

# Čisto savijanje 3D printanog uslojenog materijala

---

**Franković, Teodora**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:928441>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-28**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Teodora Franković**

**Čisto savijanje 3D printanog uslojenog materijala**

**Završni rad**

**Rijeka, 2022.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**  
Sveučilišni preddiplomski studij  
**Mehanika 1**

**Teodora Franković  
JMBAG: 0114030929**

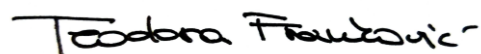
**Čisto savijanje 3D printanog uslojenog materijala**

**Završni rad**

**Rijeka, rujan 2022.**

## IZJAVA

Završni rad izradila sam samostalno, u suradnji s mentoricom i komentoricom te uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.



---

Teodora Franković

U Rijeci, 6. rujna, 2022.

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se mentorici Editi Papa Dukić te komentorici Nini Čeh na pruženoj pomoći.  
Također, zahvaljujem se svojoj obitelji i prijateljima.

## SAŽETAK

U radu je prikazana provedba eksperimentalne analize čistog savijanja na tri prizmatična uslojena uzoraka dobivena 3D printanjem. Promatra se primjenjivost gredne teorije na zone čistog savijanja. U eksperimentalnom dijelu uzorci su dobiveni tehnologijom 3D printanja. Ispitivanja su provedena na hidrauličnoj preši u Laboratoriju za materijale, a za mjerenje deformacija korišteni su tenzometri. Također ovim radom su obrađene osnove čistog savijanja, izrada uzorka, tenzometrijska mjerenja, proračun kompozitnog nosača te su dani primjereni zaključci.

Ključne riječi: čisto savijanje, uslojeni uzorak, gredna teorija, tenzometrija, proračun kompozitnog nosača

## **SUMMARY**

This paper will discuss the experimental analysis of pure bending. The analysis was carried out on three 3D printed prismatic layered samples. Simple beam theory can be observed in the zones of pure bending. The tests were carried out on a hydraulic press and for measuring deformations were used strain gauges. Furthermore, this paper will also cover topics such as the basics of pure bending, modelling of the 3D sample itself, strain gauge measurements, composite beam calculations and the appropriate conclusions will be given.

Key words: pure bending, layered sample, simple beam theory, strain gauge measurements, composite beam calculation

## POPIS SLIKA

Slika 1: Nosač opterećen na savijanje .....	11
Slika 2: Deformacija nosača pri čistom savijanju .....	12
Slika 3: Dijeljenje nosača na manje dijelove .....	13
Slika 4: Nosač s pravokutnom mrežom .....	13
Slika 5: Deformacija nosača u stanju čistog savijanja .....	14
Slika 6: Konstrukcija neutralne osi .....	14
Slika 7: Položaj neutralne osi i dijagram naprezanja .....	15
Slika 8: Dio nosača duljine dx.....	15
Slika 9: Kompozitni nosač i statički sustav .....	17
Slika 10: Kopiranje pravokutnika u AutoCAD-u .....	18
Slika 11: Izrada „Layer“-a u AutoCAD-u.....	19
Slika 12: Model spreman za „Export“ .....	19
Slika 13: Ispisivanje uzorka .....	20
Slika 14: 3D printani uzorci .....	21
Slika 15: Pojednostavljeni prikaz tenzometra (Šimić, 1995: 571) .....	22
Slika 16: Tenzometri korišteni u ispitivanju, postavljeni samo u mekšim slojevima poprečno na smjer osi nosača .....	23
Slika 17: Pozicije tenzometara.....	24
Slika 18: Uzorak spreman za ispitivanje .....	25
Slika 19: Spreman uzorak postavljen u prešu .....	26
Slika 20: Izvijeni uzorak neposredno prije klizanja .....	27
Slika 21: Deformirani uzorak .....	32
Slika 22: Slojevi uzorka pod opterećenjem.....	33
Slika 23: Deformirani uzorak .....	35
Slika 24: Deformirani mekši sloj.....	36
Slika 25: Poprečni presjek uzorka s oznakama.....	37
Slika 26: Određivanje maksimalnog momenta.....	44
Slika 27: Dijagram normalnih naprezanja.....	50



## POPIS GRAFOVA

Graf 1: Sila – vrijeme, uzorak/greda 1 .....	28
Graf 2: Sila – vrijeme, uzorak/greda 2 .....	29
Graf 3: Sila – vrijeme, uzorak/greda 3 .....	29
Graf 4: Deformacija – vrijeme, uzorak/greda 1.....	30
Graf 5: Deformacija – vrijeme, uzorak/greda 2.....	31
Graf 6: Deformacija – vrijeme, uzorak/greda 3.....	31
Graf 7: Uzdužna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 2 .....	33
Graf 8: Uzdužna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 3 .....	34
Graf 9: Poprečna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 2.....	35
Graf 10: Poprečna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 3 .....	30

## SADRŽAJ

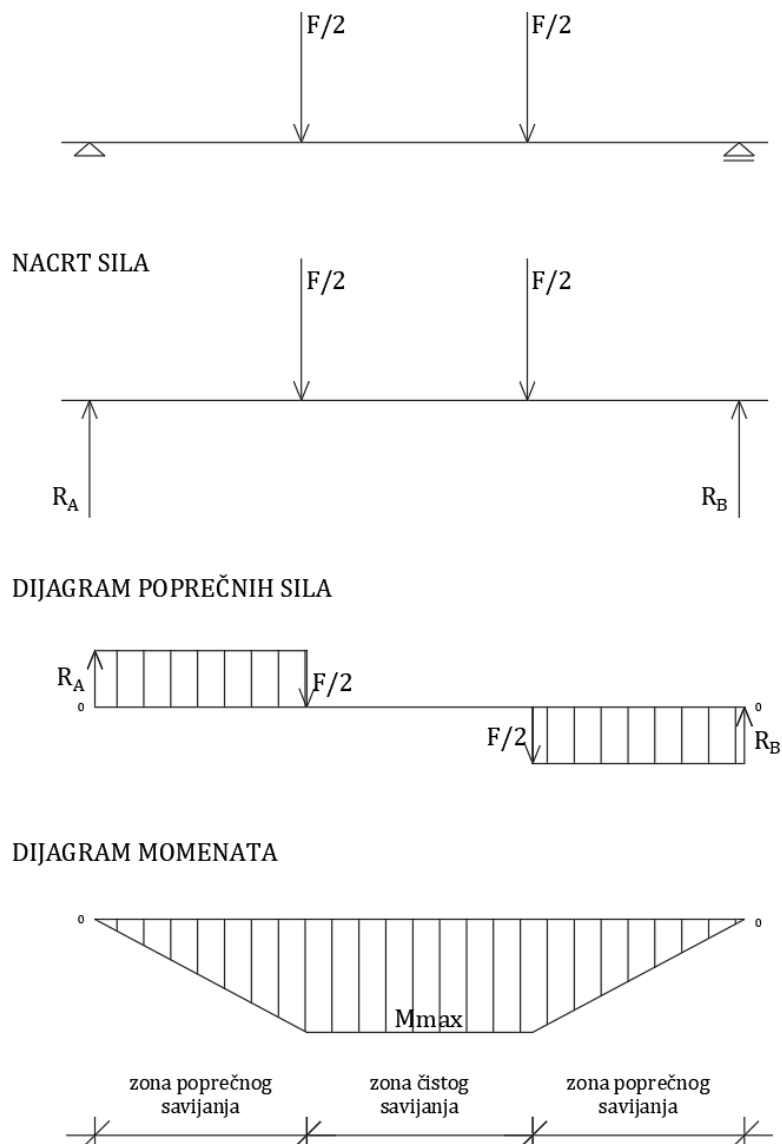
1. UVOD .....	10
2. ČISTO SAVIJANJE .....	11
3. MODELIRANJE I IZRADA UZORKA.....	18
3.1. AutoCAD model .....	18
3.2. 3D ispis .....	20
4. TENZOMETRIJA.....	22
5. POSTUPAK ISPITIVANJA.....	24
6. REZULTATI ISPITIVANJA .....	28
6.1. Vrijednosti sile u vremenu .....	28
6.2. Vrijednosti deformacija u vremenu.....	30
6.2.1. Uzdužne deformacije.....	33
6.2.2. Poprečne deformacije.....	35
7. PRORAČUN KOMPOZITNOG NOSAČA .....	37
8. ZAKLJUČAK.....	53

## 1. UVOD

Ovim radom pokušat će se dokazati primjenjivost gredne teorije na tri prizmatična uslojena uzorka. Promatrat će se središnji dio uzorka, tj. zona čistog savijanja. U toj zoni, po grednoj teoriji, ne možemo vidjeti efekte stiskanja materijala u smjeru okomitom na os nosača ako je on opterećen samo na čisto savijanje. Uzorci su definirani kao jedanaest naizmjeničnih slojeva krućeg i mekšeg materijala s ciljem da se upravo u mekšim slojevima ostvari poprečna deformacija. Uzorci su dimenzija 25 x 1,5 x 7,7 cm te su dobiveni metodom 3D printanja. Ispitivanje će se provoditi na hidrauličkoj preši, tako što će se uzorak postaviti na dva simetrična oslonca. Uzorci će biti opterećeni dvjema vertikalnim silama koje će također biti postavljene simetrično s obzirom na središnju os. Deformacije će se mjeriti električnim tenzometrima koji će se postaviti u različite smjerove (mjere uzdužne i poprečne deformacije) i na različitim mjestima (vlačna i tlačna zona) kako bi se obuhvatile sve zone čistog savijanja. Rezultati ispitivanja prikazat će se grafički. Na posljeticu će se prikazati proračun naprezanja kompozitnog nosača.

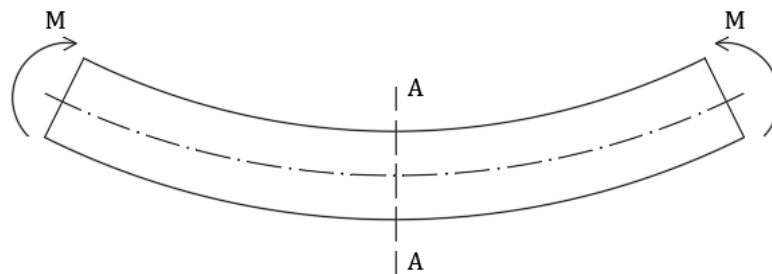
## 2. ČISTO SAVIJANJE

Optereti li se ravni štap na savijanje silama kao što je prikazano na slici 1 u štapu će se javiti zona savijanja poprečnim silama i zona čistog savijanja. S obzirom da je riječ o savijanju, u daljnjem tekstu štap će se nazivati nosačem. Opterećeni nosač je konstantnog poprečnog presjeka od homogenog, izotropnog i elastičnog materijala. Iz Slike 1 primjećuje se kako se kod poprečnog savijanja u poprečnom presjeku nosača javlja poprečna sila i moment savijanja dok se kod čistog savijanja u poprečnom presjeku nosača javlja samo moment savijanja. (Šimić, 2002: 303 - 315)



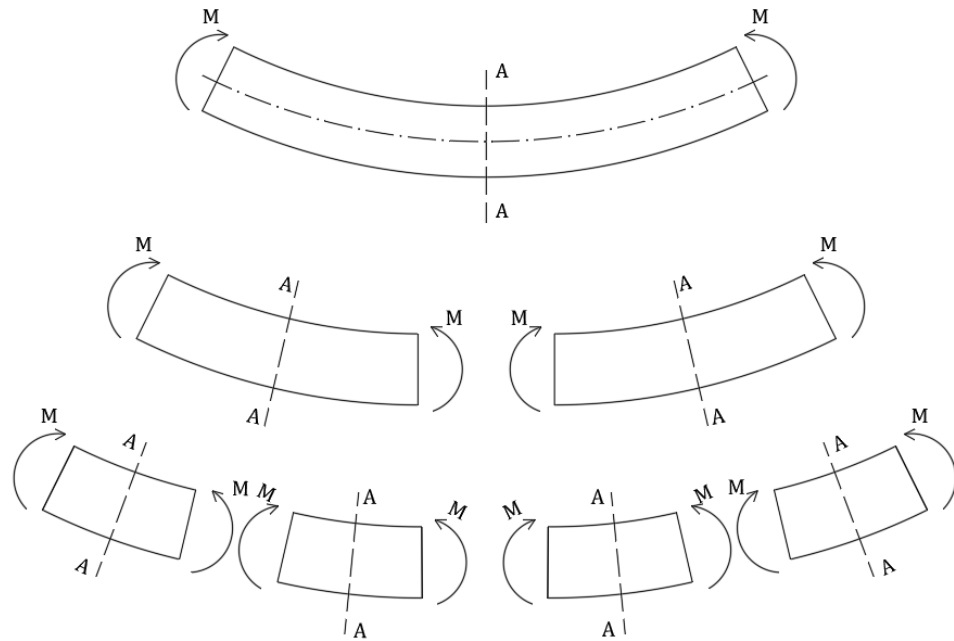
Slika 1: Nosač opterećen na savijanje

U ovome radu izdvojena je i promatrana zona čistog savijanja. U zoni čistog savijanja na nosač djeluje moment savijanja  $M$  koji ima konstantnu vrijednost. S obzirom da su svojstva materijala i dimenzije presjeka u toj zoni jednaki, jednaka je i zakrivljenost nosača. Ukoliko se taj dio nosača prikaže kao nosač koji ima svoju visinu i nosač kojemu uzdužna os prolazi središtem poprečnog presjeka (Slika 2) primjećuje se kako krajnji presjeci ostaju ravni, odnosno okomiti na uzdužnu os. Poprečni presjek na sredini dužine nosača ostaje u istom položaju kao i prije nanošenja same sile savijanja. Također primjećuje se kako se uzdužna os savija po krivulji konstantne zakrivljenosti, što znači da se i cijeli nosač savija po kružnome luku. (Šimić, 2002: 303 - 315)



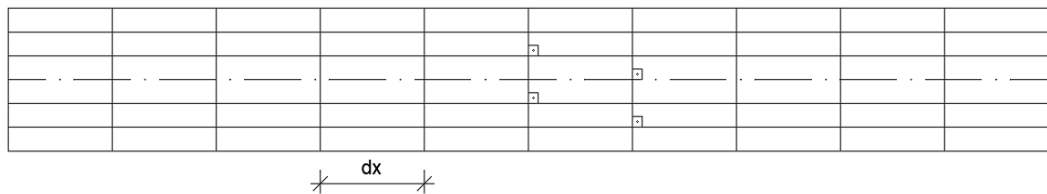
Slika 2: Deformacija nosača pri čistom savijanju

Podijeli li se dio nosača na pola (Slika 3) te zatim na četvrtine primjećuje se kako su svi krajnji poprečni presjeci ravni i okomiti na uzdužnu os te su presjeci na sredini dužina u istim položajima kao i prije nanošenja sile savijanja. Ovakvo ponašanje je definirano kao Bernoullijeva hipoteza ravnih poprečnih presjeka koja kaže kako poprečni presjeci prije i nakon deformiranja ostaju ravni i okomiti na os nosača. (Šimić, 2002: 303 - 315)



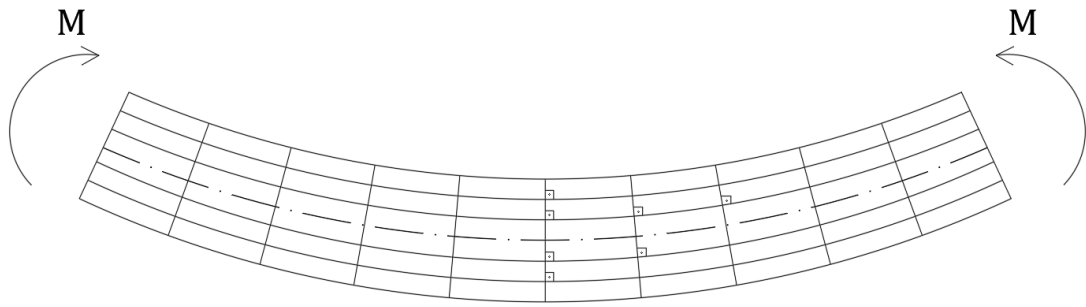
Slika 3: Dijeljenje nosača na manje dijelove

Preko nosača je iscrtana pravokutna mreža (Slika 4), tako da su uzdužne linije paralelne s osi nosača, a poprečne linije okomite na njih.



