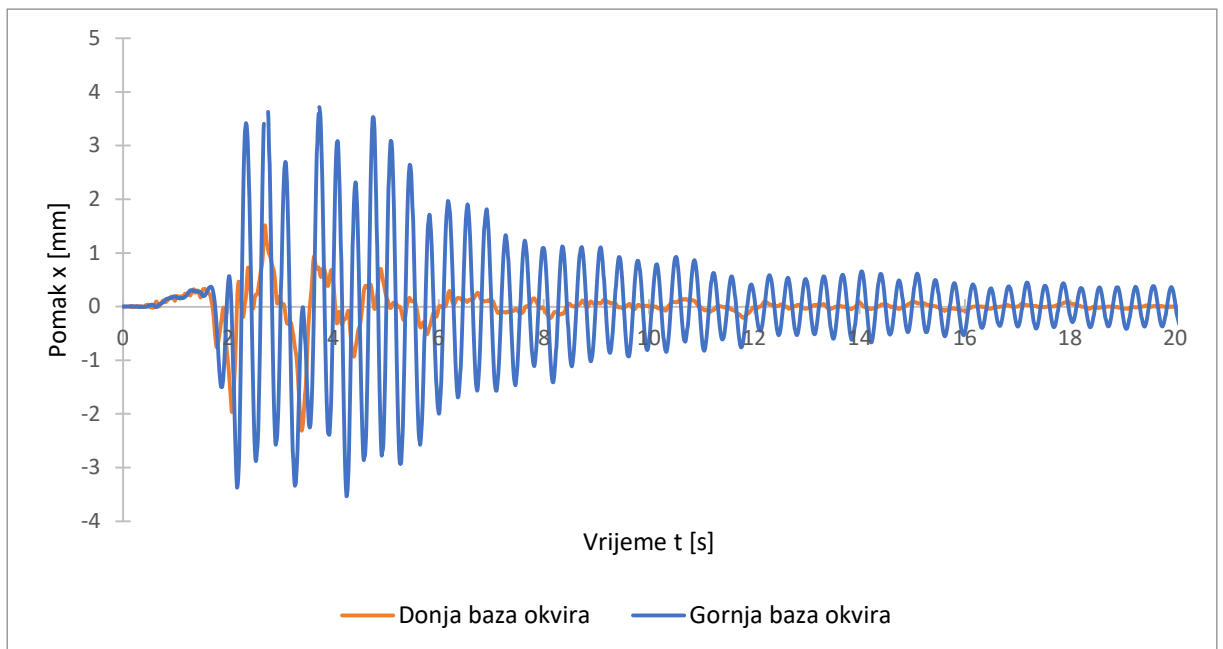
Slika 44: Eksperiment 8, Northridge potres Y, bez opterećenja



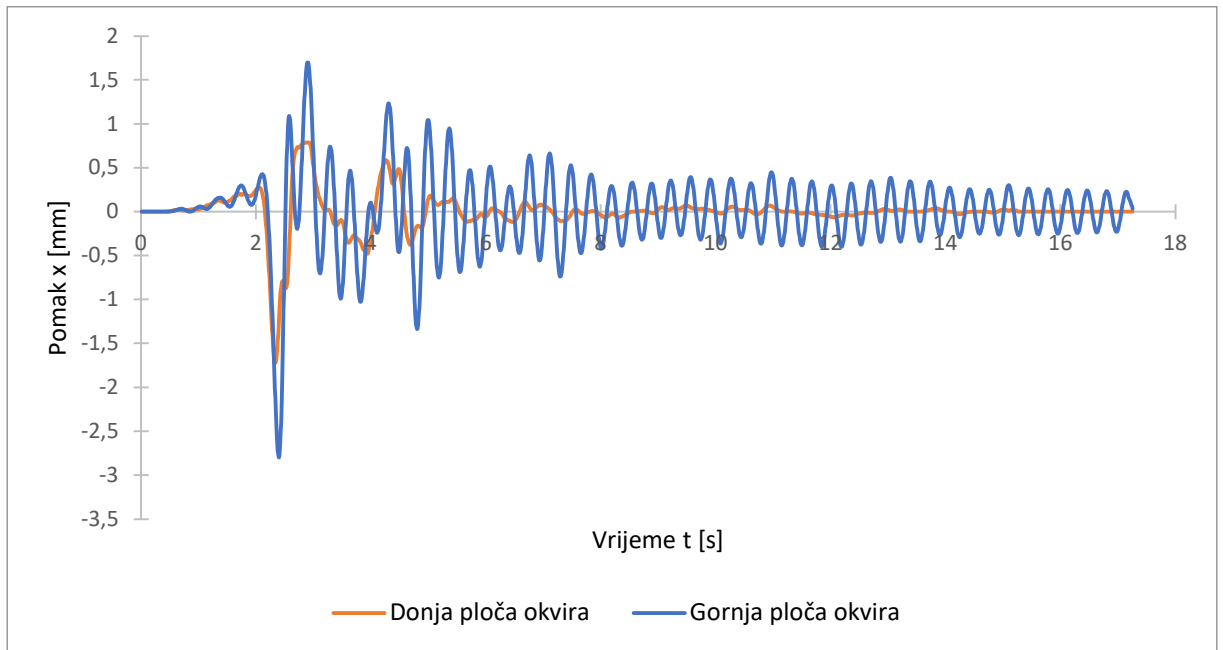
Slika 45: Eksperiment 9, Northridge potres X, opterećenje 2N



