

# Analiza armiranobetonske kupole iz 1932. godine

---

**Grgić, Ivan**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:693929>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-21**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Ivan Grgić**

**Analiza armiranobetonske kupole iz 1932. godine**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2022.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Diplomski sveučilišni studij  
Konstrukcije  
Betonske i zidane konstrukcije 1**

**Ivan Grgić  
JMBAG: 0114029487**

**Analiza armiranobetonske kupole iz 1932. godine**

**Diplomski rad**

**Rijeka, studeni 2022.**

## **IZJAVA**

Diplomski rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Ivan Grgić

U Rijeci, 6.11.2022.

# **IZJAVA**

Diplomski rad izrađen je u sklopu znanstvenog projekta:

**Poboljšanje proračunskih modela za ocjenu stanja građevinskih konstrukcija  
(Improvement of Design Models for Condition Assessment of Structures)**

Voditelj projekta: prof.dr.sc. Ivana Štimac Grandić

Šifra projekta: uniri-tehnic-18-127

Financijer projekta: Sveučilište u Rijeci

Pravna nadležnost: Republika Hrvatska

U Rijeci, 2. studenog 2022.

Mentor:

doc.dr.sc. Paulo Šćulac

## SAŽETAK

U ovome radu napravljena je analiza nosivosti armiranobetonske kupole s vlačnim prstenom promjera 26,6 metara. Kupola je izgrađena u Buzetu u sklopu Istarskog vodovoda te je i danas u funkciji. Opisan je postupak izgradnje kupole, koji je detaljno dokumentiran arhivskim fotografijama. Izrađena su tri različita numerička modela. U svim modelima ljuska je modelirana pločastim konačnim elementima, dok se modeli razlikuju u načinu modeliranja vlačnog prstena. U Modelu 1 i Modelu 2 vlačni prsten je modeliran grednim konačnim elementima, a modeli se razlikuju u načinu povezivanja kupole i prstena. U Modelu 3 prsten je modeliran prostornim konačnim elementima. Rezultati su uspoređeni s ručnim proračunom prema membranskoj teoriji za ljuske uzimajući u obzir utjecaj rubnih uvjeta (postojanje vlačnog pojasa), koji su dobiveni iz uvjeta kompatibilnosti deformacija kupole i rubnog prstena. Provedena je provjera nosivosti na vertikalna djelovanja u trajnoj proračunskoj situaciji.

**Ključne riječi:** armiranobetonska ljuska, kupola, vlačni prsten, membranska teorija ljuski

## ABSTRACT

In this final-year thesis, an analysis of the bearing capacity of a reinforced concrete dome with an edge ring beam with a diameter of 26,6 meters was made. The dome was built in 1932 in Buzet as part of the Istrian water supply system and is still in operation today. The construction process of the dome has been described and documented in detail with archival photographs. Three different numerical models were made. In all models, the shell is modelled with plate finite elements, while the models differ in the way the tensile ring is modelled. In Model 1 and Model 2, the tensile ring is modelled with beam finite elements, and the models differ in the way the dome and the ring are connected. In Model 3, the ring is modelled with spatial finite elements. The results were compared with the manual calculation according to the membrane theory for shells taking into account the influence of the boundary conditions (existence of the edge ring beam), which were obtained from the compatibility conditions of the deformations of the dome and the edge ring. Structural bearing capacity verification was carried out for vertical actions in the persistent design situation.

**Key words:** reinforced concrete shell, dome, edge ring beam, membrane theory of shells

# SADRŽAJ

1.	UVOD .....	1
2.	OPĆENITO O KUPOLAMA.....	3
2.1.	Djelovanja na kupolu .....	5
2.2.	Membranska teorija ljuske .....	7
2.2.1.	<i>Slučaj vlastite težine</i> .....	12
2.2.2.	<i>Slučaj opterećenja snijegom</i> .....	15
2.2.3.	<i>Sila u vlačnom prstenu</i> .....	17
2.3.	Utjecaj rubnih uvjeta (uključenje momenta savijanja) .....	19
2.4.	Armiranje kupola .....	26
3.	ARMIRANOBETONSKA KUPOLA PROMJERA 26,6 m .....	27
3.1.	Tehnički opis .....	27
3.2.	Izgradnja kupole .....	30
3.2.1.	<i>Armiranobetonska kupola prema projektu Gina Veronesea</i> .....	30
3.2.2.	<i>Proces izgradnje kupole</i> .....	36
3.3.	<i>Armatura kupole</i> .....	43
4.	NUMERIČKI PRORAČUN KUPOLE.....	48
4.1.	Model 0 .....	50
4.2.	Numerički modeli u STAAD.Pro programskom paket .....	55
4.2.1.	<i>Model 1</i> .....	55
4.2.2.	<i>Model 2</i> .....	63
4.2.3.	<i>Model 3</i> .....	67
4.3.	PROVJERA GRANIČNOG STANJA NOSIVOSTI .....	73
5.	ZAKLJUČAK.....	79
6.	LITERATURA.....	81
7.	PRILOZI.....	82

## POPIS SLIKA

Slika 1: Glatka kupola [1] .....	3
Slika 2: Rebrasta kupola [1] .....	4
Slika 3: Kupola podijeljena na sektore [2] .....	5
Slika 4: Paralele i meridijani na kupoli [2].....	6
Slika 5: Prikaz kupole s paralelnim i meridijalnim krivuljama [3] .....	7
Slika 6: Infinitesimalni dio središnje ravnine ljuske omeđen s dva bliska meridijana i dvije bliske paralelne kružnice [3].....	8
Slika 7: Unutarnje sile u elementu ljuske [3] .....	8
Slika 8: Meridijalni i prstenasti dijelovi kroz ljusku: (a) i (b) meridijalni dijelovi, (c) prstenasti dijelovi [3] .....	9
Slika 9: Dio sferne ljuske s rezultantom osnosimetričnog opterećenja s reakcijskim membranskim silama [3].....	12
Slika 10: Unutarnje sile u prstenu [8].....	14
Slika 11: Kupola opterećena snijegom .....	15
Slika 12: Unutarnje sile od opterećenja snijegom / promjenjivim opterećenjem [4] .....	16
Slika 13: Vlačna sila u prstenu [8] .....	17
Slika 14: Vertikalna i horizontalna komponenta meridijalne sile $N_\phi$ u prstenu .....	17
Slika 15: Membransko ponašanje kupola uslijed osnosimetričnog opterećenja [3].....	18
Slika 16: Rubne sile u osnosimetričnoj ljusci [3].....	19
Slika 17: Unutarnje sile i osnosimetrične deformacije ljuske zbog rubnih uvjeta [3].....	20
Slika 18: Kupola s vlačnim prstenom na donjem rubu [3].....	20
Slika 19: Interakcija između ljuske i vlačnog prstena [3] .....	21
Slika 20: Metoda sile kod analize ljuske sa prstenom [3] .....	21
Slika 21: Rastavljanje sila u kupoli (a) i prstenu (b) .....	22
Slika 22: Vlačni prsten pod utjecajem radijalnom silom i torzijom [3] .....	23
Slika 23: Sile savijanja kod spoja kupole i vlačnog prstena [3] .....	23
Slika 24: Ekscentrično opterećena membranska sila na prsten [3] .....	24
Slika 25: Plan armature kupole, detalj armiranje rubnog prstena i spoja prsten - kupola [3].....	26
Slika 26: Nacrt kupole inženjera Pietra Vacchellija [6] .....	27
Slika 27: Tlocrt kaptaze izvora – presjek ispod vlačnog prstena [4].....	28
Slika 28: Današnji izgled kupole [5] .....	29
Slika 29: Unutrašnjost kupole [5].....	29
Slika 30: Istarski vodovod - projekt Gina Veronesea [4] .....	30
Slika 31: Projekt kupole Gina Veronesea – poprečni presjek [4].....	31
Slika 32: Tlocrt kupole Gina Veronesea [4].....	32
Slika 33: Kupola Gina Veronesea – presjek kroz rebro (meridijan) [4].....	32
Slika 34: Poprečni presjek rebra u podnožju [4] .....	33
Slika 35: Poprečni presjek grede A uzduž paralela (na osloncu) [4].....	33
Slika 36: Poprečni presjek grede A uzduž paralela (u polju) [4].....	34
Slika 37: Tlačni prsten uz svjetlarnik [4] .....	34
Slika 38: Nacrt svjetlarnika kaptacijskog objekta izvora Sv. Ivan kod Buzeta [4] .....	35
Slika 39: Iskopi za temelje kupole [6].....	36
Slika 40: Iskopi za temelje kupole [6].....	36
Slika 41: Betoniranje temelja kupole [6].....	37
Slika 42: Postavljanje oplata za obodne zidove kupole [6].....	37
Slika 43: Postavljena oplata zida kupole [6] .....	38



Slika 44: Zid kupole [5].....	38
Slika 45: Postavljanje oplata za kupolu [5] .....	39
Slika 46: Postavljanje oplata za kupolu [6] .....	39
Slika 47: Postavljanje oplata za kupolu [7] .....	40
Slika 48: Postavljanje oplata za kupolu [6] .....	40
Slika 49: Postavljanje armature kupole [6] .....	41
Slika 50: Betoniranje kupole [6] .....	41
Slika 51: Završena kupola s konačnim slojem zemlje [6] .....	42
Slika 52: Armatura kupole [6] .....	43
Slika 53: Armatura sferne kupole [4] .....	44
Slika 54: Jahači između gornje i donje armature [6] .....	45
Slika 55: Spone između armature (svaka četvrta šipka duž paralele povezana sa $\phi 3$ [4].....	45
Slika 56: Nastavljanje armature [6].....	46
Slika 57: Mehanička spojnica armature u prstenu [4] .....	46
Slika 58: Mehanička spojnica armature u prstenu [6] .....	46
Slika 59: Armatura kupole i vlačnog prstena [4].....	47
Slika 60: Poprečni presjek kupole .....	48
Slika 61: Odsječak dijela kupole i prstena u Modelu 1 .....	55
Slika 62: Model 1 - kupola s 48 konačnih elemenata u prstenu .....	56
Slika 63: Model 1 - kupola s 24 konačnih elemenata u prstenu .....	56
Slika 64: Model 1 - kupola s 12 konačnih elemenata u prstenu .....	56
Slika 65: Model 1 - kupola sa 96 konačnih elemenata u prstenu .....	57
Slika 66: 3D prikaz modela 1 s 12, 24, 48 i 96 konačnih elemenata u prstenu .....	57
Slika 67: Model 1 - Naprezanja u kupoli u prstenastom smjeru .....	58
Slika 68: Model 1 - Naprezanja u kupoli u meridijalnom smjeru .....	58
Slika 69: Model 1 - Momenti savijanja u meridijalnom smjeru .....	59
Slika 70: Sile u vlačnom prstenu .....	59
Slika 71: Usporedba prstenaste i meridijalne sile na dnu kupole povećanjem broja konačnih pločastih elemenata u prstenu .....	60
Slika 72: Model 1 - naprezanja u kupoli u prstenastom smjeru (kombinacija opterećenja).....	61
Slika 73: Model 1 - naprezanja u kupoli u meridijalnom smjeru (kombinacija opterećenja) .....	61
Slika 74: Model 1 - momenti savijanja u meridijalnom smjeru (kombinacija opterećenja).....	62
Slika 75: Model 1 - vlačna sila u prstenu (kombinacija opterećenja), $F_x = 1398,17$ kN .....	62
Slika 76: Odsječak kupole i vlačnog prstena u modelu 2 .....	63
Slika 77: Model 2 - kupola sa 48 konačnih elemenata u prstenu .....	63
Slika 78: 3D prikaz modela 2 .....	64
Slika 79: Model 2 – naprezanja u prstenastom smjeru .....	64
Slika 80: Model 2 – naprezanja u meridijalnom smjeru.....	65
Slika 81: Model 2 - Momenti savijanja u meridijalnom smjeru.....	65
Slika 82: Model 2 - vlačna sila u prstenu .....	66
Slika 83: Odsječak kupole i vlačnog prstena u modelu 3 .....	67
Slika 84: Model 3 - kupola s 48 konačnih elemenata u prstenu .....	68
Slika 85: 3D prikaz modela 3 .....	68
Slika 86: Model 3 - naprezanja u vlačnom prstenu .....	69
Slika 87: Model 3 - naprezanja u jednom odsječku vlačnog prstena .....	69
Slika 88: Model 3 - naprezanja u prstenastom smjeru.....	70
Slika 89: Model 3 - naprezanja u meridijalnom smjeru .....	70
Slika 90: Model 3 - momenti savijanja u meridijalnom smjeru .....	71

Slika 91: Poprečni presjek ploče .....	75
Slika 92: Poprečni presjek ploče .....	76

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Koeficijenti fleksibilnosti [3] .....	25
Tablica 2: Koeficijenti fleksibilnosti za kupolu i prsten.....	50
Tablica 3: Konačni koeficijenti .....	51
Tablica 4: Pomoćne numeričke vrijednosti .....	51
Tablica 5: Momenti savijanja i sile u kupoli .....	52
Tablica 6: Moment savijanja i sile u kupoli prema membranskoj teoriji .....	52
Tablica 7: Ukupni moment savijanja i sile u kupoli.....	53
Tablica 8: Moment savijanja i sile u kupoli za proračunsku kombinaciju djelovanja.....	54
Tablica 9: Ukupne sile u vlačnom prstenu i sile u kupoli .....	60
Tablica 10: Usporedba vlačne sile u prstenu za modele 0, 1, 2 i 3.....	72
Tablica 11: Ukupne vlačne sile u prstenu.....	73
Tablica 12: Provjera tlačnih naprezanja u kupoli za model 1, 2 i 3 (kombinacija opterećenja).....	75

## 1. UVOD

Kupole su vrsta konstrukcije koje spadaju u tankostijene krovne konstrukcije. Za njih se može reći da su to ljuske dvojne zakrivljenosti koje karakterizira velika krutost. One su sastavljene od meridijalnih i paralelnih rebara. U ovom diplomskom radu biti će razmatrana armiranobetonska kupola promjera 26,6 m izgrađena 1932. godine kao krovna konstrukcija kaptaže izvora u Buzetu, koja je i danas u funkciji. Na samu nosivu konstrukciju postavljen je nadsloj zemlje.