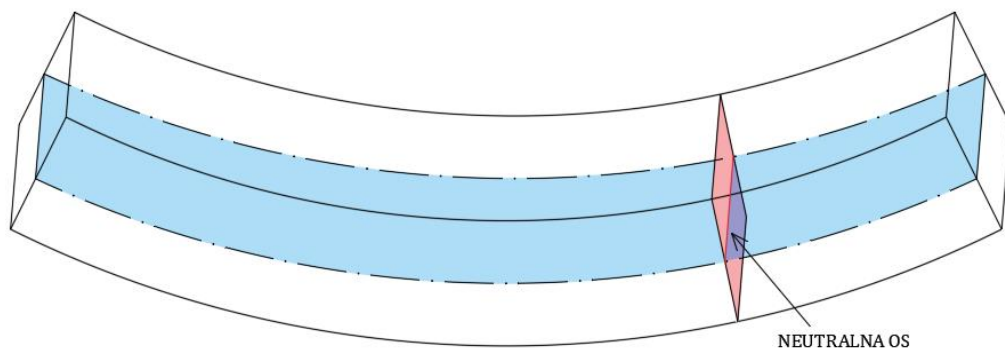
Slika 4: Nosač s pravokutnom mrežom

Nakon opterećenja nosača samo momentima savijanja (Slika 5), uzdužne linije postaju međusobno paralelni kružni lukovi. Poprečne linije se zakreću, no ostaju ravne i okomite na uzdužne linije, odnosno kružne lukove. Pravokutna mreža ostaje pravokutna bez obzira na deformacije. Dakle, posmična naprezanja su doista jednaka nuli kod čistog savijanja. (Šimić, 2002: 303 - 315)



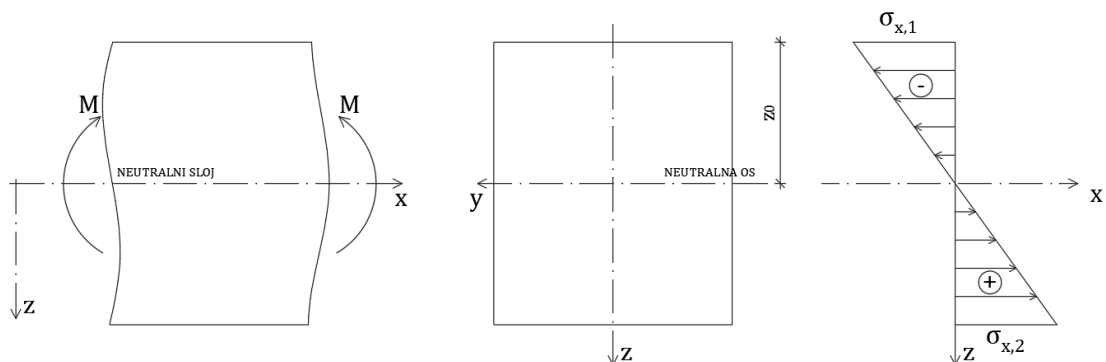
Slika 5: Deformacija nosača u stanju čistog savijanja

Iz gornje slike (Slika 5) se može također odrediti ponašanje uzdužnih vlakana. Na konkavnoj strani nosača se vlakna skraćuju (gornja strana), dok se na konveksnoj strani (donja strana) produljuju. Neutralni sloj je sloj, u ovom slučaju na sredini poprečnog presjeka nosača, kojem se vlakna savijaju bez promjene dužine. Vlakna neutralnog sloja prije deformacije leže u jednoj horizontalnoj ravnini koja, nakon deformacije, poprima oblik cilindrične plohe. Presječna te cilindrične plohe i ravnine poprečnog presjeka je linija neutralne osi (Slika 6). (Šimić, 2002: 303 – 315)



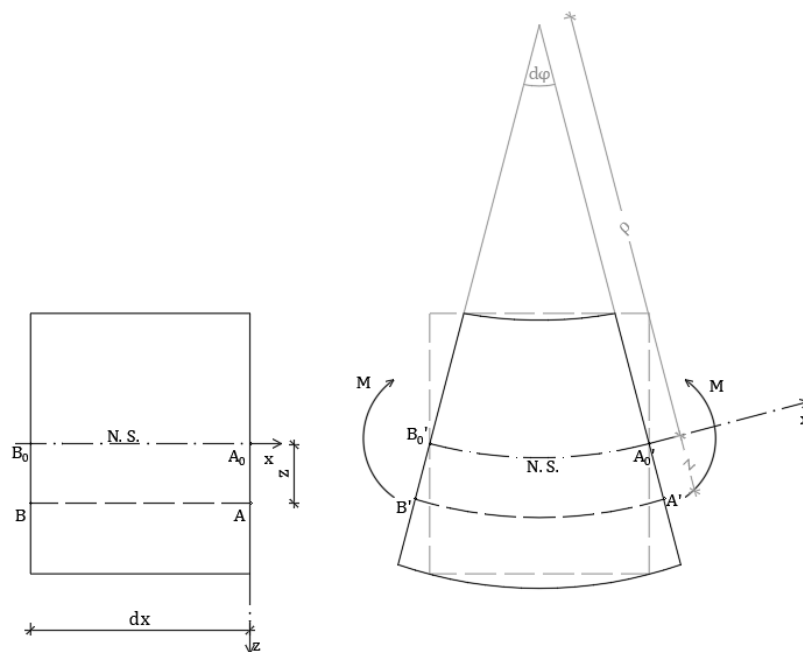
Slika 6: Konstrukcija neutralne osi

Neutralna os dijeli poprečni presjek nosača na dvije zone; vlačnu i tlačnu (Slika 7). U ovom slučaju vlačna zona nalazi se ispod neutralne osi, a tlačna iznad. Vlačna zona ima pozitivni, a tlačna negativni predznak. U točki neutralne osi normalno naprezanje  $\sigma_x$  iznosi nula. Iz dijagrama naprezanja se vidi kako krajnja vlakna poprimaju ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja. (Šimić, 2002: 303 - 315)



Slika 7: Položaj neutralne osi i dijagram naprezanja

Izdvoji li se element nosača duljine  $dx$  i optereti čistim savijanjem, element će se deformirati kao što je prikazano na slici (Slika 8).



Slika 8: Dio nosača duljine  $dx$

Krajnji lijevi i krajnji desni rub elementa ostaju ravni, ali zaokrenuti jedan prema drugome oko neutralne osi za kut  $d\varphi$ . Vlakno neutralnog sloja  $A_0B_0$  prelazi u luk  $A_0'B_0'$  polumjera  $\rho$  te ne mijenja svoju duljinu. Vlakno  $AB$  prelazi u kružni luk  $A'B'$  polumjera



$\rho + z$  te mijenja svoju duljinu, odnosno produljuje se. Izvedena formula za deformacije uzdužnih vlakana  $\varepsilon_{xx}$ , odnosno relativno produljenje vlakna je:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho}. \quad (1)$$

Deformacije uzdužnih vlakana  $\varepsilon_{xx}$  mijenjaju se linearno po visini presjeka nosača dok su po širini presjeka konstantne.

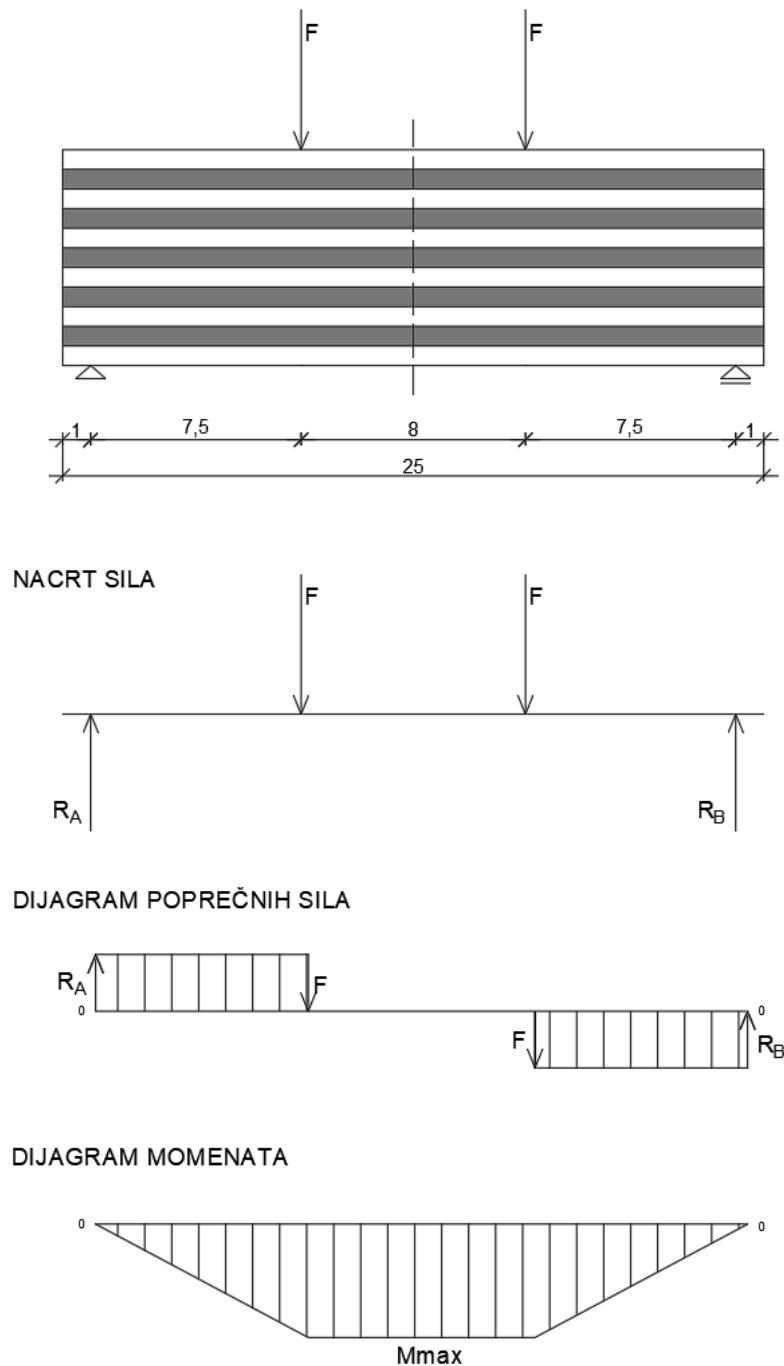
S obzirom da na promatranom nosaču nema posmičnih naprezanja zaključuje se kako niti među uzdužnim vlaknima nema djelovanja posmičnih sila te su tada normalna naprezanja u smjeru okomitom na os nosača jednaka nuli. To znači da je vlakno AB u stanju jednoosnog rastezanja ili pritiska. Zbog toga se veza između deformacija i naprezanja može opisati Hookeovim zakonom za jednoosno stanje naprezanja gdje je E Youngov modul elastičnosti. (Šimić, 2002: 303 - 315)

$$\sigma_x = \varepsilon_{xx} * E. \quad (2)$$

Uvrsti li se izraz za deformaciju (1) u izraz za naprezanje (2), dobiva se jednadžba za jednoosno stanje naprezanja:

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} * z. \quad (3)$$

U svrhu ovoga rada korišten je uslojeni, odnosno kompozitni nosač (Slika 9). Analizom opterećenja utvrđeno je kako na središnji dio nosača djeluje samo moment savijanja. S obzirom na to zaključuje se kako je središnji dio nosača opterećen čistim savijanjem. Odabirom ovakvog nosača želi se ispitati primjenjivost gredne teorije na uslojenim nosačima.