Slika 46: Eksperiment 10, Northridge potres Y, opterećenje 2N



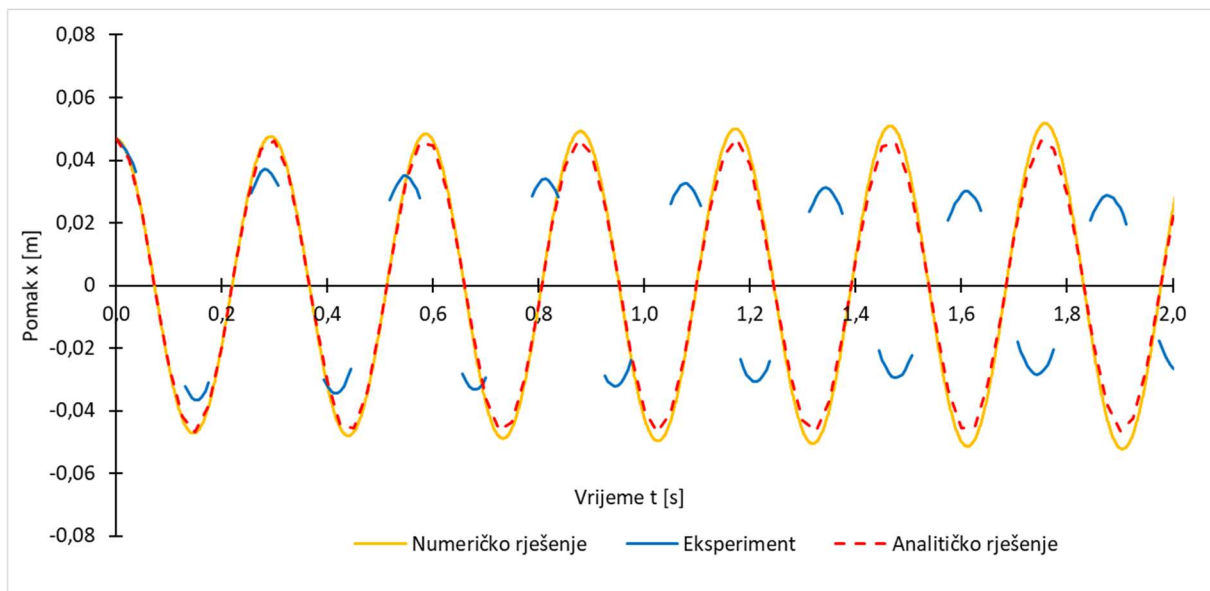
Slika 47: Eksperiment 11, Northridge potres X, opterećenje 4N



