

Eksperimentalna validacija metode sila kod statički neodređenih grednih nosača

Vinceković, Gabriijela

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:010936>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-28**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Gabrijela Vinceković

**Eksperimentalna validacija metode sila kod statički neodređenih
grednih nosača**

Završni rad

Rijeka, 2022. godina

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Preddiplomski stručni studij
Tehnička mehanika II

Gabrijela Vinceković

0114033070

Eksperimentalna validacija metode sila kod statički neodređenih
grednih nosača

Završni rad

Rijeka, 2022. godina

Naziv studija: Preddiplomski stručni studij Građevinarstvo
Znanstveno područje: Tehničke znanosti
Znanstveno polje: Temeljne tehničke znanosti
Znanstvena grana: Tehnička mehanika

Tema završnog rada

EKSPERIMENTALNA VALIDACIJA METODE SILA KOD STATIČKI NEODREĐENIH GREDNIH NOSAČA
EXPERIMENTAL VALIDATION OF THE FORCE METHOD FOR STATICALLY INDETERMINED BEAMS

Kandidatkinja: **GABRIJELA VINCEKOVIĆ**

Kolegij: **TEHNIČKA MEHANIKA II**

Završni rad broj: 21-ST-3

Zadatak:

Zadatak završnog rada je eksperimentalno validirati metodu sila na primjeru jedanput statički neodređenog kontinuiranog grednog nosača preko dva polja opterećenog koncentriranom silom u drugom polju. U eksperimentu će se na zadanom sustavu mjeriti reakcija na srednjem osloncu, a zatim će se, uklonjenjem tog oslonca, sustav pretvoriti u statički određeni (tzv. osnovni) sustav. Na osnovnom sustavu će se mjeriti pomaci na mjestu uklonjenog srednjeg oslonca uzrokovani silom u drugom polju, ali i silom koja djeluje na mjestu uklonjenog srednjeg oslonca, čime će biti moguće eksperimentalno odrediti sve parametre koji ulaze u ključnu jednadžbu metode sila - jednadžbu kompatibilnosti. Uz prethodno izvedene izraze za sve reakcije i pomake po metodi sila, biti će moguće ocijeniti razliku između teorijskog modela i eksperimenta.

Tema rada je uručena: 24. veljače 2021.

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Leo Škec,
dipl. ing. grad.

IZJAVA

Završni rad sam izradila samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih gradevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja gradevinarstva. Gradevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Gabrijela Vinceković

U Rijeci, 21. veljače 2022.

Završni/Diplomski rad nastao je kao rezultat rada u okviru projekta
Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci

Voditelj projekta prof. dr. sc. Nevenka Ožanić
Šifra projekta RC.2.2.06-0001
Financijer projekta Europski fond za regionalni razvoj (EFRR)
Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH
Pravna nadležnost Republika Hrvatska

U Rijeci, 21. veljače 2022.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Leo Škec

Sažetak :

Tema završnog rada je eksperimentalna validacija metode sila na statički neodređenom grednom nosaču. Odabrani sustav je jedanput statički neodređen kontinuirani nosač preko dva polja i koncentrirana sila u drugom polju. Metoda sila podrazumijeva da se oslobađanjem nekih veza (reakcija) sustav pretvara u statički određeni (tzv. osnovni) sustav za kojeg se na mjestu i u smjeru oslobođene veze računaju pomak/rotacija od vanjskog (stvarnog) i jediničnog opterećenja. Pomoću tih veličina moguće je iz jednadžbe kompatibilnosti odrediti vrijednost sile ili momenta na mjestu oslobođene veze te tako riješiti cijeli sustav. Na taj su način u ovom radu izvedene formule ovisne o veličini vanjskog opterećenja i raspona konstrukcije pomoću kojih je moguće odrediti vrijednosti svih reakcija u osloncima. Nakon teorijski riješenog problema prelazi se u praktikum te se na modelu konstrukcije mjere reakcije i pomaci kako na odabranom (statički neodređenom), tako i na osnovnom sustavu kod kojeg se u obzir uzima i vanjsko i jedinično opterećenje. Detaljna usporedba eksperimentalnih i teorijskih rezultata pokazuje da se računski dobiveni rezultati i eksperimentalna mjerenja izvrsno podudaraju.

Ključne riječi :

Metoda sila, statički neodređen sustav, kontinuirani nosač, metoda jedinične sile, pomak, fleksija

Abstract :

The topic of this final year project is experimental validation of the force method on a statically indeterminate beam. The selected structure is one degree statically indeterminate two-span beam over with a concentrated force in the second span. The force method assumes that by releasing some connections (reactions) the structure is transformed into a statically determined (so-called primary) structure for which the displacement/rotation from external (real) and unit load are calculated at the position and in the direction of the released connection. Using these quantities, it is possible to determine the value of force or moment at the position of released connection from the compatibility equation and solve the whole system. In this way, formulas dependent on the magnitude of external load and the span of the structure are derived in this work, by means of which it is possible to determine the values of all reactions in the support. After the problem is solved theoretically, we are moving to the laboratory to measure reactions and displacements on a model of the structure, both for the selected (statically indeterminate) and the primary structure, where both external and unit load are taken into account. A detailed comparison of experimental and theoretical results shows that calculated results and experimental measurements show an excellent agreement.

Keywords :

Force method, statically indeterminate structure, continuous beam, unit force method, displacement, flexibility

Sadržaj

1. UVOD.....	1
2. OSNOVNI POJMOVI METODE SILA.....	2
2.1. Statički neodređen sustav	2
2.2. Jednadžba kompatibilnosti	4
3. PRORAČUN ZADANOG STATIČKI NEODREĐENOG SUSTAVA METODOM SILA NA DVA NAČINA	9
3.1. Prvi način.....	10
3.2. Drugi način.....	13
3.3. Konačni dijagrami unutrašnjih sila	16
3.4. Utjecaj vlastite težine nosača	17
4. METODA SILA - EKSPERIMENTALNO	22
4.1. Mjerenje 1.....	23
4.2. Korekcije.....	25
4.3. Mjerenje 2 (s korekcijama).....	33
4.4. Mjerenja na osnovnom sustavu	37
4.4.1. OSNOVNI SUSTAV – VANJSKO OPTEREĆENJE.....	37
4.4.2. OSNOVNI SUSTAV – JEDINIČNA SILA.....	39
4.4.3. ZAVRŠNI REZULTATI.....	42
5. ZAKLJUČAK.....	45
6. LITERATURA	46

Popis slika

Slika 1. Primjer rješavanja stupnja statičke neodređenosti sustava	3
Slika 2. Primjer određivanja stupnja statičke neodređenosti sustava sa zglobom	3
Slika 3. Statička shema - primjer sustava	5
Slika 4. Oslobađanje oslonca - vanjsko opterećenje	5
Slika 5. Oslobađanje oslonca - jedinična sila	5
Slika 6. Momentni dijagram - vanjsko opterećenje.....	6
Slika 7. Momentni dijagram - jedinična sila	6
Slika 8. Tablica integrala	8
Slika 9. Zadani statički sustav.....	9
Slika 10. Osnovni sustav s uklonjenim osloncem B	10
Slika 11. Dijagrami unutrašnjih sila - vanjsko opterećenje.....	10
Slika 12. Osnovni sustav s jediničnom silom na mjestu oslonca B	11
Slika 13. Dijagrami unutrašnjih sila - jedinična sila.....	11
Slika 14. Osnovni sustav s uklonjenim osloncem C	13
Slika 15. Dijagrami unutrašnjih sila - vanjsko opterećenje.....	13
Slika 16. Osnovni sustav s jediničnom silom na mjestu oslonca C	14
Slika 17. Dijagrami unutrašnjih sila - jedinična sila.....	14
Slika 18. Konačni dijagrami unutrašnjih sila za zadani statički sustav	16
Slika 19. Kontinuirani nosač opterećen vlastitom težinom	17
Slika 20. Reakcije i dijagrami unutrašnjih sila na osnovnom sustavu - vanjsko opterećenje	18
Slika 21. Reakcije i dijagrami unutrašnjih sila na osnovnom sustavu - jedinična sila	19
Slika 22. Konačni dijagrami unutrašnjih sila - od vlastite težine nosača	21
Slika 23. Zadan statički sustav – eksperimentalni postav	22
Slika 24. Grafički prikaz mjerenja na osloncu	26
Slika 25. Grafički prikaz mjerenja na osloncu B.....	27
Slika 26. Grafički prikaz mjerenja na osloncu C	28
Slika 27. Grafički prikaz korekcije reakcije RA na jediničnom sustavu	29
Slika 28. Grafički prikaz korekcije reakcije RC na jediničnom sustavu.....	30
Slika 29. Grafički prikaz korekcije reakcije RA na osnovnom sustavu sa vanjskim opterećenjem..	31
Slika 30. Grafički prikaz korekcije reakcije RC na osnovnom sustavu sa vanjskim opterećenjem..	32
Slika 31. Mjerenje 2 na zadanom sustavu.....	33
Slika 32. Grafički prikaz odnosa teorijske vrijednosti RB i mjerene (korigirane) reakcije RB	35
Slika 33. Grafički prikaz relativne greške	36
Slika 34. Mjerenje na osnovno sustavu s vanjskim opterećenjem.....	38
Slika 35. Grafički prikaz dobivenih vrijednosti fleksije f_{11} za različite vrijednosti opterećenja s linearnom aproksimacijom trenda	40
Slika 36. Mjerenje na sustavu – osnovni sustav s jediničnom silom	41
Slika 37. Grafički prikaz završnih rezultata – greška u jednadžbi kompatibilnosti	44
Slika 38. Grafički prikaz završnih rezultata – relativna greška u jednadžbi kompatibilnosti	44

Popis tablica

Tablica 1. Prvo mjerenje na zadanom sustavu	23
Tablica 2. Namještanje oslonaca – letva	24
Tablica 3. Nakon pritezanja - letva	24
Tablica 4. Nakon prihvata za utege - letva	24
Tablica 5. Korekcija RA – uteg direktno na oslonac	26
Tablica 6. Korekcija RB – uteg direktno na oslonac	27
Tablica 7. Korekcija RC – uteg direktno na oslonac	28
Tablica 8. Korekcija RA - osnovni sustav – jedinični sustav.....	29
Tablica 9. Korekcija reakcije RC - jedinični sustav.....	30
Tablica 10. Korekcija reakcije RA - osnovni sustav sa vanjskim opterećenjem	31
Tablica 11. Korekcija reakcije RC – osnovni sustav sa vanjskim opterećenjem.....	32
Tablica 12. Rezultati mjerenja 2 - obrada rezultata	34
Tablica 13. Rezultati mjerenja i obrada rezultata za osnovni sustav s vanjskim opterećenjem	37
Tablica 14. Rezultati mjerenja i obrada rezultata za osnovni sustav s jediničnom silom	39
Tablica 15. Konačni rezultati	42

Popis formula

$n = R - 3 - z$	(1)	2
$\delta_{10} + f_{11}X_1 = 0$	(2)	4
$X_1 = -\delta_{10}f_{11}$	(3).....	7

1. UVOD

Eksperimentalna validacija metode sila kod statički neodređenog grednog nosača koja je provedena u ovom radu, podijeljena je na dva dijela. U prvome dijelu napravljen je proračun zadanog sustava po metodi sila, dok se u drugome dijelu pokušava dokazati da stvarna mjerenja odgovaraju onima dobivenim računski.

Sustav je jedanput statički neodređeni kontinuirani nosač preko dva polja s koncentriranom silom na sredini drugog polja. Proračun takvog sustava po metodi sila moguće je provesti na čitav niz načina, uklanjajući reakcije u osloncima ili pak otvarajući nove zglobove. Pri tome je posebnu pozornost potrebno posvetiti tome da se sustav ne pretvori u mehanizam. U sklopu rada predstavljena su dva načina na koje se promatrani sustav može riješiti. Kod prvog načina se uklanja/oslobađa srednji oslonac s pripadajućom reakcijom, a kod drugog načina se uklanja/oslobađa oslonac s desne strane nosača s pripadajućom reakcijom. Rješenje sustava u vidu reakcija u sva tri oslonca kontinuiranog nosača ne smije se razlikovati, bez obzira na odabranu metodu. U obzir se dodatno uzima i vlastita težina nosača jer i ona utječe na veličinu reakcija koje će se u eksperimentu izmjeriti u osloncima.

Na stvarnom modelu nosača postavljenom u praktikumu, izvršit će se mjerenja kod kojih će se odrediti reakcije u osloncima te pomaci grede za različite vrijednosti opterećenja. Sva mjerenja zapisat će se u tablicama u Microsoft® Excelu i usporediti s teorijskim rezultatima dobivenim u prvom dijelu rada.

Cilj ovog rada je pomoću eksperimentalnih mjerenja pokazati da teorijska rješenja dobivena metodom sila mogu točno opisati ponašanje stvarnih statički neodređenih nosača.

2. OSNOVNI POJMOVI METODE SILA

2.1. Statički neodređen sustav

Metoda sila je metoda proračuna statički neodređenih sustava [1-5]. Statički neodređen sustav je sustav u kojemu je broj nepoznatih veličina (reakcija, sila) veći od broja jednadžbi ravnoteže.

JEDNADŽBE RAVNOTEŽE - $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$

Statičku neodređenost sustava određujemo pomoću formule [1]:

$$n = R - 3 - z \quad (1)$$

U kojoj je :

n – stupanj statičke neodređenosti sustava

$n > 0$ statički neodređen sustav - u radu riješen sustav kod kojeg je $n = 1$

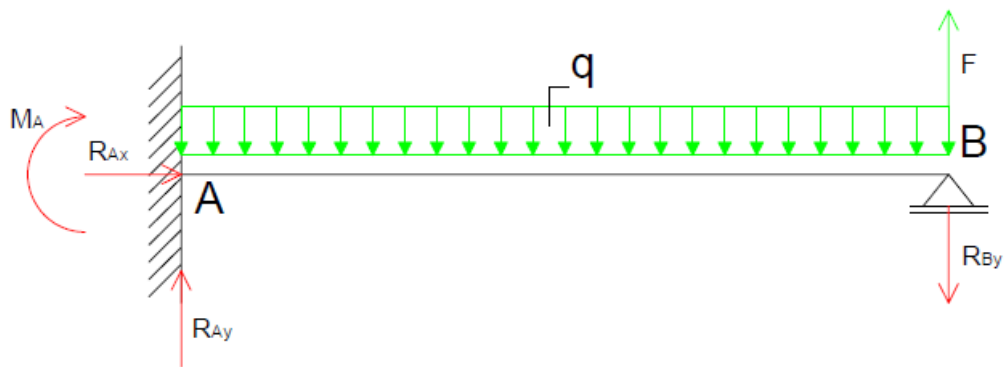
$n = 0$ statički određen sustav

$n < 0$ mehanizam

R – broj reakcija sustava

3 – broj jednadžbi ravnoteže

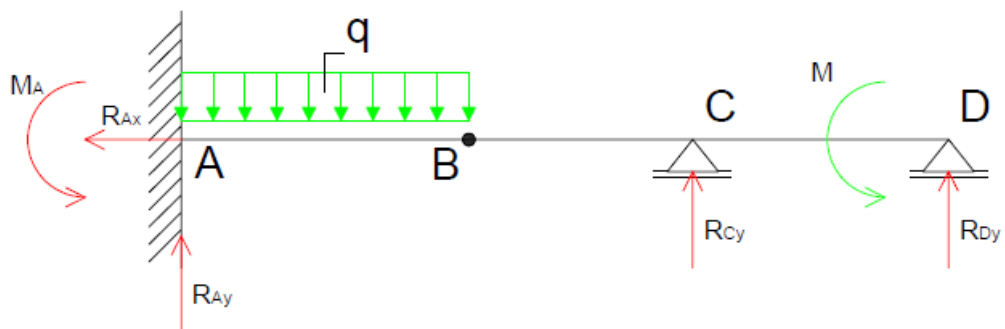
z – broj zglobova (u ovome slučaju, zglobova nema)



$$n = R - 3 - z = 4 - 3 - 0 = 1$$

1 x STATIČKI NEODREĐEN SUSTAV

Slika 1. Primjer rješavanja stupnja statičke neodređenosti sustava



$$n = R - 3 - z = 5 - 3 - 1 = 1$$

1 x STATIČKI NEODREĐEN SUSTAV

Slika 2. Primjer određivanja stupnja statičke neodređenosti sustava sa zglobom

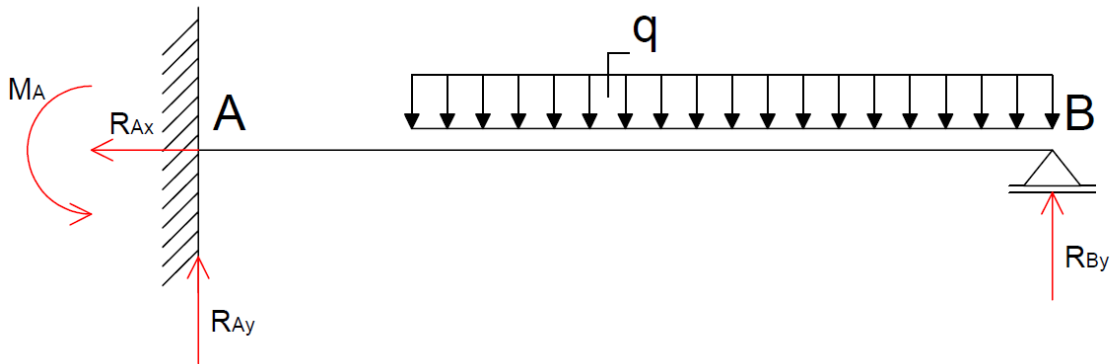
2.2. Jednadžba kompatibilnosti

Metoda sila koristi se za rješavanje statički neodređenih sustava na način da se sustav pretvori u statički određen (tzv. osnovni) oslobađanjem određenog broja veza. To podrazumijeva uklanjanje veza s podlogom (reakcije u osloncima) ili veza unutar nosača (uvođenje zglobova). Pri tome treba voditi računa da određene kombinacije oslonaca (i zglobova) mogu rezultirati mehanizmom iako je prema jednadžbi (1)