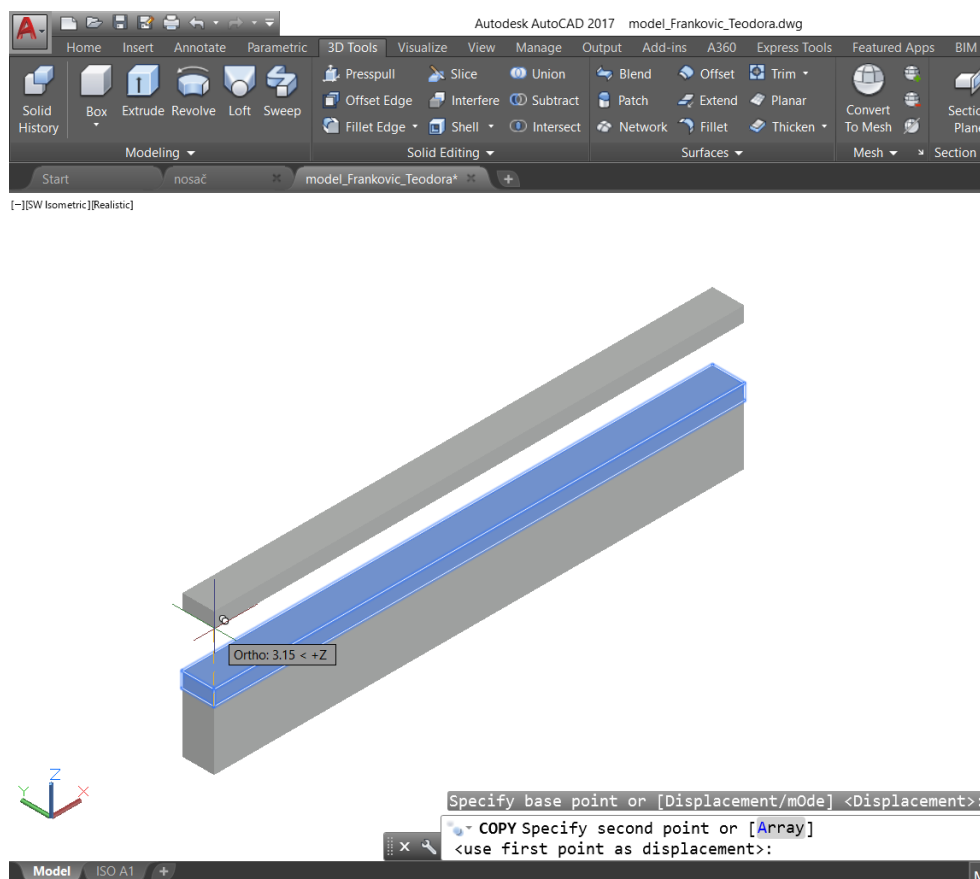


Slika 9: Kompozitni nosač i statički sustav

### 3. MODELIRANJE I IZRADA UZORKA

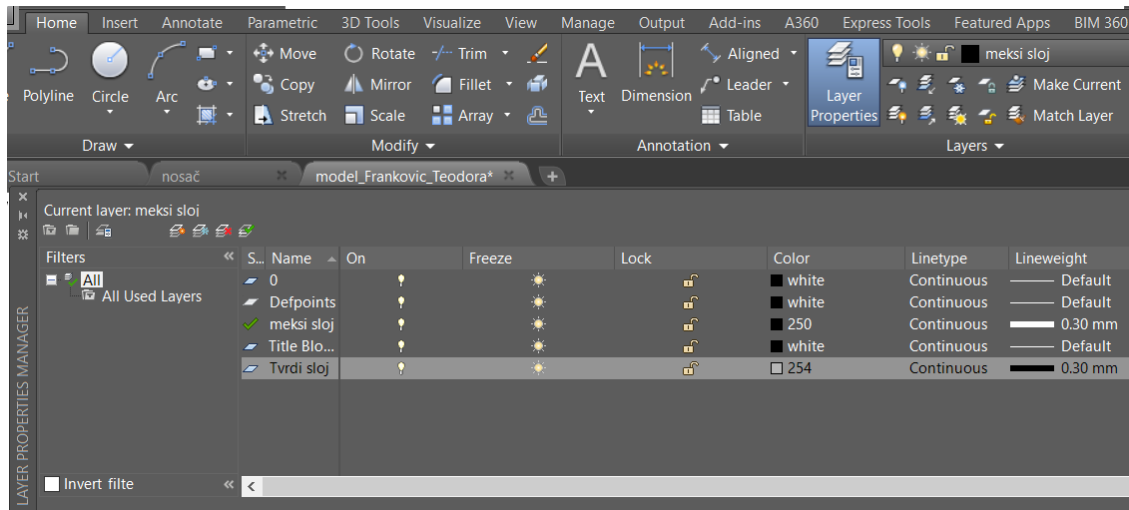
#### 3.1. AutoCAD model

Kako bi se uzorak mogao ispisati postupkom 3D ispisa, potrebno je prethodno napraviti model uzorka u nekom od računalnih programa za crtanje. Za ovaj rad korišten je program AutoCAD. Model je crtan naredbama iz kartice „3D Tools“. Najprije je nacrtan kvadar naredbom „Box“. Nakon toga kvadar je kopiran deset puta naredbom „Copy“ tvoreći tako model (Slika 10) koji se sastoji od jedanaest identičnih kvadara posloženih jedan iznad drugoga.



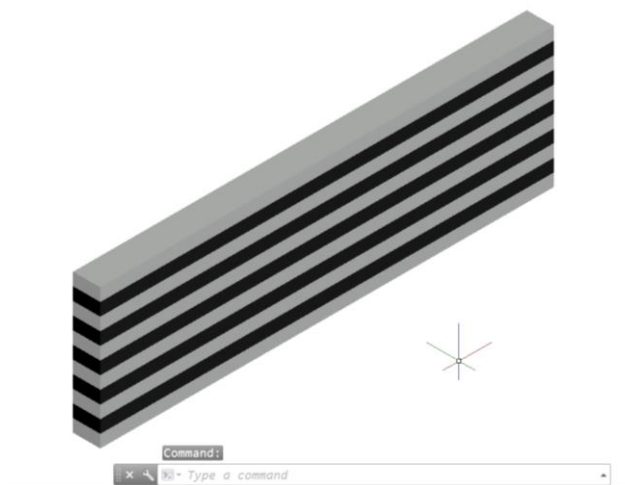
Slika 10: Kopiranje pravokutnika u AutoCAD-u

Budući uzorak sastoji se od slojeva različitih materijala stoga je svaki nacrtani kvadar označen pripadajućim slojem. Slojevi odnosno „layer“-i kreirani su (Slika 11) naredbom „New layer“ koja se nalazi u kartici „Home“ – „Layer properties“.



Slika 11: Izrada „Layer“-a u AutoCAD-u

Svakom sloju dodijeljena je boja i debljina crte (Slika 12). Naredbom „Export“ takav je model pri spremanju prebačen u .stl format - format jedini čitljiv 3D pisaču koji je na raspolaganju.



Slika 12: Model spreman za „Export“

### 3.2. 3D ispis

Uzorci su ispisani 3D pisačem „Stratasys Connex 500“ (Slika 13) koji ispisuje tehnikom stereolitografije. Takva tehnika temelji se na fotopolimerizaciji. Naime, tekući polimer se polaže u slojevima te se svaki sloj skrućuje (polimerizira) pomoću ultraljubičaste svjetlosti. Stereolitografija omogućuje izuzetno precizan i kvalitetan ispis. (<https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=69979>)



Slika 13: Ispisivanje uzorka

Svaki od tri uzorka (Slika 14) ukupnih je dimenzija: duljine 25 cm, širine 1,5 cm te visine 7,7 cm. Napravljen je od dva materijala različitih svojstava koji se međusobno izmjenjuju tvoreći ukupno 11 slojeva. Oba materijala su polimerna. Prvi materijal (na uzorku bijele boje) je krut, vrijednosti: modula elastičnosti 2 500 MPa, vlačne čvrstoće 58 MPa i savojne čvrstoće 93 MPa. Drugi materijal (na uzorku crne boje) ponaša se elastično te su mu vrijednosti sljedeće: modul elastičnosti 10 - 100 MPa i vlačna čvrstoća 0,8 - 1,5 MPa. Prvi sloj se na svakom uzorku pojavljuje ukupno 6 puta, a drugi sloj 5 puta.



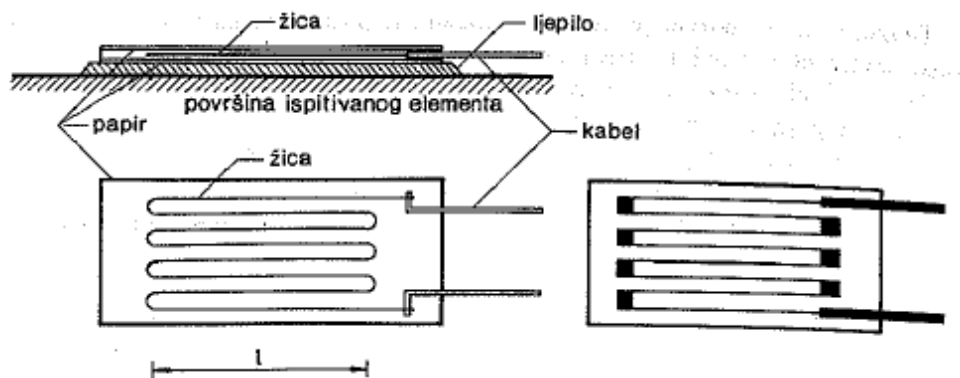
Slika 14: 3D printani uzorci

## 4. TENZOMETRIJA

Metode mjerenja deformacija su brojne, a u ovom radu korištena je tenzometrijska metoda.

Tenzometrijska metoda pripada skupini eksperimentalnih metoda analize naprezanja i deformacija. Temelji se na mjerenju deformacija ili pomaka na površini uzorka te kasnijem izračunu odgovarajućih naprezanja iz dobivenih rezultata. Kod ove metode važno je imati podatke o materijalu uzorka te o njegovim mehaničkim karakteristikama. Prednost tenzometara je točnost; naime tenzometrima se mogu mjeriti deformacije reda veličine  $1/1000$  mm s točnošću od  $\pm 2$  %. (Šimić, 1995: 559,561)

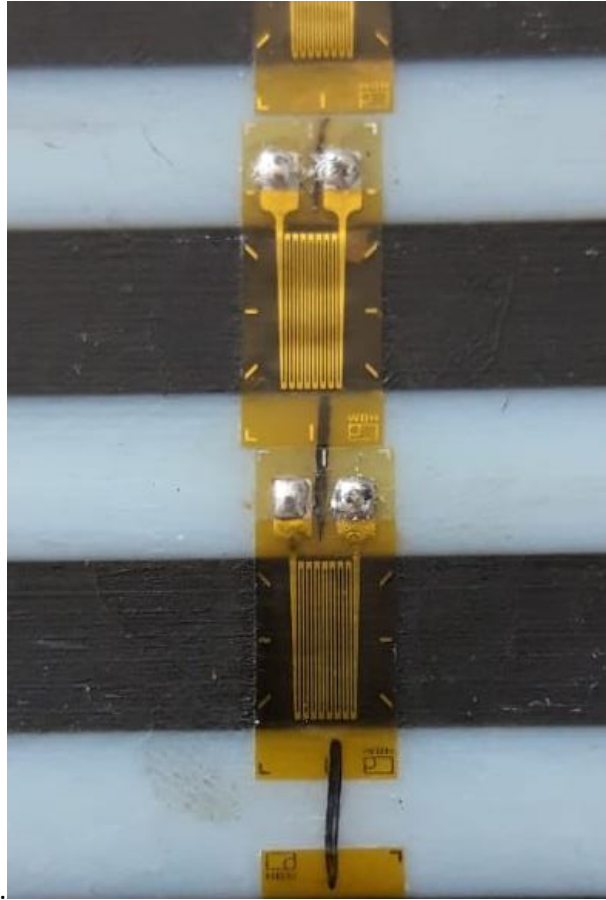
S obzirom na način mjerenja tenzometri mogu biti: mehanički, optički, akustički i električni. Električni ili elektrootporni tenzometri rade na principu promjene otpora. Deformacijom samog tenzometra (Slika 15) i žice, odnosno metalne folije u tenzometru uzrokuje se promjena električnog otpora. Mjerenjem promjene u električnom otporu dobiva se vrijednost deformacije. (Šimić, 1995: 569,571)



Slika 15: Pojednostavljeni prikaz tenzometra (Šimić, 1995: 571)

Električni tenzometri lijepe se na površinu uzorka u različitim smjerovima, ovisno o željenom smjeru pomaka ili deformacije. Tenzometri su spojeni žicama i kablovima na računalo koje bilježi promjene u otporu.

Tenzometri korišteni u ispitivanju su prikazani na slici 16.



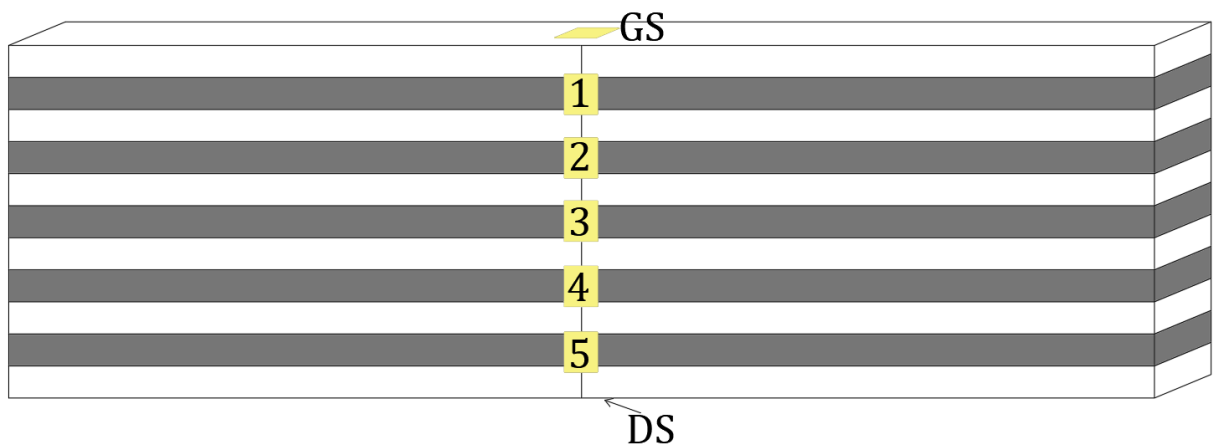
Slika 16: Tenzometri korišteni u ispitivanju, postavljeni samo u mekšim slojevima poprečno na smjer osi nosača



## 5. POSTUPAK ISPITIVANJA

Ispitivanje je provedeno u Laboratoriju za materijale Građevinskog fakulteta u Rijeci. Samom ispitivanju prethodila je priprema uzoraka koja se sastoji od lijepljenja tenzometara i pripreme preše.