U drugom poglavlju rada opisane su osnovne karakteristike kupola. Na samom početku poglavlja navedene su prednosti kupola te djelovanja na nju. Nakon toga prikazana je membranska teorija ljuski. Navedene su pretpostavke na kojima se membranska teorija temelji i izvedeni su izrazi za meridijalne i prstenaste sile u kupoli. Nakon osnovnog objašnjenja membranske teorije ljuske, izvedeni su izrazi u slučaju opterećenja vlastitom težinom te snijegom i to u tjemenu kupole i na dnu kupole. Zatim je razmotren utjecaj rubnih uvjeta, odnosno uključenje momenata savijanja koji se javljaju neposredno uz oslonac. Obrađena je analiza ljuske s prstenom te su izvedeni izrazi za unutarnje sile metodom sila iz uvjeta kompatibilnosti deformacija kupole i rubnog prstena.

U trećem poglavlju prikazana je armiranobetonska kupola izgrađena u sklopu Istarskog vodovoda 1932. godine. Podaci o konstrukciji, izgradnji te količini i rasporedu armature istraženi su u Arhivu istarskog vodovoda. Također, prikazan je i izvorni projekt konstrukcije kupole, koji nije izveden zbog prevelikih troškova gradnje. Nakon toga je opisan proces izgradnje kupole, koji je detaljno dokumentiran fotografijama snimljenim tokom gradnje. Slijedi prikaz plana armiranja kupole, uz pojašnjenje svih pozicija (šipke uzduž meridijana i paralela, armatura vlačnog prstena, mehaničke spojnice armature...).

Na temelju prikupljenih podataka izrađen je numerički model konstrukcije u programskom paketu STAAD.Pro i provedena je provjera na vertikalna djelovanja u trajnoj proračunskoj situaciji, što je prikazano u četvrtom poglavlju. Zbog nemogućnosti određivanja svojstva materijala in-situ, usvojene su vrijednosti koje odgovaraju vrijednostima uobičajenim za to doba gradnje. Izrađena su tri različita numerička modela. U svim modelima ljuska je modelirana pločastim konačnim elementima, dok se modeli razlikuju u načinu modeliranja vlačnog prstena. U Modelu 1 i Modelu 2 vlačni prsten je

modeliran grednim konačnim elementima, a modeli se razlikuju u načinu povezivanja kupole i prstena. U Modelu 3 prsten je modeliran prostornim konačnim elementima. Prikazani su dobiveni rezultati za meridijalne i prstenaste sile, vlačnu silu u prstenu te momente savijanja u kupoli neposredno uz oslonac. Rezultati su također uspoređeni s ručnim proračunom prema membranskoj teoriji za ljuske uzimajući u obzir utjecaj rubnih uvjeta (postojanje vlačnog pojasa) prema izrazima prikazanim u drugom poglavlju. Zatim je provjereno granično stanje nosivosti, odnosno armatura u vlačnom prstenu, tlačna naprezanja u kupoli, armatura za savijanje pri dnu kupole te armatura za preuzimanje vlačnog naprezanja u kupoli. Naposljetku je prokomentirana i stabilnost kupole.

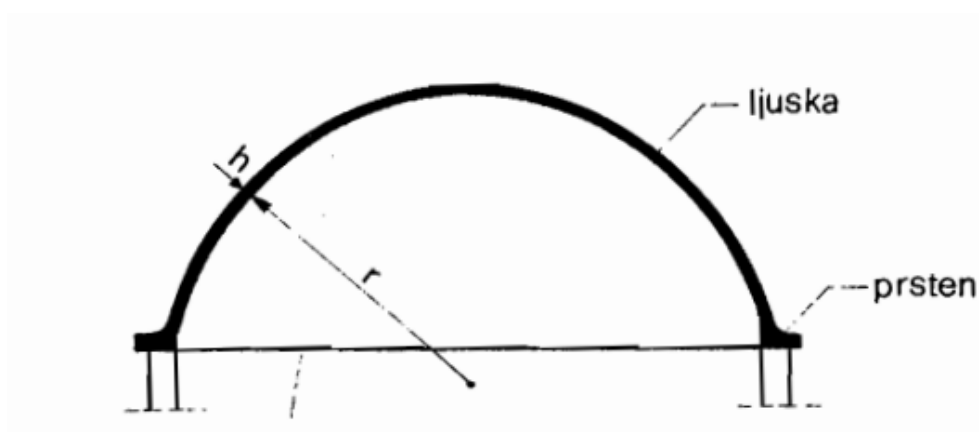
Zaključak je dan u petom poglavlju.

## 2. OPĆENITO O KUPOLAMA

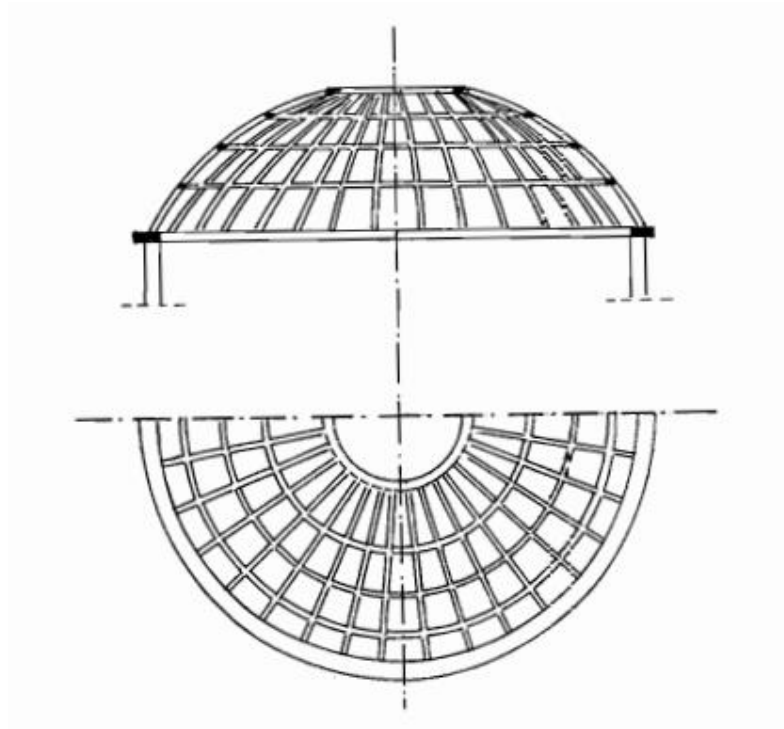
Kod krovova gdje su potrebni veći rasponi, kao npr. kod hala, dvorana, stadiona itd., vrlo se često koriste tankostjene krovne konstrukcije. Djelovanje ovakvih konstrukcija omogućuje smanjenje vlastite težine. Kod takvih konstrukcija, naprezanja se mogu rasprostirati preko čitave površine te sav materijal može sudjelovati u nosivosti [1]. Tankostjene krovne konstrukcije se tako dijele na 4 skupine:

- 1) bačvaste ili cilindrične ljuske (duge i kratke)
- 2) ljuske u obliku čunja
- 3) ljuske dvojnje zakrivljenosti (kupole, plitke ljuske, konoidne ljuske)
- 4) naborane konstrukcije (šatori, složence)

Kupole spadaju u ljuske dvojnje zakrivljenosti. Za njih se može reći da su jedan od najpovoljnijih nosivih sustava armiranog betona. Kupole imaju povoljnu prostornu nosivost pa iz tog razloga imaju i manju debljinu (upravo ih toga razloga i jesu pogodne za velike raspone). Armiranobetonske kupole mogu se podijeliti na glatke i rebraste. Glatke (Slika 1) mogu nastati rotiranjem krivulje (kružnog, eliptičnog ili paraboličnog oblika) oko vertikalne osi kroz tjeme (direktrisu). Ovakve kupole su relativno jednostavne za izvedbu i ekonomične. Debljina ljuske može biti od 8 do 14 cm. S druge strane postoje rebraste kupole (Slika 2). Rebraste kupole nisu jednako pogodne kao glatke. One se sastoje od meridijalnih i prstenastih rebara koji su armirani prema silama koje djeluju i prema načinu izvedbe radova. Rebra se mogu monolitno vezati tankim ljuskama. Osim monolitno izvedenih kupola, postoji veći broj montažnih ili polumontažnih kupola [1].



Slika 1: Glatka kupola [1]



Slika 2: Rebrasta kupola [1]

Najznačajnije prednosti ljuski u usporedbi s okvirima i pločama [3] su:

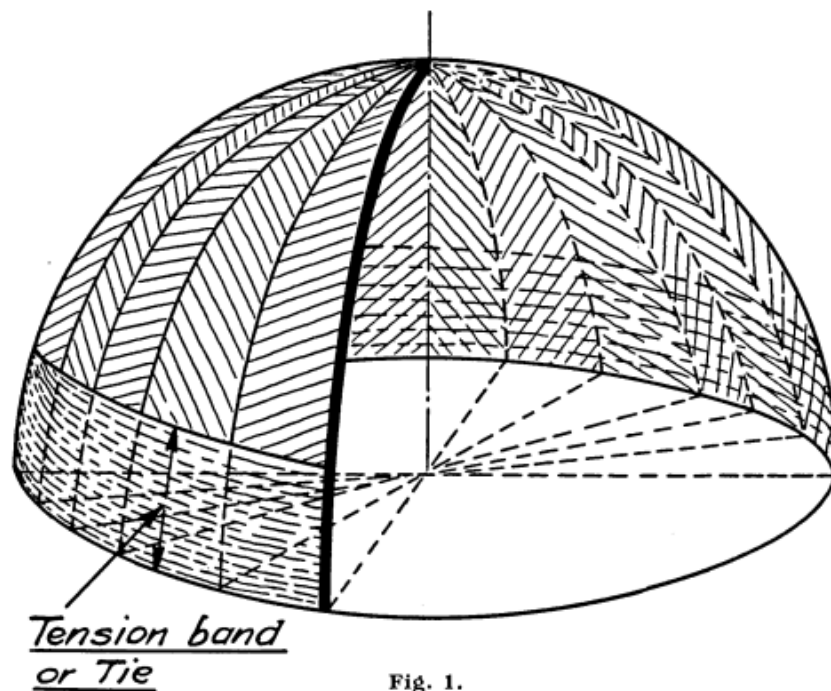
- učinkovitost prenošenja opterećenja
- velik odnos čvrstoće i težine ljuske
- mali omjer debljine i raspona / radijusa zakrivljenosti
- velika krutost
- mogućnost premošćivanja velikih raspona.

## 2.1. Djelovanja na kupolu

Uz vlastitu težinu, na kupolu mogu djelovati i sljedeća opterećenja:

- težina obloge / pokrova: žbuka, pločice, asfalta, zemljani nadsloj,...
- jednoliko raspodijeljeno opterećenje (simetrično ili nesimetrično)
- koncentrirano opterećenje (najčešće u tjemenu)
- snijeg
- vjetar (obično nesimetrično)
- potres
- opterećenja uslijed promjene temperature.

Kupolasta ljuska može se podijeliti na nekoliko dijelova, sektora, pomoću spojeva koji se međusobno spajaju u tjemenu (Slika 3). U tom slučaju kupola ostaje u ravnoteži zahvaljujući gornjem dijelu klinasto oblikovanih strana svakog sektora koji pritišću jedan drugoga. Vrh svakoga sektora "pada" prema unutra i podržava ga jednaka i suprotna bočna reakcija suprotnog sektora. Također, kako bi se održala stabilnost, sektori moraju biti povezani obodnom trakom u blizini podnožja kao što se može vidjeti na slici 3 [2]. Bočne reakcije koje se nalaze u blizini tjemena su u tlaku dok su na osloncu u vlakcu.

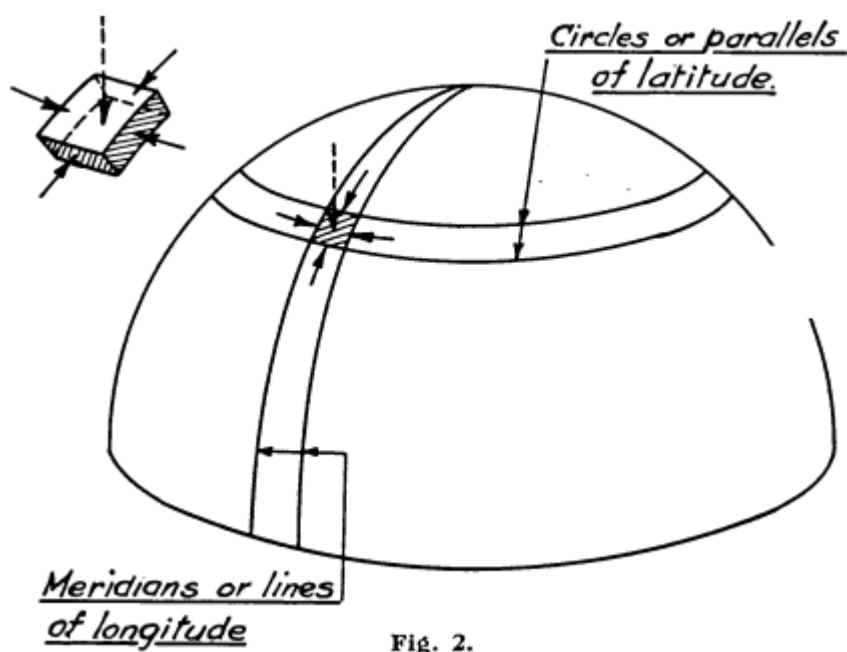


Slika 3: Kupola podijeljena na sektore [2]



Potrebno je da je čitava kupola simetrična oko vertikalne osi zato što inače te sile ne bi bile jednake i ne bi se mogle međusobno neutralizirati u procesu održavanja ravnoteže [2].

Suprotno na horizontalne kružne sile, postoje tlačne sile koje djeluju okomito na horizontalne (Slika 4). Na bilo kojem dijelu, te uzdužne sile proporcionalne su težini segmenta kupole i bilo kojem opterećenju koji djeluje iznad te razine. U tome slučaju, uzdužno naprezanje maksimalno je na osloncu. Sile u dva smjera zakrivljenosti održavaju ljusku „zajedno“ pod uvjetom da će materijal od kojeg je izrađena izdržati izazvani tlak te da je materijal u stanju odupirati se vlačnim naprezanjima kao što je u slučaju armiranog betona [2].