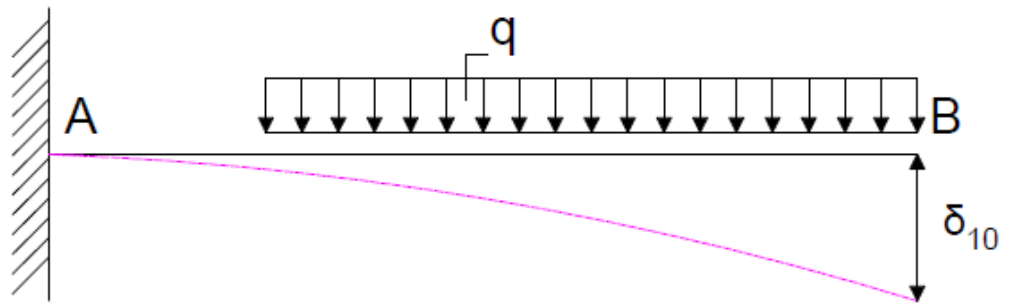
$n = 0$. Vanjsko opterećenje će na sustavu prilikom uklanjanja veze proizvesti novi pomak ili zaokret na mjestu na kojem ranije nije postojao. Takav pomak na osnovnom sustavu označavamo s δ_{10} pri čemu prvi indeks (1) označava poziciju 1, a drugi (0) se odnosi na zadano vanjsko opterećenje. Razlika između jedanput statički neodređenog nosača i osnovnog sustava je samo u jednoj vezi. Drugim riječima, ako se na osnovni sustav po principu superpozicije doda utjecaj uklonjene veze, takav sustav je ekvivalentan zadanom statički neodređenom sustavu. Ukoliko se, kao u primjeru prikazanom niže, radi o uklonjenoj reakciji, pomak koji vanjsko opterećenje uzrokuje na mjestu uklonjene reakcije na osnovnom sustavu istog je iznosa, ali suprotnog smjera u odnosu na pomak kojeg uklonjena reakcija u svojstvu vanjske sile uzrokuje na osnovnom sustavu (bez ostalog vanjskog opterećenja). Obzirom da veličina uklonjene reakcije nije poznata, umjesto stvarne sile koristi se jedinična sila. Pomak uzrokovan jediničnom silom naziva se fleksija i označava f_{11} , gdje se prvi indeks (1) odnosi na poziciju 1, a drugi (1) odnosi na jedinično opterećenje. Stoga pomak od uklonjene reakcije na osnovnom sustavu može se zapisati kao $f_{11} \cdot X_1$, gdje je X_1 tražena reakcija na poziciji 1. Iz uvjeta da su pomaci od vanjskog opterećenja i uklonjene reakcije na osnovnom sustavu jednaki, ali suprotnog predznaka možemo zapisati sljedeću jednadžbu kompatibilnosti :

$$\delta_{10} + f_{11}X_1 = 0 \quad (2)$$

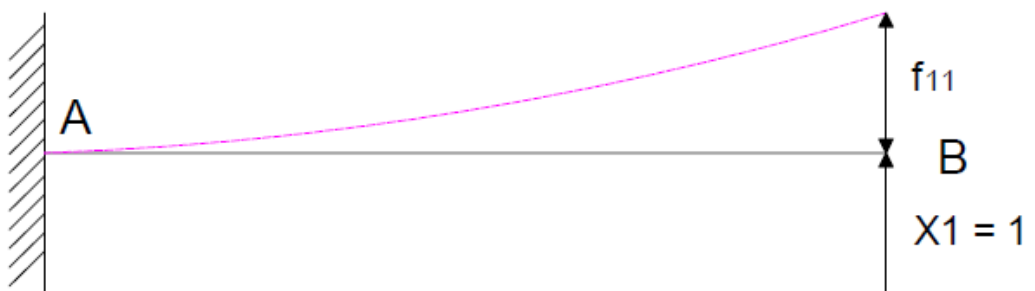
PRIMJER :



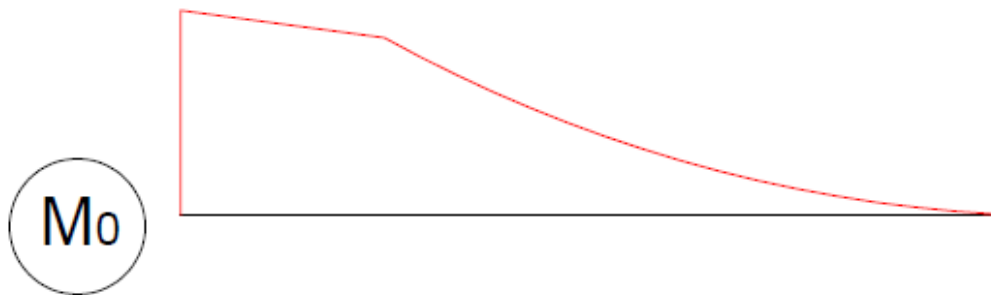
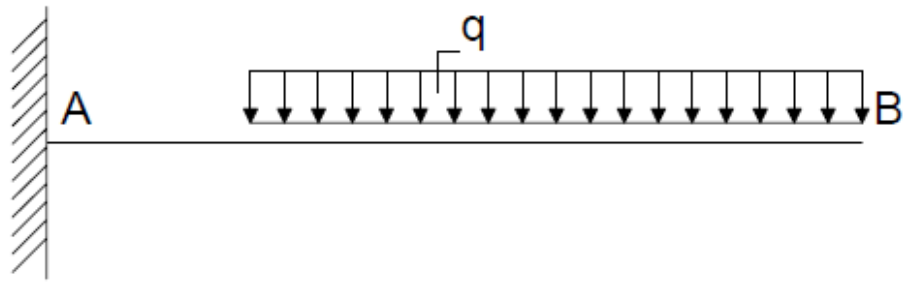
Slika 3. Statička shema - primjer sustava



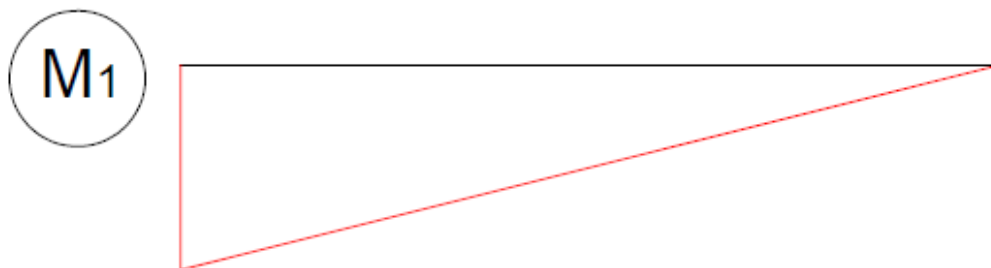
Slika 4. Oslobađanje oslonca - vanjsko opterećenje



Slika 5. Oslobađanje oslonca - jedinična sila



Slika 6. Momentni dijagram - vanjsko opterećenje



Slika 7. Momentni dijagram - jedinična sila

$$\delta_{10} + f_{11}X_1 = 0$$

δ_{10} – pomak na mjestu jedinične sile od vanjskog opterećenja na osnovnom sustavu

f_{11} – pomak na mjestu jedinične sile od jedinične sile na osnovnom sustavu

X_1 – jedinična sila

$f_{11} X_1$ – pomak od uklonjene reakcije

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{f_{11}} \quad (3)$$

Da bi dobili pomak na mjestu jedinične sile od vanjskog opterećenja (δ_{10}) koristi se metoda jedinične sile. Ta se metoda rješava kombinacijom momentnih dijagrama od vanjskog (M0) i jediničnog opterećenja (M1) na način da se površina u dijagramu vanjskog opterećenja pomnoži sa vrijednošću koju na mjestu težišta te površine ima dijagram od jedinične sile na osnovnom sustava. Na sličan način, za određivanje fleksije f_{11} potrebno je momentni dijagram od jedinične sile kombinirati sam sa sobom.

Za potrebe bržeg rješavanja ovom metodom, postoje razne kombinacije oblika momentnih dijagrama od vanjskog i jediničnog opterećenja danih u Tablicama integrala (Slika 7.). Za svaku kombinaciju je navedena formula zajedno s pripadajućom skicom. Kod oznaka na skicama, „a“ označava duljinu dijela dijagrama koji se kombinira, dok su „j“ i „k“ vrijednosti na određenim dijelovima dijagrama.

TABLICA INTEGRALA ZA METODU VEREŠČAGIN – Rješenje integrala $\int M(x)\bar{M}(x)dx$							
		a	b	c	e	f	g
$M(x)$	$\bar{M}(x)$						
1		ajk	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}j(k_1 + k_2)$
2		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{6}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \gamma)$	$\frac{a}{6}j(k_1 + 2k_2)$
3		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{6}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \delta)$	$\frac{a}{6}j(2k_1 + k_2)$
4		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{12}jk \frac{3 - 4\gamma^2}{\delta}$ za $\gamma \leq \delta$	$\frac{a}{4}j(k_1 + k_2)$
5		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \alpha)$	$\frac{a}{6}jk(1 + \beta)$	$\frac{a}{12}jk \frac{3 - 4\alpha^2}{\beta}$ za $\alpha \leq \beta$	$\frac{a}{6}jk \frac{2\alpha - \alpha^2 - \gamma^2}{\alpha\delta}$ za $\alpha \geq \gamma$	$\frac{a}{6}j[k_1(1 + \beta) + k_2(1 + \alpha)]$
6		$\frac{a}{2}(j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{6}(j_1 + 2j_2)k$	$\frac{a}{6}(2j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{4}(j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{6}[j_1(1 + \delta) + j_2(1 + \gamma)]k$	$\frac{a}{6}[j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)]$
7		$\frac{2a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{5a}{12}jk$	$\frac{a}{3}jk(1 + \gamma\delta)$	$\frac{a}{3}j(k_1 + k_2)$
8		$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{12}jk$	$\frac{7a}{48}jk$	$\frac{a}{12}jk(1 + \gamma + \gamma^2)$	$\frac{a}{12}j(k_1 + 3k_2)$
9		$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{12}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{7a}{48}jk$	$\frac{a}{12}jk(1 + \delta + \delta^2)$	$\frac{a}{12}j(3k_1 + k_2)$
10		$\frac{a}{6}(j_1 + 4j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}(2j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}(j_1 + 2j_2)k$	$\frac{a}{24}(j_1 + 10j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}[j_1\delta^2 + 2j_2(1 + \gamma\delta) + j_3\gamma^2]k$	$\frac{a}{6}[j_1k_1 + 2j_2 \cdot (k_1 + k_2) + j_3k_2]$

Slika 8. Tablica integrala

Postupak rješavanja statički neodređenog sustava može se sažeti na sljedeći način. Nakon određivanja statičke neodređenosti sustava (Slika 1.), u sustavu se oslobađa oslonac da bi sustav postao statički određen. Osnovni sustav se potom rješava u dva dijela (Slika 2. i 3.) :

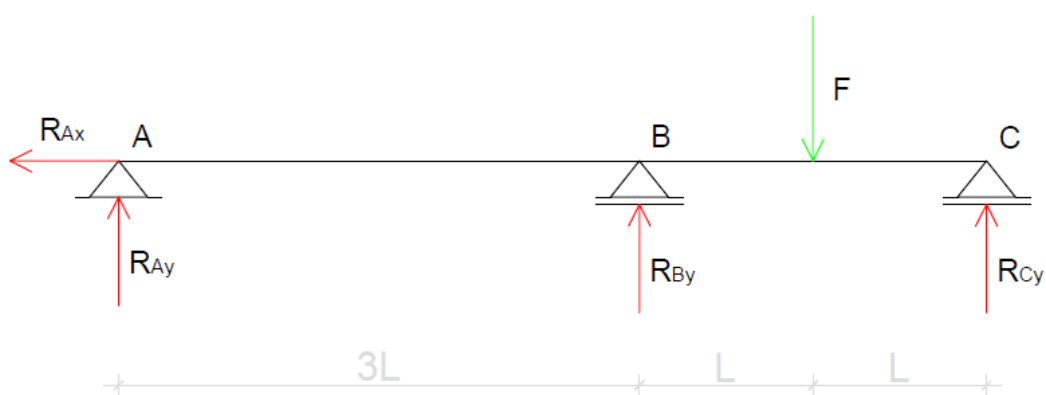
1. Osnovni sustav na kojem djeluje samo zadano vanjsko opterećenje
2. Osnovni sustav na kojem se na mjestu oslobođenog oslonca zadaje jedinična sila

Za svaki sustav se određuje momentni dijagram (Slika 4.; Slika 5.) te se kombinacijom tih dijagrama (kako je ranije opisano) dobivaju pomak δ_{10} i fleksija f_{11} . Za kombinaciju dijagrama koriste se tablice integrala (Slika 7.) u kojima su unaprijed određeni mogući oblici momentnih dijagrama.

3. PRORAČUN ZADANOG STATIČKI NEODREĐENOG SUSTAVA METODOM SILA NA DVA NAČINA

Sustav je jedanput statički neodređeni kontinuirani nosač preko dva polja koncentriranom silom na sredini drugog polja.

Kod prvog načina se uklanja/oslobađa srednji oslonac s pripadajućom reakcijom, a kod drugog načina se uklanja/oslobađa oslonac sa desne strane nosača s pripadajućom reakcijom.

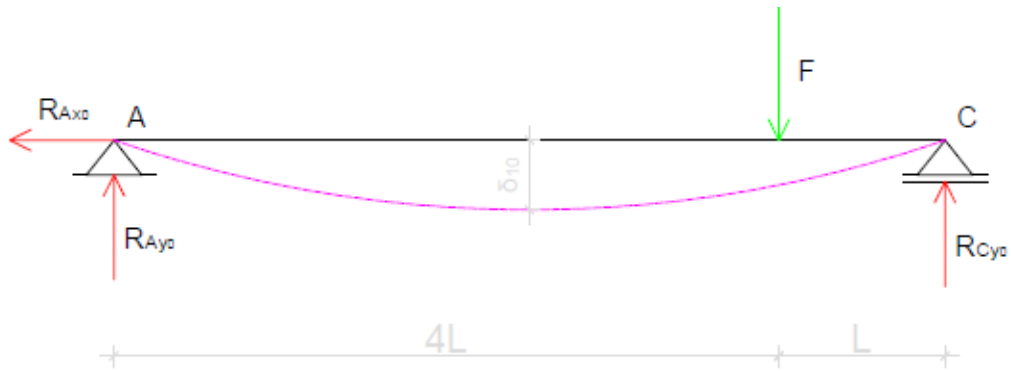


Slika 9. Zadani statički sustav

$$n = R - 3 - z = 4 - 3 - 0 = 1$$

1 x STATIČKI NEODREĐEN SUSTAV

3.1. Prvi način



Slika 10. Osnovni sustav s uklonjenim osloncem B

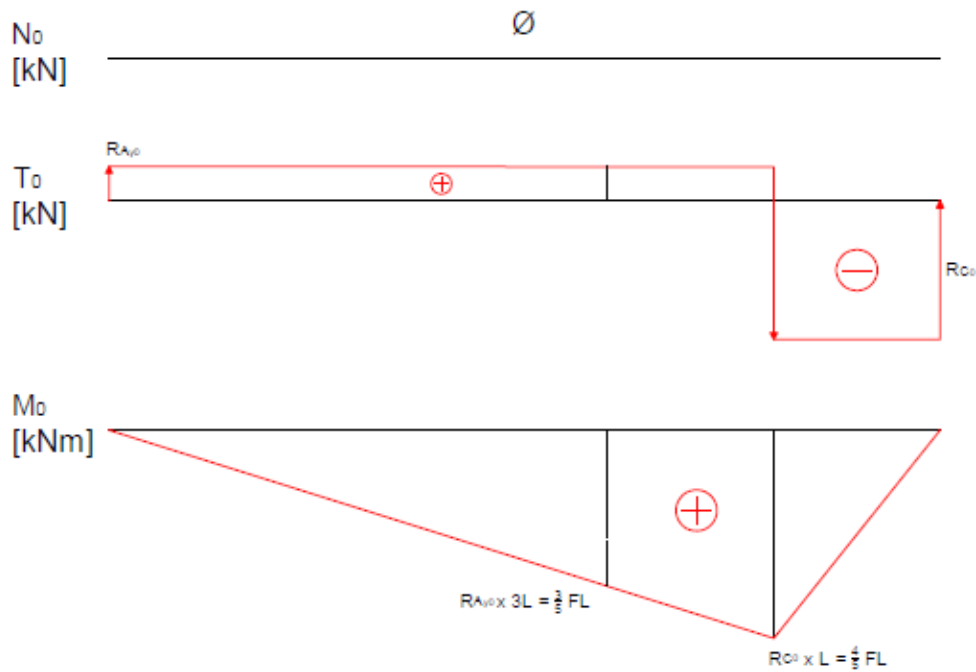
OSNOVNI SUSTAV :