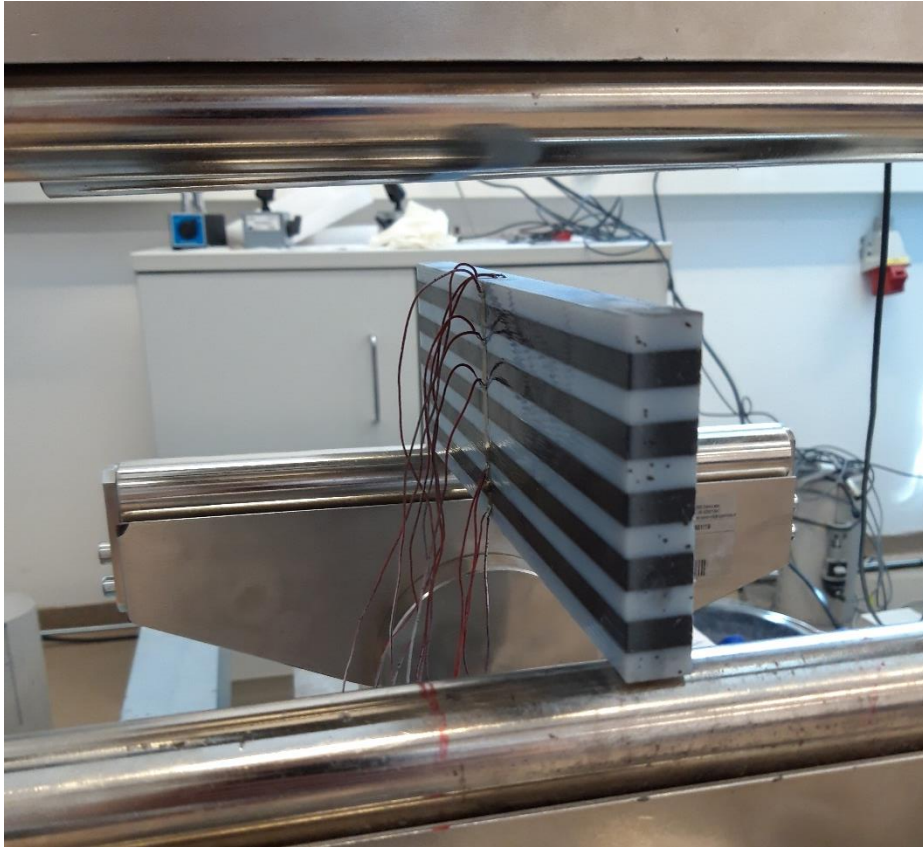
Na vrh i dno uzorka lijepljeni su tenzometri (Slika 17) u uzdužnom smjeru koji mjere uzdužne deformacije (tenzometri označeni s GS i DS) dok su na svakom drugom (odnosno elastičnom sloju) zalijepljeni uzorci u poprečnom smjeru kako bi mjerili poprečne deformacije (tenzometri označeni s 1, 2, 3, 4 i 5).



Slika 17: Pozicije tenzometara

Električni tenzometri korišteni u ovom radu su metalne folije otpornosti  $120 \Omega \pm 30 \%$ , faktora tenzometra  $k = 2,16 \pm 10 \%$ , namijenjeni za plastične materijale vrijednosti temperaturnog koeficijenta  $\alpha = 65,0 [10^{-6}/K]$ .

Zalijepljeni tenzometri su lemljenjem spojeni za žice odnosno vodiče (Slika 18) te se naposljetku kablovima povezuju na računalo koje bilježi sve promjene otpora, odnosno deformacije u vremenu.



Slika 18: Uzorak spreman za ispitivanje

Po završetku pripreme uzoraka, podešava se preša te se postavlja uzorak. Oslonci na preši postavljeni su na razmaku od 23 cm, a svaka od dviju vertikalnih sila opterećuje uzorak na udaljenosti od 4 cm od središnje osi uzorka (Slika 19).



Slika 19: Spreman uzorak postavljen u prešu

Nakon toga preša se uključuje. S prešom je povezano računalo koje bilježi pomak i silu u vremenu ispisujući sve to u Excel okvir. Ispitivanje je provedeno uz kontrolu sile odnosno kontinuirani prirast sile brzinom od 30 N/s. Opisani postupak proveden je na svim trima uzorcima.

Prilikom ispitivanja naišlo se na neočekivane probleme. Svaki uzorak, nakon nanošenja određene sile, je kliznuo s preše. Kod prvog uzorka klizanje s preše (Slika 20) dogodilo se neposredno nakon nanošenja sile te su rezultati tog ispitivanja bili neuporabivi. Mogući razlog klizanja svih uzoraka su male dimenzije širine poprečnog presjeka te premaleno nalijevanje uzoraka na oslonce. Također prilikom nanošenja sile uzorci su se izvijali u vertikalnoj ravnini. Zbog gore navedenih razloga ovim ispitivanjem nisu dobivene maksimalne sile i maksimalne deformacije.

Eksperimentalno dobivene vrijednosti nisu mjerodavne budući stanje naprezanja više ne odgovara čistom savijanju već imamo i utjecaje izvan ravnine opterećenja.



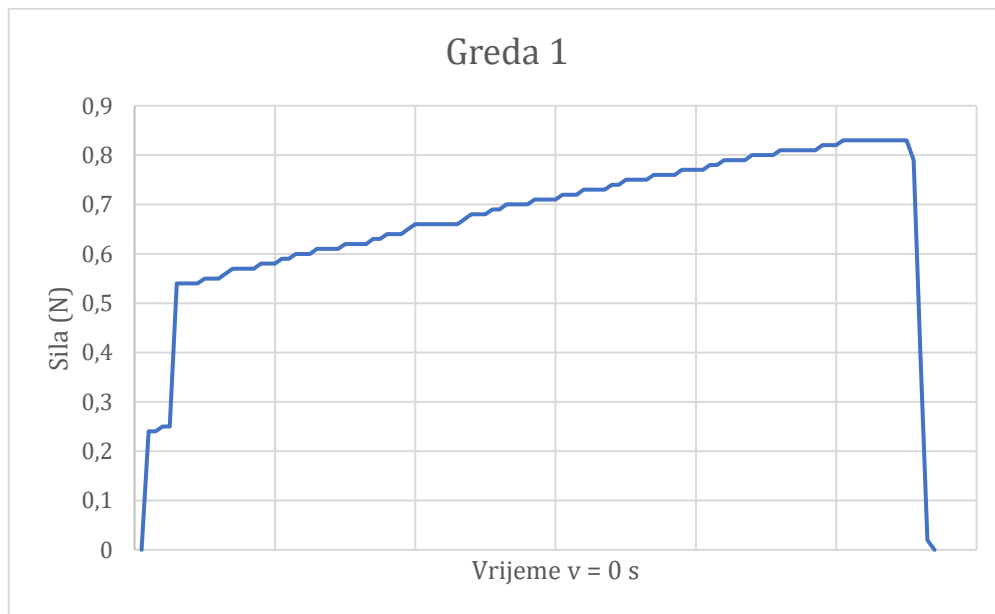
Slika 20: Izvijeni uzorak neposredno prije klizanja

## 6. REZULTATI ISPITIVANJA

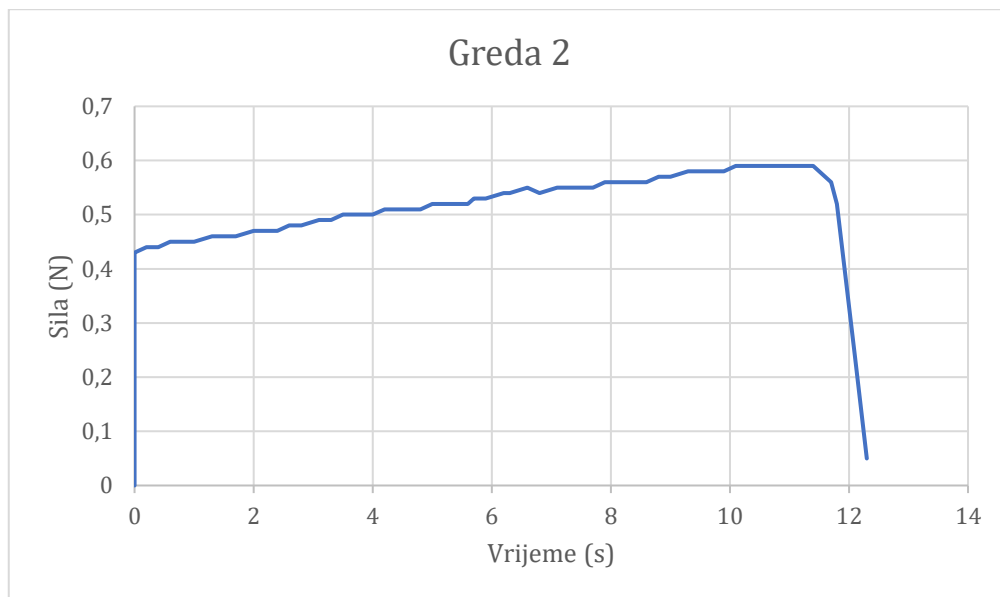
### 6.1. Vrijednosti sile u vremenu

Na sljedećim grafovima (Graf 1, Graf 2, Graf 3) prikazane su vrijednosti sile u vremenu dobivene na preši. Iz sva tri grafa vidi se postepeno povećavanje sile. Na prvom uzorku, tj. na gredi 1 izmjerena je ukupno najveća sila koja iznosi 0.83 kN. Također, iz prvoga grafa vidimo kako je vrijeme v jednako nula sekundi iz razloga što je uzorak odmah po nanošenju sile kliznuo s preše.

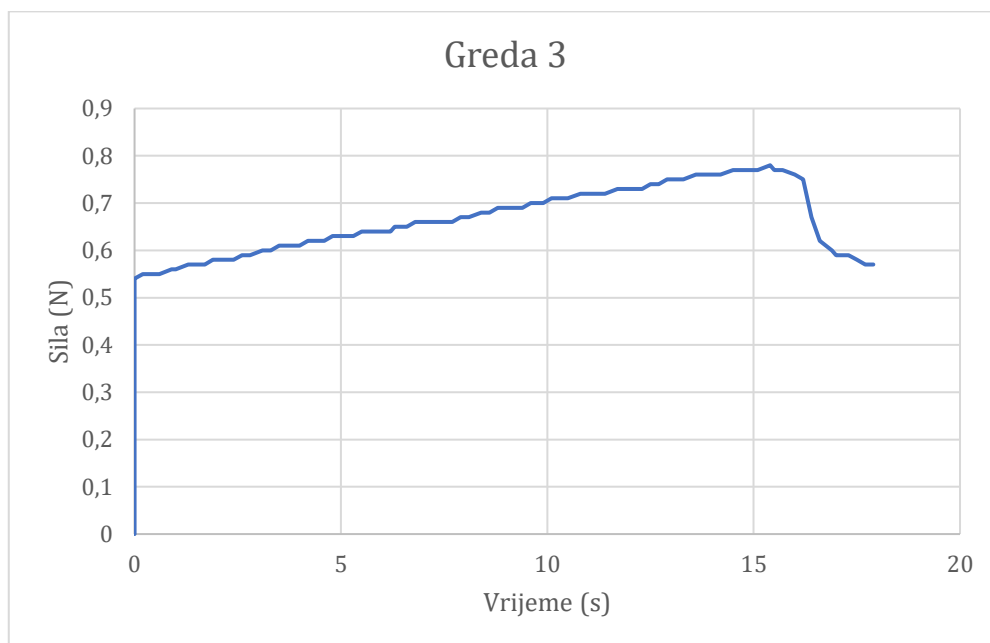
Graf 1: Sila – vrijeme, uzorak/greda 1



Graf 2: Sila – vrijeme, uzorak/greda 2



Graf 3: Sila – vrijeme, uzorak/greda 3



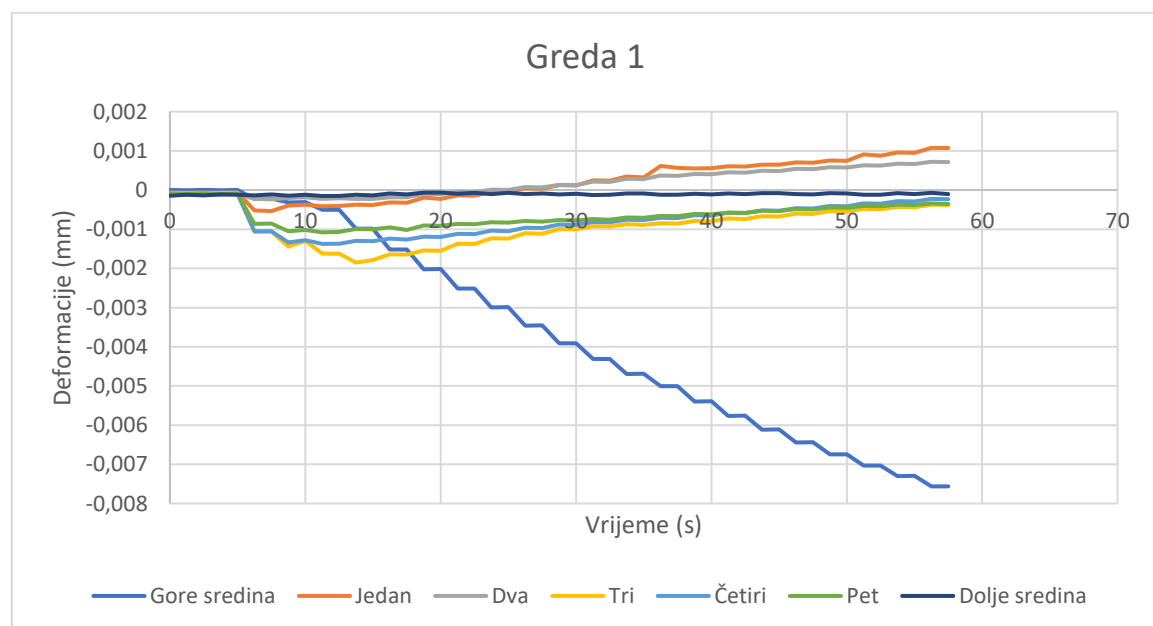
Sila nanošena na gredu 2 dosegla je svoju vršnu vrijednost od 0,59 kN nakon 10,1 sekundi. Sila nanošena na gredu 3 dosegla je svoju vršnu vrijednost od 0,78 kN nakon 15,4 sekundi. Linije na drugom i trećem grafu imaju iste putanje; najprije imaju potpuno vertikalni rast, potom linija linearno raste te naposljetku naglo opada. Potpuni vertikalni rast događa se zbog sile predopterećenja. Naime, na preši se bilježi sila tek

kada gornji oslonci preše u potpunosti nalegnu na uzorak. U trenutku naližeganja sila je već veća od nule i tu silu zovemo silom predopterećenja. Linearni rast događa se zbog kontinuiranog prirasta sile i traje sve do naglog opadanja linije na grafu, tj. sve do trenutka klizanja uzorka s preše. Iako su sva tri uzorka identična, dosegli su različitu vrijednost vršne sile u različitom periodu. Razlog tomu je što je svaki uzorak kliznuo u drugom trenutku.