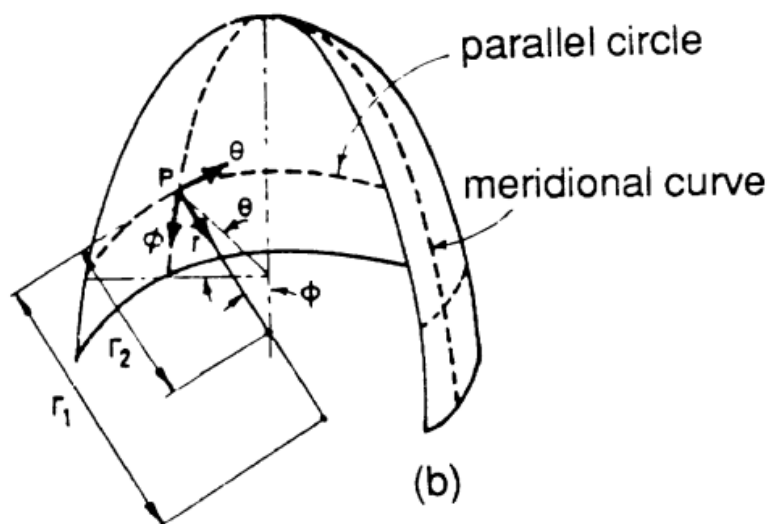
Slika 4: Paralele i meridijani na kupoli [2]

Naprezanja uslijed promjene temperature i skupljanja se uzimaju u obzir dodavanjem armature u oba smjera bez obzira nalazi li se ljuska u bilo kojem dijelu u tlaku ili u vlaku [2].

## 2.2. Membranska teorija ljuske

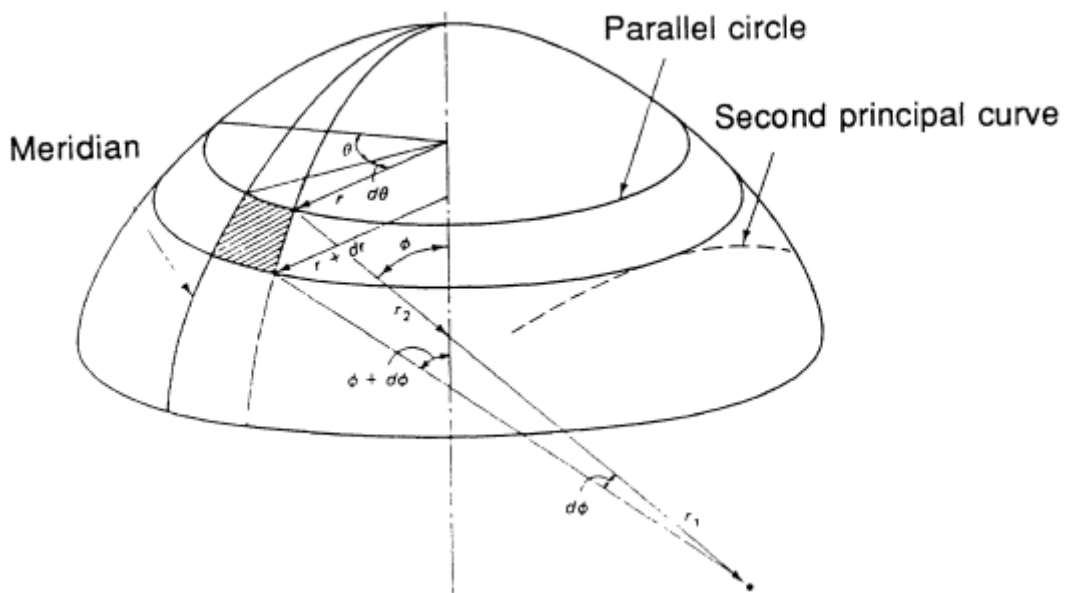
U nastavku će biti prikazane osnovne jednačbe membranske teorije za kupole (ljuske dvostruke zakrivljenosti), koje se temelje na sljedećim pretpostavkama:

- 1) pretpostavlja se da je ljuska tanka, tj. debljina ljuske je mala u usporedbi s najmanjim radijusom zakrivljenosti
- 2) poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na deformiranu središnju ravninu ljuske. Ova pretpostavka ekvivalentna je zanemarivanju posmičnih deformacija
- 3) normalna naprezanja okomita na središnju ravninu ljuske su tako male u usporedbi s naprezanjima koja djeluju u ravnini ljuske, te se mogu zanemariti
- 4) pomaci i deformacije su tako mali da se njihovi članovi višeg reda mogu zanemariti.

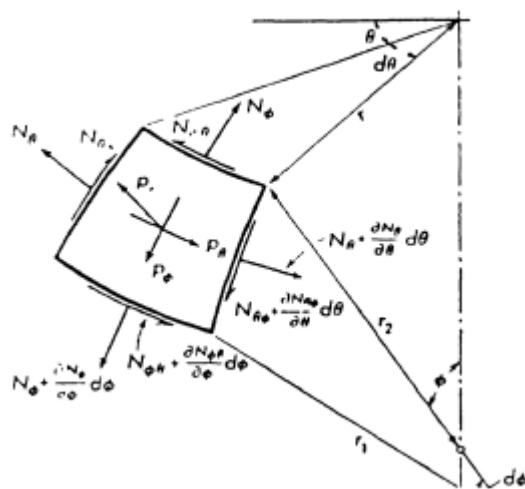


Slika 5: Prikaz kupole s paralelnim i meridijalnim krivuljama [3]

Promatra se dio ljuske omeđen sa dva bliska meridijana i paralele (slika 5 i 6). Položaj meridijana definiran je kutom  $\theta$  dok je položaj paralela definiran kutom  $\phi$ . Radijus zakrivljenosti meridijana označen je s  $r_1$ , dok je radijus paralela  $r$ , što predstavlja projekciju drugog glavnog radijusa zakrivljenosti  $r_2$ . Zbog rotacijske simetrije centar zakrivljenosti  $r_2$  uvijek se nalazi na direktrisi. S druge strane, centar zakrivljenosti  $r_1$  ne mora se nužno nalaziti na direktrisi. Kroz svaku točku P, koja se nalazi na središnjoj ravnini ljuske, mogu se postaviti dvije ravnine: meridijalnu ravninu (koja sadrži direktrisu) i ravninu paralela koja je okomita na direktrisu. Unutarnje sile prikazane su na slici 7.

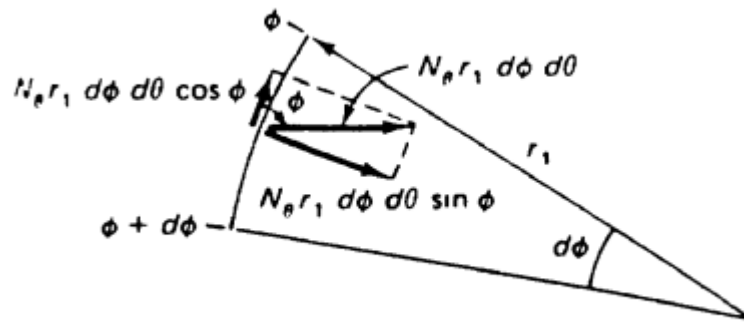


Slika 6: Infinitesimalni dio središnje ravnine ljuske omeđen s dva bliska meridijana i dvije bliske paralelne kružnice [3]

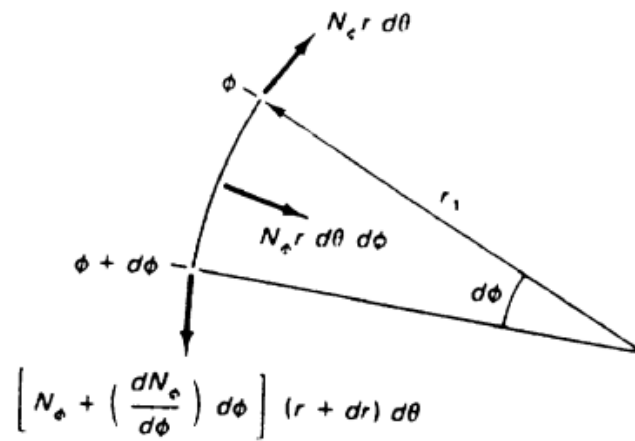


Slika 7: Unutarnje sile u elementu ljuske [3]

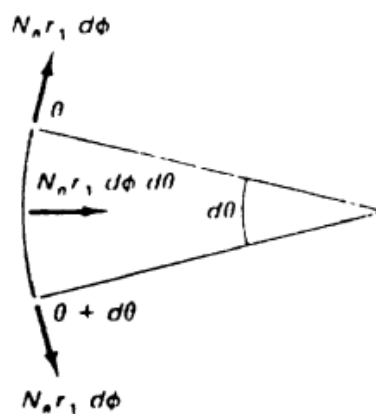
Budući da je ljuska dvostruke zakrivljenosti, membranske sile imaju projekcije u sva tri promatrana smjera:



(a)



(b)



(c)

Slika 8: Meridijalni i prstenasti dijelovi kroz ljusku: (a) i (b) meridijalni dijelovi, (c) prstenasti dijelovi [3]

U nastavku su korištene sljedeće oznake:

$N_\varphi$ - meridijalna sila na jedinicu duljine prstena ( $N_\varphi = \sigma_1 * h$ )

$N_\theta$ - horizontalna prstenasta sila na jedinicu duljine meridijana ( $N_\theta = \sigma_2 * h$ )

$N_{\varphi\theta}, N_{\theta\varphi}$  – posmična sila na jedinicu duljine

$P_r$ – vanjsko opterećenje u smjeru r

$P_\varphi$ – vanjsko opterećenje u smjeru  $\phi$

$P_\theta$ – vanjsko opterećenje u smjeru  $\theta$

h – debljina ljsuke

r – radijus paralele (prstena) u horizontalnoj ravnini  $r = r_2 \cdot \sin \varphi$

#### JEDNADŽBE RAVNOTEŽE

- U smjeru meridijana  $\sum F_\varphi = 0$

$$N_\varphi \cdot r \cdot d\theta - \left( N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \left( r + \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta - P_\varphi \cdot (r \cdot d\theta \cdot r_1 \cdot d\varphi) + N_\theta \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \cos \varphi + N_{\theta\varphi} \cdot r_1 \cdot d\varphi - \left( N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \cdot d\theta \right) \cdot r_1 \cdot d\varphi = 0 \quad (1)$$

Sređivanjem izraza i zanemarivanjem članova višeg reda dobiva se:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (r \cdot N_\varphi) \cdot d\varphi \cdot d\theta - N_\theta \cdot r_1 \cdot \cos \varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \cdot d\theta \cdot r_1 \cdot d\varphi + P_\varphi \cdot r \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0 /: (d\varphi \cdot d\theta) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (r \cdot N_\varphi) - N_\theta \cdot r_1 \cdot \cos \varphi + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \cdot r_1 + P_\varphi \cdot r \cdot r_1 = 0 \quad (3)$$

- U smjeru paralela  $\sum F_\theta = 0$

$$N_\theta \cdot r_1 \cdot d\varphi - \left( N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \cdot (r_1 \cdot d\varphi) - P_\theta \cdot (r \cdot d\theta \cdot r_1 \cdot d\varphi) - N_{\theta\varphi} \cdot r_1 \cdot \cos \varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi + N_{\varphi\theta} \cdot r \cdot d\theta - \left( N_{\varphi\theta} + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \cdot \left( r + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \cdot d\theta = 0 \quad (4)$$

Sređivanjem izraza i zanemarivanjem članova višeg reda dobiva se:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (r \cdot N_{\varphi\theta}) + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \cdot r_1 + N_{\theta\varphi} \cdot r_1 \cdot \cos \varphi + P_{\theta} \cdot r \cdot r_1 = 0 \quad (5)$$

- U smjeru r

$$N_{\varphi} \cdot r \cdot d\theta \cdot d\varphi + N_{\theta} \cdot r_1 \cdot \sin \varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi - P_r \cdot r \cdot r_1 \cdot d\varphi \cdot d\theta = 0 \quad (6)$$

Sređivanjem izraza dobiva se:

$$N_{\varphi} \cdot r + N_{\theta} \cdot r_1 \cdot \sin \varphi - P_r \cdot r \cdot r_1 = 0 / : r \cdot r_1 \quad (7)$$

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = P_r \quad (8)$$

Može se primijetiti kako se meridijalna i prstenasta sila  $N_{\varphi}$  i  $N_{\theta}$  pojavljuju u sve tri jednadžbe. To bi značilo da je dvostruka zakrivljena ljuska složena i učinkovita konstrukcija: sve tri sile  $N_{\varphi}$ ,  $N_{\theta}$  i  $N_{\varphi\theta}$  doprinose nosivosti opterećenja u bilo kojem smjeru. Međuprostorno djelovanje unutarnjih sila je pokazatelj učinkovitog ponašanja ljuski dvostruke zakrivljenosti. [3]

## SLUČAJ OSNOSIMETRIČNOG OPTEREĆENJA

U slučaju opterećenja, kao što je vlastita težina ili tlak tekućine, geometrijski cjelovite ljuske revolucije ponašaju se osnosimetrično. Osnosimetrično ponašanje je nezavisno o varijabli  $\theta$ . Opterećenje, unutarnje sile i deformacije mijenjaju se samo u smjeru  $\varphi$ .

U slučaju osnosimetričnog opterećenja ostaju samo sljedeće dvije jednadžbe:

$$\frac{d}{d\varphi} (r \cdot N_{\varphi}) - r_1 \cdot N_{\theta} \cdot \cos \varphi = -P_{\varphi} \cdot r \cdot r_1 \quad (9)$$

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = P_r \quad (10)$$

Treća jednačba je razdvojena od ostale dvije:

$$\frac{d}{d\varphi} \cdot (r \cdot N_{\varphi\theta}) + r_1 \cdot N_{\theta\varphi} \cdot \cos \varphi = -P_{\theta} \cdot r \cdot r_1 \quad (11)$$

Budući je  $P_{\theta} = 0$ , posljednja (već razdvojena) jednačba bi bila podjednako zadovoljena i tada se dobiva  $N_{\varphi\theta} = 0$ , tj. u slučaju osnosimetričnog opterećenja preostaju samo meridijalne i prstenaste sile.

Na primjeru sferne kupole vrijedi:

$$r_1 = r_2 = R \quad (12)$$

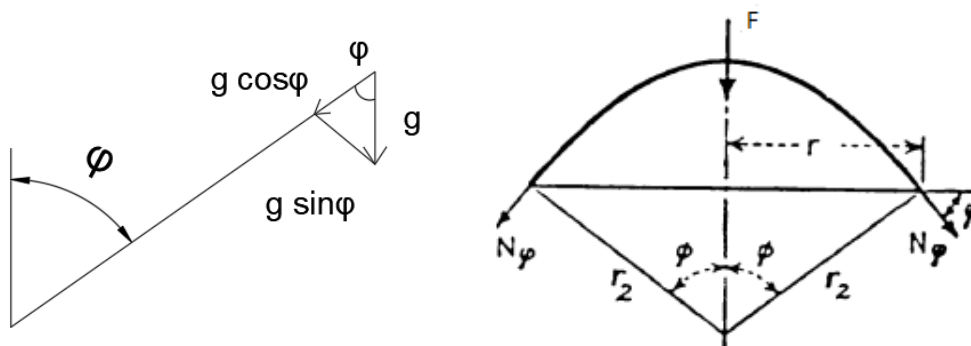
### 2.2.1. Slučaj vlastite težine

U izrazu 10 vanjsko opterećenje  $P_r$  zadaje se u smjeru  $r$  pa je stoga:

$$\frac{N_{\varphi}}{R} + \frac{N_{\theta}}{R} = P_r = -g \cdot \cos \varphi \quad (13)$$

$P_r$  je opterećenje u smjeru osi  $r$ , a  $P_r = -g \cdot \cos \varphi$  te ima negativnu vrijednost pošto djeluje prema plohi (slika 9).