$$\Sigma F_x = 0; R_{Ax_0} = 0$$

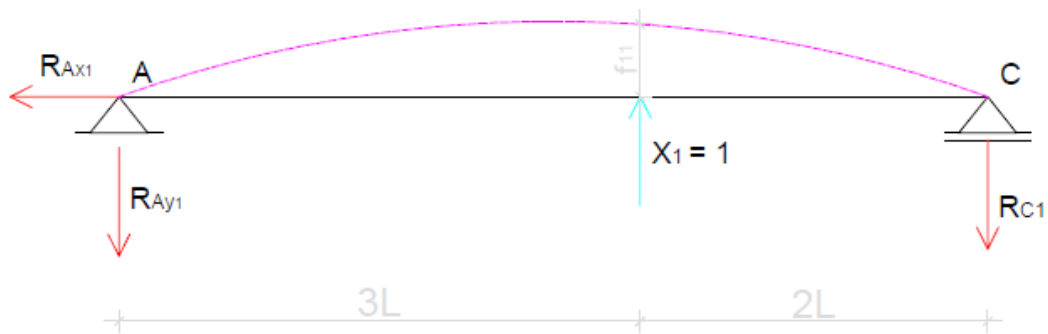
$$\Sigma M_A = 0; -F \times 4L + R_{C_0} \times 5L = 0; R_{C_0} = \frac{F \times 4L}{5L} = \frac{4}{5}F$$

$$\Sigma M_C = 0; -R_{Ay_0} \times 5L + F \times L = 0; R_{Ay_0} = \frac{F \times L}{5L} = \frac{F}{5}$$

$$\Sigma F_y = 0; R_{Ay_0} + R_{C_0} - F = 0$$



Slika 11. Dijagrami unutrašnjih sila - vanjsko opterećenje



Slika 12. Osnovni sustav s jediničnom silom na mjestu oslonca B

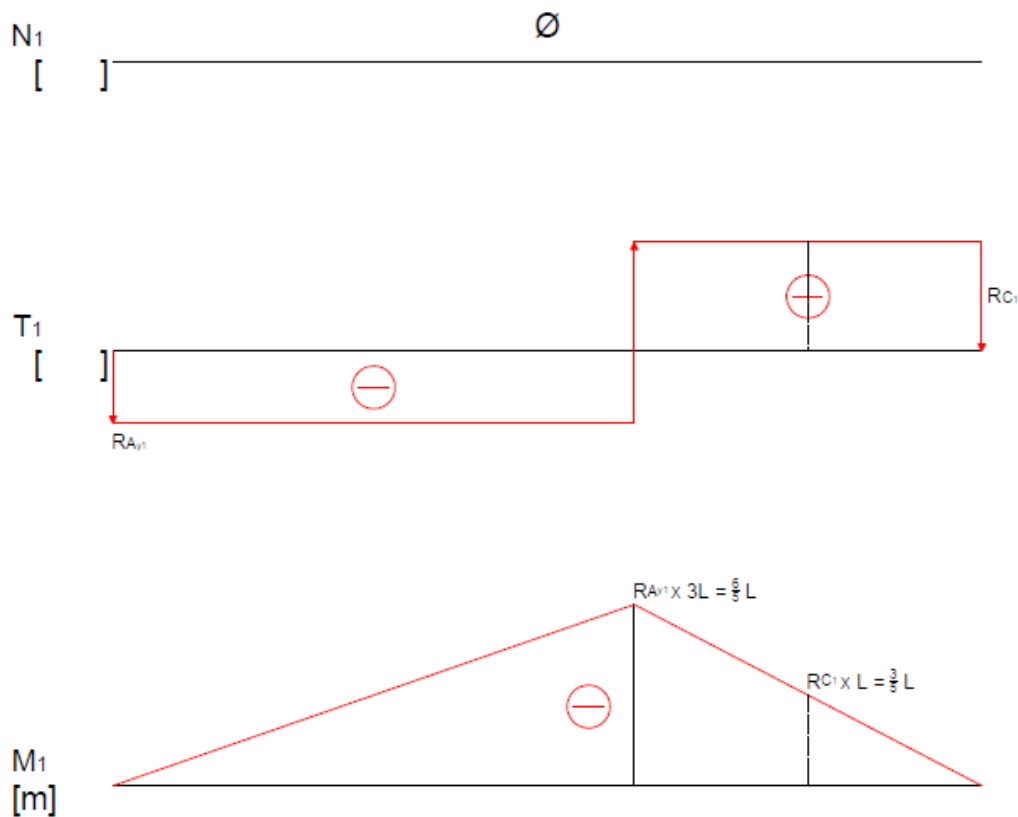
JEDINIČNA SILA :

$$\Sigma F_x = 0 ; R_{Ax_1} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 ; X_1 \times 3L - R_{C1} \times 5L = 0 ; R_{C1} = \frac{X_1 \times 3L}{5L} = \frac{3}{5}$$

$$\Sigma M_C = 0 ; R_{Ay_1} \times 5L - X_1 \times 2L = 0 ; R_{Ay_1} = \frac{X_1 \times 2L}{5L} = \frac{2}{5}$$

$$\Sigma F_y = 0 ; -R_{Ay_1} - R_{C1} + X_1 = 0$$



Slika 13. Dijagrami unutrašnjih sila - jedinična sila

JEDNADŽBA KOMPATIBILNOSTI :

$$\delta_{10} + f_{11} \times X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{f_{11}}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{3L \times \frac{3}{5}FL \times \frac{6}{5}L}{3} - \frac{L}{6} \left[\frac{3}{5}FL \left(2 \times \frac{6}{5}L + \frac{3}{5}L \right) + \frac{4}{5}FL \left(\frac{6}{5}L + 2 \times \frac{3}{5}L \right) \right] - \frac{L}{3} \times \frac{4}{5}FL \times \frac{3}{5}L \right\} = -\frac{FL^3}{EI} \times \frac{3}{2} = -\frac{3FL^3}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{3L \times \frac{6}{5}L \times \frac{6}{5}L}{3} + \frac{2L \times \frac{6}{5}L \times \frac{6}{5}L}{3} \right) = \frac{L^3}{EI} \left(\frac{36}{25} + \frac{24}{25} \right) = \frac{12L^3}{5EI}$$

$$X_1 = -\frac{-3FL^3 \times 5EI}{2EI \times 12L^3} = \frac{5}{8}F$$

$$R_C = R_{C0} + X_1 \times (-R_{C1}) = \frac{4}{5}F - \frac{3}{5} \times \frac{5}{8}F = \frac{17}{40}F$$

$$R_A = R_{Ay0} + X_1 \times (-R_{Ay1}) = \frac{F}{5} - \frac{5}{8}F \times \frac{2}{5} = -\frac{2}{40}F$$

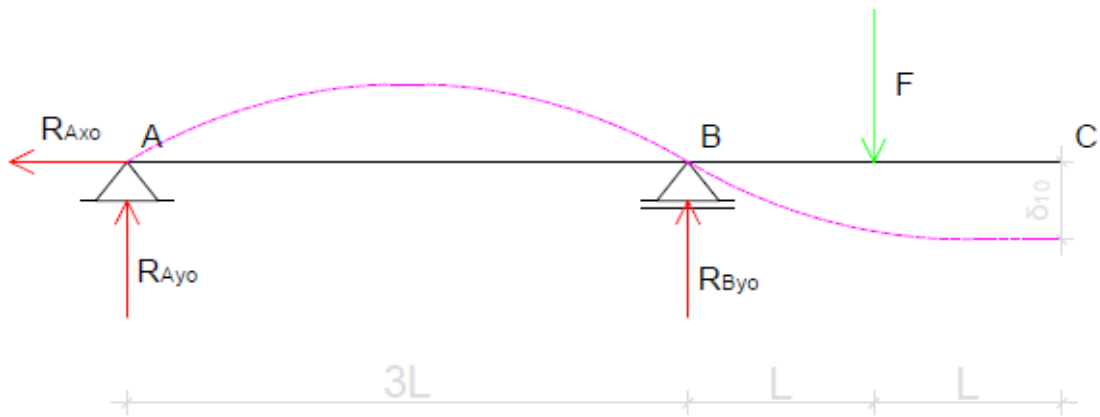
PROVJERA :

$$R_A + R_B + R_C = F$$

$$\frac{1}{40}(-2 + 25 + 17)F = F$$

$$F = F$$

3.2. Drugi način



Slika 14. Osnovni sustav s uklonjenim osloncem C

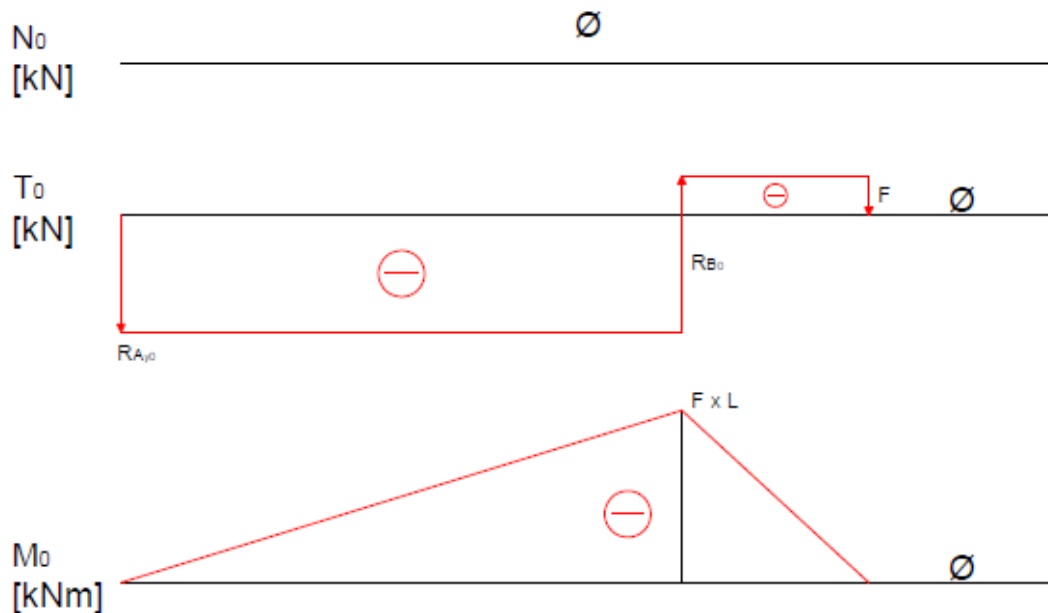
OSNOVNI SUSTAV :

$$\Sigma F_x = 0 ; R_{Ax_0} = 0$$

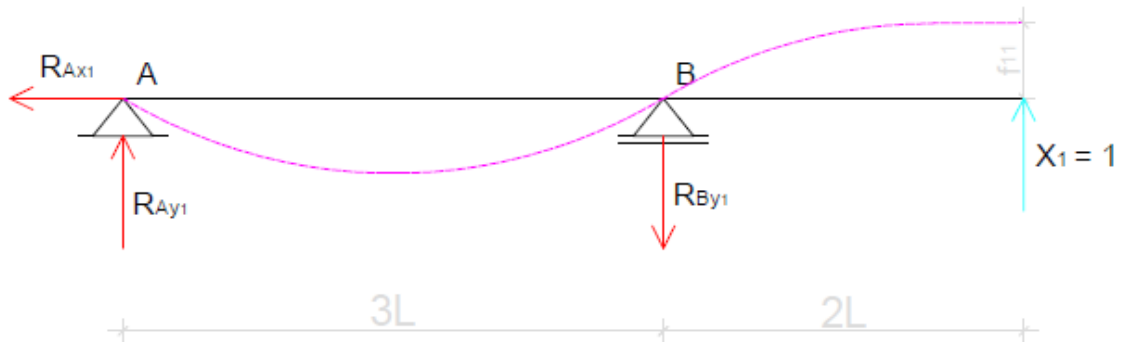
$$\Sigma M_A = 0 ; R_{By_0} \times 3L - F \times 4L = 0 ; R_{By_0} = \frac{F \times 4L}{3L} = \frac{4}{3}F$$

$$\Sigma M_B = 0 ; -R_{Ay_0} \times 3L - F \times L = 0 ; R_{Ay_0} = -\frac{F \times L}{3L} = -\frac{1}{3}F$$

$$\Sigma F_y = 0 ; R_{Ay_0} + R_{Cy_0} = 0$$



Slika 15. Dijagrami unutrašnjih sila - vanjsko opterećenje



Slika 16. Osnovni sustav s jediničnom silom na mjestu oslonca C

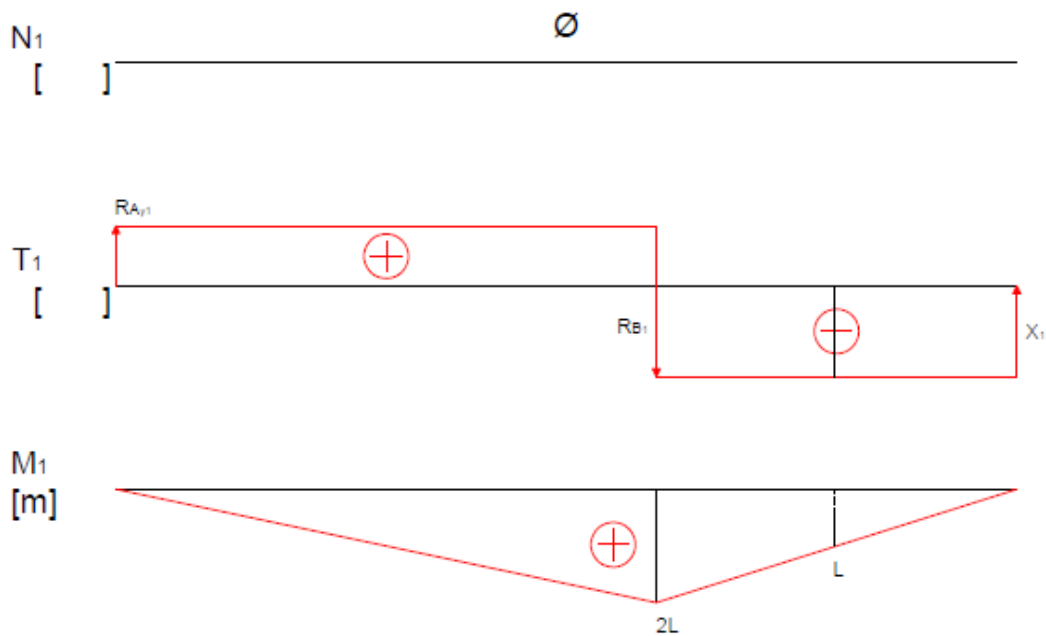
JEDINIČNA SILA :

$$\Sigma F_x = 0 ; R_{Ax_1} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 ; -R_{B_1} \times 3L + X_1 \times 2L = 0 ; R_{B_1} = \frac{X_1 \times 5L}{3L} = \frac{5}{3}$$

$$\Sigma M_B = 0 ; -R_{A_{y_1}} \times 3L + X_1 \times 2L = 0 ; R_{A_{y_1}} = \frac{X_1 \times 2L}{3L} = \frac{2}{3}$$

$$\Sigma F_y = 0 ; R_{A_{y_1}} - R_{B_1} + X_1 = 0$$



Slika 17. Dijagrami unutrašnjih sila - jedinična sila

JEDINIČNA SILA :

$$\Sigma F_x = 0; R_{Ax_1} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; -R_{B_1} \times 3L + X_1 \times 2L = 0; R_{B_1} = \frac{X_1 \times 5L}{3L} = \frac{5}{3}$$

$$\Sigma M_B = 0; -R_{Ay_1} \times 3L + X_1 \times 2L = 0; R_{Ay_1} = \frac{X_1 \times 2L}{3L} = \frac{2}{3}$$

$$\Sigma F_y = 0; R_{Ay_1} - R_{B_1} + X_1 = 0$$

JEDNADŽBA KOMPATIBILNOSTI :

$$\delta_{10} + f_{11} \times X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{f_{11}}$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{FL \times 2L \times 3L}{3} - \frac{L}{6} \times FL \times (2 \times 2L + L) \right] = -\frac{1}{EI} \left(2FL^3 + \frac{5}{6}FL^3 \right) \\ &= -\frac{17FL^3}{6EI} \end{aligned}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{3L \times 2L \times 2L}{3} + \frac{2L \times 2L \times 2L}{3} \right) = \frac{20L^3}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{-17FL^3 \times 3EI}{6EI \times 20L^3} = \frac{17}{40} F = R_C$$

$$R_B = R_{B_0} - X_1 \times R_{B_1} = \frac{4}{3} F - \frac{17}{40} F \times \frac{5}{3} = \frac{5}{8} F$$

$$R_A = R_{A_0} + X_1 \times R_{A_1} = -\frac{1}{3} F + \frac{17}{40} F \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{20} F$$

PROVJERA :