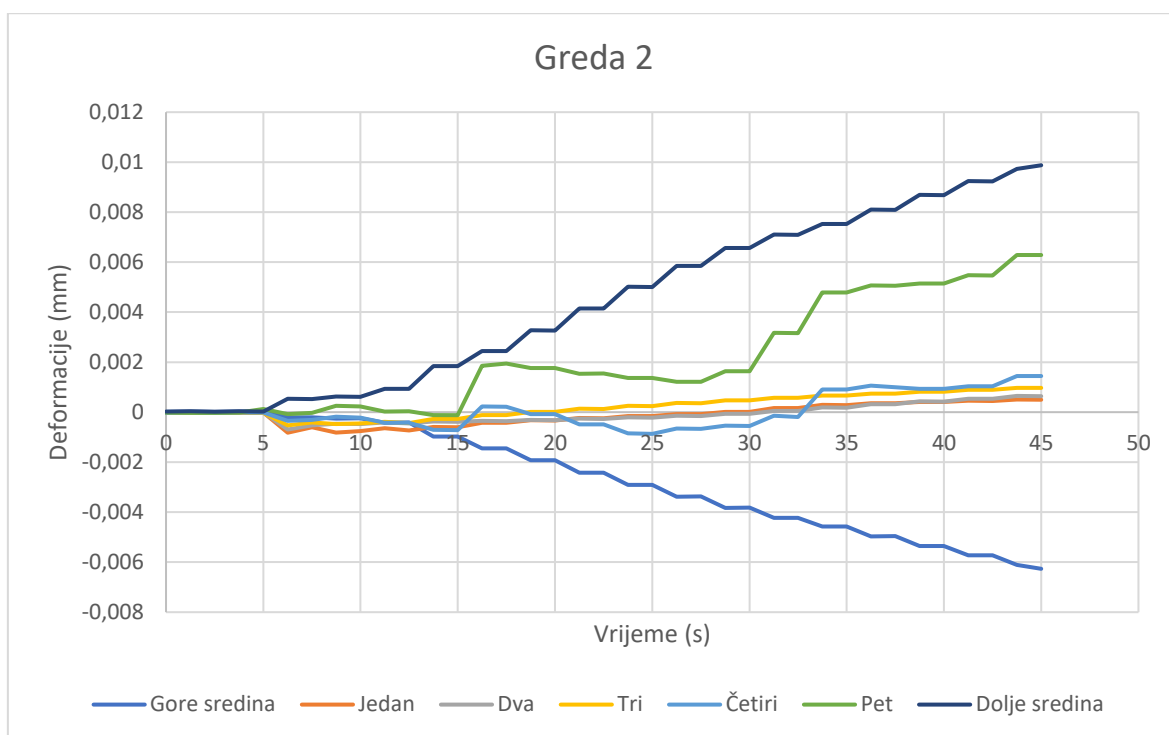
## 6.2. Vrijednosti deformacija u vremenu

Tenzometrima su bilježene vrijednosti deformacija u vremenu. Vrijednosti su prikazane na grafovima u nastavku (Graf 4, Graf 5, Graf 6). Svaka linija na grafovima predstavlja deformaciju različitog tenzometra na različitom položaju. Na Grafu 4, tj. grafu prvoga uzorka zbog naglog rasta ili pada linije rezultati su neuporabivi i dokazuju kako je odmah po opterećenju došlo do klizanja uzorka. Također, na tom uzorku se je pri ispitivanju odlijepio tenzometar na donjoj strani („DS“).

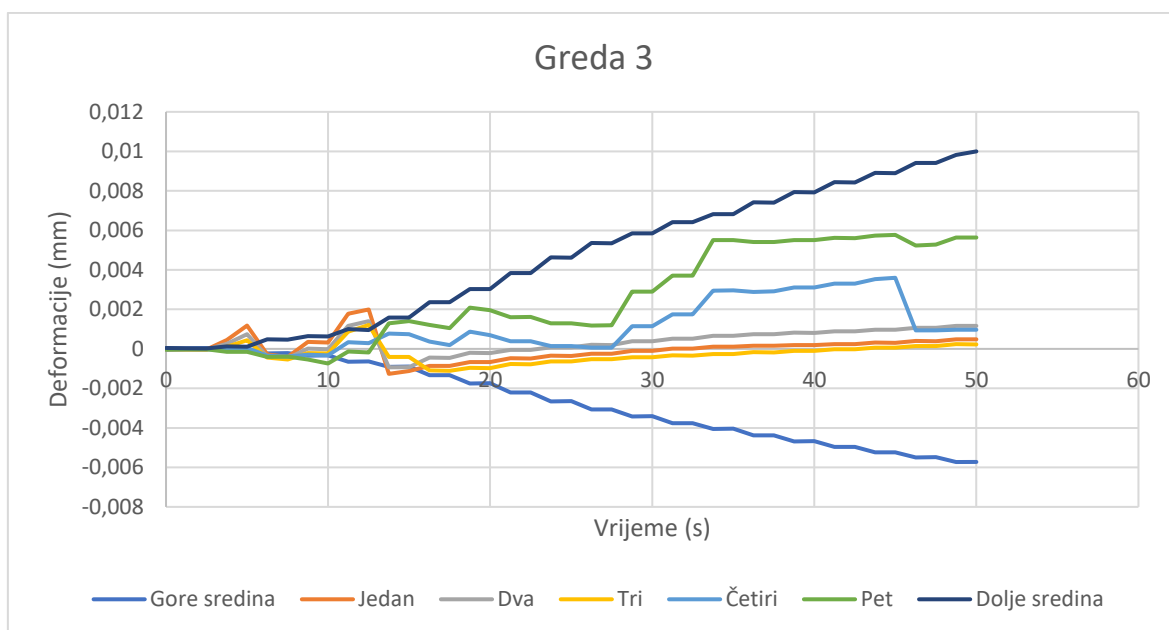
Graf 4: Deformacija – vrijeme, uzorak/greda 1



Graf 5: Deformacija – vrijeme, uzorak/greda 2



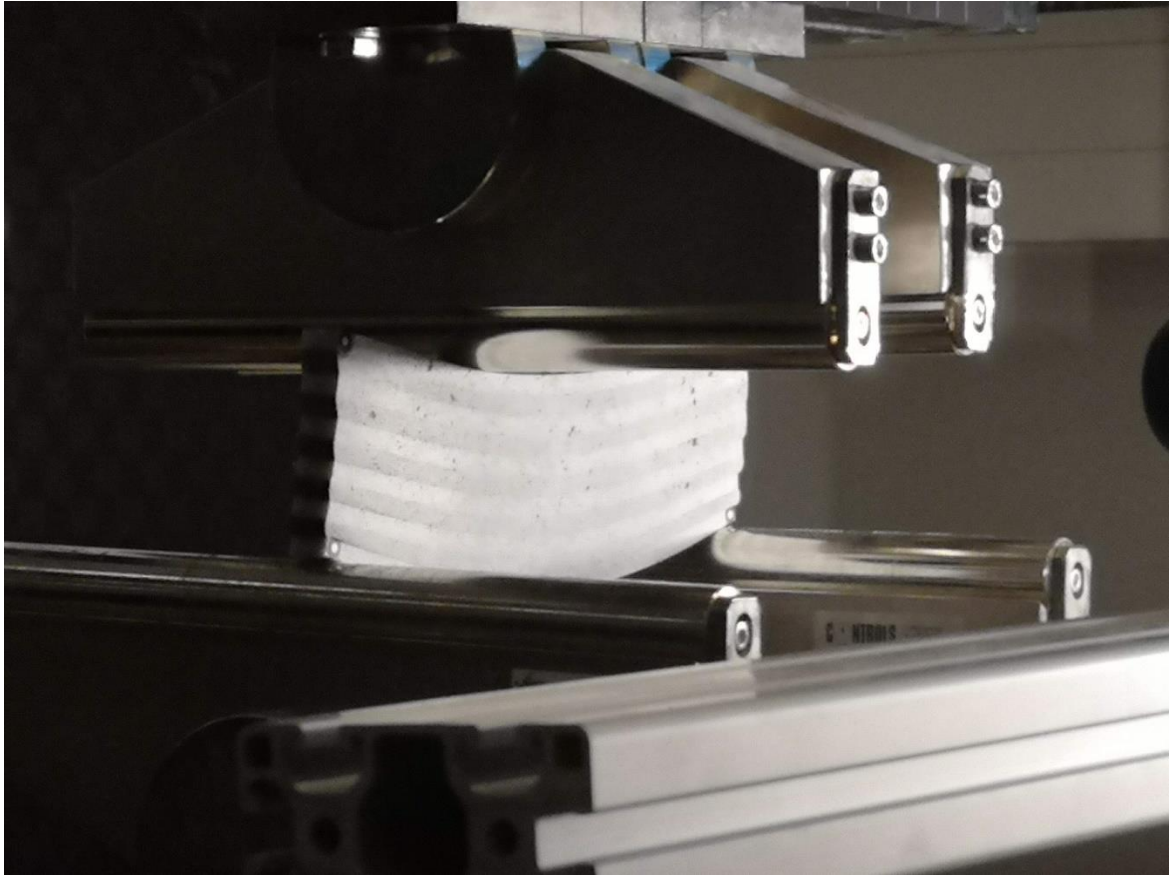
Graf 6: Deformacija – vrijeme, uzorak/greda 3



Na grafovima drugog i trećeg uzorka primjećuju se slične linije deformacija. Linije su raspršene ispod i iznad osi apscise (s vrijednošću deformacije nula) što dokazuje kako je neutralna os doista podijelila uzorak na dvije zone; gornju tlačnu i donju vlačnu zonu.



Stoga deformacije unutar tlačne zone imaju negativan predznak, a deformacije unutar vlačne pozitivne (Slika 21).



Slika 21: Deformirani uzorak

Iz ispitivanja se vidi kako se uzorci ponašaju potpuno elastično te se nakon uklanjanja sile vraćaju u prvobitni položaj, bez vidljivih trajnih plastičnih deformacija. Također vrijedi napomenuti kako se prvi sloj ponaša kruto te, ukoliko se promatra sa strane (Slika 22) primjećuje se kako su pravokutni presjeci slojeva ostali pravokutni. Drugi se sloj ponaša potpuno elastično te, ukoliko se promatra sa strane, primjećuje se kako su slojevi prije nanošenja sile imali pravokutan, no nakon nanošenja imaju nepravilan oblik. To je ujedno i razlog izvijanja uzorka koji je doveo do klizanja uzorka sa preše.