Rezne sile za rotacijsko simetrično opterećenje mogu se dobiti iz uvjeta ravnoteže na odsječenom dijelu ljuske (slika 9), gdje je  $F$  rezultata opterećenja.



Slika 9: Dio sferne ljuske s rezultantom osnosimetričnog opterećenja s reakcijskim membranskim silama [3]

Opseg ljuste na odsječenom mjestu (uz  $\sin \varphi = \frac{r}{r_2} = \frac{r}{R}$ ) iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot \sin \varphi \quad (14)$$

Iz uvjeta ravnoteže:  $\sum y = 0$  dobivamo:

$$F + N_\varphi \cdot \sin \varphi \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 0 \quad (15)$$

$$N_\varphi = \frac{-F}{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \sin \varphi} = \frac{-F}{2 \cdot R \cdot \pi \cdot \sin^2 \varphi} \quad (16)$$

Budući da je površina kuglina odsječka  $P = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \varphi)$  rezultatna opterećenja  $F$  jednaka je:

$$F = g \cdot P = g \cdot 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \varphi) \quad (17)$$

Uvrštavanjem izraza 17 u 16 dobiva se meridijalna sila:

$$N_\varphi = \frac{-g \cdot 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \varphi)}{2 \cdot R \cdot \pi \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{-g \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} = \frac{-g \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi)}{(1 - \cos \varphi) \cdot (1 + \cos \varphi)} \quad (18)$$

$$N_\varphi = \frac{-g \cdot R}{1 + \cos \varphi} \quad (19)$$

Sada se iz izraza 13 može dobiti prstenasta sila:

$$N_\theta = -\left(g \cdot \cos \varphi + \frac{N_\varphi}{R}\right) \cdot R = -\left(g \cdot \cos \varphi - \frac{g}{1 + \cos \varphi}\right) \cdot R \quad (20)$$

$$N_\theta = -\left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi}\right) \cdot g \cdot R \quad (21)$$

Za  $\varphi = 0$  dobivamo sljedeće vrijednosti za meridijalnu i prstenastu silu:

$$N_\varphi = \frac{-g \cdot R}{2} \quad (22)$$

$$N_\theta = -\frac{g \cdot R}{2} \quad (23)$$

Za  $\varphi = 90^\circ$  meridijalna i prstenasta sila iznose:

$$N_\varphi = -g \cdot R \quad (24)$$

$$N_\theta = g \cdot R \quad (25)$$



Može se primijetiti kako su meridijalne sile tlačne uzduž cijele ljuske, dok su prstenaste sile u tjemenu u tlaku, a za  $90^\circ$  u vlaknu (mijenja se predznak). Kut pri kojem dolazi do promjene predznaka dobiva se iz uvjeta:

$$N_\theta = 0 :$$

$$\left( \cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \cdot g \cdot R = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1}{1 + \cos \varphi} = 0$$

$$\cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 = 0$$

$$\cos \varphi = x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

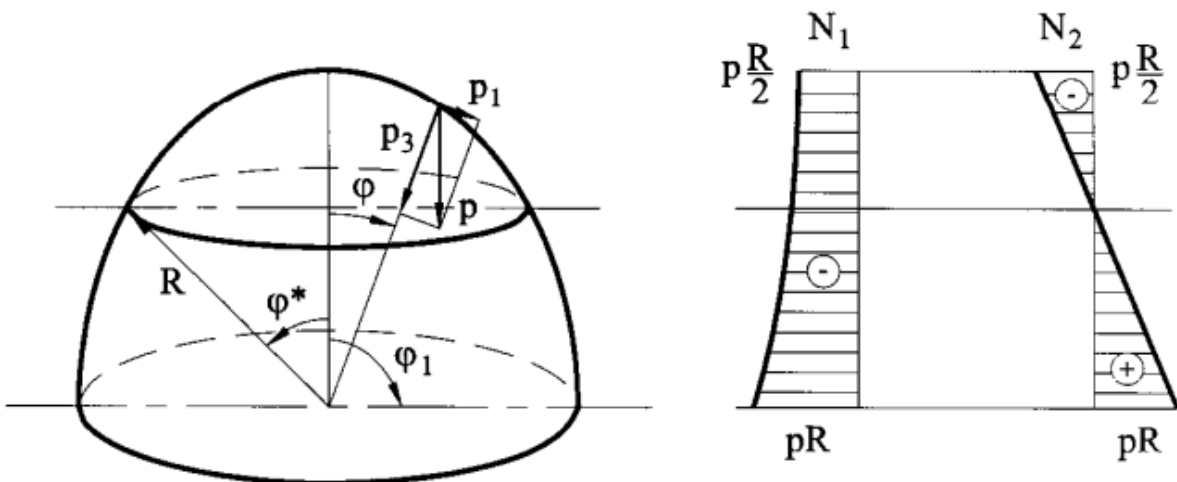
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = 0,618034, x_2 = -1,618$$

$$\cos \varphi = 0,618$$

$$\varphi = 51^\circ 49'$$

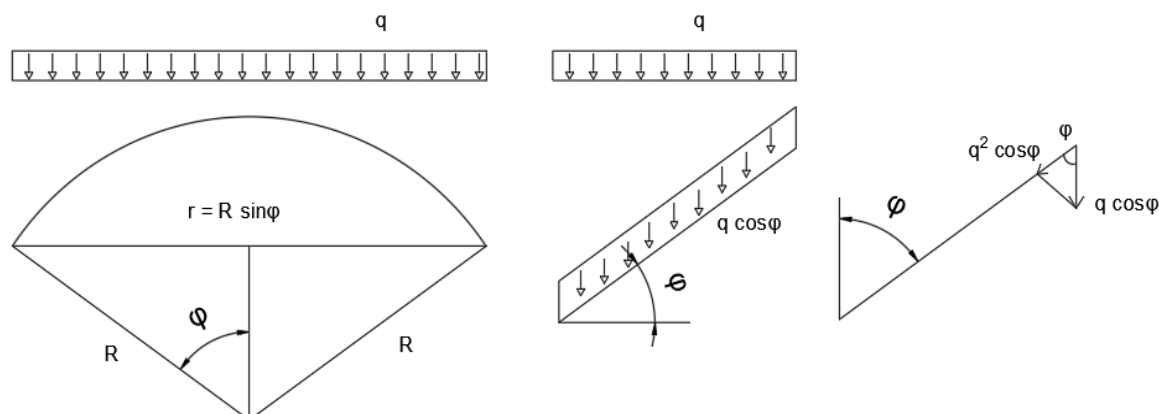
Na slici 10 prikazani su dijagrami unutarnjih prstenastih i meridijalnih sila. S  $N_1$  označene su meridijalne sile dok su s  $N_2$  označene prstenaste sile.



Slika 10: Unutarnje sile u prstenu [8]

### 2.2.2. Slučaj opterećenja snijegom

Ovaj se slučaj odnosi na opterećenje koje djeluje na tlocrtnu površinu kupole



Slika 11: Kupola opterećena snijegom

Izraz 10 sada poprima sljedeći oblika:

$$\frac{N_{\varphi}}{R} + \frac{N_{\theta}}{R} = -q \cdot \cos^2 \varphi \quad (27)$$

Iz uvjeta ravnoteže može se dobiti meridijalna sila (prema izrazu 16), pri čemu snijeg djeluje na tlocrtnu površinu  $A = r^2 \pi = R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \pi$ , pa je rezultanta opterećenja  $F$  jednaka:

$$F = q \cdot R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \pi \quad (28)$$

Uvrštavanjem u 16 dobivamo:

$$N_{\varphi} = \frac{-q \cdot R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \pi}{2 \cdot R \cdot \pi \cdot \sin^2 \varphi} = -\frac{q \cdot R}{2} \quad (29)$$

Meridijalna sila ima konstantnu vrijednost po čitavoj visini kupole

Prstenasta sila može se dobiti iz izraza (27):

$$N_{\theta} = -(q \cdot \cos^2 \varphi + \frac{N_{\varphi}}{R}) \cdot R \quad (30)$$

Uvrštavanjem meridijalne sile prema izrazu (29):

$$N_{\theta} = -(q \cdot \cos^2 \varphi - \frac{q \cdot R}{2 \cdot R}) \cdot R \quad (31)$$

$$N_{\theta} = -\frac{q}{2} \cdot R(2 \cdot \cos^2 \varphi - 1) \quad (32)$$

$$N_{\theta} = -\frac{R}{2} \cdot q \cdot \cos 2\varphi \quad (33)$$

Za  $\varphi = 0^{\circ}$  (tjeme kupole) dobivamo sljedeće vrijednosti za meridijalnu i prstenastu silu:

$$N_{\varphi} = \frac{-q \cdot R}{2} \quad (34)$$

$$N_{\theta} = \frac{-q \cdot R}{2} \quad (35)$$

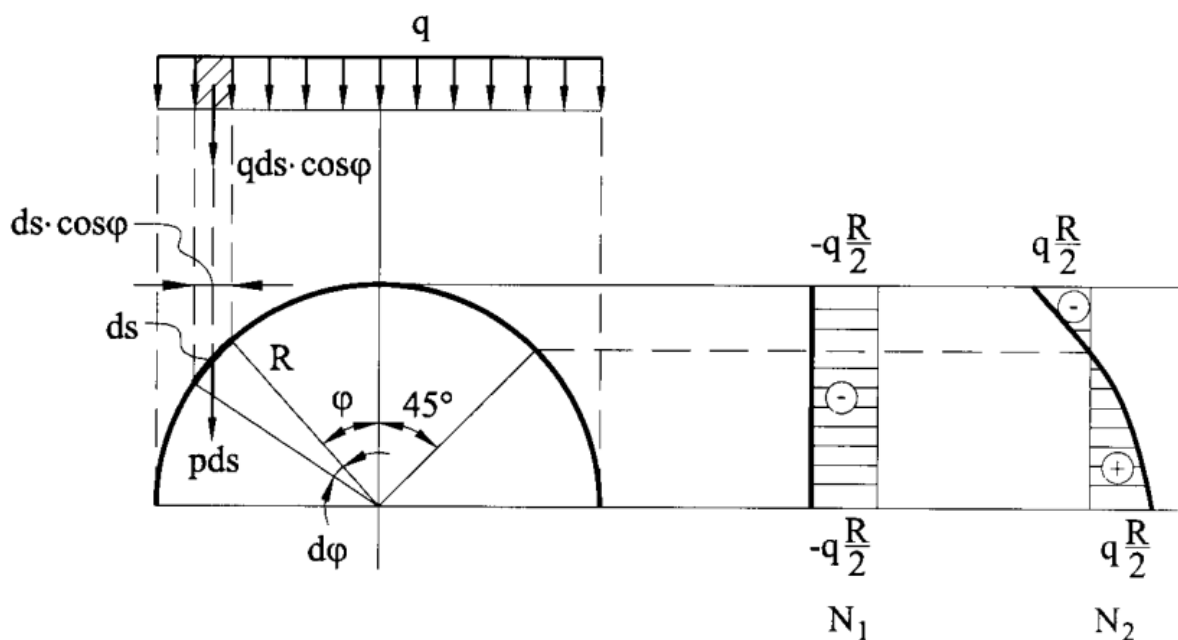
Za  $\varphi = 90^{\circ}$  meridijalna i prstenasta sila jednake su:

$$N_{\varphi} = \frac{-q \cdot R}{2} \quad (36)$$

$$N_{\theta} = \frac{q \cdot R}{2} \quad (37)$$

Prstenasta sila mijenja predznak kada je  $N_{\theta} = 0$ , iz čega dobivamo kut  $\varphi = 45^{\circ}$

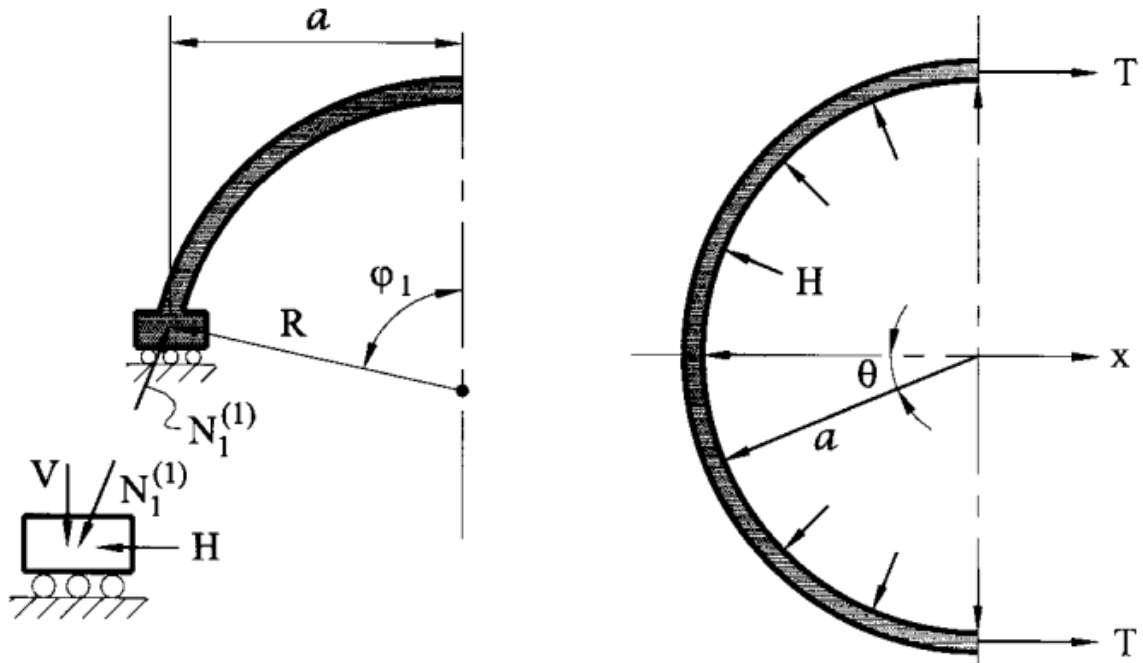
Na slici 12 prikazana je raspodjela meridijalnih i prstenastih sila u kupoli u slučaju djelovanja snijega.