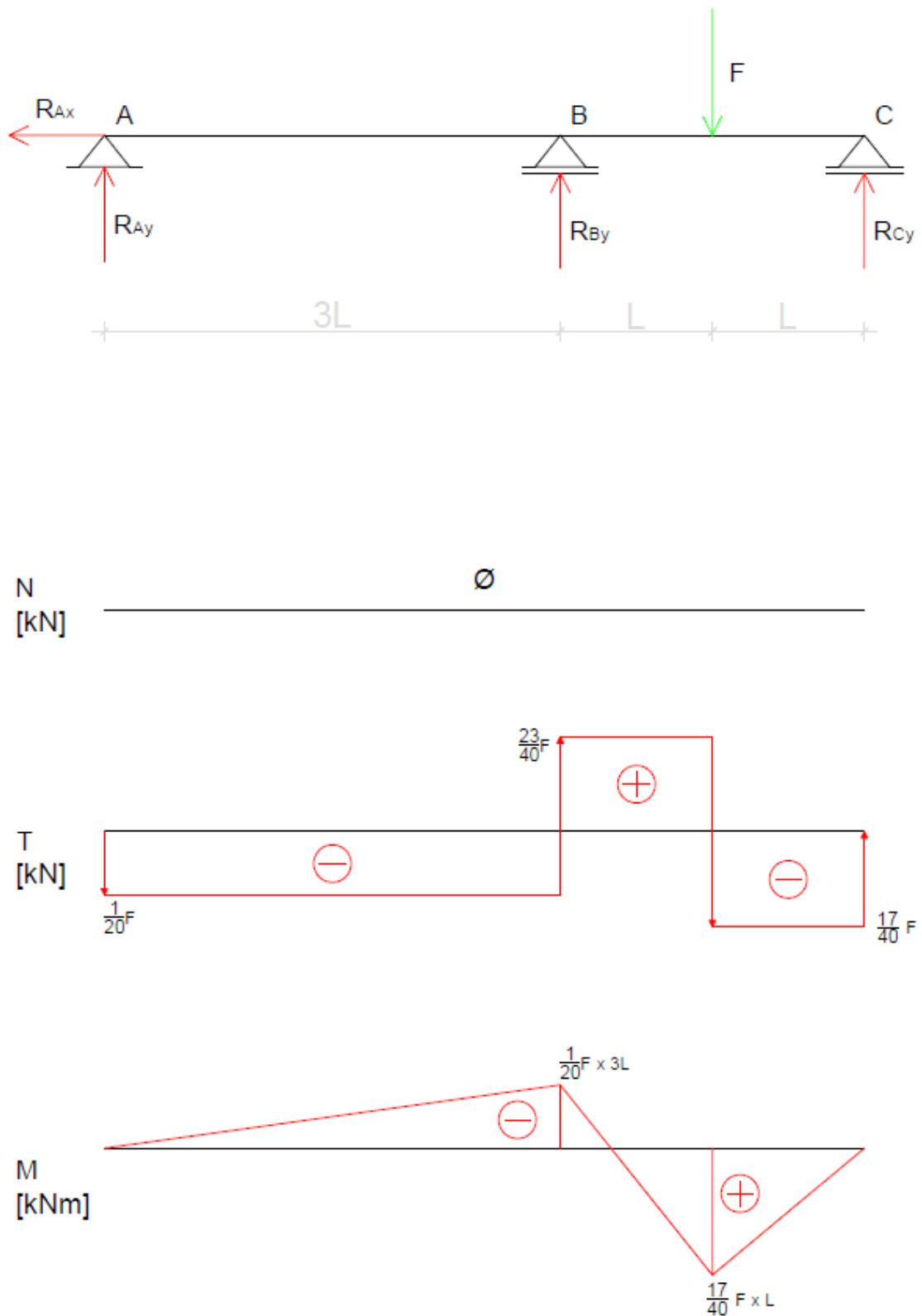
$$R_A + R_B + R_C = F$$

$$\frac{1}{40} (-2 + 25 + 17) F = F$$

$$F = F$$

Zaključak : Rješenje sustava u vidu reakcija u sva tri oslonca kontinuiranog nosača ne razlikuje se bez obzira na odabranu metodu.

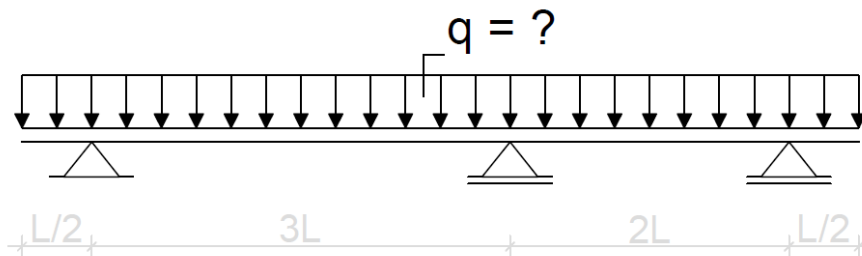
3.3. Konačni dijagrami unutrašnjih sila



Slika 18. Konačni dijagrami unutrašnjih sila za zadani statički sustav

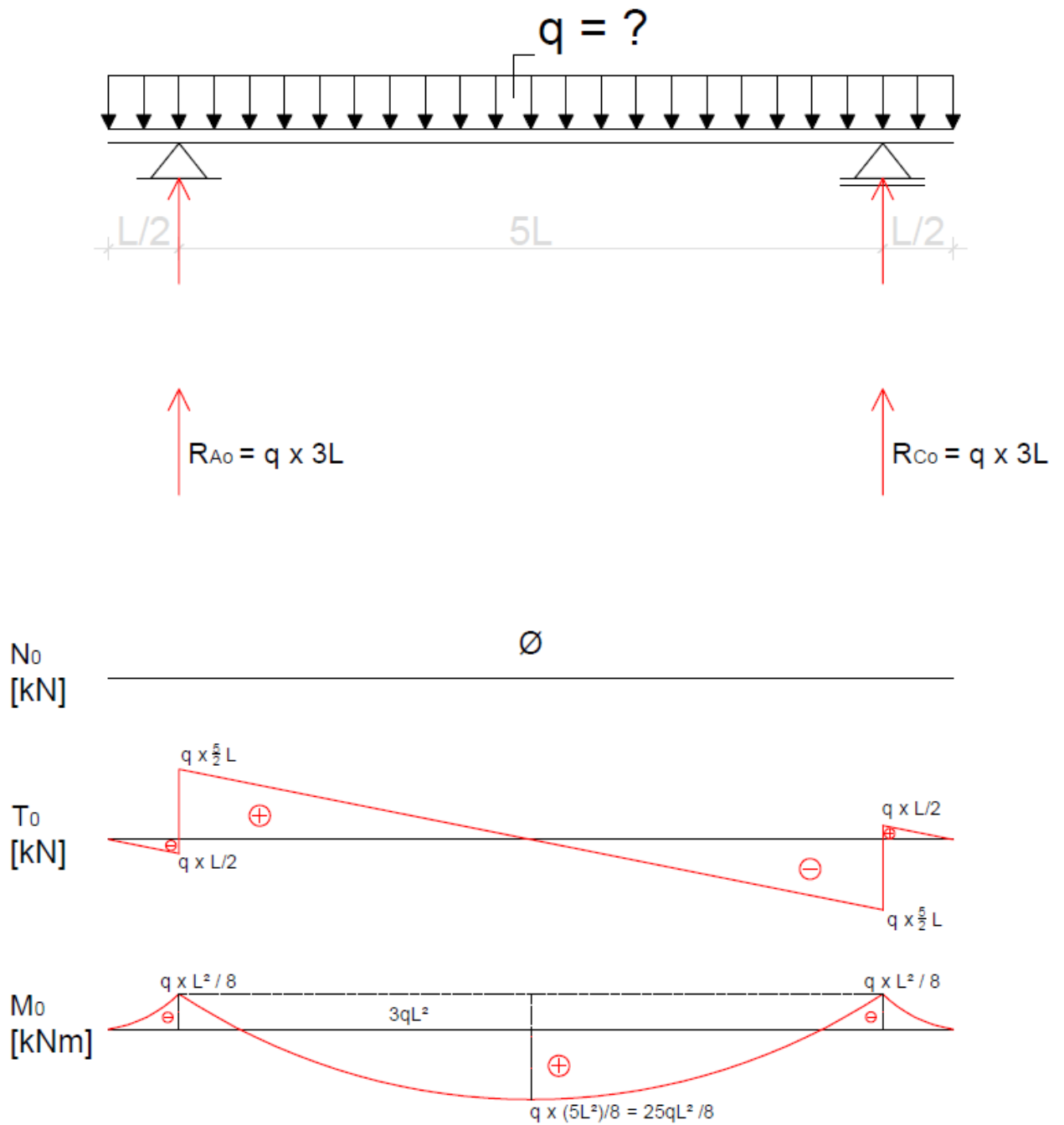
3.4. Utjecaj vlastite težine nosača

Za zadani statički sustav, kontinuirani nosač preko dva polja s koncentriranom silom na sredini drugog polja dodatno će se uzeti u obzir utjecaj vlastite težine nosača. Vlastita težina nosača prikazuje se jednoliko raspoređenim kontinuiranim opterećenjem. Za određivanje utjecaja vlastite težine nosača koristi se samo prvi način rješavanja sustava.



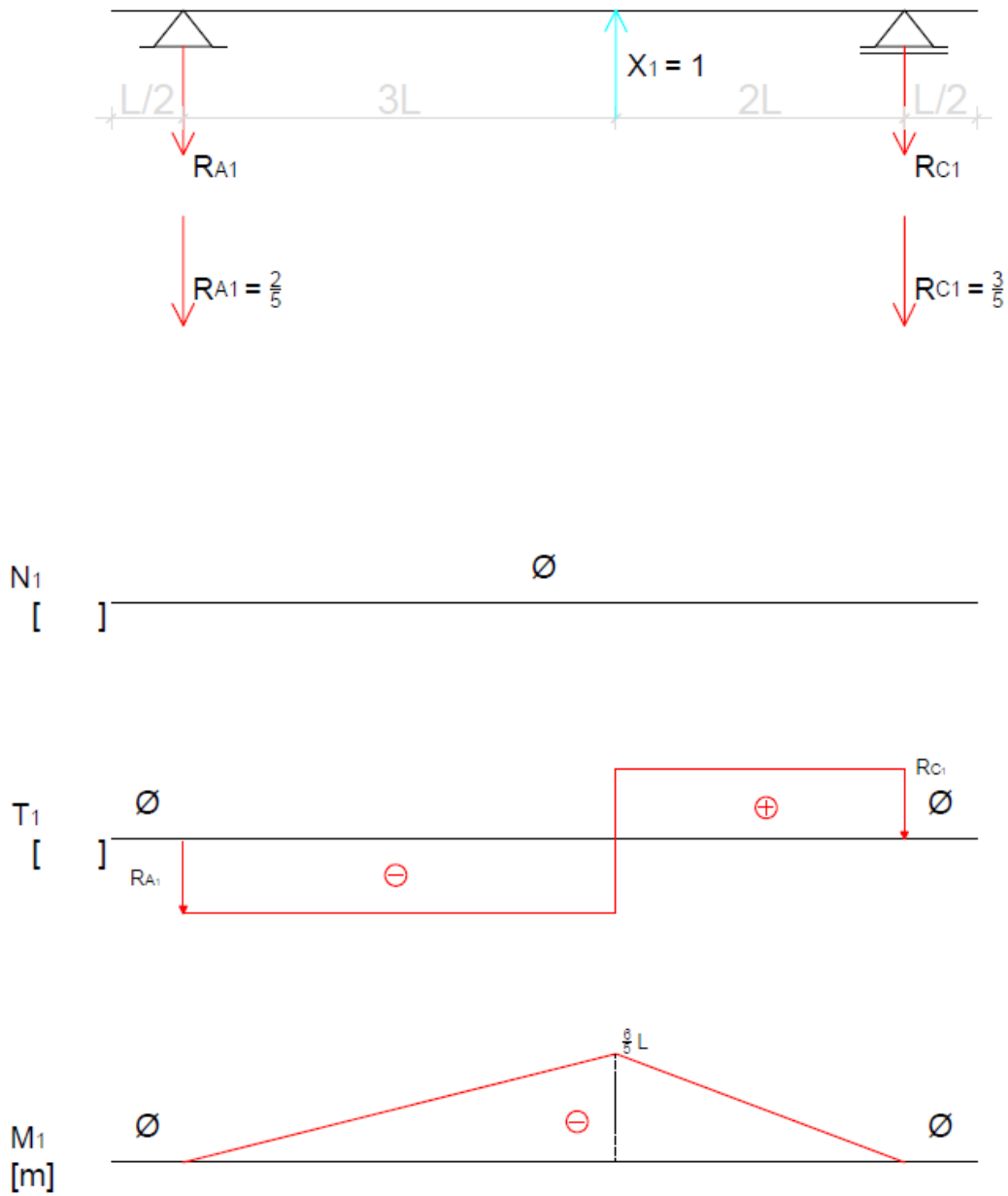
Slika 19. Kontinuirani nosač opterećen vlastitom težinom

Osnovni sustav – vanjsko opterećenje

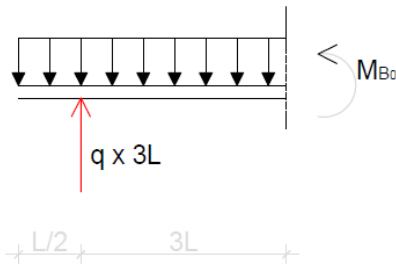


Slika 20. Reakcije i dijagrami unutrašnjih sila na osnovnom sustavu - vanjsko opterećenje

Osnovni sustav – jedinična sila

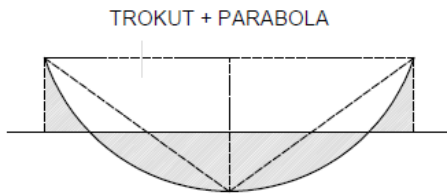


Slika 21. Reakcije i dijagrami unutrašnjih sila na osnovnom sustavu - jedinična sila

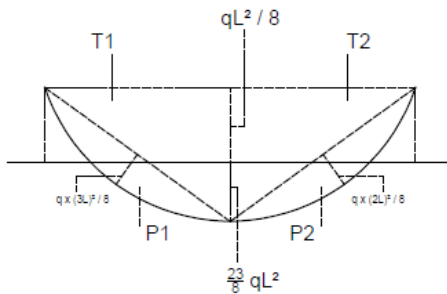


$$\Sigma MB = 0 ; RA_0 \times 3L - q \times \left(\frac{7}{2} L\right)^2 \times \frac{1}{2} - MB_0$$

$$MB_0 = 9qL^2 - \frac{49}{8} qL^2 = \frac{23}{8} qL^2 < 3qL^2$$



$$P(AC) = -qL^2/8 \times 5L + \left(\frac{2}{3} \times \frac{25}{8} qL^2 \times 5L\right) = 15qL^2$$



$$P^*(AC) = -\frac{5}{8} qL^2 + \frac{1}{2} \times 3L \times 3qL^2 + \frac{1}{2} \times 2L \times 3qL^2 + \frac{2}{3} \times 3L \times \frac{9}{8} qL^2 + \frac{2}{3} \times 2L \times \frac{1}{2} qL^2 = 15 qL^2$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \times \left(\left(\frac{5}{2} L \times \left(\frac{qL^2}{8} \right) \times \frac{6}{5} L \right) - 3L/L \times 3qL^2 \times \frac{6}{5} L - 2L/3 \times 3qL^2 \times \frac{6}{5} L - 3L/3 \times \frac{9}{8} qL^2 \times \frac{6}{5} L - 2L/3 - \frac{1}{2} qL^2 \times \frac{6}{5} L \right) = \left(\frac{qL^4}{EI} \right) \times \left(-\frac{59}{8} \right) = -\frac{59}{8} qL^4$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \times \left(\left(3L/3 \times \frac{36}{25} L^2 + 2L/3 \times \frac{36}{25} L^2 \right) \right) = L^3 / 75EI \times 180 = \frac{12}{5} L^3$$

$$x_1 = \frac{-\frac{59}{8} qL^4}{\frac{12}{5} L^3} = \frac{295}{96} qL = RB$$

$$RA = RA_0 + X_1 \times RA_1 = q \times 3L - \frac{2}{5} \times \frac{295}{96} qL = \frac{85}{48} qL$$

$$RC = RC_0 + X_1 \times RC_1 = q \times 3L - \frac{3}{5} \times \frac{295}{96} qL = \frac{37}{32} qL$$