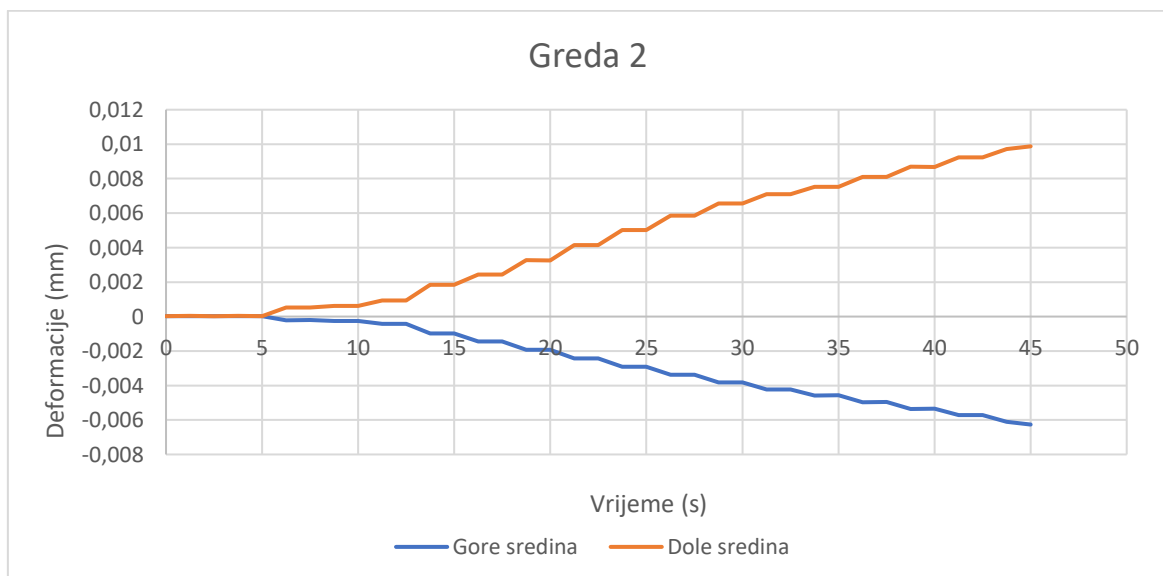


Slika 22: Slojevi uzorka pod opterećenjem

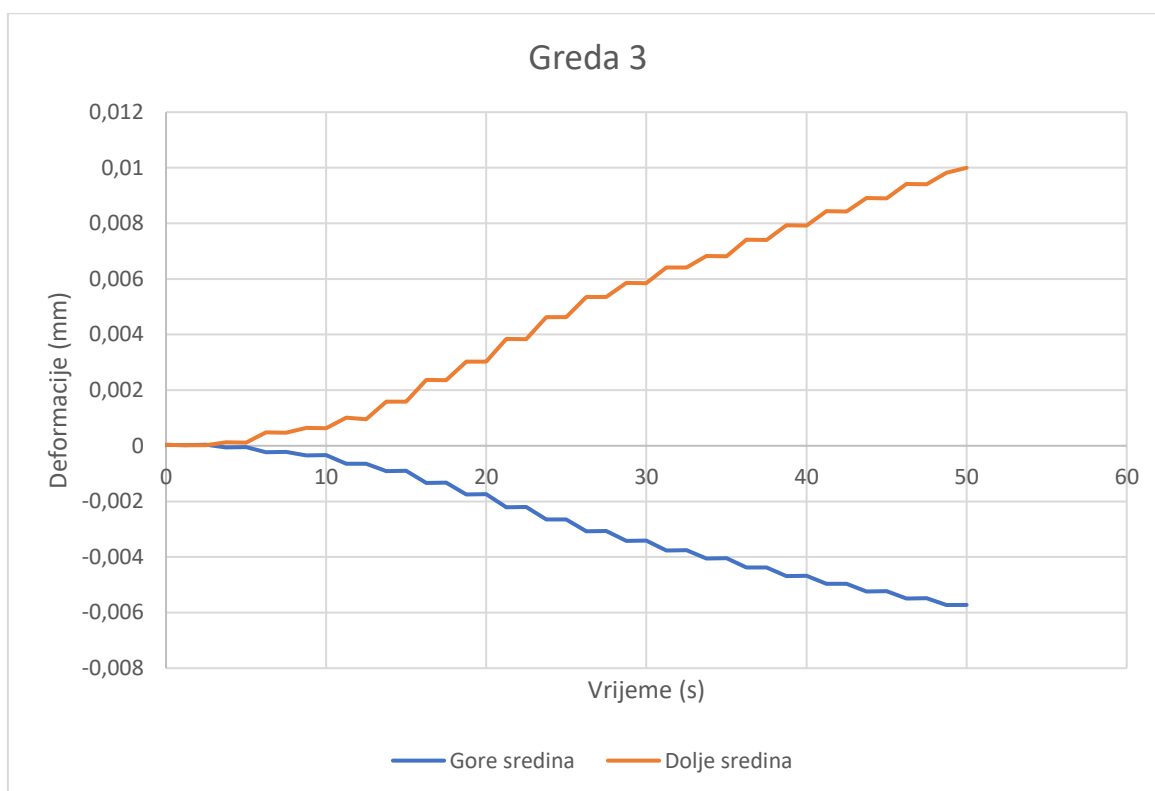
### 6.2.1. Uzdužne deformacije

Na grafovima (Graf 7, Graf 8) prikazane su uzdužne deformacije grede 2 i grede 3. Te linije dobivene su na tenzometrima koji bilježe uzdužne deformacije i nalaze se na gornjem i donjem kraju uzorka (na Slici 17 oznake GS i DS).

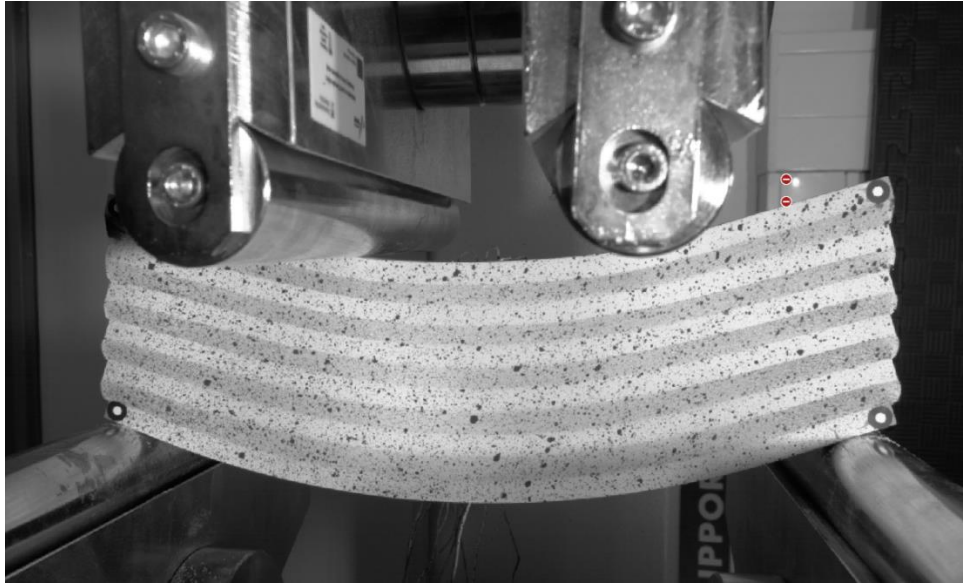
Graf 7: Uzdužna deformacija - vrijeme, uzorak/greda 2



Graf 8: Uzdužna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 3



S obzirom da se ovim ispitivanjem promatra zona čistog savijanja, očekuje se da će linije uzdužne deformacije biti simetrične s obzirom na os apscisu, odnosno da će linije „Gore sredina“ i „Dolje sredina“ imati potpuno iste vrijednosti, ali suprotan predznak. Promatrajući grafove uočava se kako linije „Dolje sredina“ poprimaju veće vrijednosti od linija „Gore sredina“. Razlog tome je izvijanje uzorka van ravnine opterećenja što je dovelo do nesimetričnog ponašanja simetričnog uzorka te ne možemo biti sigurni jesu li očitane vrijednosti mjerodavne za uslojene nosače. Nažalost, upravo iz tog razloga nećemo moći napraviti usporedbu eksperimentalnih i analitičkih podataka.

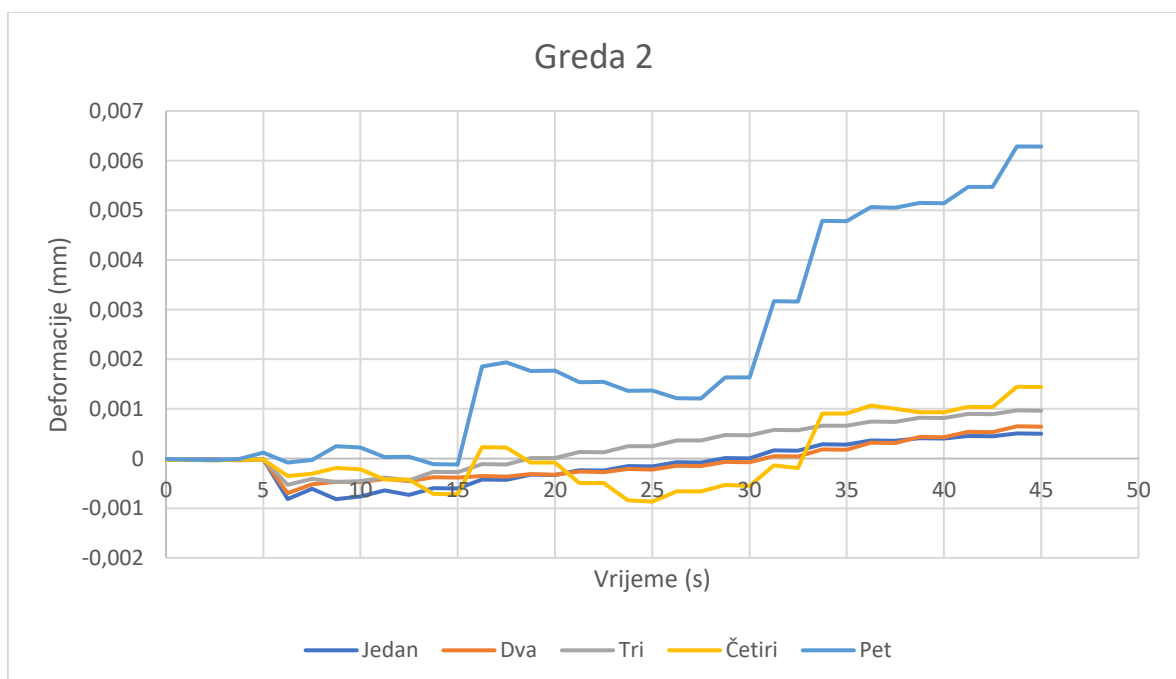


Slika 23: Deformirani uzorak

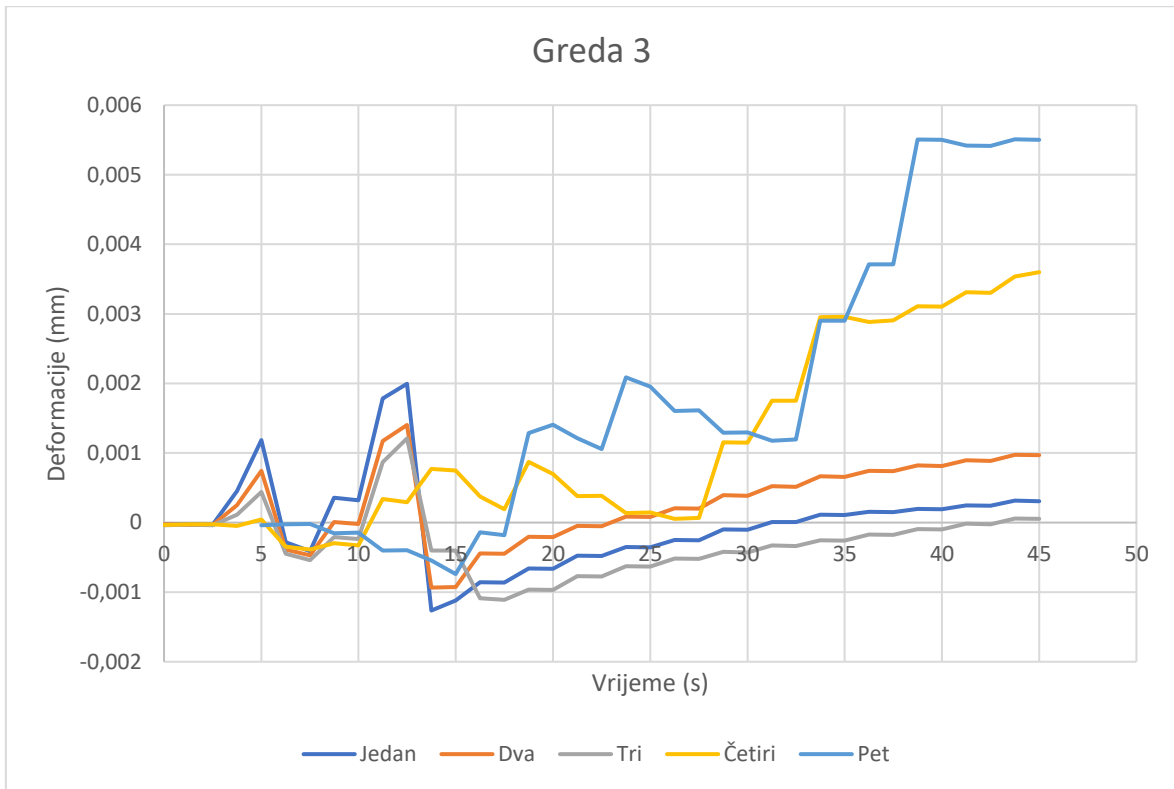
### 6.2.2. Poprečne deformacije

Na grafovima (Graf 9, Graf 10) prikazane su poprečne deformacije grede 2 i grede 3. Te su linije dobivene tenzometrima koji bilježe poprečne deformacije i nalaze se s prednje strane uzorka (na Slici 17 oznake 1, 2, 3, 4 i 5).

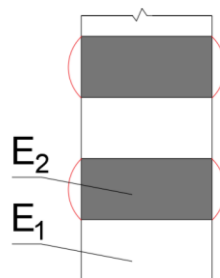
Graf 9: Poprečna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 2



Graf 10: Poprečna deformacija – vrijeme, uzorak/greda 3



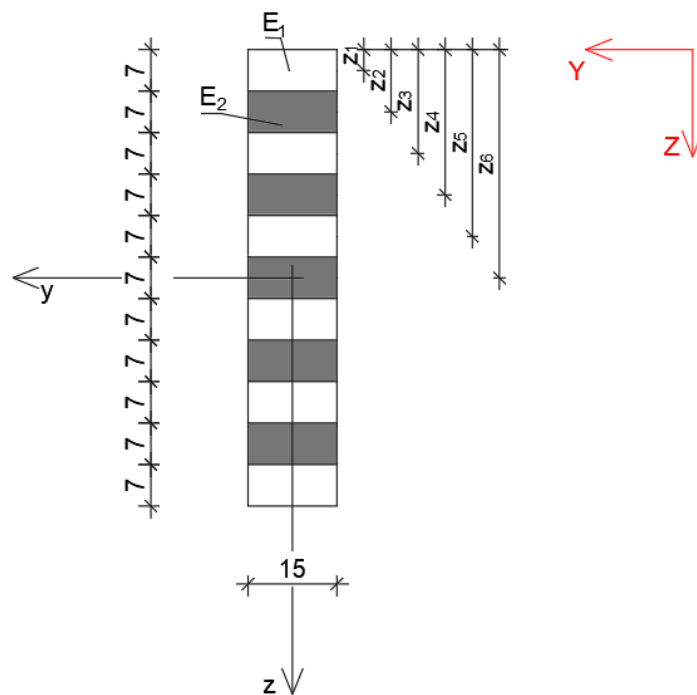
Iz grafova se vidi kako poprečne deformacije mijenjaju predznak za isti tenzometar što bi značilo da su malo tlačne, a malo vlačne. To ponašanje ne možemo razumski objasniti već ga pripisujemo problemima prilikom ispitivanja. Kako je vidljivo na Slici 24, svaki drugi odnosno mekši sloj se, pri djelovanju sile, izboči u ravnini poprečnog presjeka te mu se smanji visina (stisne se). S obzirom da su tenzometri smješteni na rubovima, na tenzometrима bi se trebale očitavati vlačne deformacije no zapravo se radi o stiskanju (smanjivanju visine) mekšeg sloja. Za ovako uslojene materijale bilo bi primjenjivije raditi 2D optička mjerenja kamerama gdje bi se jednostavnije moglo detektirati stiskanje odnosno smanjivanje visine mekšeg dijela uzorka.