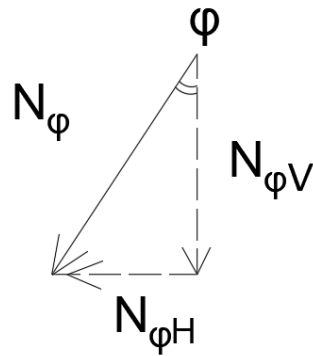
Slika 12: Unutarnje sile od opterećenja snijegom / promjenjivim opterećenjem [4]

### 2.2.3 Sila u vlačnom prstenu

Prsten na dnu kupole prihvaća horizontalnu komponentu meridijalne sile (slika 13).



Slika 13: Vlačna sila u prstenu [8]



Slika 14: Vertikalna i horizontalna komponenta meridijalne sile  $N_\varphi$  u prstenu

Meridijalna sila rastavlja se na vertikalnu i horizontalnu komponentu:

$$N_{\varphi V} = N_\varphi \cdot \sin\varphi \quad (38)$$

$$N_{\varphi H} = N_\varphi \cdot \cos\varphi \quad (39)$$

Vertikalna komponenta  $N_{\varphi V}$  prenosi se u oslonac.

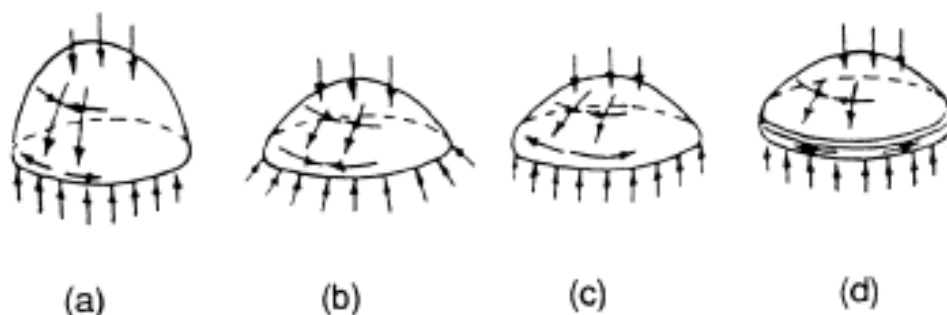
Sila u prstenu  $T$  može se dobiti iz sljedećeg uvjeta ravnoteže:

$$2 \cdot T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} N_{\varphi H} \cdot r \cdot \cos\theta d\theta \quad (40)$$

$$2 \cdot T = r \cdot N_{\varphi H} \cdot \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (41)$$

$$T = r \cdot N_{\varphi H} \quad (42)$$

Objašnjenje membranskih sila u kupoli s i bez prstena dano je na slici 15. Sve vrste kupola sa slike imaju oslonce uzduž cijelog oboda i na njih djeluje osnosimetrično vertikalno opterećenje [3].



Slika 15: Membransko ponašanje kupola uslijed osnosimetričnog opterećenja [3]

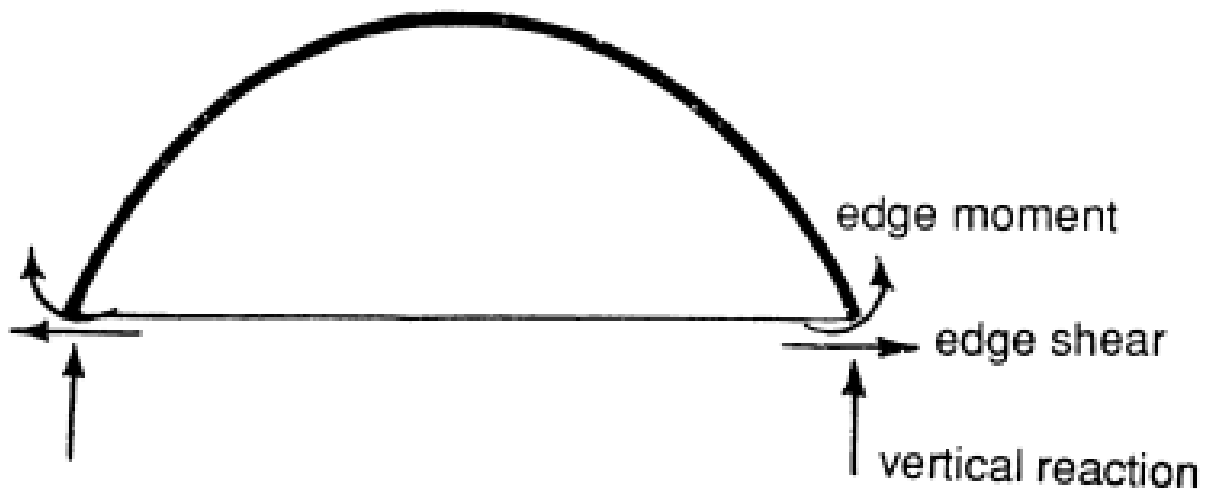
Na slici 15, pod (a) prikazana je visoka kupola s vertikalnim osloncem ( $\varphi = 90^\circ$ ). Strelice na slici prikazuju predznak membranskog polja u kupoli bez prstena. Tangenta meridijalne krivulje na donjem rubu kupole je vertikalna. Meridijalna sila ostaje tlačna, ali naprezanje uzduž prstenova mijenja predznak. U ovakvoj ljusci, prstenastu silu preuzima sama ljuska, a meridijalnu silu preuzimaju vertikalni oslonci.

Pod (b), meridijalna i prstenasta naprezanja su u potpunosti tlačna. Ovo vrijedi za slučaj kada ljuska ima malu strelicu (niska ljuska). Na rubovima ovakve ljuske, meridijalna sila se prenosi kroz oslonce.

U slučaju (c), niska ljuska može prenositi samo vertikalne sile. To bi značilo da se horizontalni potisak, koji je nastao od meridijalnog tlaka, mora prenositi preko ljuske. U donjim paralelama nastat će vlačna naprezanja što se protivi membranskoj teoriji, budući da mora postojati neko polje savijanja u donjem dijelu ljuske kako bi se zadovoljili uvjeti ravnoteže. Posljednji slučaj (d) sadrži ljusku s vlačnim prstenom na dnu i s vertikalnim osloncima. U ovom slučaju horizontalni potisci su u potpunosti preneseni s prstenom. [3]

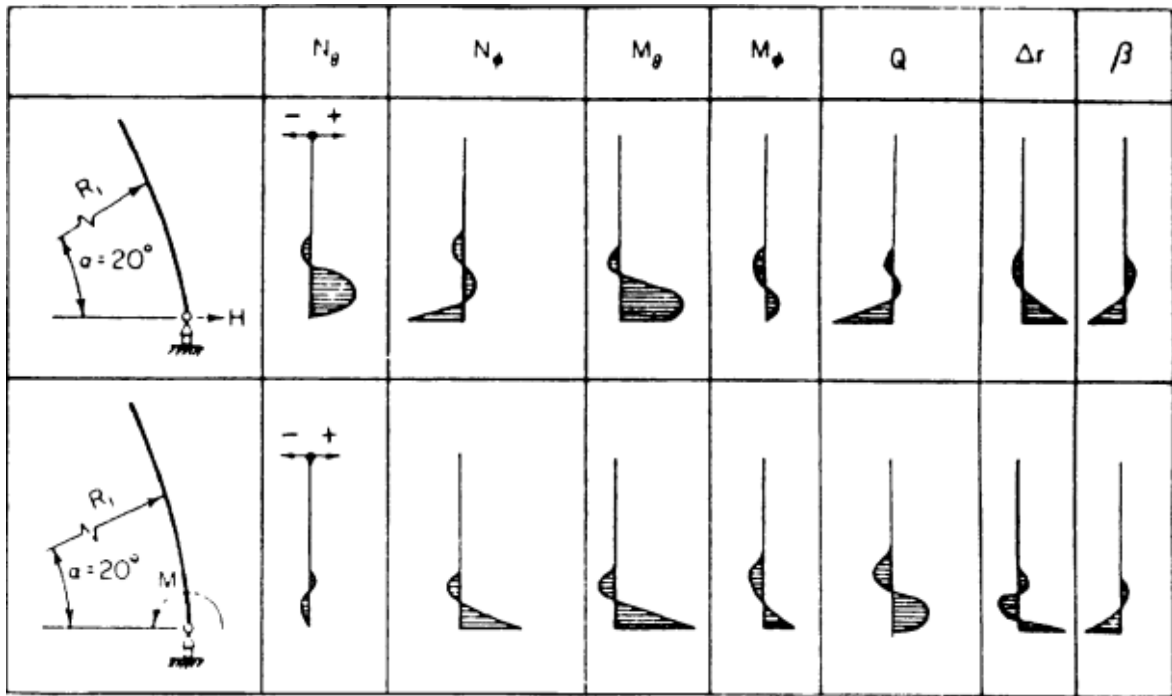
### 2.3. Utjecaj rubnih uvjeta (uključenje momenta savijanja)

Rubni uvjeti u osnosimetričnoj ljusci sastoje se od jednoliko raspodijeljenih momenata savijanja, poprečne sile i vertikalnih reakcija što je vidljivo sa slike 16. Svaki od njih može stvoriti polje savijanja u ljusci. Naprezanja i deformacije uslijed ovih polja moraju se superponirati prethodno opisanim membranskim silama kako bi se moglo dobiti ukupno polje unutarnjih sila i deformacija u ljusci. [3]



Slika 16: Rubne sile u osnosimetričnoj ljusci [3]

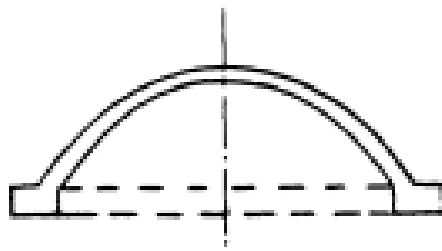
Proračuni koji se temelje na eksperimentalnim rezultatima pokazuju kako utjecaj rubnih uvjeta brzo nestaje udaljavanjem od rubova. Na udaljenosti koja se nalazi na približno  $20^\circ$  od rubova, u ljusci u potpunosti iščezavaju učinci momenta savijanja uzrokovani rubnim silama. U preostalom dijelu ljuske prevladava membransko polje naprezanja. Na slici 17 prikazane su unutarnje sile, ali i deformacije ljuske zbog raspodijeljene rubne poprečne sile momenta savijanja. Kao što se može vidjeti, sve unutarnje sile i pomaci zbog rubnih uvjeta vrlo brzo iščezavaju kako se udaljavamo od rubova.



Slika 17: Unutarnje sile i osnosimetrične deformacije ljuske zbog rubnih uvjeta [3]

Čak i u rubnoj zoni, razlike u konfiguraciji ljuske imaju mali učinak na ponašanje savijanja što bi značilo da se ovo ponašanje može odrediti korištenjem sferne ljuske (jednostavno je za analizi).

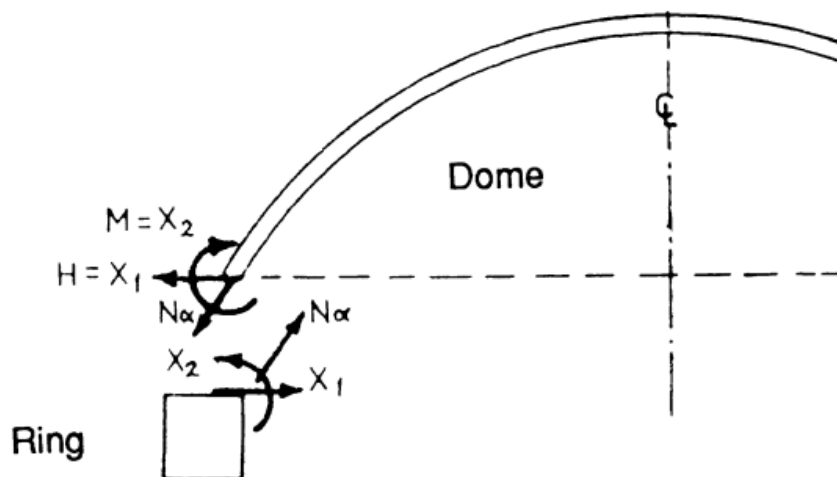
Kupole se često izvode s vlačnim prstenom na donjem rubu ili na spoju s nosivim zidovima ili s prstenom negdje na paralelama. Na slici 18 prikazana je kupola s vlačnim prstenom na donjem rubu [3].



Slika 18: Kupola s vlačnim prstenom na donjem rubu [3]

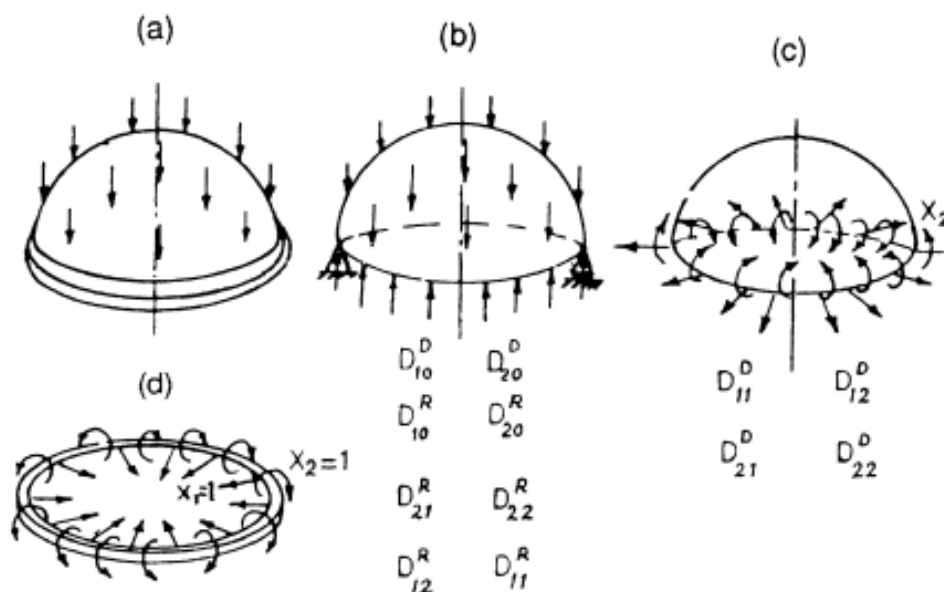
Vlačni prsten ukrućuje ljusku i pruža bočni oslonac konstrukciji ljuske. Ukoliko postoje samo vertikalni oslonci, djelovanje bočnog oslonca prstena je neizostavno iz razloga što sama konstrukcija mora preuzeti bočne potiske. Vlačni prsten, s druge strane uzrokuje momente savijanja u blizini prstena, koji nastaju kao rezultat različite krutosti između ljuske i grede. Sa stajališta nosivosti, između ljuske i rubne grede postojalo bi polje koje je

sastavljeno od poprečne sile  $H$  i momenata savijanja  $M$  ali i membranskih sila [3]. Ove sile prikazane su na slici 19.