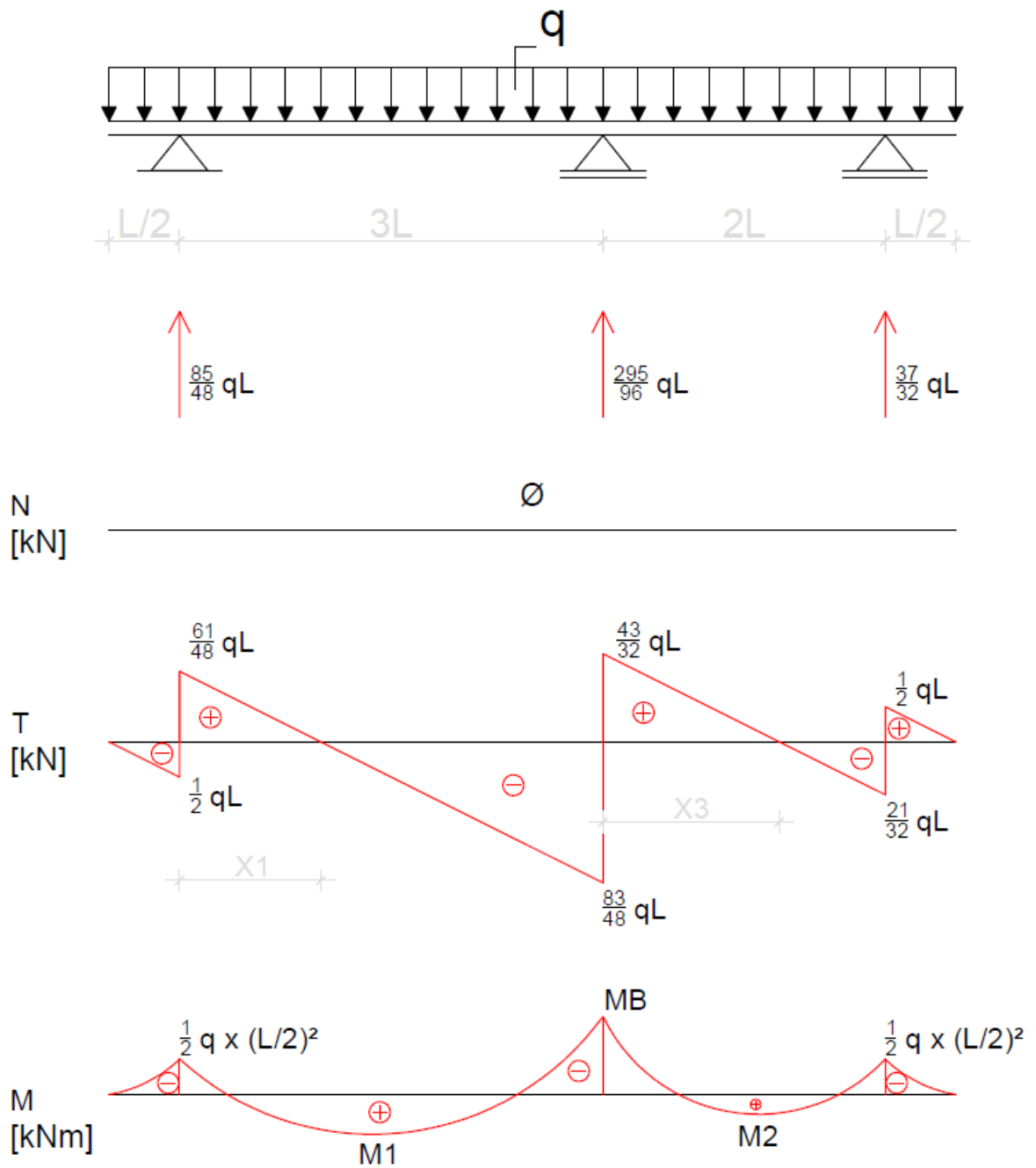
PROVJERA :

$$R_A + R_B + R_C = 6qL$$

$$\frac{1}{96} (295 + 170 + 111)qL = 6qL$$

$$\frac{576}{96} qL = 6qL$$

$$6qL = 6qL$$



Slika 22. Konačni dijagrami unutrašnjih sila - od vlastite težine nosača

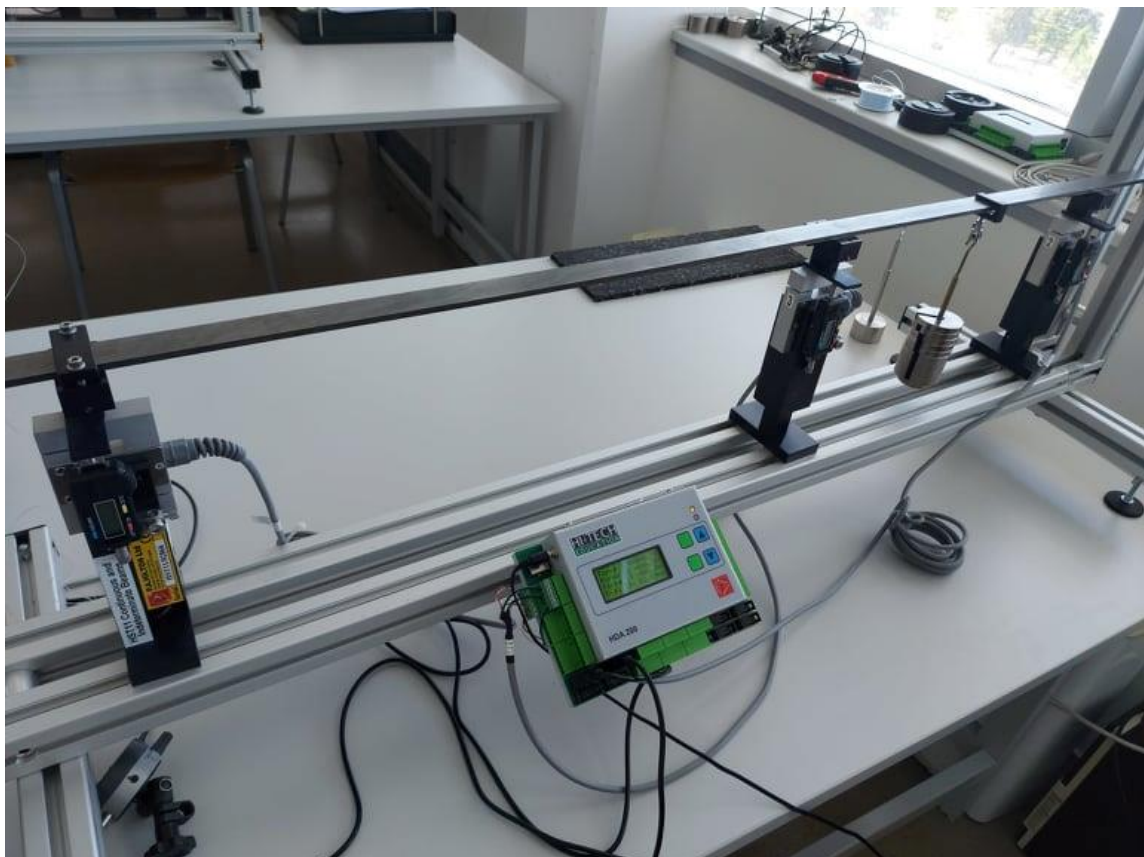
$$M_1 = -q \times \left(\frac{L}{2} + X_1 \right) \times \frac{\frac{L}{2} + X_1}{2} + R_A \times X_1$$

$$M_B = -q \times 3,5L \times \frac{3,5L}{2} + R_A \times 3L$$

$$M_2 = -q \times (4L + X_3) \times \frac{4L + X_3}{2} + R_A \times (3L + X_3) + R_B \times X_3$$

4. METODA SILA - EKSPERIMENTALNO

Eksperimentalna mjerenja provedena su u laboratoriju (praktikumu) Katedre za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Rijeci. Nakon postavljenog zadanog sustava, kontinuirani nosač preko dva polja s koncentriranom silom u sredini drugog polja, kreće se s prvim mjerenjem reakcija na način da se prihvat za utege postavi u sredinu drugog polja gdje se u zadanom statičkom sustavu nalazi koncentrirana sila. Na prihvat za utege stavljaju se utezi na način da se za svaki novi dodan uteg, povećavalo opterećenje koje se zapisivalo u tablice i istovremeno provjeravalo s dobivenim teorijskim formulama iz poglavlja 3.1.. Zglobni oslonci omogućavaju mjerenje reakcija koje se za sva tri oslonca očitavaju s korisničkog sučelja mjerenog sustava.



Slika 23. Zadan statički sustav – eksperimentalni postav

4.1. Mjerenje 1

Tablica 1. Prvo mjerenje na zadanom sustavu

Uteg	F (N)	MJERENO				RAČUNATO			
		RA (N)	RB (N)	RC (N)	SUMA	RA (N)	RB (N)	RC (N)	SUMA
1	0,91	0	0,5	0,1	0,6	-0,05	0,57	0,39	0,91
2	1,82	0	1,1	0,2	1,3	-0,09	1,14	0,77	1,82
3	2,73	-0,1	1,6	0,4	1,9	-0,14	1,71	1,16	2,73
4	3,64	-0,2	2,3	0,5	2,6	-0,18	2,28	1,55	3,64
5	4,55	-0,3	2,8	0,7	3,2	-0,23	2,84	1,93	4,55
6	5,46	-0,3	3,5	0,5	3,7	-0,27	3,41	2,32	5,46
7	6,37	-0,3	4,1	0,7	4,5	-0,32	3,98	2,71	6,37
8	7,37	-0,4	4,7	0,9	5,2	-0,37	4,61	3,13	7,37
9	8,37	-0,4	5,3	1	5,9	-0,42	5,23	3,56	8,37
10	9,37	-0,4	5,8	1,2	6,6	-0,47	5,86	3,98	9,37
11	10,37	-0,5	6,5	1,4	7,4	-0,52	6,48	4,41	10,37
12	11,37	-0,6	7,1	1,5	8	-0,57	7,11	4,83	11,37
13	12,37	-0,6	7,7	1,7	8,8	-0,62	7,73	5,26	12,37
14	13,37	-0,7	8,3	1,9	9,5	-0,67	8,36	5,68	13,37

Nakon prvog mjerenja, izrade tablice i upisa rezultata, uočeno je da izmjerene reakcije RC znatno više odstupaju od računskih u odnosu na reakcije RA i RB.

Zaključeno je da postoji problem s mjeračem sile na osloncu C te se odlučilo detaljnije istražiti u čemu je problem.

Na oslonce sustava koji su prethodno nulirani (tarirani) polaže se (bez pritezanja) nosač/letva te se potom mjere reakcije na svim osloncima. Mjerenja se uspoređuju s teorijskim rezultatima dobivenima u poglavlju 3.1.. Najprije je odabrana vrijednost kontinuiranog opterećenja q (zaokružen na jednu decimalu) koje daje najbolje podudaranje teorijskih i mjerenih reakcija na osloncima A i B, a onda je određen korekcijski koeficijent koji reakciju u osloncu C popravljaja na isti nivo točnosti. Detalji ovog korekcijskog postupka dani su u tablici 7..

Tablica 2. Namještanje oslonaca – letva

qL (N)		RA	RB	RC	RC – korigiran	Korekcijski koeficijent
1,75	Računato	3,10	5,38		2,02	2,5646
	Mjereno	3,30	5,40	0,8	2,05	
	Relativna greška	6,09 %	0,41 %		1,38%	
L (m)	0,1					
q (N/m)	17,5					

Nakon prve korekcije, letva se priteže na osloncima te se ponovo provjeravaju reakcije. Pri tome dolazi do malih promjena (potrebno je modificirati opterećenje q), ali korekcijski koeficijent nije potrebno mijenjati.

Tablica 3. Nakon pritezanja - letva

qL (N)		RA	RB	RC	RC – korigiran	Korekcijski koeficijent
1,85	Računato	3,28	5,68		2,14	2,5646
	Mjereno	3,50	5,70	0,85	2,18	
	Relativna greška	6,40 %	0,26 %		1,87%	
L (m)	0,1					
q (N/m)	18,5					

Nakon pritezanja letve i provjera reakcija, dodaje se prihvat za utege te se ponovo provjeravaju reakcije. Kao i ranije, korekcijski koeficijent nije potrebno mijenjati.

Tablica 4. Nakon prihvata za utege - letva

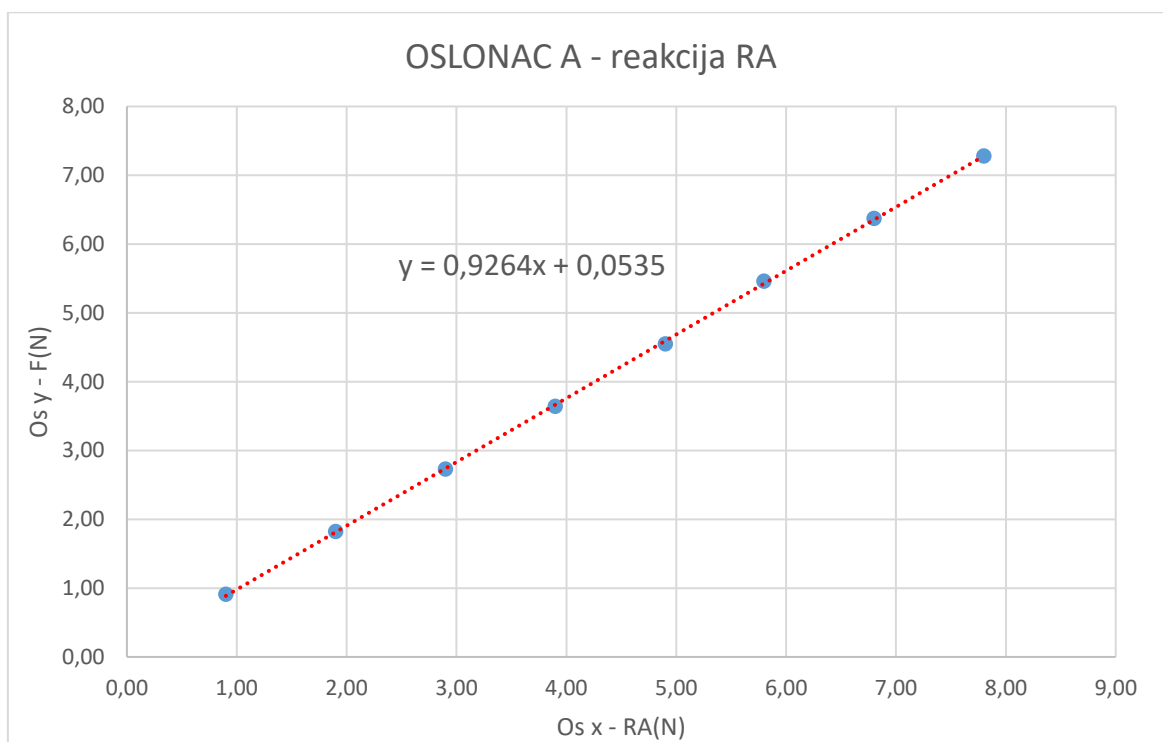
qL (N)		RA	RB	RC	RC – korigiran	Korekcijski koeficijent
1,85	Računato	3,28	5,68		2,14	2,5646
	Mjereno	3,30	5,80	0,85	2,18	
	Relativna greška	6,40 %	1,98 %		1,87%	
L (m)	0,1					
q (N/m)	18,5					

4.2. Korekcije

Za svaki oslonac dodatno je provedeno direktno mjerenje, to jest na svaki oslonac nanese su utezi te se zapisivalo i provjeravalo mjere li oslonci točno silu koja djeluje na njih. Za različite vrijednosti opterećenja (težine utega) mjerene su reakcije na osloncima te su vrijednosti potom tablično i grafički prikazane. Skup točaka je zatim aproksimiran linearnom funkcijom $f(x) = ax + b$, pri čemu bi u slučaju idealnog podudaranja težine utega s izmjerenom reakcijom trebalo biti $a = 1$ i $b = 0$. U stvarnosti očekujemo da će vrijednosti biti vrlo blizu idealnima. Korekcije su provedene za statički sustav kontinuiranog nosača preko dva polja sa koncentriranom silom u sredini drugog polja te za oba načina – osnovni sustav sa vanjskim opterećenjem te osnovni sustav sa jediničnom silom. Prilikom mjerenja u zadanim sustavima javile su se male razlike što se tiče korekcijskih koeficijenata a i b , ali razlike su zanemarive pošto nije bilo znatnog odstupanja među njima. Međutim, kod oslonca C javlja se veliko odstupanje mjerenih vrijednosti od onih očekivanih. Korekcijske jednadžbe za sve oslonce i sve spomenute slučajeve koriste se korekciju rezultata svih daljnjih mjerenja kako bi se dobio što točniji krajnji rezultat.