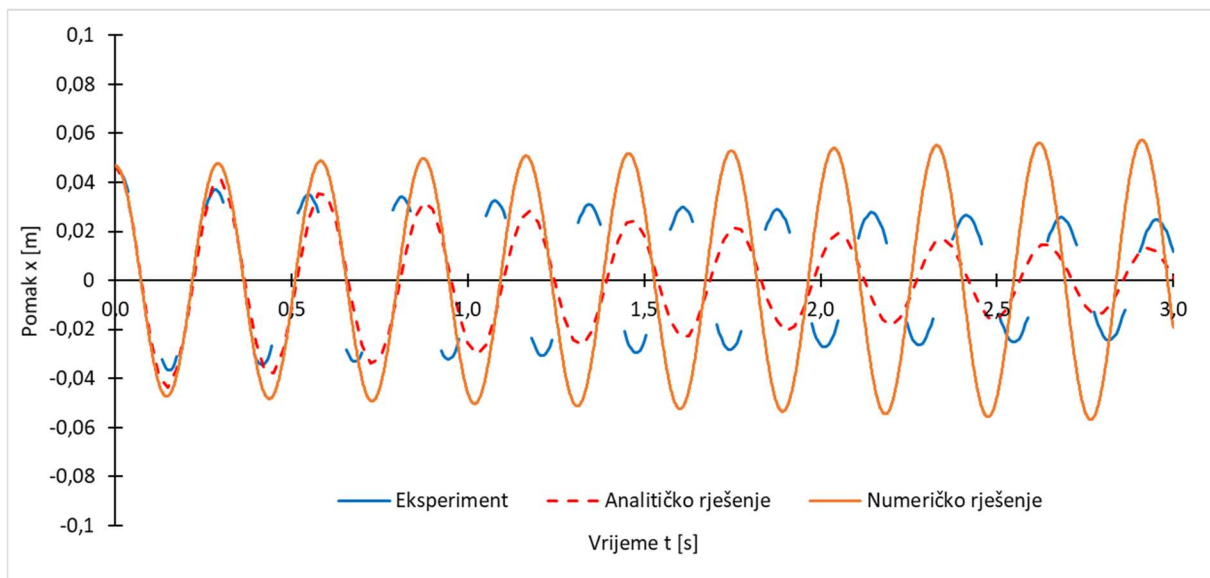
Slika 48: Eksperiment 12, Northridge potres Y, opterećenje 4N

7 USPOREDBA REZULTATA

Kada se usporede dijagrami kretanja ovisno o vremenu za svaki pokus koji se napravio eksperimentalno metodom i analitičkim proračunom, može se zaključiti da postoje bitne razlike između rezultata. Bitna razlika je što se u analitičkoj metodi nije uzimao u obzir koeficijent prigušenja, koji je u eksperimentalnoj metodi djelovao i s vremenom smanjivao amplitudu dijagrama kretanja.