Slika 19: Interakcija između ljuske i vlačnog prstena [3]

Za analizu ljuske sa prstenom, koji ima funkciju vlačnog elementa koji preuzima horizontalne sile može se primijeniti metoda sila, prikazana na slici 20 [3].



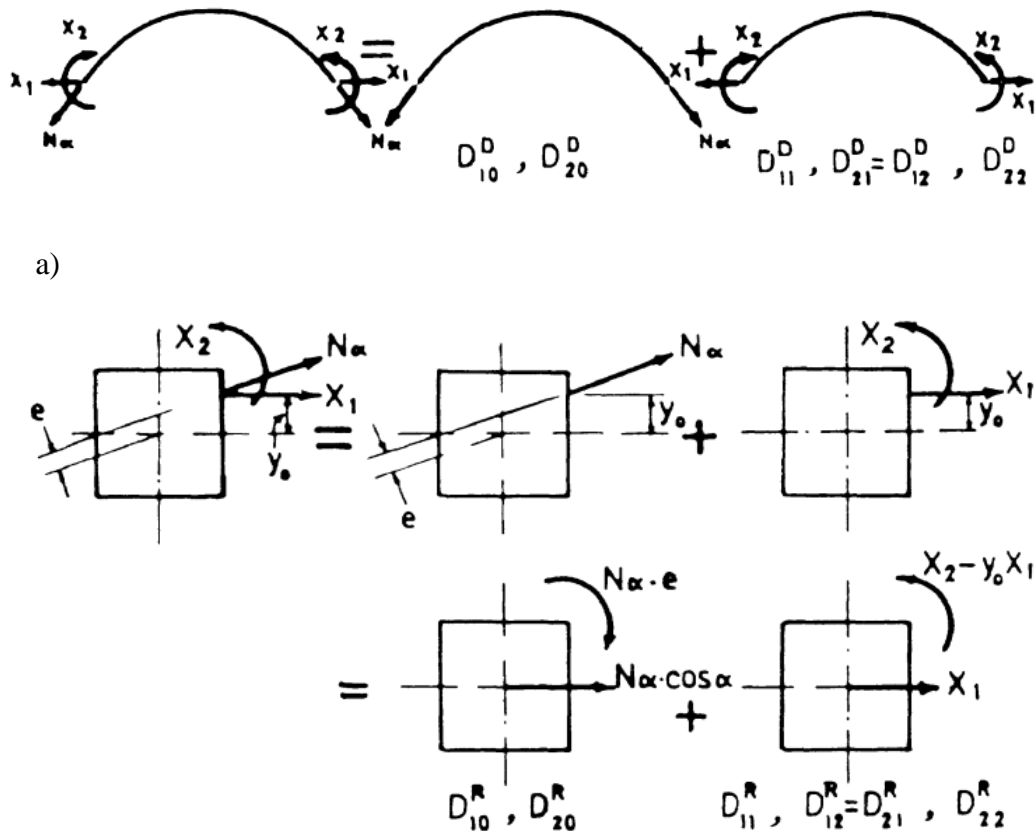
Slika 20: Metoda sila kod analize ljuske sa prstenom [3]

Na slici 20 pod a) prikazana je kupola s vlačnim prstenom dok pod b) je identična ta kupola samo bez prstena koja se ponaša kao membranska ljuska. Membranske deformacije u kupoli i deformaciju u vlačnom prstenu zbog membranskih sila, su također definirane na slici. Slika c) prikazuje rubne sile  $x_1$  i  $x_2$  i pripadajuće koeficijente fleksibilnosti koje su



povezani s kupolom. Na slici d) se može vidjeti vlačni prsten zajedno s koeficijentima fleksibilnosti. Na slikama, s  $D_{ij}^D$  i  $D_{ij}^R$  označeni su koeficijenti fleksibilnosti za kupolu (D - dome) i prsten (R - ring), a membranske deformacije s  $D_{i0}^D$  i  $D_{i0}^R$  [3].

Na slici 21 prikazano je rastavljanje sila u kupoli i prstenu.

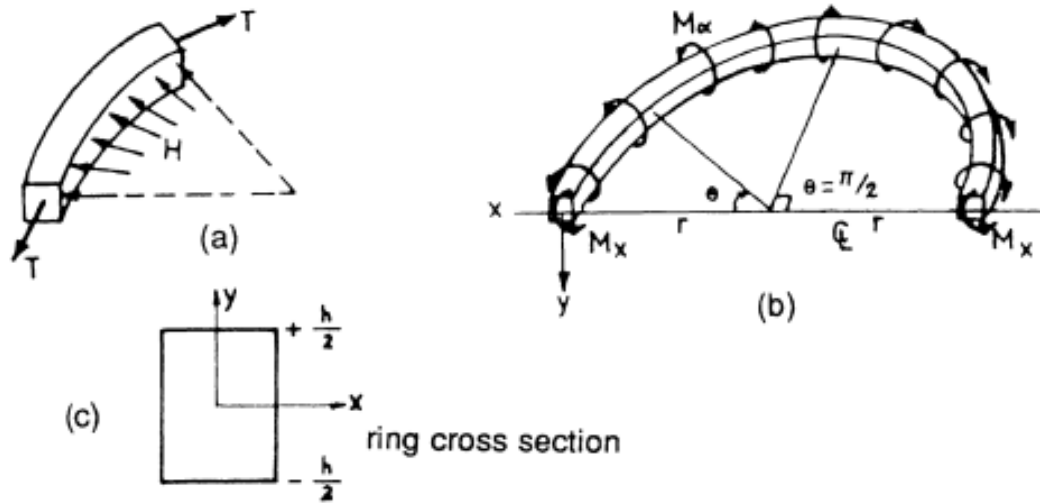


Slika 21: Rastavljanje sila u kupoli (a) i prstenu (b)

Četiri su faze analize ljuske s prstenom:

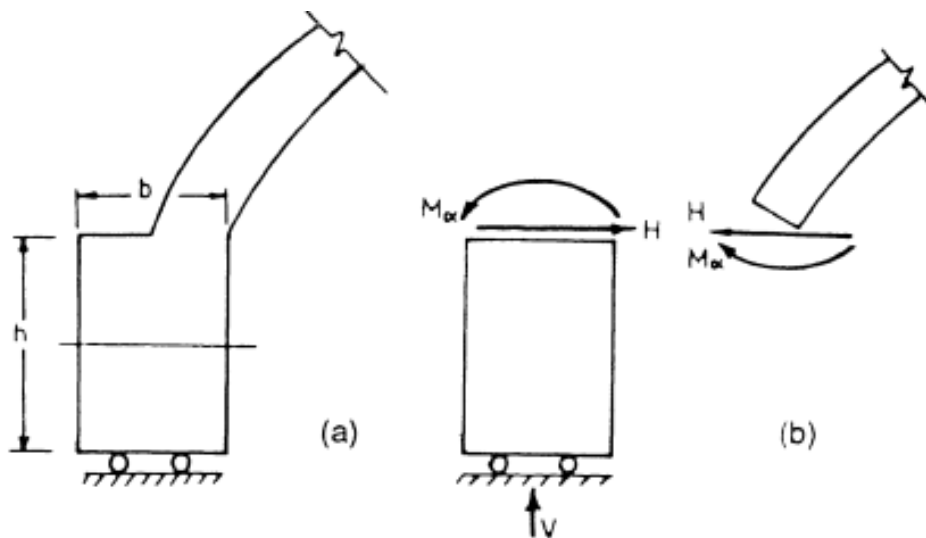
- 1) Analiza prstena pod utjecajem prstenaste sile, jedinične radijalne sile i jediničnog torzijskog momenta
- 2) Membranska analiza kupole za vanjsko opterećenje kao i analiza savijanja kupole za jediničnu veličinu rubnih uvjeta
- 3) Izjednačavanje deformacija kupole i vlačnog prstena nametanjem odnosa kompatibilnosti
- 4) Superpozicija membranskih sila utjecaja savijanja kako bi se pronašla ukupna sila i deformacija u ljuski s prstenom

Prsten je opterećen jednoliko raspodijeljenom radijalnom silom  $H$  i jednoliko raspodijeljenim momentom  $M_\alpha$  (slika 21) [3].

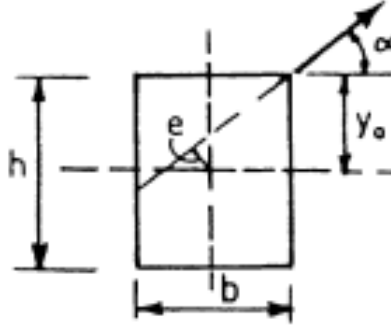


Slika 22: Vlačni prsten pod utjecajem radijalnom silom i torzijom [3]

Na slici 22 može se vidjeti detalj spoja kupole s prstenom koji je oslonjen na vertikalni oslonac dok se na b) dijelu vide sile na interakciji između kupole i vlačnog prstena, a na slici 23 vidljiv je vlačni prsten ekscentrično opterećen membranskom silom. Sa slovom  $e$  se označava udaljenost osi kupole od težišta vlačnog prstena, a s oznakom  $y_0$  prikazujemo vertikalnu udaljenost od težišta vlačnog prstena pa do njegovog vrha.



Slika 23: Sile savijanja kod spoja kupole i vlačnog prstena [3]



Slika 24: Ekscentrično opterećena membranska sila na prsten [3]

Postupak pronalaska nepoznanica poprečne sile  $x_1 = H$  i momenta savijanja  $x_2 = M_\alpha$  prikazan je u nastavku.

Potrebno je izračunati vrijednosti koeficijenta fleksibilnosti i membranskih deformacija prema sljedećim izrazima [3]:

$$D_{11}^D = \frac{1}{E} \frac{2R\lambda \sin^2 \varphi}{t} \quad (43)$$

$$D_{12}^D = \frac{1}{E} \frac{2\lambda^2 \sin \varphi}{t} = D_{21}^D \quad (44)$$

$$D_{22}^D = \frac{1}{E} \frac{4\lambda^3}{Rt} \quad (45)$$

$$D_{11}^R = -\frac{1}{E} \left( 1 + \frac{12y_0^2}{h^2} \right) \frac{r^2}{bh} \quad (46)$$

$$D_{12}^R = \frac{1}{E} \frac{12r^2 y_0}{bh^3} \quad (47)$$

$$D_{22}^R = \frac{1}{E} \frac{12r^2}{bh^3} \quad (48)$$

$$D_{10}^D = \frac{R^2 q}{Et} \left( \frac{1+\nu}{1+\cos \varphi} - \cos \varphi \right) \sin \varphi \quad (49)$$

$$D_{20}^D = \frac{Rq}{Et} (2+\nu) \sin \varphi \quad (50)$$

$$D_{10}^R = \left( \cos \varphi + \frac{12y_0 e}{h^2} \right) \frac{r^2}{Ebh} \left( \frac{-Rq}{1+\cos \varphi} \right) \quad (51)$$

$$D_{20}^R = -\frac{12r^2 e}{Ebh^3} \left( -\frac{qR}{1+\cos \varphi} \right) \quad (52)$$

Pritom je  $\lambda^4 = 3 \cdot (1 - \nu^2) \left( \frac{R}{t} \right)^2$  (53) gdje je  $t$  debljina kupole.

Zatim je potrebno zbrojiti rezultate dobivene za prsten i za kupolu kako bi se dobili ukupni koeficijenti fleksibilnosti:

$$D_{10} = D_{10}^D + D_{10}^R \quad (54) \quad D_{11} = D_{11}^D + D_{11}^R \quad (56) \quad D_{22} = D_{22}^D + D_{22}^R \quad (58)$$

$$D_{20} = D_{20}^D + D_{20}^R \quad (55) \quad D_{12} = D_{21} = D_{12}^D + D_{12}^R \quad (57)$$

Dobivanjem konačnih koeficijenata fleksibilnosti mogu se uvrstiti u formule za silu H i moment  $M_\alpha$

$$H = \frac{D_{22}D_{10} - D_{12}D_{20}}{D_{22}D_{11} - D_{12}^2} \quad (59)$$

$$M_\alpha = -\frac{D_{11}D_{20} - D_{12}D_{10}}{D_{22}D_{11} - D_{12}^2} \quad (60)$$

Uvrštavanjem pomoćnih vrijednosti i ostalih potrebnih podataka u tablicu 1 dobivaju se sljedeći rezultati (zbrajaju se rezultati za H i za  $M_\alpha$ ).

Rubne grede u ljusci stvaraju polje savijanja u blizini vlačnog prstena. Nastaje zbog razlike u krutosti između ljuske i vlačnog prstena te kršenje membranskih pretpostavki.