Tablica 5. Korekcija RA – uteg direktno na oslonac

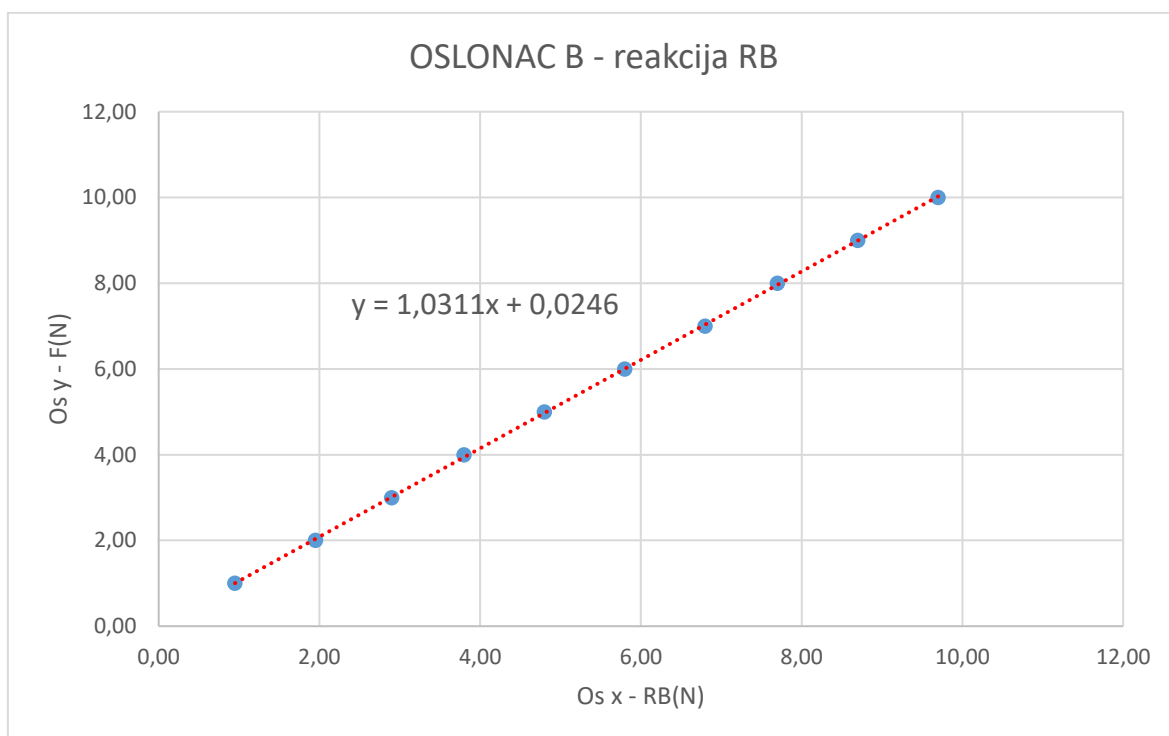
RA (N)	F (N)
0,90	0,91
1,90	1,82
2,90	2,73
3,90	3,64
4,90	4,55
5,80	5,46
6,80	6,37
7,80	7,28
$Y = 0,93 x + 0,0535$	



Slika 24. Grafički prikaz mjerenja na osloncu

Tablica 6. Korekcija RB – uteg direktno na oslonac

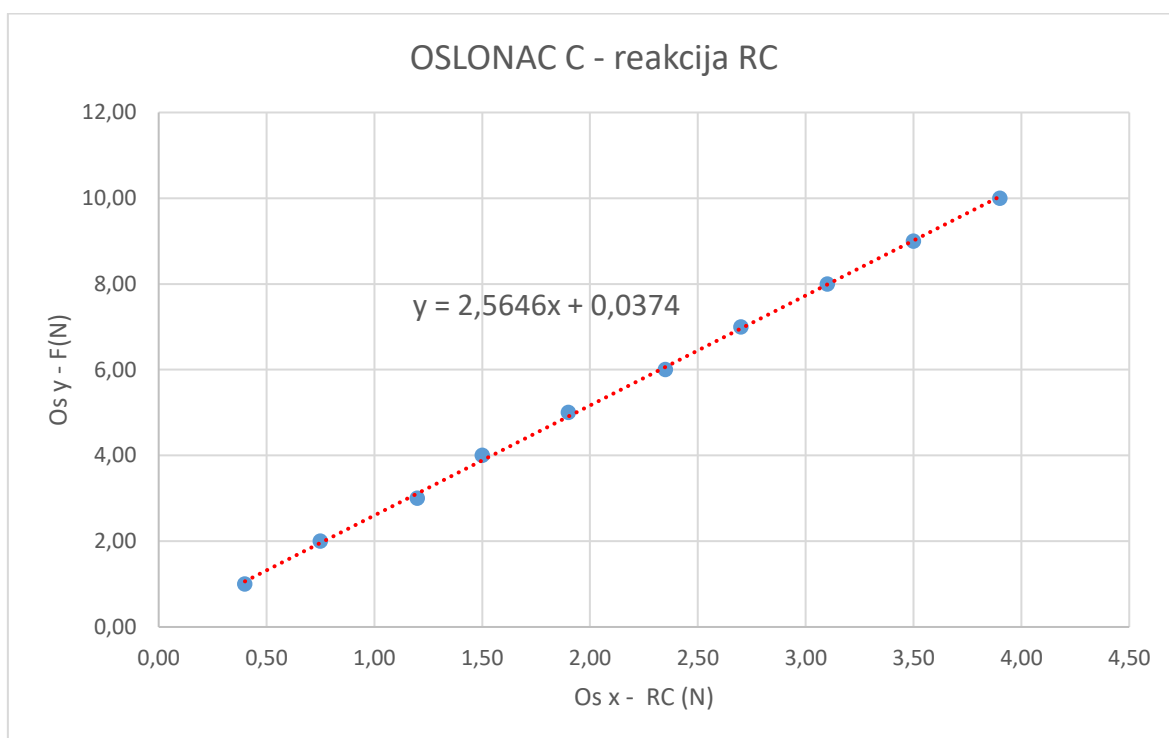
RB (N)	F (N)
0,95	1,0
1,95	2,0
2,90	3,0
3,80	4,0
4,80	5,0
5,80	6,0
6,80	7,0
7,70	8,0
8,70	9,0
9,70	10,0
$Y = 1,03 x + 0,0246$	



Slika 25. Grafički prikaz mjerenja na osloncu B

Tablica 7. Korekcija RC – uteg direktno na oslonac

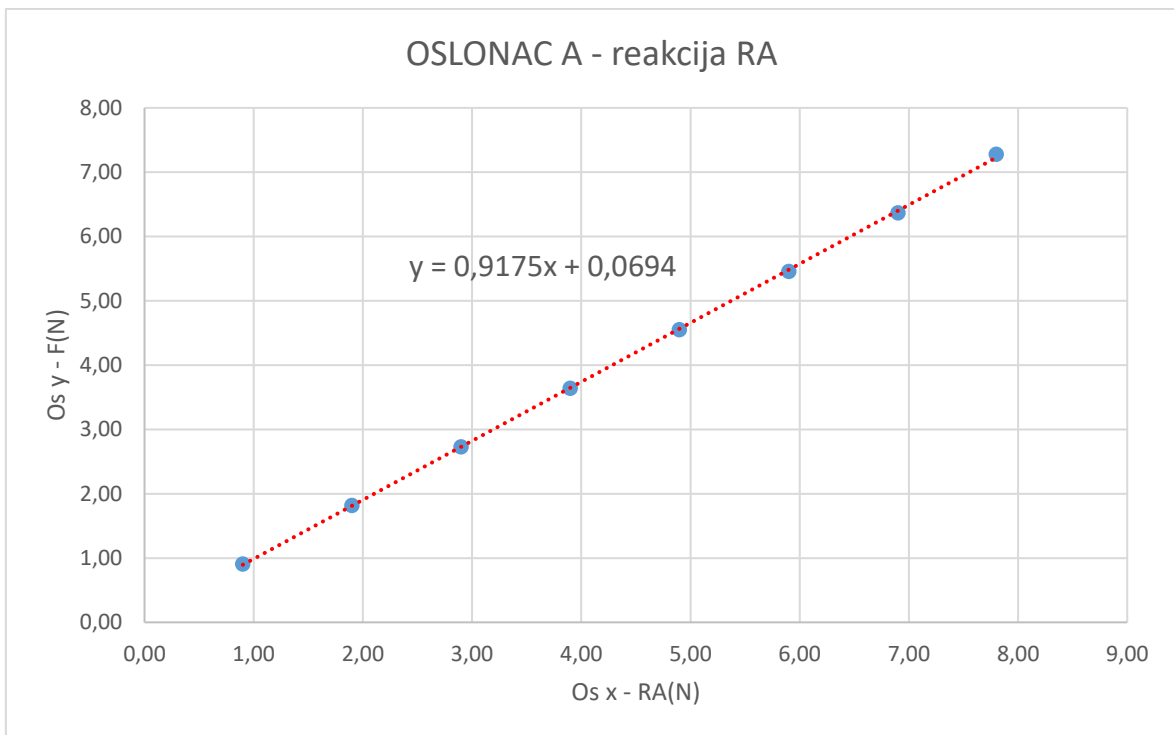
RC (N)	F (N)
0,40	1,0
0,75	2,0
1,20	3,0
1,50	4,0
1,90	5,0
2,35	6,0
2,70	7,0
3,10	8,0
3,50	9,0
3,90	10,0
$Y = 2,5646 x + 0,0374$	



Slika 26. Grafički prikaz mjerenja na osloncu C

Tablica 8. Korekcija RA - osnovni sustav – jedinični sustav

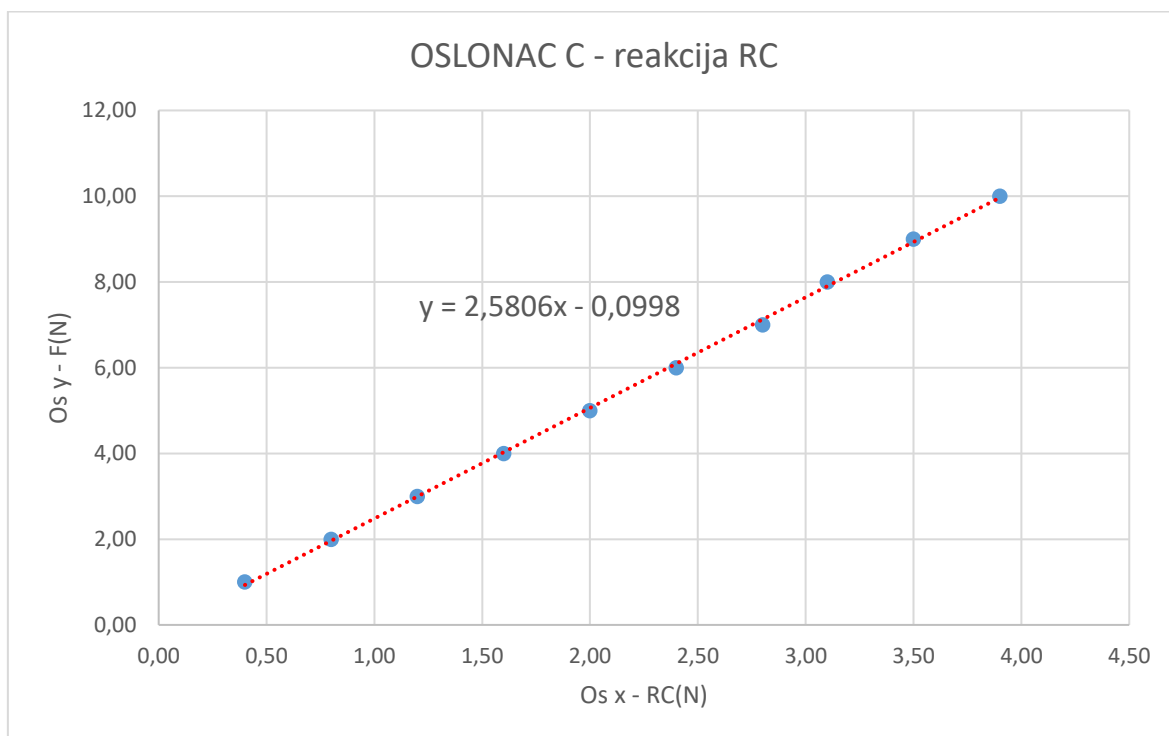
RA (N)	F (N)
0,90	0,91
1,90	1,82
2,90	2,73
3,90	3,64
4,90	4,55
5,90	5,46
6,90	6,37
7,80	7,28
$Y = 0,92 x + 0,0694$	



Slika 27. Grafički prikaz korekcije reakcije RA na jediničnom sustavu

Tablica 9. Korekcija reakcije RC - jedinični sustav

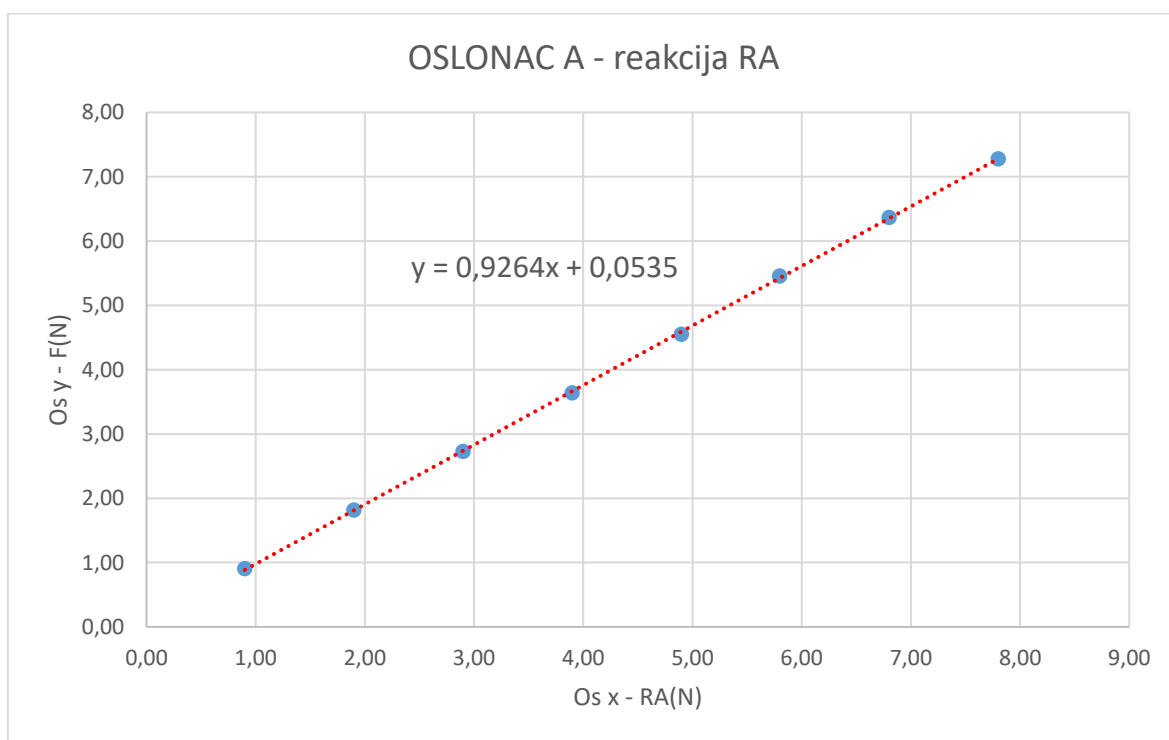
RC (N)	F (N)
0,40	1,0
0,80	2,0
1,20	3,0
1,60	4,0
2,00	5,0
2,40	6,0
2,80	7,0
3,10	8,0
3,50	9,0
3,90	10,0
$Y = 2,58 x - 0,0998$	



Slika 28. Grafički prikaz korekcije reakcije RC na jediničnom sustavu

Tablica 10. Korekcija reakcije RA - osnovni sustav sa vanjskim opterećenjem

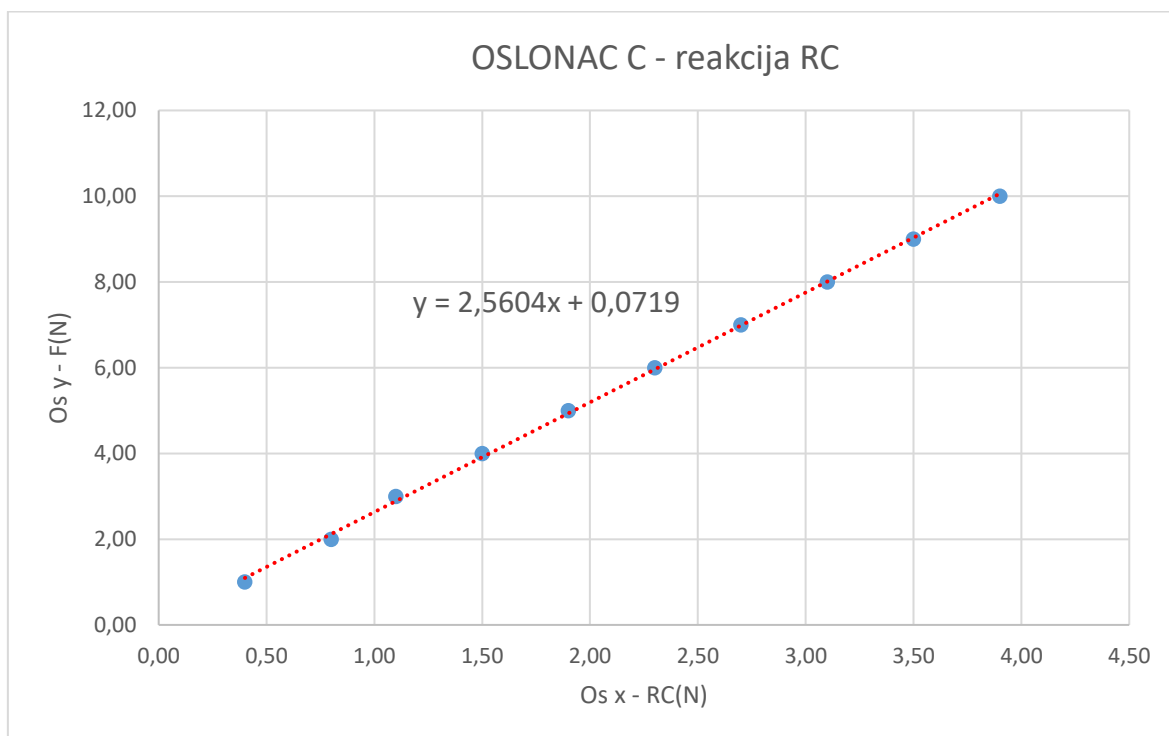
RA (N)	F (N)
0,90	0,91
1,90	1,82
2,90	2,73
3,90	3,64
4,90	4,55
5,80	5,46
6,80	6,37
7,80	7,28
$Y = 0,93 x + 0,0535$	



Slika 29. Grafički prikaz korekcije reakcije RA na osnovnom sustavu sa vanjskim opterećenjem

Tablica 11. Korekcija reakcije RC – osnovni sustav sa vanjskim opterećenjem

RC (N)	F (N)
0,40	1,0
0,80	2,0
1,10	3,0
1,50	4,0
1,90	5,0
2,30	6,0
2,70	7,0
3,10	8,0
3,50	9,0
3,90	10,0
$Y = 2,26 x + 0,0719$	



Slika 30. Grafički prikaz korekcije reakcije RC na osnovnom sustavu sa vanjskim opterećenjem

4.3. Mjerenje 2 (s korekcijama)

Oslonci su postavljeni na zadanim razmacima. Prije samog početka mjerenja, pomoću libele provjera se je li nosač (letva) u ravnini. Nakon provjere libelom, sila koja se mjeri na osloncima (rezultat vlastite težine i pritezanje letve na oslonce) se postavlja na nulu te se kreće sa mjerenjima.