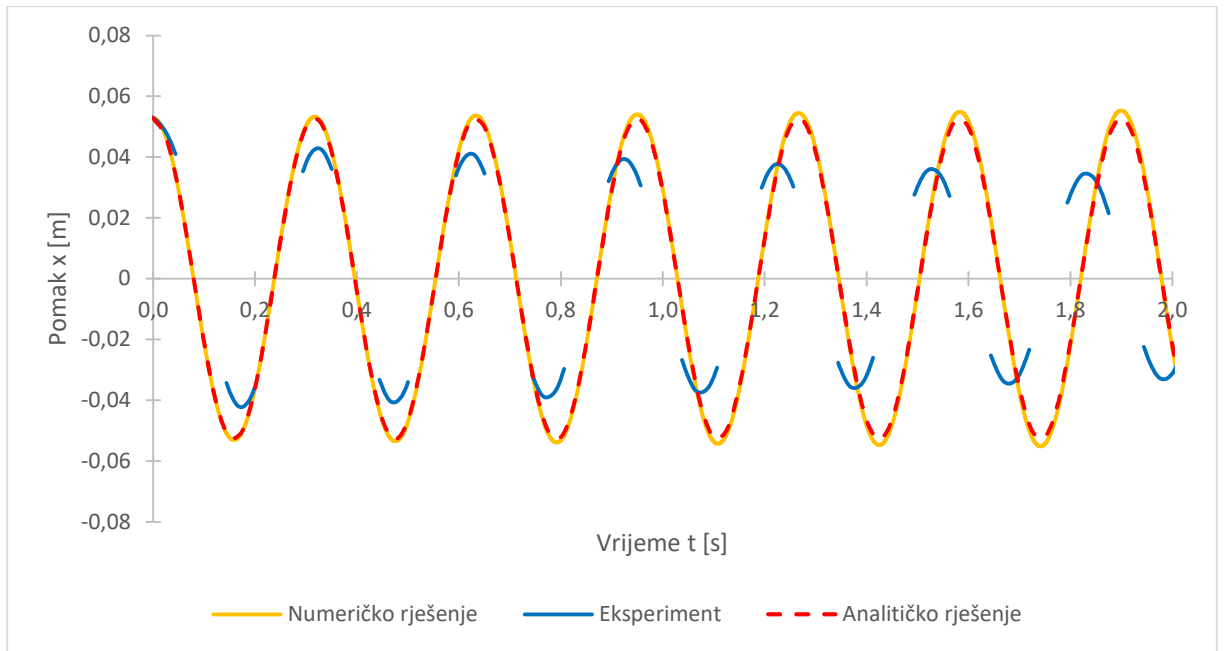


Slika 49: Usporedba neprigušenih rješenja s eksperimentom 1

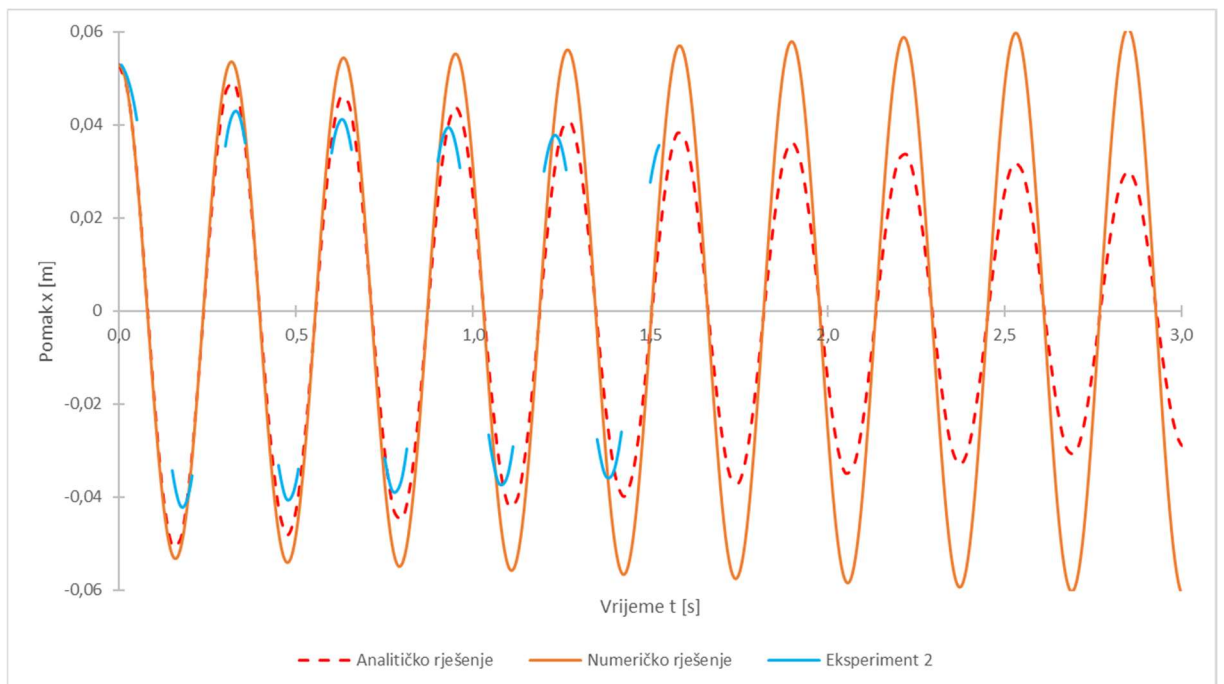


Slika 52:

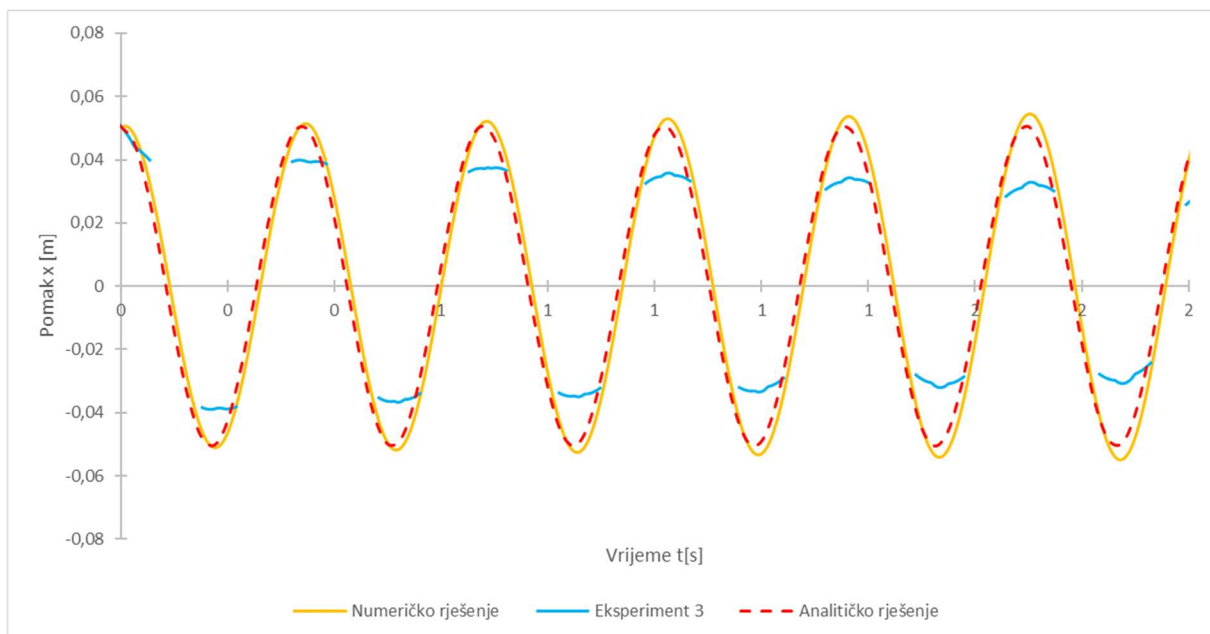
Slika 50: Usporedba prigušenih rješenja s eksperimentom 1



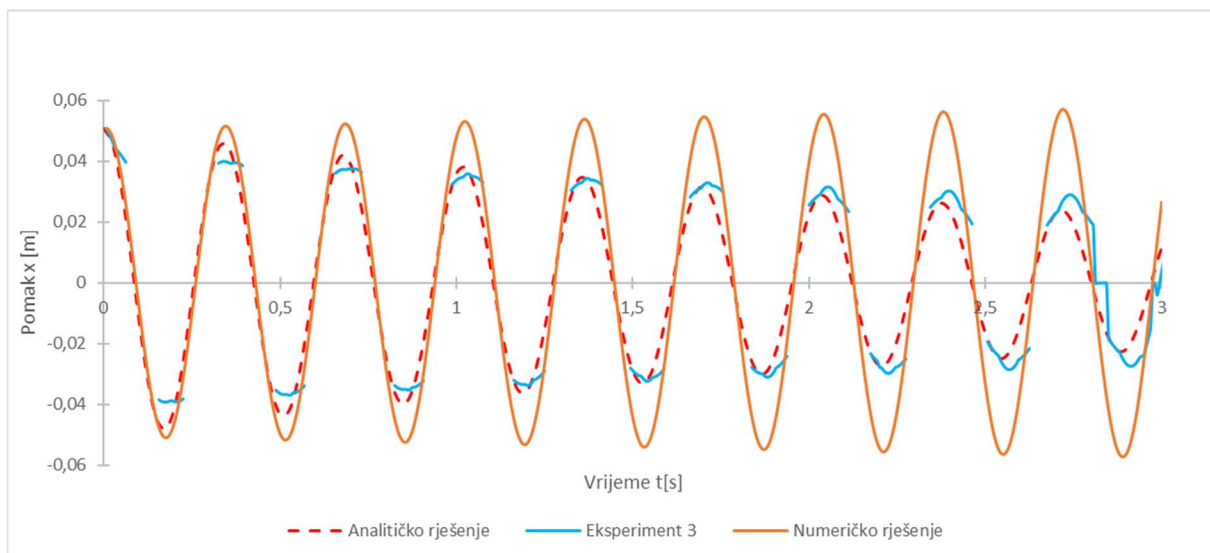
Slika 51: Usporedba neprigušenih rješenja s eksperimentom 2