Slika 24: Deformirani mekši sloj

## 7. PRORAČUN KOMPOZITNOG NOSAČA

Kompozitni nosač je nosač koji se sastoji od dvaju ili više materijala različitih modula elastičnosti ( $E_1 > E_2$ ) pretpostavljajući kako je svaki materijal homogen i izotropan. Također pretpostavlja se kako se materijali ponašaju prema Hookeovom zakonu te kako je poprečni presjek simetričan. Proračun kompozitnog nosača moguć je primjenom teorije savijanja homogenoga monolitnoga štapa. Ispitivani kompozitni nosač pod utjecajem je čistog savijanja što znači da poprečni presjeci tog nosača ostaju ravni. (Šimić, 2002: 400 - 403)



Slika 25: Poprečni presjek uzorka s oznakama

Znajući udaljenost  $z$  promatranog vlakna od neutralne osi, izrazi za normalna naprezanja su (1):

$$\sigma_{x,1} = E_1 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_1}{\rho} * z_1$$

$$\sigma_{x,2} = E_2 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_2}{\rho} * z_2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x,3} &= E_1 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_1}{\rho} * z_3 \\ \sigma_{x,4} &= E_2 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_2}{\rho} * z_4 \\ \sigma_{x,5} &= E_1 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_1}{\rho} * z_5 \\ \sigma_{x,6} &= E_2 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_2}{\rho} * z_6 \\ \sigma_{x,7} &= E_1 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_1}{\rho} * z_7 \\ \sigma_{x,8} &= E_2 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_2}{\rho} * z_8 \\ \sigma_{x,9} &= E_1 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_1}{\rho} * z_9 \\ \sigma_{x,10} &= E_2 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_2}{\rho} * z_{10} \\ \sigma_{x,11} &= E_1 * \varepsilon_{xx} = \frac{E_1}{\rho} * z_{11}\end{aligned}\quad (1)$$

Nakon toga postavlja se jednadžba ravnoteže horizontalnih sila (2) gdje su  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{11}$  površine poprečnog presjeka prvog, odnosno drugog materijala:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\begin{aligned}\int \sigma_x dA = \\ \int \sigma_{x1} dA_1 + \int \sigma_{x2} dA_2 + \int \sigma_{x3} dA_3 + \int \sigma_{x4} dA_4 + \int \sigma_{x5} dA_5 + \int \sigma_{x6} dA_6 + \int \sigma_{x7} dA_7 + \\ \int \sigma_{x8} dA_8 + \int \sigma_{x9} dA_9 + \int \sigma_{x10} dA_{10} + \int \sigma_{x11} dA_{11} = 0\end{aligned}\quad (2)$$

U prvu (1) jednadžbu uvrštava se druga (2) jednadžba, dobiva se jednadžba (3) koja određuje položaj neutralne osi y:

$$\begin{aligned}E_1 \int z dA_1 + E_2 \int z dA_2 + E_1 \int z dA_3 + E_2 \int z dA_4 + E_1 \int z dA_5 + \\ E_2 \int z dA_6 + E_1 \int z dA_7 + E_2 \int z dA_8 + E_1 \int z dA_9 + E_2 \int z dA_{10} + E_1 \int z dA_{11} = 0\end{aligned}\quad (3)$$

Uvodi se novi koordinatni sustav YZ (na slici 24 označen crvenom bojom) gdje je

$z = Z - z_0$  te se jednačba (3) zapisuje u obliku (4):

$$E_1 \int (Z - z_0) dA_1 + E_2 \int (Z - z_0) dA_2 + E_1 \int (Z - z_0) dA_3 + E_2 \int (Z - z_0) dA_4 + E_1 \int (Z - z_0) dA_5 + E_2 \int (Z - z_0) dA_6 + E_1 \int (Z - z_0) dA_7 + E_2 \int (Z - z_0) dA_8 + E_1 \int (Z - z_0) dA_9 + E_2 \int (Z - z_0) dA_{10} + E_1 \int (Z - z_0) dA_{11} = 0 \quad (4)$$

gdje je:  $\int Z dA_i = z_i A_i, i = 1, \dots, 11$

statički moment površine s obzirom na os Y koja prolazi gornjim rubom poprečnoga presjeka nosača, uzimajući u obzir:

$$\int z_0 dA_1 = z_0 A_1$$

$$\int z_0 dA_2 = z_0 A_2$$

$$\int z_0 dA_3 = z_0 A_3$$

$$\int z_0 dA_4 = z_0 A_4$$

$$\int z_0 dA_5 = z_0 A_5$$

$$\int z_0 dA_6 = z_0 A_6$$

$$\int z_0 dA_7 = z_0 A_7$$

$$\int z_0 dA_8 = z_0 A_8$$

$$\int z_0 dA_9 = z_0 A_9$$

$$\int z_0 dA_{10} = z_0 A_{10}$$

$$\int z_0 dA_{11} = z_0 A_{11}$$



dobiva se:

$$E_1(z_1A_1 - z_0A_1) + E_2(z_2A_2 - z_0A_2) + E_1(z_3A_3 - z_0A_3) + E_2(z_4A_4 - z_0A_4) + \\ E_1(z_5A_5 - z_0A_5) + E_2(z_6A_6 - z_0A_6) + E_1(z_7A_7 - z_0A_7) + E_2(z_8A_8 - z_0A_8) + \\ E_1(z_9A_9 - z_0A_9) + E_2(z_{10}A_{10} - z_0A_{10}) + E_1(z_{11}A_{11} - z_0A_{11}) = 0.$$

Iz toga slijedi formula za položaj neutralne osi y poprečnog presjeka (5):

$$z_0 = \frac{E_1z_1A_1 + E_2z_2A_2 + E_1z_3A_3 + E_2z_4A_4 + E_1z_5A_5 + E_2z_6A_6 + E_1z_7A_7 + E_2z_8A_8 + E_1z_9A_9 + E_2z_{10}A_{10} + E_1z_{11}A_{11}}{E_1A_1 + E_2A_2 + E_1A_3 + E_2A_4 + E_1A_5 + E_2A_6 + E_1A_7 + E_2A_8 + E_1A_9 + E_2A_{10} + E_1A_{11}} \quad (5)$$

S obzirom da je poznato da su sve površine poprečnog presjeka jednake, odnosno da je  $A = A_1 = A_2 = \dots = A_{11}$ , izraz (5) se zapisuje u sljedećem obliku (6):

$$z_0 = \frac{E_1(z_1A_1 + z_3A_3 + z_5A_5 + z_7A_7 + z_9A_9 + z_{11}A_{11}) + E_2(z_2A_2 + z_4A_4 + z_6A_6 + z_8A_8 + z_{10}A_{10})}{A*(6E_1 + 5E_2)} \quad (6)$$

Ukoliko se uvrste statički momenti površine  $S_y = z * A$  u jednadžbu (6) iz toga slijedi konačna formula za položaj neutralne osi y poprečnog presjeka (7):

$$z_0 = \frac{E_1(S_{y,1} + S_{y,3} + S_{y,5} + S_{y,7} + S_{y,9} + S_{y,11}) + E_2(S_{y,2} + S_{y,4} + S_{y,6} + S_{y,8} + S_{y,10})}{A*(6E_1 + 5E_2)} \quad (7)$$

Nakon toga postavlja se jednadžba (8) sume momenata oko osi y:

$$\Sigma M_y = 0$$

$$M_y = \int \sigma_x z dA = \\ \int \sigma_{x1} z dA_1 + \int \sigma_{x2} z dA_2 + \int \sigma_{x3} z dA_3 + \int \sigma_{x4} z dA_4 + \int \sigma_{x5} z dA_5 + \int \sigma_{x6} z dA_6 + \int \sigma_{x7} z dA_7 + \\ \int \sigma_{x8} z dA_8 + \int \sigma_{x9} z dA_9 + \int \sigma_{x10} z dA_{10} + \int \sigma_{x11} z dA_{11} = M \quad (8)$$

te se prva jednadžba (1) uvrštava u jednadžbu (8) iz čega se dobiva:

$$\begin{aligned}
M = & \int \sigma_{x1} z dA_1 + \int \sigma_{x2} z dA_2 + \int \sigma_{x3} z dA_3 + \int \sigma_{x4} z dA_4 + \int \sigma_{x5} z dA_5 + \int \sigma_{x6} z dA_6 \\
& + \int \sigma_{x7} z dA_7 \\
& + \int \sigma_{x8} z dA_8 + \int \sigma_{x9} z dA_9 + \int \sigma_{x10} z dA_{10} + \int \sigma_{x11} z dA_{11} = \frac{E_1}{\rho} \int z^2 dA_1 \\
& + \frac{E_2}{\rho} \int z^2 dA_2 \\
& + \frac{E_1}{\rho} \int z^2 dA_3 + \frac{E_2}{\rho} \int z^2 dA_4 + \frac{E_1}{\rho} \int z^2 dA_5 + \frac{E_2}{\rho} \int z^2 dA_6 \\
& + \frac{E_1}{\rho} \int z^2 dA_7 + \frac{E_2}{\rho} \int z^2 dA_8 + \frac{E_1}{\rho} \int z^2 dA_9 + \frac{E_2}{\rho} \int z^2 dA_{10} + \frac{E_1}{\rho} \int z^2 dA_{11}
\end{aligned}$$

odnosno (9) gdje su  $I_{y,1}$  do  $I_{y,11}$  aksijalni momenti tromosti površina presjeka  $A_1$  do  $A_{11}$  s obzirom na neutralnu os  $y$ .

$$\begin{aligned}
M = \frac{1}{\rho} (E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + \\
E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}) \quad (9)
\end{aligned}$$

Ukoliko je  $I_y$  aksijalni moment tromosti čitavog presjeka onda vrijedi izraz:

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} + I_{y,3} + I_{y,4} + I_{y,5} + I_{y,6} + I_{y,7} + I_{y,8} + I_{y,9} + I_{y,10} + I_{y,11}$$

Iz kojega slijedi izraz (10) za zakrivljenost nosača:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} \quad (10)$$

Uvrštava se izraz (10) u izraz (1) te se dobiva izraz (11) za naprezanja u svakom pojedinom presjeku od  $A_1$  do  $A_{11}$ .

$$\sigma_{x,1} = \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_1$$

$$\sigma_{x,2} = \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_2$$

$$\sigma_{x,3} = \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_3$$

$$\sigma_{x,4} = \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_4$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,5} &= \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_5 \\
\sigma_{x,6} &= \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_6 \\
\sigma_{x,7} &= \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_7 \\
\sigma_{x,8} &= \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_8 \\
\sigma_{x,9} &= \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_9 \\
\sigma_{x,10} &= \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_{10} \\
\sigma_{x,11} &= \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_{11}
\end{aligned}
\tag{11}$$

Osim prethodnog postupka određivanja naprežanja u nosaču, može se primijeniti i metoda reduciranog poprečnog presjeka. Tim se postupkom uslojeni poprečni presjek koji je sastavljen od više materijala zamjenjuje ekvivalentnim poprečnim presjekom od jednog materijala kojem je neutralna os i fleksijska krutost jednaka kao originalnom poprečnom presjeku. (Šimić, 2002: 403 - 405)

Youngovi moduli elastičnosti postavljaju se u slijedeći odnos:

$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

Izraz (3) zapisuje se u obliku:

$$\int z dA_1 + n \int z dA_2 + \int z dA_3 + n \int z dA_4 + \int z dA_5 + n \int z dA_6 + \int z dA_7 + n \int z dA_8 + \int z dA_9 + n \int z dA_{10} + \int z dA_{11} = 0$$

Izraz (6) zapisuje se u obliku:

$$z_0 = \frac{z_1 A_1 + n z_2 A_2 + z_3 A_3 + n z_4 A_4 + z_5 A_5 + n z_6 A_6 + z_7 A_7 + n z_8 A_8 + z_9 A_9 + n z_{10} A_{10} + z_{11} A_{11}}{A * (6 + 5n)}$$

Odnosno izraz (7) u obliku:

$$z_0 = \frac{S_{y,1} + n S_{y,2} + S_{y,3} + n S_{y,4} + S_{y,5} + n S_{y,6} + S_{y,7} + n S_{y,8} + S_{y,9} + n S_{y,10} + S_{y,11}}{A * (6 + 5n)}$$

Izraz za zakrivljenost nosača (10) zapisuje se u obliku:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1(I_{y,1} + nI_{y,2} + I_{y,3} + nI_{y,4} + I_{y,5} + nI_{y,6} + I_{y,7} + nI_{y,8} + I_{y,9} + nI_{y,10} + I_{y,11})}$$

gdje je izraz (12) izraz za moment tromosti čitavog reduciranog poprečnog presjeka:

$$I_{y,r} = I_{y,1} + nI_{y,2} + I_{y,3} + nI_{y,4} + I_{y,5} + nI_{y,6} + I_{y,7} + nI_{y,8} + I_{y,9} + nI_{y,10} + I_{y,11} \quad (12)$$

Iz čega slijedi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_{y,r}} \quad (13)$$

Uvrštavanjem izraza (13) u izraz (1) dobivaju se izrazi za naprezanja u svakom pojedinom presjeku od A<sub>1</sub> do A<sub>11</sub>.

$$\sigma_{x,1} = \frac{M}{I_{y,r}} * Z_1$$

$$\sigma_{x,2} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * Z_2$$

$$\sigma_{x,3} = \frac{M}{I_{y,r}} * Z_3$$

$$\sigma_{x,4} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * Z_4$$

$$\sigma_{x,5} = \frac{M}{I_{y,r}} * Z_5$$

$$\sigma_{x,6} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * Z_6$$

$$\sigma_{x,7} = \frac{M}{I_{y,r}} * Z_7$$

$$\sigma_{x,8} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * Z_8$$

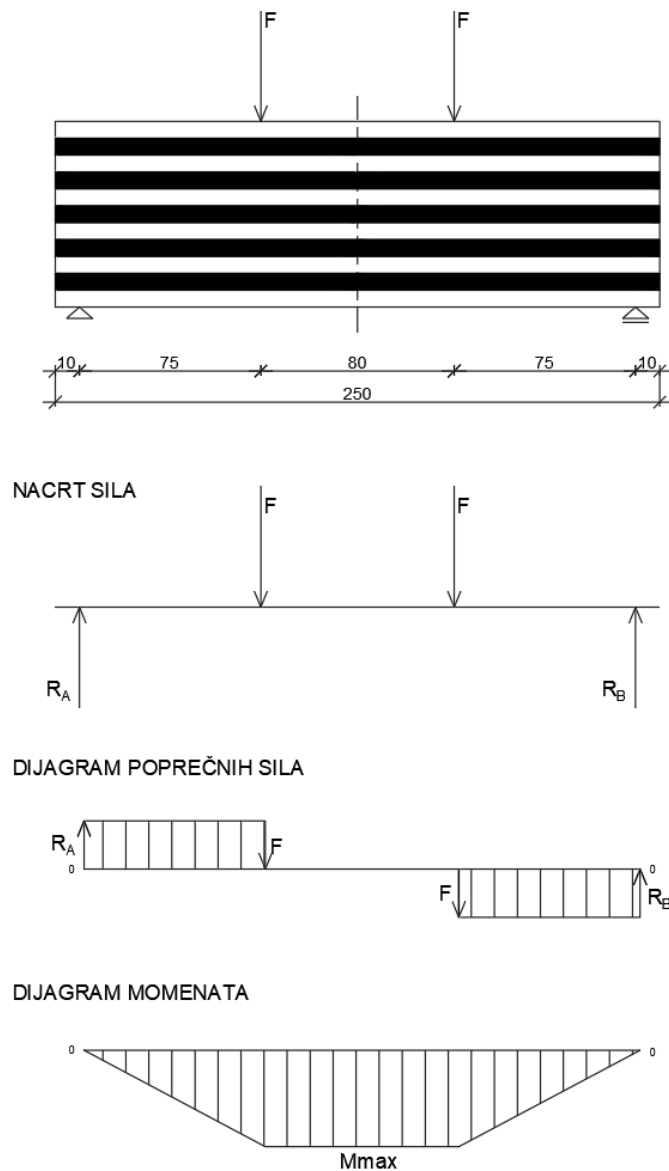
$$\sigma_{x,9} = \frac{M}{I_{y,r}} * Z_9$$

$$\sigma_{x,10} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * Z_{10}$$

$$\sigma_{x,11} = \frac{M}{I_{y,r}} * Z_{11} \quad (13)$$

Kako bi se dobile prave vrijednosti položaja neutralne osi y i naprezanja u svakom pojedinom presjeku u prethodni izračun potrebno je uvrstiti vrijednosti momenta M (M = 62250 Nmm) i Youngovog modula elastičnosti E<sub>1</sub> i E<sub>2</sub> (E<sub>1</sub> = 2500 MPa, E<sub>2</sub> = 55 MPa). Za prikaz proračuna koristit će se najveća izmjerena sila u toku eksperimenta, iako mjerenja nisu mjerodavna.