U tablici 1 prikazane su vrijednosti meridijalne sile, prstenaste sile i momenta savijanja u ovisnosti o poprečnoj sili H i rubnom momentu savijanja  $M_\alpha$  za proizvoljni kut  $\varphi$

Tablica 1: Koeficijenti fleksibilnosti [3]

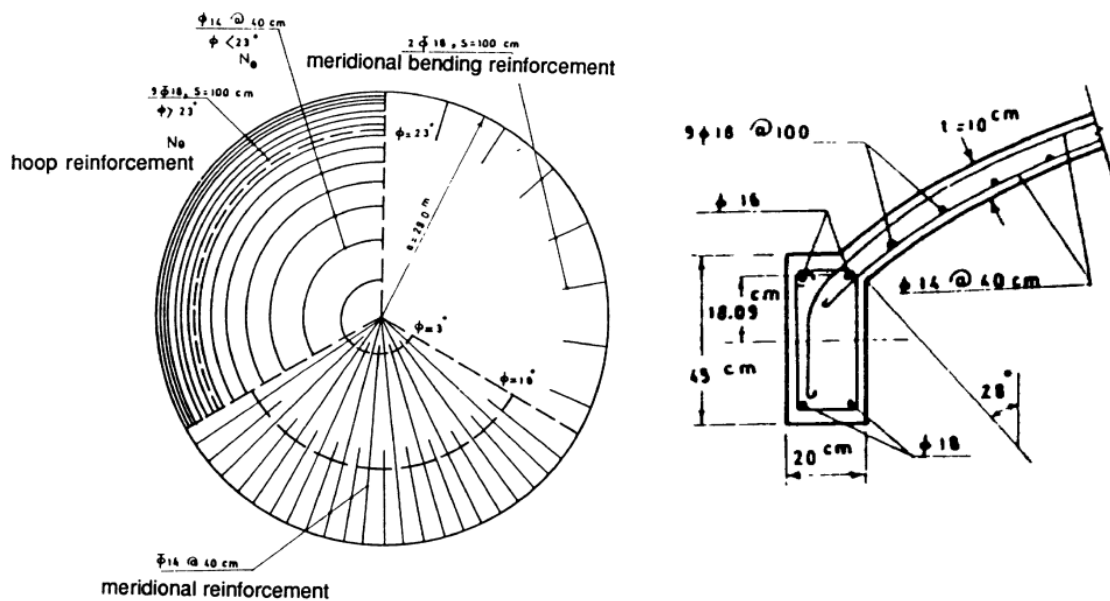
	H	$M_\alpha$
$N_\varphi$	$-\sqrt{2} \cot(\varphi - \psi) \sin \varphi e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right) H$	$\frac{-2\lambda}{R} \cot(\varphi - \psi) e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi) M_\alpha$
$N_\theta$	$-2\lambda \sin \varphi e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{2}\right) H$	$\frac{-2\sqrt{2}}{R} \lambda^2 e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right) M_\alpha$
$M_\varphi$	$\frac{R}{\lambda} \sin \varphi e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi) H$	$\sqrt{2} e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi + \frac{\pi}{4}\right) M_\alpha$
$\Delta H$	$\frac{2R\lambda \sin^2 \varphi}{Et} H$	$\frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Et} M_\alpha$
$\Delta \alpha$	$\frac{2\lambda^2 \sin \varphi}{Et} H$	$\frac{4\lambda^3 M_\alpha}{ERt} M_\alpha$

Kut  $\psi$  definiran je kao  $\psi = \alpha - \varphi$  (61) pri čemu je kut  $\alpha = \max(\varphi)$

## 2.4. Armiranje kupola

Kupole se armiraju duž meridijana i paralela (prstena). Kod kupole debljine veće od 8 cm armira se u dva sloja (na ekstradosu i intradosu). Kako se duljina paralela smanjuje prema tjemenu kupole, time se i broj šipki duž meridijana postepeno smanjuje – uobičajeno se armatura u smjeru meridijana sastoji od nekoliko pozicija šipki različite duljine koje se postavljaju naizmjenično. Armatura za preuzimanje horizontalne komponente meridijalne sile postavlja se u rubni prsten. Neposredno uz prsten kupola se armira šipkama u smjeru meridijana na djelovanje poremećajnog momenta (koji nastaje uslijed rubnih uvjeta) i tlačne meridijalne sile [1]

Na slici 25 prikazan je primjer armiranja kupole [3]. Zbog preglednosti armatura kupole prikazana je odvojeno:

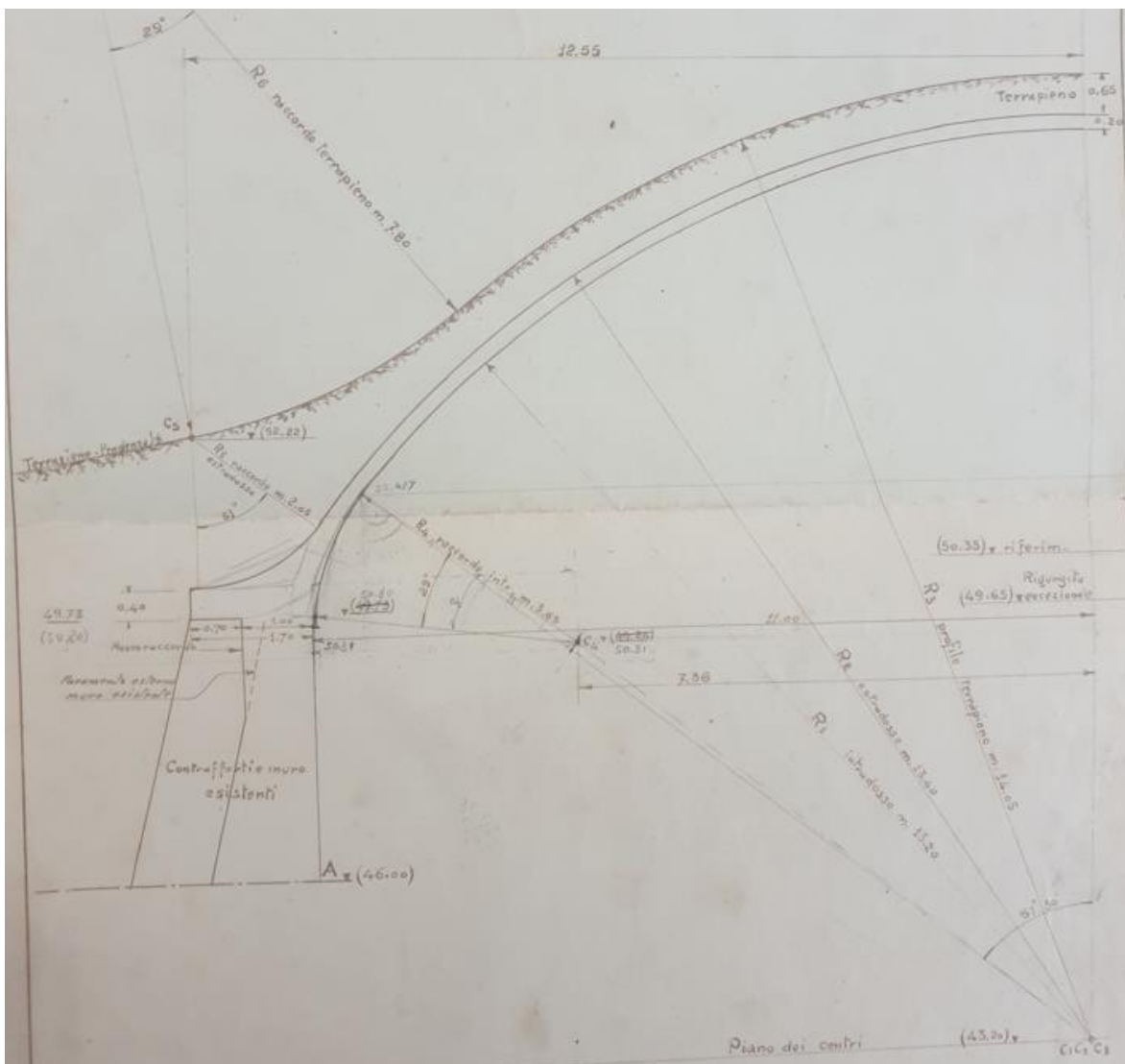


Slika 25: Plan armature kupole, detalj armiranje rubnog prstena i spoja prsten - kupola [3]

### 3. ARMIRANOBETONSKA KUPOLA PROMJERA 26,6 m

#### 3.1. Tehnički opis

U projektu iz 1932.godine na području Buzeta, u sklopu Istarskog vodovoda planirana je armiranobetonska kupola koja bi poslužila za prekrivanje kaptaze izvora. Promjer kupole iznosi je 26,6 metara, a promjer u bazi 22,0 metara. Ploča je jednolike debljine od 20 cm. Kupola je pokrivena nadslojem zemlje koje se povećava od tjemena prema podnožju kupole kako bi se obnovili lokalni oblici te smanjila i poništila vidljivost odozgo. Promjenjiva debljina nasipa je 0,65 m u tjemenu pa do 2,0 metara pri dnu. Nakon što je promijenjen izvedbeni projekt zbog složene oplata i armature te troškova izgradnje i održavanja vodovodnog sustava, iz projekta je izostavljen i svjetlarnik.



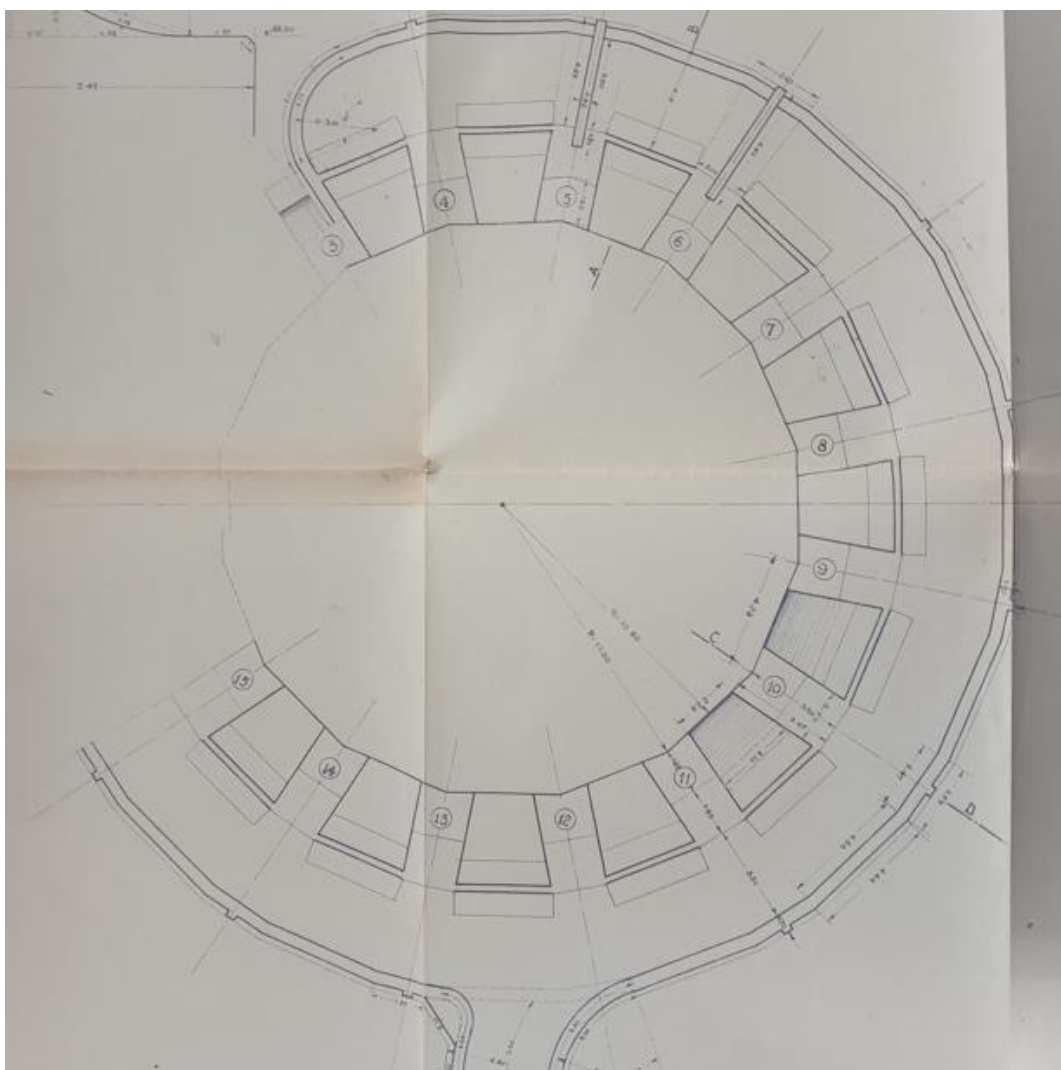
Slika 26: Nacrt kupole inženjera Pietra Vacchellija [6]

Kupola zatvara s osi kut od otprilike 60°, te sadrži vlačni prsten. Neposredno uz prsten debljina kupole je postepeno povećana kako bi se ostvario prirodni kontakt s prstenom (primijenjeni su različiti radijusi zakrivljenosti na intradosu i ekstradosu). Kupola je uz vlastitu težinu i težinu zemljanog nasipa proračunana na promjenjivo opterećenje u iznosi od 500 kg/m<sup>2</sup>

Za ovu kupolu korišten je sljedeći materijal:

- beton velike čvrstoće (400 kg cementa) i pijesak iz drobilice 230 m<sup>3</sup>
- čelik (armaturne šipke) 16 000 kg

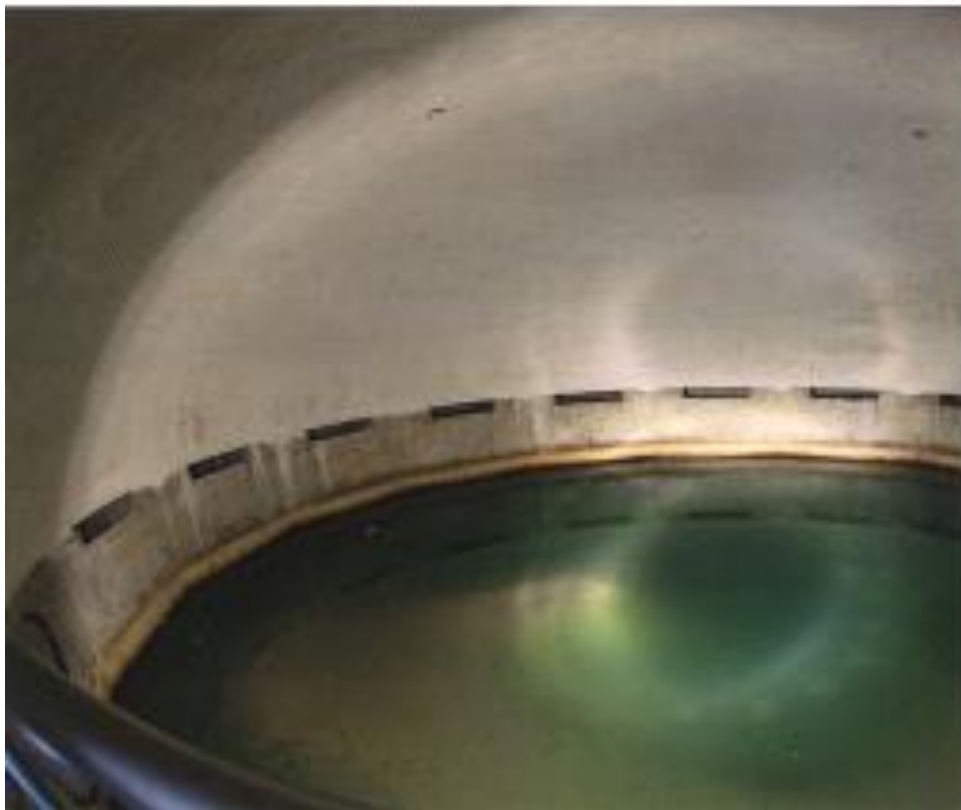
Na slikama 26 i 27 mogu se vidjeti nacrt i tlocrt kupole inženjera Pietra Vacchellija s vidljivim dimenzijama i visinskim kotama dok je na slikama 28 i 29 prikazan sadašnji izgled kupole te njezina unutrašnjost.