Slika 52: Usporedba prigušenih rješenja s eksperimentom 2



Slika 53: Usporedba neprigušenih rješenja s eksperimentom 3

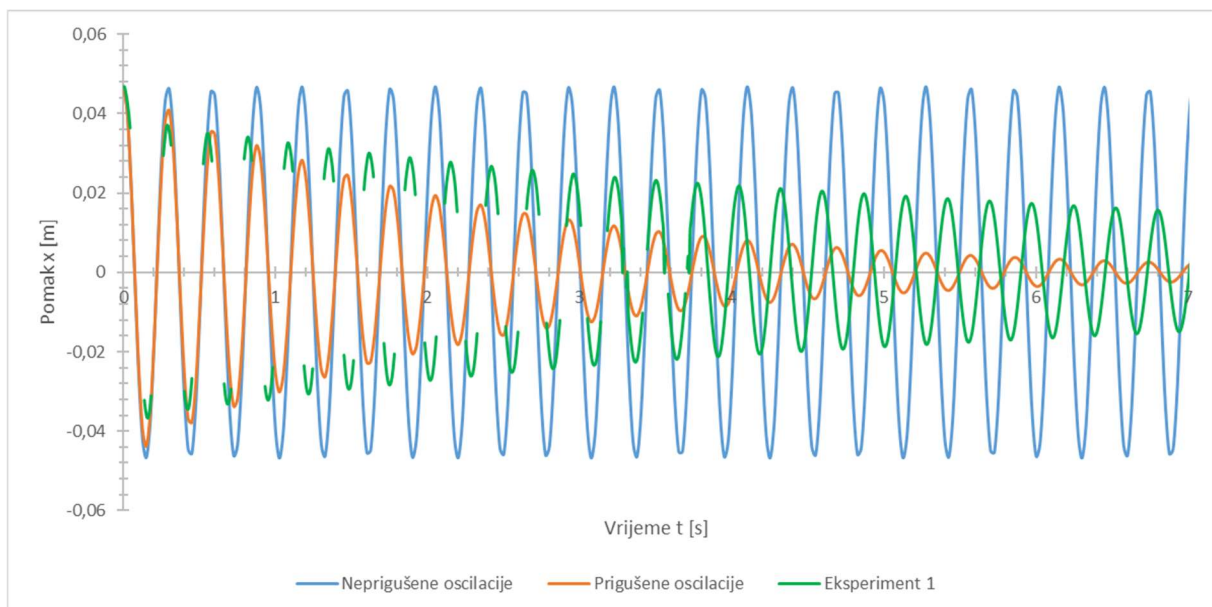


Slika 54: Usporedba prigušenih rješenja s eksperimentom 3

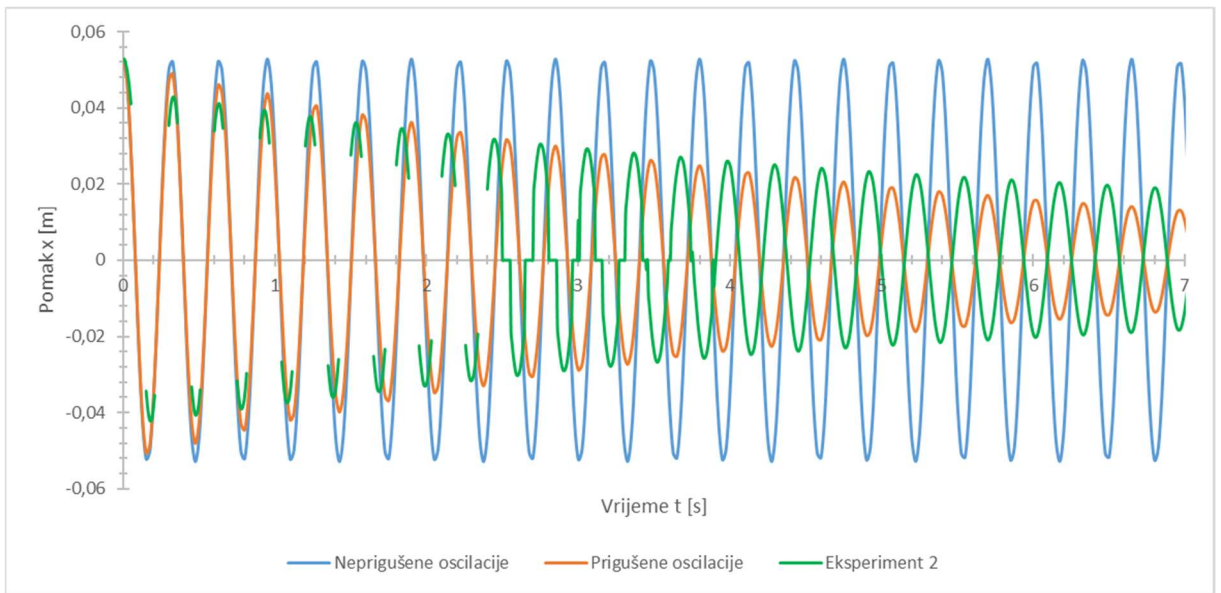
Može se uočiti da masa koja se nalazi na gornjoj bazi okvira ima veliku ulogu kod oscilacija sustava. Kod eksperimenata pobude rukom, okvir koji ima veću masu na gornjoj bazi okvira trebat će mu kraće vrijeme da se amplitude i periodi oscilacije smanje nego okviru koji ima manju ili nema dodatnu masu na gornjoj bazi okvira.