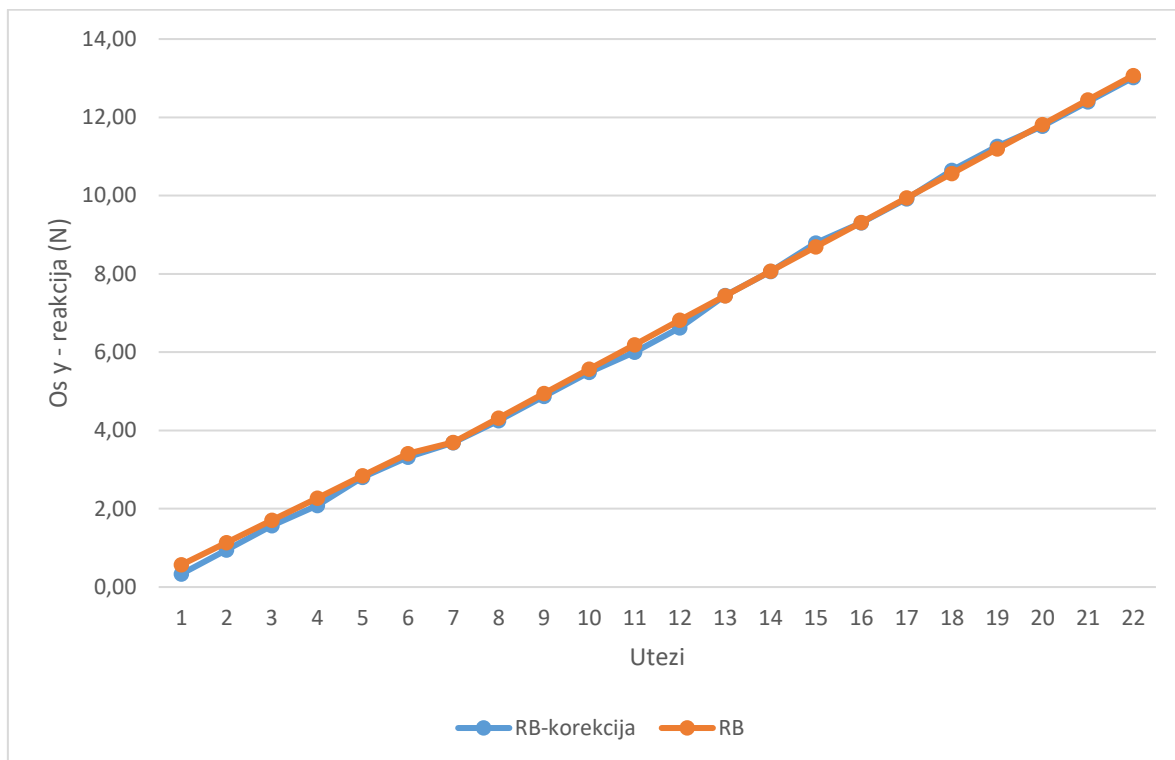


Slika 31. Mjerenje 2 na zadanom sustavu

Tablica 12. Rezultati mjerenja 2 - obrada rezultata

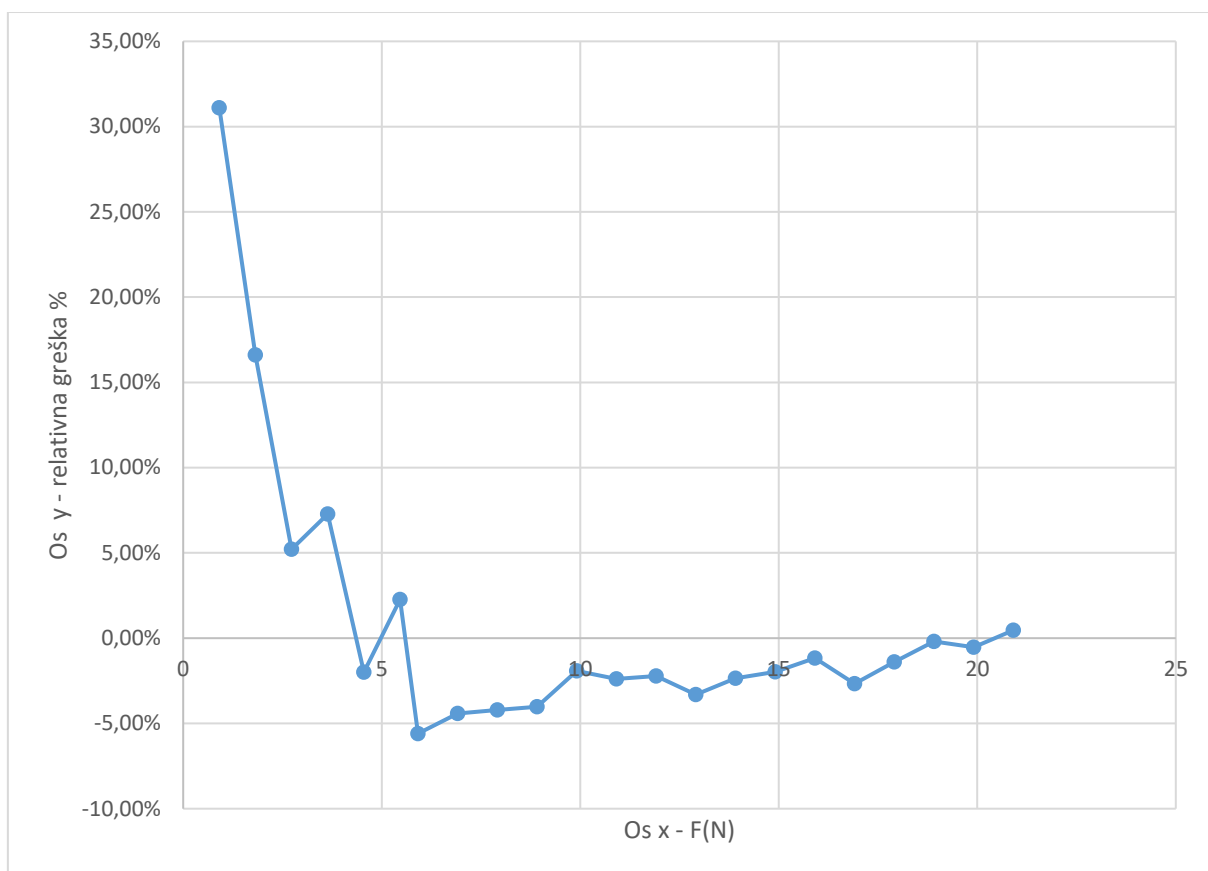
Uteg	F (N)	MJERENO				KOREKCIJA				RAČUNATO				R.E. (%)
		RA (N)	RB (N)	RC (N)	RAk (N)	RBk (N)	Rck (N)	SUMA	RA (N)	RB (N)	RC (N)	SUMA		
1	0,91	-0,1	0,3	0	-0,04	0,33	0,33	0,63	-0,05	0,57	0,39	0,91	31,11	
2	1,82	-0,1	0,9	0,1	-0,04	0,95	0,60	1,52	-0,09	1,14	0,77	1,82	16,62	
3	2,73	-0,2	1,5	0,3	-0,13	1,57	1,15	2,59	-0,14	1,71	1,16	2,73	5,22	
4	3,64	-0,2	2	0,4	-0,13	2,09	1,42	3,38	-0,18	2,28	1,55	3,64	7,28	
5	4,55	-0,2	2,7	0,6	-0,13	2,81	1,96	4,64	-0,23	2,84	1,93	4,55	-2,00	
6	5,46	-0,3	3,2	0,7	-0,22	3,32	2,24	5,34	-0,27	3,41	2,32	5,46	2,28	
	5,91	-0,3	3,55	0,9	-0,22	3,69	2,78	6,24	-0,30	3,69	2,51	5,91	-5,59	
	6,91	-0,3	4,1	1,05	-0,22	4,25	3,19	7,22	-0,35	4,32	2,94	6,91	-4,42	
	7,91	-0,3	4,7	1,2	-0,22	4,87	3,60	8,24	-0,40	4,94	3,36	7,91	-4,20	
	8,91	-0,3	5,3	1,35	-0,22	5,49	4,00	9,27	-0,45	5,57	3,79	8,91	-4,03	
	9,91	-0,4	5,8	1,5	-0,32	6,00	4,41	10,10	-0,50	6,19	4,21	9,91	-1,92	
	10,91	-0,5	6,4	1,7	-0,41	6,62	4,96	11,17	-0,55	6,82	4,64	10,91	-2,38	
	11,91	-0,6	7,2	1,8	-0,50	7,45	5,23	12,17	-0,60	7,44	5,06	11,91	-2,22	
	12,91	-0,6	7,8	2	-0,50	8,07	5,77	13,34	-0,65	8,07	5,49	12,91	-3,31	
	13,91	-0,7	8,5	2,1	-0,59	8,79	6,04	14,24	-0,70	8,69	5,91	13,91	-2,36	
	14,91	-0,8	9	2,3	-0,69	9,30	6,59	15,20	-0,75	9,32	6,34	14,91	-1,98	
	15,91	-0,8	9,6	2,4	-0,69	9,92	6,86	16,10	-0,80	9,94	6,76	15,91	-1,17	
	16,91	-0,8	10,3	2,6	-0,69	10,64	7,40	17,36	-0,85	10,57	7,19	16,91	-2,67	
	17,91	-0,9	10,9	2,7	-0,78	11,26	7,68	18,16	-0,90	11,19	7,61	17,91	-1,39	
	18,91	-0,9	11,4	2,8	-0,78	11,78	7,95	18,95	-0,95	11,82	8,04	18,91	-0,19	
	19,91	-1	12	3	-0,87	12,40	8,49	20,02	-1,00	12,44	8,46	19,91	-0,54	
	20,91	-1,1	12,6	3,1	-0,97	13,02	8,76	20,81	-1,05	13,07	8,89	20,91	0,46	

U tablici 12. prikazani su dobiveni rezultati mjerenja i računski rezultati. Prvi stupac prikazuje broj utega, a u drugi stupac prikazuje nanosenu silu. Reakcije „MJERENO RA, RB i RC“ su vrijednosti očitane na mjernim uređajima, „KOREKCIJA RA, RB i RC“ su korigirane vrijednosti mjerenih reakcija s korekcijskim jednadžbama koje smo prethodno odredili, dok su „RAČUNATO RA, RB i RC“ vrijednosti dobivene na temelju nanošene sile i formula iz teorijskog dijela. „R.E.“ (*eng. relative error*) definira relativnu grešku u postocima, odnosno grešku korekcije sume reakcija u odnosu na zadanu silu (težinu obješenih utega).



Slika 32. Grafički prikaz odnosa teorijske vrijednosti RB i mjerene (korigirane) reakcije RB

Kao što se iz grafa može vidjeti, teorijska vrijednosti reakcije RB i mjerena (korigirana) reakcija RB se zapravo jako dobro poklapaju. Unatoč greški koja se javlja u osloncu C, može se zanemariti jer parametar koji nam je bitan za jednadžbu kompatibilnosti je oslonac B i reakcija RB.



Slika 33. Grafički prikaz relativne greške

Na grafu (Slika 33.) prikazana je relativna greška u postocima zbroja svih reakcija. Relativna greška u ovome slučaju je odnos vrijednosti zbroja svih reakcija koje su mjerene i korigirane u odnosu na vrijednosti koje smo izračunali na temelju dobivenih formula iz teorijskog dijela. Graf prikazuje odnos relativne greške i sile kojom se opterećivao sustav te se može vidjeti da su na početku te greške relativno velike jer se radi o malo opterećenju sustava pri kojem mjerna oprema nije dovoljno točna. Ipak, nanošenjem većeg opterećenja greške su smanjuju i sve više približavaju nuli.

4.4. Mjerenja na osnovnom sustavu

4.4.1. OSNOVNI SUSTAV – VANJSKO OPTEREĆENJE

Tablica 13. Rezultati mjerenja i obrada rezultata za osnovni sustav s vanjskim opterećenjem

Uteg	F (N)	MJERENO		KORIGIRANO			δ_{10}	RAČUNATO			R.E. (%)
		RA (N)	RC (N)	RAk (N)	Rck (N)	SUMA		RA (N)	RC (N)	SUMA	
1	0,91	0,15	0,25	0,19	0,64	0,83	0,22	0,18	0,73	0,91	8,85
2	1,82	0,3	0,4	0,33	0,98	1,31	0,47	0,36	1,46	1,82	28,16
3	2,73	0,6	0,8	0,61	1,88	2,49	0,77	0,55	2,18	2,73	8,81
4	3,64	0,8	1,05	0,79	2,45	3,24	1,03	0,73	2,91	3,64	10,99
5	4,55	1,0	1,4	0,98	3,24	4,22	1,28	0,91	3,64	4,55	7,33
6	5,46	1,1	1,7	1,07	3,91	4,99	1,49	1,09	4,37	5,46	8,66
	5,91	1,1	1,6	1,07	3,69	4,76	1,53	1,18	4,73	5,91	19,44
	6,91	1,4	1,9	1,35	4,37	5,72	1,79	1,38	5,53	6,91	17,26
	7,91	1,6	2,3	1,54	5,27	6,81	2,08	1,58	6,33	7,91	13,95
	8,91	1,7	2,5	1,63	5,72	7,35	2,28	1,78	7,13	8,91	17,49
	9,91	1,9	2,75	1,81	6,29	8,10	2,52	1,98	7,93	9,91	18,25
	10,91	2,0	3,0	1,91	6,85	8,76	2,79	2,18	8,73	10,91	19,71
	11,91	2,3	3,2	2,18	7,31	9,49	3,03	2,38	9,53	11,91	20,32
	12,91	2,5	3,5	2,37	7,98	10,35	3,26	2,58	10,33	12,91	19,81
	13,91	2,75	3,8	2,60	8,66	11,26	3,54	2,78	11,13	13,91	19,03
	14,91	2,9	4,0	2,74	9,11	11,85	3,79	2,98	11,93	14,91	20,50
	15,91	3,1	4,3	2,93	9,79	12,72	4,04	3,18	12,73	15,91	20,07
	16,91	3,4	4,6	3,20	10,47	13,67	4,3	3,38	13,53	16,91	19,14
	17,91	3,5	4,8	3,30	10,92	14,22	4,55	3,58	14,33	17,91	20,62
	18,91	3,7	5,0	3,48	11,37	14,86	4,79	3,78	15,13	18,91	21,44
	19,91	3,95	5,45	3,71	12,39	16,10	5,06	3,98	15,93	19,91	19,12
	20,91	4,1	5,8	3,85	13,18	17,03	5,32	4,18	16,73	20,91	18,54

U tablici 13. prikazani su dobiveni rezultati mjerenja i računski rezultati za osnovni sustav s vanjskim opterećenjem. Prvi stupac prikazuje broj utega, a u drugi stupac prikazuje naneseu silu. Reakcije „MJERENO RA, RB i RC“ su vrijednosti očitane na mjernim uređajima, „KOREKCIJA RA, RB i RC“ su korigirane vrijednosti mjerenih reakcija, dok su „RAČUNATO RA, RB i RC“ vrijednosti dobivene na temelju nanošene sile i formula iz teorijskog dijela. „R.E.“ definira relativnu grešku u postocima, odnosno grešku korekcije sume reakcija u odnosu na zadanu silu (težinu obješenih utega).

δ_{10} je pomak na osnovnom sustavu od vanjskog opterećenja je izmjeren pomoću mikroure koja je postavljena na mjesto uklonjenog oslonca.

U ΣF_y javlja se relativno velika greška. Kao što je vidljivo u tablici relativno velika greška javlja se zbog reakcije RC koja ni uz korekciju nije dovoljno točna. Greška je relativno zanemariva jer za potrebe provjere jednadžbe kompatibilnosti važan je mjereni pomak δ_{10} koji također očitavamo na mjernom uređaju.