Moment M dobiven je sljedećim postupkom:



Slika 26: Određivanje maksimalnog momenta

$$F_{max} = 830 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F * 75 + F * 155 - R_B * 230 = 0$$

$$- 230 * R_B = - F * 75 - F * 155$$

$$230 * R_B = 830 * 75 + 830 * 155$$

$$R_B = 830 \text{ N}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$F * 75 + F * 155 - R_A * 230 = 0$$

$$- 230 * R_A = - F * 75 - F * 155$$

$$230 * R_A = 830 * 75 + 830 * 155$$

$$R_A = 830 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - F - F + R_B = 0$$

$$0 = 0$$

Nakon izračuna reakcija  $R_A$  i  $R_B$  u osloncima A i B, nacrtani su dijagrami vertikalnih sila i momenata te je iz toga iščitana vrijednost maksimalnog momenta  $M$  od 62250 N. Površine pojedinih presjeka:

$$A = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_{11} = 15 * 7 = 105 \text{ mm}^2$$

Udaljenosti pojedinih vlakana od neutralne osi pomoćnog koordinatnog sustava:

$$z_1 = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ mm}$$

$$z_2 = 7 + 3,5 = 10,5 \text{ mm}$$

$$z_3 = 2 * 7 + 3,5 = 17,5 \text{ mm}$$

$$z_4 = 3 * 7 + 3,5 = 24,5 \text{ mm}$$

$$z_5 = 4 * 7 + 3,5 = 31,5 \text{ mm}$$

$$z_6 = 5 * 7 + 3,5 = 38,5 \text{ mm}$$

$$z_7 = 6 * 7 + 3,5 = 45,5 \text{ mm}$$

$$z_8 = 7 * 7 + 3,5 = 52,5 \text{ mm}$$

$$z_9 = 8 * 7 + 3,5 = 59,5 \text{ mm}$$

$$z_{10} = 9 * 7 + 3,5 = 66,5 \text{ mm}$$

$$z_{11} = 10 * 7 + 3,5 = 73,5 \text{ mm}$$

Statički momenti površine:

$$S_{y,1} = A_1 * z_1 = 105 * 3,5 = 367,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,2} = A_2 * z_2 = 105 * 10,5 = 1102,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,3} = A_3 * z_3 = 105 * 17,5 = 1837,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,4} = A_4 * z_4 = 105 * 24,5 = 2572,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,5} = A_5 * z_5 = 105 * 31,5 = 3307,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,6} = A_6 * z_6 = 105 * 38,5 = 4042,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,7} = A_7 * z_7 = 105 * 45,5 = 4777,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,8} = A_8 * z_8 = 105 * 52,5 = 5512,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,9} = A_9 * z_9 = 105 * 59,5 = 6247,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,10} = A_{10} * z_{10} = 105 * 66,5 = 6982,50 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,11} = A_{11} * z_{11} = 105 * 73,5 = 7717,50 \text{ mm}^3$$

Položaj neutralne osi y:

$$z_0 = \frac{E_1(S_{y,1} + S_{y,3} + S_{y,5} + S_{y,7} + S_{y,9} + S_{y,11}) + E_2(S_{y,2} + S_{y,4} + S_{y,6} + S_{y,8} + S_{y,10})}{A * (6E_1 + 5E_2)}$$

$$z_0 = 38,50 \text{ mm}$$

Položaj neutralne osi nalazi se na polovici visine poprečnog presjeka, što je i očekivano s obzirom da je poprečni presjek simetričan.

Udaljenosti	pojedinih	vlakana	od	neutralne	osi:
		$z_1 = -38,5 \text{ mm}$			
		$z_2 = -31,5 \text{ mm}$			
		$z_3 = -24,5 \text{ mm}$			
		$z_4 = -17,5 \text{ mm}$			
		$z_5 = -10,5 \text{ mm}$			
		$z_6 = -3,5 \text{ mm}$			
		$z_7 = 3,5 \text{ mm}$			
		$z_8 = 10,5 \text{ mm}$			
		$z_9 = 17,5 \text{ mm}$			
		$z_{10} = 24,5 \text{ mm}$			
		$z_{11} = 31,5 \text{ mm}$			
		$z_{12} = 38,5 \text{ mm}$			

Momenti tromosti:

$$I_y = \frac{b * h^3}{12}$$

$$I_{y,1} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 31,5)^2 = 5573,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 24,5)^2 = 21008,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,3} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 17,5)^2 = 46733,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,4} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 10,5)^2 = 82748,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,5} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 3,5)^2 = 129053,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,6} = \frac{15 * 7^3}{12} = 428,75 \text{ mm}^4$$



$$I_{y,7} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 3,5)^2 = 129053,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,8} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 10,5)^2 = 82748,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,9} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 17,5)^2 = 46733,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,10} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 24,5)^2 = 21008,75 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,11} = \frac{15 * 7^3}{12} + 15 * 7 * (38,5 - 31,5)^2 = 5573,75 \text{ mm}^4$$

Naprezanja u pojedinim presjecima:

$$\sigma_{x,1} = \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_1$$

$$\sigma_{x,1} = -6,5252 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,2} = \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * Z_2$$

$$\sigma_{x,2} = -0,1175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,3} = -4,1523 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,4} = -0,0653 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,5} = -1,7796 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,6} = -0,0131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,7} = 0,0131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,8} = 1,7796 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,9} = 0,0653 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,10} = 4,1523 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,11} = 0,1175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,12} = 6,5252 \text{ MPa}$$

Metoda reduciranog poprečnog presjeka:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{55}{2500} = 0,022$$

Položaj neutralne osi y:

$$z_0 = \frac{S_{y,1} + nS_{y,2} + S_{y,3} + nS_{y,4} + S_{y,5} + nS_{y,6} + S_{y,7} + nS_{y,8} + S_{y,9} + nS_{y,10} + S_{y,11}}{A * (6 + 5n)}$$

$$z_0 = 38,52 \text{ mm}$$

Momenti tromosti:

$$\begin{aligned} I_{y,r} &= I_{y,1} + nI_{y,2} + I_{y,3} + nI_{y,4} + I_{y,5} + nI_{y,6} + I_{y,7} + nI_{y,8} + I_{y,9} + nI_{y,10} + I_{y,11} \\ &= 367297,26 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Naprezanja u pojedinim presjecima:

$$\sigma_{x,1} = \frac{M}{I_{y,r}} * z_1 = - 6,5252 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,2} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * z_2 = - 0,1175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,3} = \frac{M}{I_{y,r}} * z_3 = - 4,1523 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,4} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * z_4 = - 0,0653 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,5} = \frac{M}{I_{y,r}} * z_5 = - 1,7796 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,6} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * z_6 = - 0,0131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,7} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * z_7 = 0,0131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,8} = \frac{M}{I_{y,r}} * z_8 = 1,7796 \text{ MPa}$$

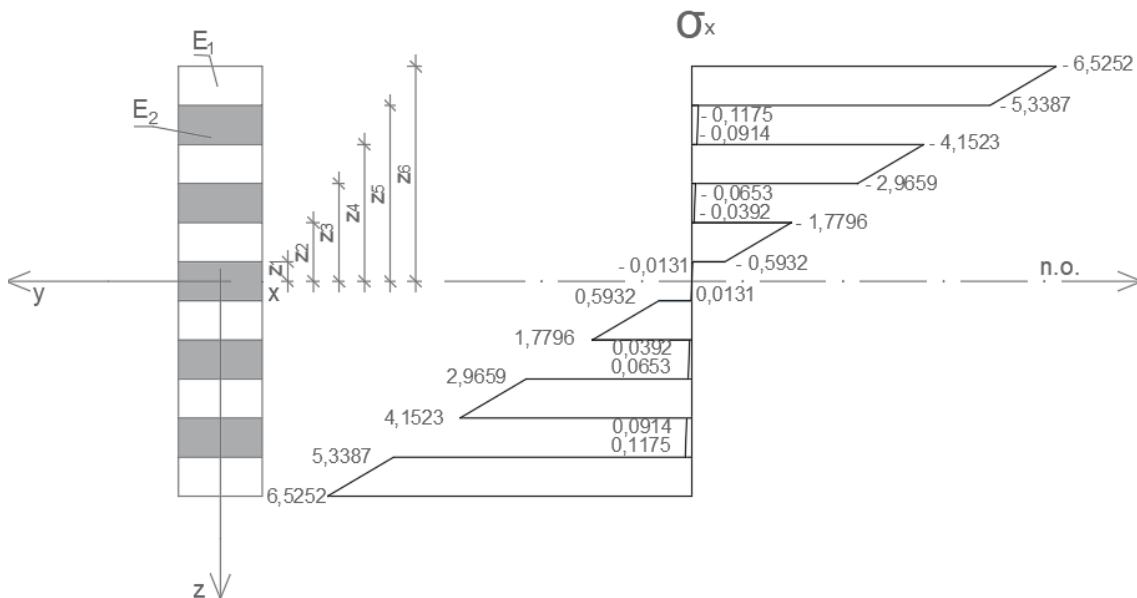
$$\sigma_{x,9} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * z_9 = 0,0653 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,10} = \frac{M}{I_{y,r}} * z_{10} = 4,1523 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,11} = n * \frac{M}{I_{y,r}} * z_{11} = 0,1175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,12} = \frac{M}{I_{y,r}} * z_{10} = 6,5252 \text{ MPa}$$

Vrijednosti dobivene primjenom teorije savijanja jednake su vrijednostima dobivenim primjenom metode reduciranog poprečnog presjeka.



Slika 27: Dijagram normalnih naprezanja

Normalna naprezanja u pojedinim presjecima:

$$\sigma_x^{gore} = \frac{E_1 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * z_n$$

$$\sigma_x^{dolje} = \frac{E_2 * M}{E_1 I_{y,1} + E_2 I_{y,2} + E_1 I_{y,3} + E_2 I_{y,4} + E_1 I_{y,5} + E_2 I_{y,6} + E_1 I_{y,7} + E_2 I_{y,8} + E_1 I_{y,9} + E_2 I_{y,10} + E_1 I_{y,11}} * z_n$$

$$\sigma_{x,1} = -6,5252 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,2}^{gore} = -5,3387 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,2}^{dolje} = -0,1175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,3}^{gore} = -4,1523 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,3}^{dolje} = -0,0914 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,4}^{gore} = -2,9659 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,4}^{dolje} = -0,0653 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,5}^{gore} = -1,7796 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,5}^{dolje} = -0,0392 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,6}^{gore} = -0,5932 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,6}^{dolje} = -0,0131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,7}^{gore} = 0,5932 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,7}^{dolje} = 0,0131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,8}^{gore} = 1,7796 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,8}^{dolje} = 0,0392 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,9}^{gore} = 2,9659 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,9}^{dolje} = 0,0653 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,10}^{gore} = 4,1523 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,10}^{dolje} = 0,0914 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,11}^{gore} = 5,3387 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,11}^{dolje} = 0,1175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,12} = -6,5252 \text{ MPa}$$

Iz proračuna normalnih naprežanja je vidljivo da mekši slojevi, koji imaju značajno manji modul elastičnosti od krućih slojeva, gotovo i nemaju nikakvu nosivost budući su

naprezanja u njima mnogo manja od onih koja se javljaju u krućim slojevima. Na svim mjestima promjene materijala u dijagramu su vidljivi skokovi normalnih naprezanja.

## 8. ZAKLJUČAK

Ovim radom ispitana je primjenjivost gredne teorije na tri prizmatična uslojena uzorka. U teorijskom dijelu je dokazano kako se doista pri nanošenju opterećenja na uzorak, uzdužna os savija po krivulji konstantne zakrivljenosti. Također, u središnjem dijelu uzorka, tj. u zoni čistog savijanja, krajnji poprečni presjeci pri nanesenom opterećenju ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os. U eksperimentalnom dijelu nije uspješno provedeno ispitivanje te nije dokazano stiskanje uzorka u zoni čistog savijanja radi problema na koje se naišlo. Prilikom ispitivanja došlo je do klizanja uzorka s oslonaca i izvijanja uzorka izvan ravnine te ovim ispitivanjem nisu dobivene maksimalne vrijednosti sila na preši i maksimalne vrijednosti deformacija na tenzometrima. Kako bi se u budućim ispitivanjima to izbjeglo predlaže se upotreba uzoraka većih dimenzija, odnosno veće širine te veće nalijeganje uzorka na oslonac prilikom postavljanja na prešu. Na kraju je prikazan proračun neutralne osi i normalnih naprezanja kompozitnog nosača.

## STRUČNA LITERATURA

Šimić, Vice, *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

Šimić, Vice, *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

<https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=69979>, 28.08.2021.