Kada se sustav pobudi sinesweep funkcijom na potresnom stolu, okviru koji ima manju masu treba duže vrijeme da se dogode veliki pomaci gornje baze okvira, ali su zato pomaci značajno veći. Okviru koji ima veću masu trebati će kraće vrijeme da se dogode veliki pomaci gornje baze okvira, međutim pomaci su značajno manji nego kod okvira s manjom masom ili okvira bez mase.

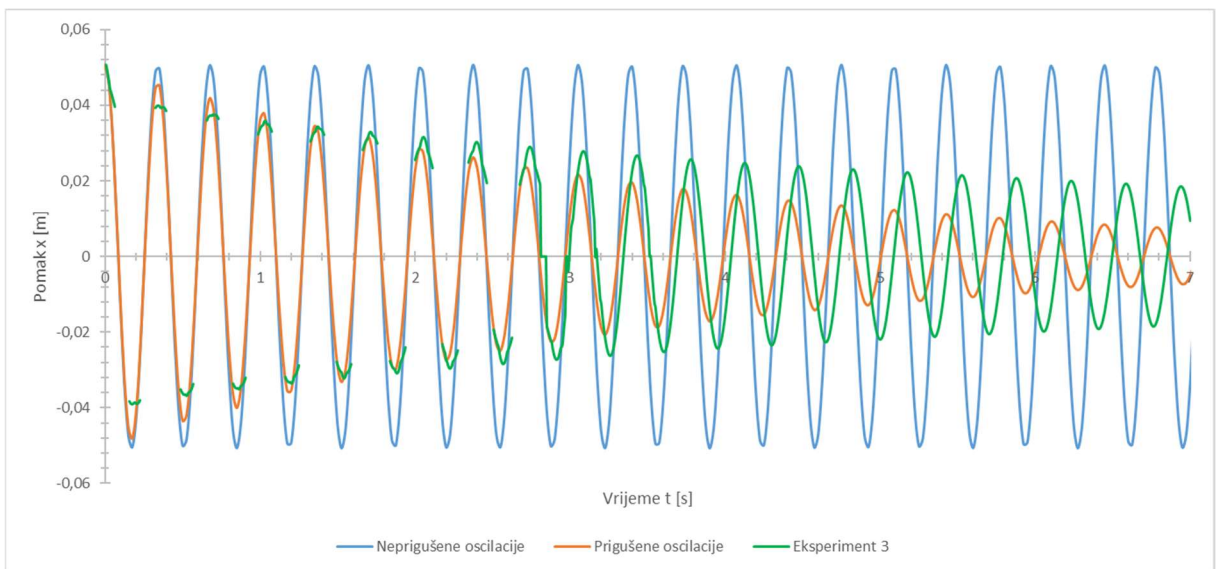
U slučaju kada se okvir pobudio zapisom Northridge potresa eksperimenti su napravljeni posebno za x osi, a posebno za y os. Iako se potres događa u dvije osi, eksperimenti su napravljeni tako da potres uvijek djeluje paralelno s okvirom. Na dijagramima se može uočiti da su pomaci donje ploče okvira bitno veći nego u prijašnje dvije situacije, točnije kod pobude rukom i pobude sinesweep funkcijom. Rezultati eksperimenata upućuju na to da okvir koji ima veću masu na gornjoj bazi okvira ima puno manje vrijednosti amplitude što bi impliciralo na to da veća masa smanjuje pomake gornje baze okvira.