Slika 34. Mjerenje na osnovno sustavu s vanjskim opterećenjem

4.4.2. OSNOVNI SUSTAV – JEDINIČNA SILA

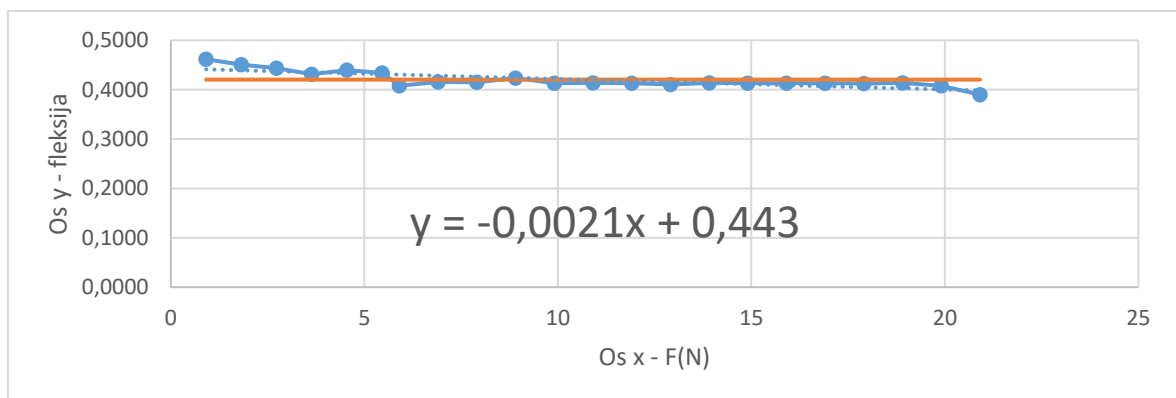
Tablica 14. Rezultati mjerenja i obrada rezultata za osnovni sustav s jediničnom silom

Uteg	F(N)	MJERENO		KORIGIRANO			δ_{10}	RAČUNATO			R.E. (%)	f_{11}	
		RA (N)	RC (N)	RAk (N)	Rck (N)	SUMA		RA (N)	RC (N)	SUMA			
1	0,91	0,3	0,3	0,34	0,67	1,02	0,42	0,36	0,55	0,91	-11,98	0,4615	0,42
2	1,82	0,7	0,5	0,71	1,19	1,90	0,82	0,73	1,09	1,82	-4,51	0,4505	0,42
3	2,73	1,1	0,7	1,08	1,71	2,79	1,21	1,09	1,64	2,73	-2,02	0,4432	0,42
4	3,64	1,4	0,7	1,35	1,71	3,06	1,57	1,46	2,18	3,64	15,92	0,4313	0,42
5	4,55	1,7	0,9	1,63	2,22	3,85	2,0	1,82	2,73	4,55	15,34	0,4396	0,42
6	5,46	2,1	1,1	2,0	2,74	4,74	2,37	2,18	3,28	5,46	13,28	0,4341	0,42
	5,91	2,2	1,1	2,09	2,74	4,83	2,41	2,36	3,55	5,91	18,33	0,4078	0,42
	6,91	2,7	1,3	2,55	3,25	5,80	2,87	2,76	4,15	6,91	16,04	0,4153	0,42
	7,91	3,1	1,5	2,91	3,77	6,68	3,28	3,16	4,75	7,91	15,49	0,4147	0,42
	8,91	3,6	1,7	3,37	4,29	7,66	3,77	3,56	5,35	8,91	14,03	0,4231	0,42
	9,91	4,0	1,85	3,74	4,67	8,41	4,09	3,96	5,95	9,91	15,10	0,4127	0,42
	10,91	4,4	2,0	4,11	5,06	9,17	4,51	4,36	6,55	10,91	15,97	0,4134	0,42
	11,91	4,8	2,2	4,47	5,58	10,05	4,92	4,76	7,15	11,91	15,61	0,4131	0,42
	12,91	5,2	2,3	4,84	5,84	10,68	5,3	5,16	7,75	12,91	17,30	0,4105	0,42
	13,91	5,6	2,6	5,21	6,61	11,82	5,75	5,56	8,35	13,91	15,05	0,4134	0,42
	14,91	6,0	2,8	5,57	7,13	12,70	6,16	5,96	8,95	14,91	14,82	0,4131	0,42
	15,91	6,4	3,0	5,94	7,64	13,58	6,57	6,36	9,55	15,91	14,62	0,4129	0,42
	16,91	6,8	3,1	6,31	7,90	14,21	6,98	6,76	10,15	16,91	15,98	0,4128	0,42
	17,91	7,2	3,2	6,68	8,16	14,83	7,39	7,16	10,75	17,91	17,18	0,4126	0,42
	18,91	7,6	3,5	7,04	8,93	15,97	7,82	7,56	11,35	18,91	15,52	0,4135	0,42
	19,91	7,9	3,6	7,32	9,19	16,51	8,12	7,96	11,95	19,91	17,09	0,4078	0,42
	20,91	8	3,7	7,41	9,45	16,86	8,15	8,36	12,55	20,91	19,38	0,3898	0,42

U tablici 14. prikazani su dobiveni rezultati mjerenja i računski rezultati za osnovni sustav sa vanjskim opterećenjem. Prvi stupac prikazuje broj utega, a u drugi stupac prikazuje naneseu silu. Reakcije „MJERENO RA, RB i RC“ su vrijednosti očitane na mjernim uređajima, „KOREKCIJA RA, RB i RC“ su korigirane vrijednosti mjerenih reakcija, dok su „RAČUNATO RA, RB i RC“ vrijednosti dobivene na temelju nanošene sile i formula iz teorijskog dijela. „R.E.“ definira relativnu grešku u postotcima, odnosno grešku korekcije sume reakcija u odnosu na zadanu silu (težinu obješenih utega).

$f_{11} * F$ je pomak na osnovnom sustavu od sile F koja djeluje na mjestu uklonjenog oslonca izmjeren pomoću uređaja koji je stavljen na to mjesto. Fleksija f_{11} dobije se tako da se mjereni pomak podijeli s vrijednošću sile F (težine utega). Očito, za svako mjerenje, odnosno težinu utega F , dobit će se različita vrijednost fleksije. Varijacija fleksije kroz sva mjerenja prikazana je na Slici 35. gdje trend rezultata aproksimiran linearnom funkcijom. Srednja vrijednosti fleksije za sva mjerenja je $f_{11} = 0,42$.

U ΣF_y javlja se relativno velika greška. Kao što je vidljivo u tablici relativno velika greška javlja se zbog reakcije RC koja ni uz korekciju nije dovoljno točna. Greška je u ovom slučaju zanemariva jer nas u ovom zanima fleksija f_{11} .



Slika 35. Grafički prikaz dobivenih vrijednosti fleksije f_{11} za različite vrijednosti opterećenja s linearnom aproksimacijom trenda



Slika 36. Mjerenje na sustavu – osnovni sustav s jediničnom silom

4.4.3. ZAVRŠNI REZULTATI

Tablica 15. Konačni rezultati

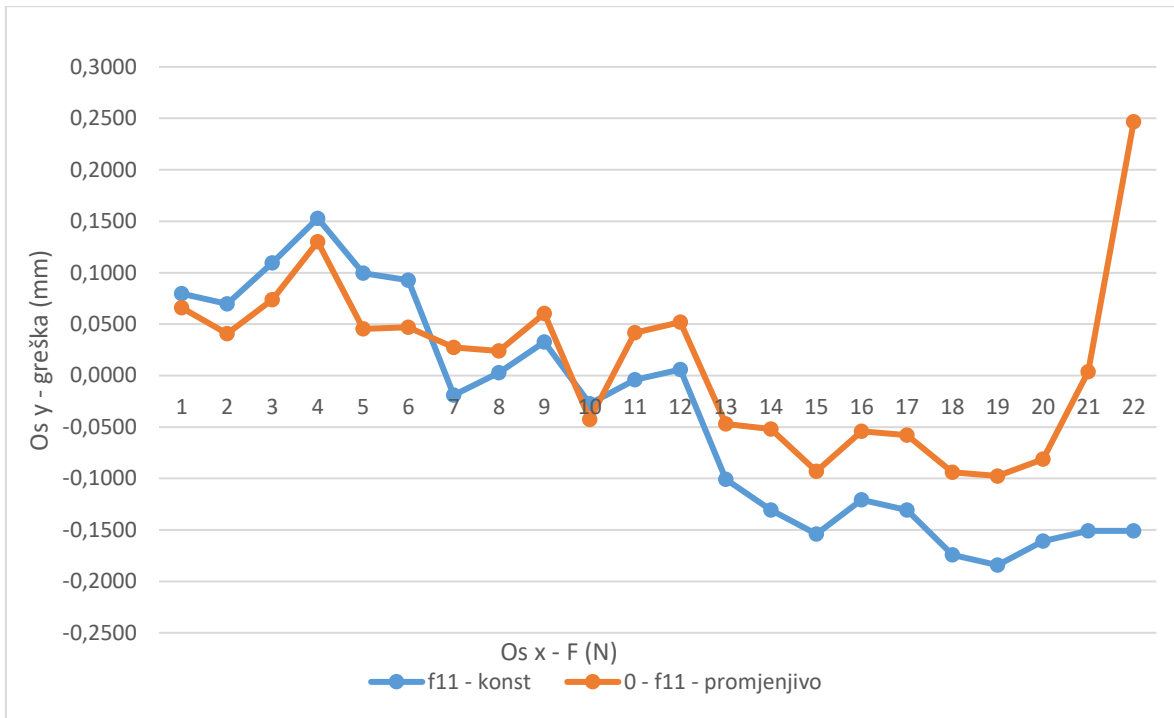
F (N)	δ_{10}	f_{11}	f_{11}	f_{11}	X1	0 (mm)	R.E. %	0 (mm)	R.E. %
0,91	0,22	0,4615	0,42	0,42	0,33	0,0796	36,20	0,0659	29,94
1,82	0,47	0,4505	0,42	0,42	0,95	0,0696	14,81	0,0408	8,68
2,73	0,77	0,4432	0,42	0,42	1,57	0,1096	14,23	0,0736	9,56
3,64	1,03	0,4313	0,42	0,42	2,09	0,1529	14,84	0,1299	12,61
4,55	1,28	0,4396	0,42	0,42	2,81	0,0995	7,78	0,0455	3,55
5,46	1,49	0,4341	0,42	0,42	3,32	0,0928	6,23	0,0471	3,16
5,91	1,53	0,4078	0,42	0,42	3,69	-0,0189	-1,23	0,0273	1,79
6,91	1,79	0,4153	0,42	0,42	4,25	0,0028	0,16	0,0239	1,34
7,91	2,08	0,4147	0,42	0,42	4,87	0,0328	1,57	0,0603	2,90
8,91	2,28	0,4231	0,42	0,42	5,49	-0,0273	-1,20	-0,0427	-1,87
9,91	2,52	0,4127	0,42	0,42	6,00	-0,0040	-0,16	0,0417	1,65
10,91	2,79	0,4134	0,42	0,42	6,62	0,0060	0,21	0,0519	1,86
11,91	3,03	0,4131	0,42	0,42	7,45	-0,1007	-3,32	-0,0470	-1,55
12,91	3,26	0,4105	0,42	0,42	8,07	-0,1307	-4,01	-0,0519	-1,59
13,91	3,54	0,4134	0,42	0,42	8,79	-0,1541	-4,35	-0,0931	-2,63
14,91	3,79	0,4131	0,42	0,42	9,30	-0,1208	-3,19	-0,0541	-1,43
15,91	4,04	0,4129	0,42	0,42	9,92	-0,1308	-3,24	-0,0577	-1,43
16,91	4,3	0,4128	0,42	0,42	10,64	-0,1742	-4,05	-0,0939	-2,18
17,91	4,55	0,4126	0,42	0,42	11,26	-0,1842	-4,05	-0,0976	-2,14
18,91	4,79	0,4135	0,42	0,42	11,78	-0,1609	-3,36	-0,0811	-1,69
19,91	5,06	0,4078	0,42	0,42	12,40	-0,1510	-2,98	0,0037	0,07
20,91	5,32	0,3898	0,42	0,42	13,02	-0,1510	-2,84	0,2466	4,64
PROSJEČNO ODSUPANJE :									
						-0,0392	2,64	0,0109	2,97

U tablici 15. prikazani su svi dobiveni mjereni rezultati sustava potrebni za provjeru jednadžbe kompatibilnosti. Za tu svrhu treba nam izmjerena vrijednost reakcije RB na zadanom (statički neodređenom) sustavu za različite vrijednosti opterećenja F te pomak δ_{10} i fleksija f_{11} za iste te vrijednosti opterećenja F . Ovdje treba voditi računa o tome da sila F za koju je određena fleksija f_{11} nije na istom mjestu kao i sila F pomoću koje su dobiveni RB i δ_{10} . Iz tog razloga nije ispravno kombinirati RB, δ_{10} i f_{11} dobivene za različite vrijednosti sile F . Ipak, ovdje je to napravljeno jer, kao što je to pokazano u tablici, fleksija s povećanjem sile F ima trend opadanja pa se taj trend na neki način želio uključiti u konačne rezultate. Uz to, konačni rezultati dobiveni su koristeći srednju vrijednost fleksije.

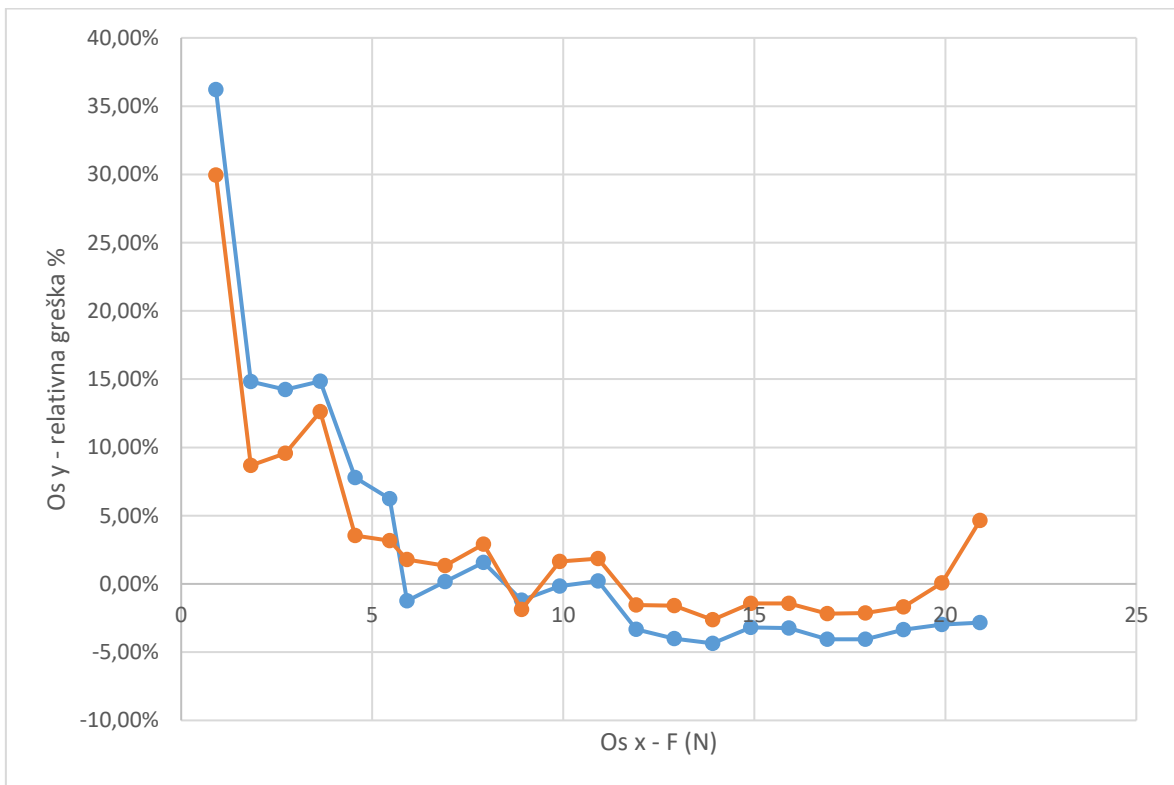
Prema teoriji kada se δ_{10} pomak na osnovnom sustavu od vanjskog opterećenja δ_{10} zbroji sa f_{11} fleksija na osnovnom sustavu od jedinične sile f_{11} pomnoženom vrijednošću reakcije RB, rezultat bi morao biti jednak 0. U ovome slučaju javila su se mala odstupanja od nule.

U tablici 15. korištene su dvije boje da bi se lakše raspoznalo koji dijelovi su međusobno povezani. Tamno žuta polja se odnose na promjenjivu fleksiju f_{11} dobivenu dijeljenjem odgovarajućeg izmjerenog pomaka sa svakom mjerenom vrijednošću te konačne rezultate koji odande proizlaze, dok se svijetlo žuta polja odnose na srednju vrijednost fleksije f_{11} te odgovarajuće krajnje rezultate.

Greške u jednadžbi kompatibilnosti prikazane u tablici 15. za različite vrijednosti sile F . Relativna greška dobivena je na način da se desna strana jednadžbe kompatibilnosti (koja bi u teoriji trebala biti 0) podijeli s pomakom δ_{10} . U grafovima ispod prikazana je relativna greška za slučaj promjenjive fleksije f_{11} te konstante fleksije f_{11} , odnosno srednje vrijednosti promjenjivih fleksija f_{11} .



Slika 37. Grafički prikaz završnih rezultata – greška u jednadžbi kompatibilnosti



Slika 38. Grafički prikaz završnih rezultata – relativna greška u jednadžbi kompatibilnosti

5. ZAKLJUČAK

U prvom dijelu rada je detaljno prikazan postupak rješavanja statički neodređenih sustava metodom sila. Na promatranom sustavu pokazano je da se sustav može riješiti na više načina, ali krajnji rezultat mora ostati nepromijenjen. Cilj postavljen u uvodnom dijelu rada je ostvaren, pokazalo se da se zadatak može riješiti teorijski, rješenja potvrditi na stvarnom sustavu eksperimentalno. Dobiveni rezultati mjerenja dovoljno dobro odgovaraju računskim, a odstupanja koja su se događala mogu se pripisati preciznosti uređaja za mjerenje. Konkretno, u ovome slučaju veći broj decimalnih mjesta u zapisima iz mjerenih uređaja pridonio bi i boljoj točnosti samih eksperimentalnih podataka. Problemi koji su se pojavili sa mjerenjem reakcija u osloncu C riješeni su korekcijskim koeficijentima, iako oni nemaju utjecaj na konačnu validaciju jednadžbe kompatibilnosti.

6. LITERATURA

- [1] Leo Škec, Materijali sa predavanja – Tehnička mehanika II, Građevinski fakultet u Rijeci, 2020.
- [2] Milutin Anđelić, Statika neodređenih štapnih konstrukcija, Društvo hrvatskih konstruktora, Zagreb, 1993.
- [3] Milan Đurić, Statika konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [4] Hermann Ramm, Walter Wagner, Hans Muggenburg, Praktična građevinska statika (deo IV), drugo izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [5] Đorđe Solovjev, Statika konstrukcija (II deo) – Statički neodređene konstrukcije, Veselin Masleša, Sarajevo, 1956.