Slika 55: Usporedba eksperimenta 1 s analitičkim rješenjima



Slika 56: Usporedba eksperimenta 2 s analitičkim rješenjima



Slika 57: Usporedba eksperimenta 3 s analitičkim rješenjima

8 ZAKLJUČAK

Ovim završnim radom koji se bavi problemom dinamičkog odziva elastičnih konstrukcija na dinamičku pobudu pokušalo se ukazat na ponašanje sustava kod promjene mase na gornjoj bazi okvira. Kada je težina koja je koncentrirana na sredini gornje baze okvira veća od zadane, sustav ima manje ekstremne pomake koji traju puno kraće nego okvir bez dodatne težine. Dokazano je da veća masa umanjuje utjecaj dinamičkog odziva konstrukcije, međutim nije poznato koliko utječe na sustav povećanje mase na gornjim bazama konstrukcije kod projektiranja.

Rezultati završnog rada htjeli su prikazati da dinamički odziv konstrukcije nikako ne smije biti zanemariv kod projektiranja, pogotovo ako se radi o neelastičnim i krtim konstrukcijama. Posebno kada se uzme u obzir da se rad bavi elastičnim konstrukcijama koje pomacima vrše disipaciju energije potresa. Također ovim radom se htjelo pokazati da i mala dinamička pobuda značajno djeluje na jednostavni sustav i konstrukcije, te se nikako ne bi trebalo zanemarivati moguće dinamičke pobude kod projektiranja. Eksperimentalni dio rada može predložiti rješenje ispitivanja konstrukcija kod velikih projekata pomoću maketa konstrukcije za područja koja su već pogođena velikim potresima kao što rasjed San Andreas, gdje se predviđaju veliki potresi.

Iako se povećanje težine na gornjoj bazi okvira ne može smatrati učinkovitim rješenjem za smanjenje pomaka kod dinamičke pobude konstrukcije, ovim radom se pokušalo ukazat na to da i mala promjena kao što je promjena težina na jednom dijelu sustava može izazvati velike promjene koje djeluju povoljno na cijeli sustav.

Literatura

- [1] H. z. z. norme, »Hrvatski zavod za norme,« [Mrežno]. Available: <http://31.45.242.218/HZN/Todb.nsf/wFrameset2?OpenFrameSet&Frame=Down&Src=%2FHZN%2FTodb.nsf%2Fcd07510acb630f47c1256d2c006ec863%2Fedfea588cf7a86fec12572b90027a0a3%3FOpenDocument%26AutoFramed>. [Pokušaj pristupa 10 studeni 2020.].
- [2] S. Ravlić, »Vibracije,« u *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020..
- [3] J. H. A. M. Stacy Chen, »abc NEWS,« 18 veljača 2018. [Mrežno]. Available: <https://abcnews.go.com/International/rescuers-scramble-find-dozens-people-trapped-earthquake-kills/story?id=52901523>. [Pokušaj pristupa 13 studeni 2020.].
- [4] F. A. ., B. M. ., Ž. R. ., B. S. Krpan M., DINAMIKA, TEORIJA I PRIMJENA, Rijeka: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Vukovarska 58, 2001..
- [5] E. L. Wilson, »Dynamic Analysis by Direct Integration,« u *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis Of Structures*, Berkle, University of California at Berkeley, 1995., p. Poglavlje 20.
- [6] J. K. Vandiver, »YouTube, predavanje,« MIT OpenCourseWare, 4. Rujan 2013. [Mrežno]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=9_d8CQrCYUw&t=3938s&ab_channel=MITOpenCourseWare. [Pokušaj pristupa 5. Rujan 2020.].
- [7] Quanser Innovate Educate, »<https://www.quanser.com/wp-content/uploads/2019/03/Structural-Dynamics-and-Earthquake-Engineering-Lab-Solutions-online.pdf>,« 2019. [Mrežno]. Available: <https://www.quanser.com/wp-content/uploads/2019/03/Structural-Dynamics-and-Earthquake-Engineering-Lab-Solutions-online.pdf>.
- [8] GOM, a ZEISS company, User Information - Hardware, Braunschweig: HOM GmbH, 2008..
- [9] HISTORY, 2 Prosinca 2009. [Mrežno]. Available: <https://www.history.com/topics/natural-disasters-and-environment/1994-northridge-earthquake>.
- [10] A. K. Chopra, DYNAMICS OF STRUCTURES: Theory and Applications to Earthquake Engineering, Englewood Cliffs, New Jersey: PRENTICE GALL, 1981..