Slika 27: Tlocrt kaptaže izvora – presjek ispod vlačnog prstena [4]



Slika 28: Današnji izgled kupole [5]



Slika 29: Unutrašnjost kupole [5]



## 3.2. Izgradnja kupole

### 3.2.1. Armiranobetonska kupola prema projektu Gina Veronesea

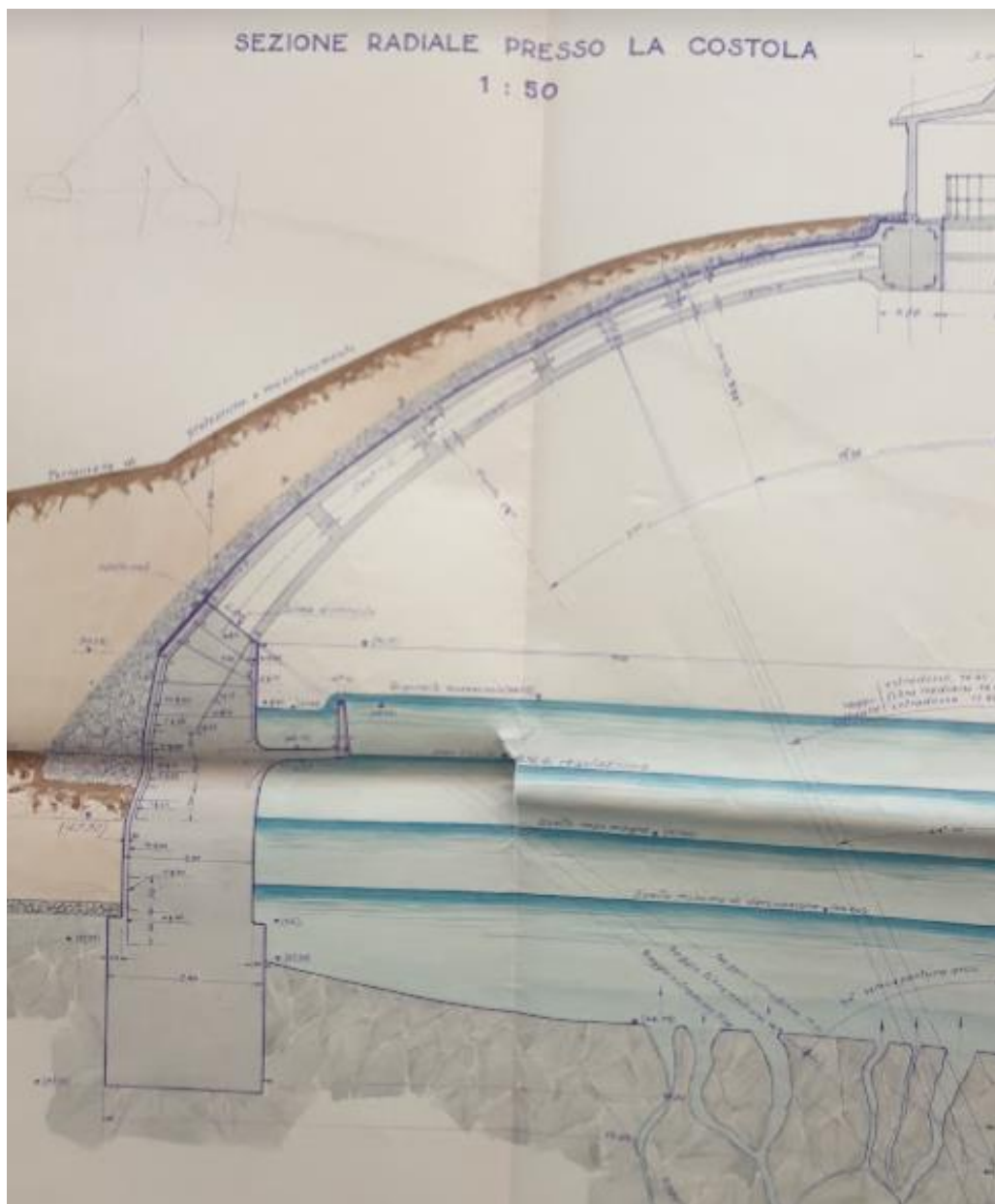
Mogućnost izgradnje Istarskog vodovoda, 1925. godine počeo je razmatrati projektant Gino Veronese. Vodeći princip cijelog Istarskog vodovoda temelji se na integraciji izvora Sv. Ivana u Buzetu, koje kroz devet mjeseci godišnje mogu obilno "hraniti" središte Sv. Stjepana (niska i srednja mreža), i od Buzeta (visoka i jako visoka mreža), kroz umjetno jezero Stridone za nisku mrežu i za izvor Gherda. Visoka i najviša mreža je isključivo za opskrbljivanje grada Buzeta. Tijekom kompilacije izvedbenih projekata proučila se tehničko - ekonomska pogodnost kaptaze postojećih izvora koji mogu izazvati smanjenje rada strojeva pogotovo tijekom sezone kiše. Na slici 30 vidljiv je Istarski vodovod iz ptičje perspektive. Na desnome dijelu može se vidjeti Buzet te Sv. Ivan, u kojem se nalazi kupola razmatrana u ovom radu.



Slika 30: Istarski vodovod - projekt Gina Veronesea [4]

Izvor se nalazi unutar cilindrične konstrukcije koja je nadsvođena kupolastim krovom. Nije bilo moguće postaviti stupove na dnu izvora zbog praktičnih razloga.

Prema projektu Gina Veronesea, objekt se trebao izvesti kao rebrasta kupola sa 16 rebara I poprečnog presjeka i ploče debljine 12 cm. Oslonjen je na betonske zidove. Kupola u tjemenu završava tlačnim prstenom dimenzija 0,9x1,0 m i svjetlarnikom.



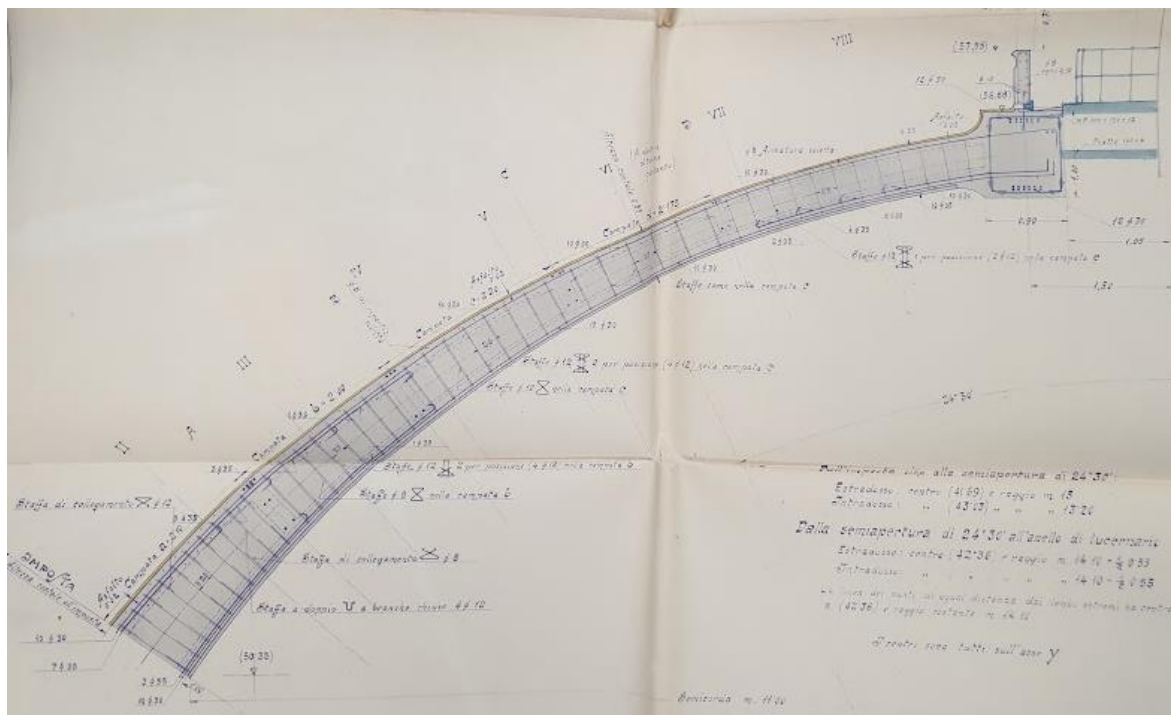
Slika 31: Projekt kupole Gina Veronesea – poprečni presjek [4]

Dvostruka ovojnica kupole, s vanjske strane oblikovana je betonskom pločom gdje je betonska ploča poduprta gredama uzduž paralela, a pomoću tih greda se sva ili gotova sva težina koju nosi kupola, odvodi u rebra. S unutarnje strane, kupola je trebala biti izvedena od opečnih pločica povezanih armaturnim šipkama usidrenim u armiranobetonsku ploču i na donja rebra lukova.

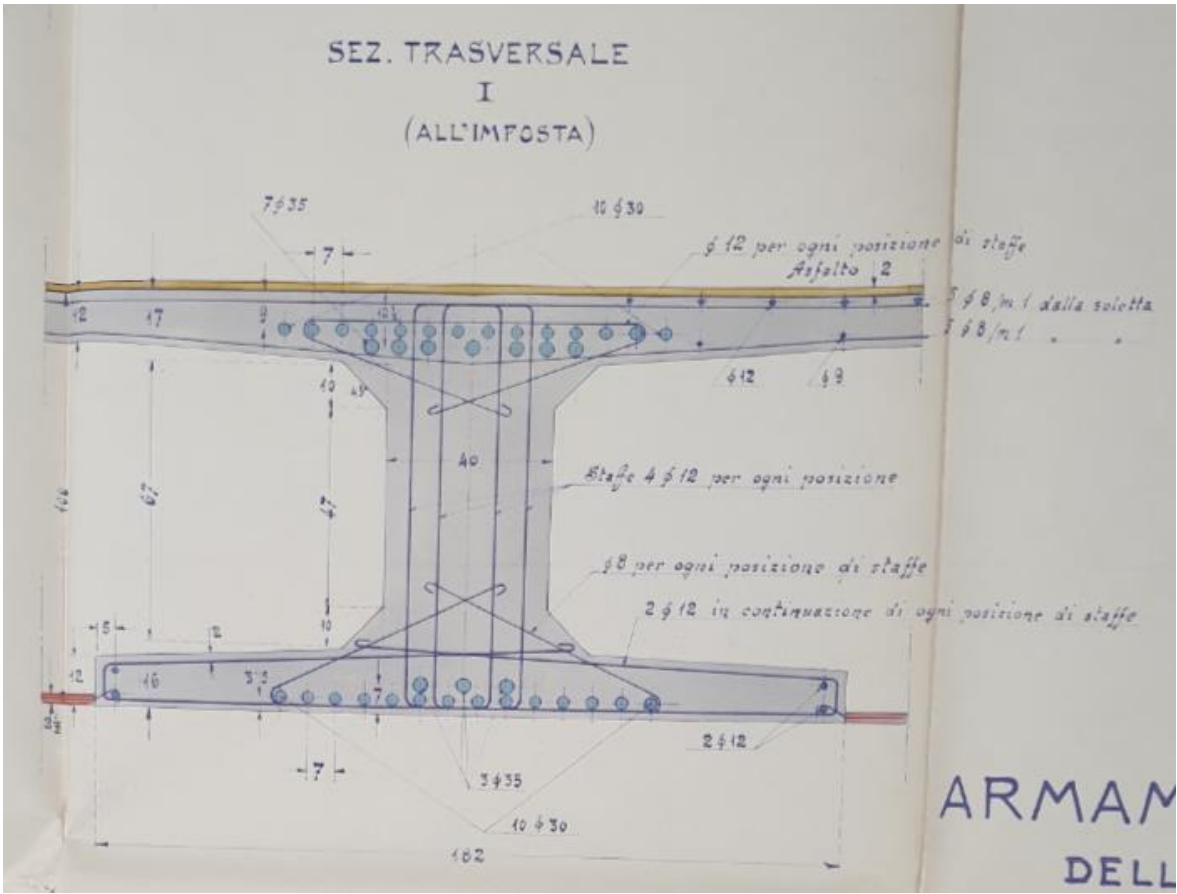


Slika 32: Tlocrt kupole Gina Veronesea [4]

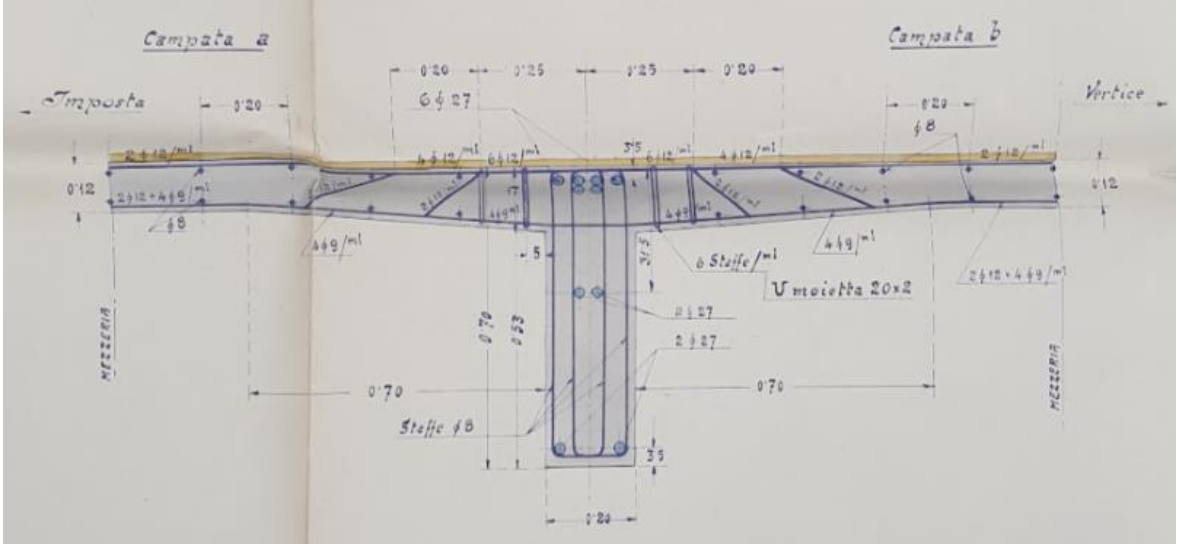
Na slikama u nastavku prikazana je armatura rebara, poprečnih greda (duž paralela) te tlačnog prstena [4].



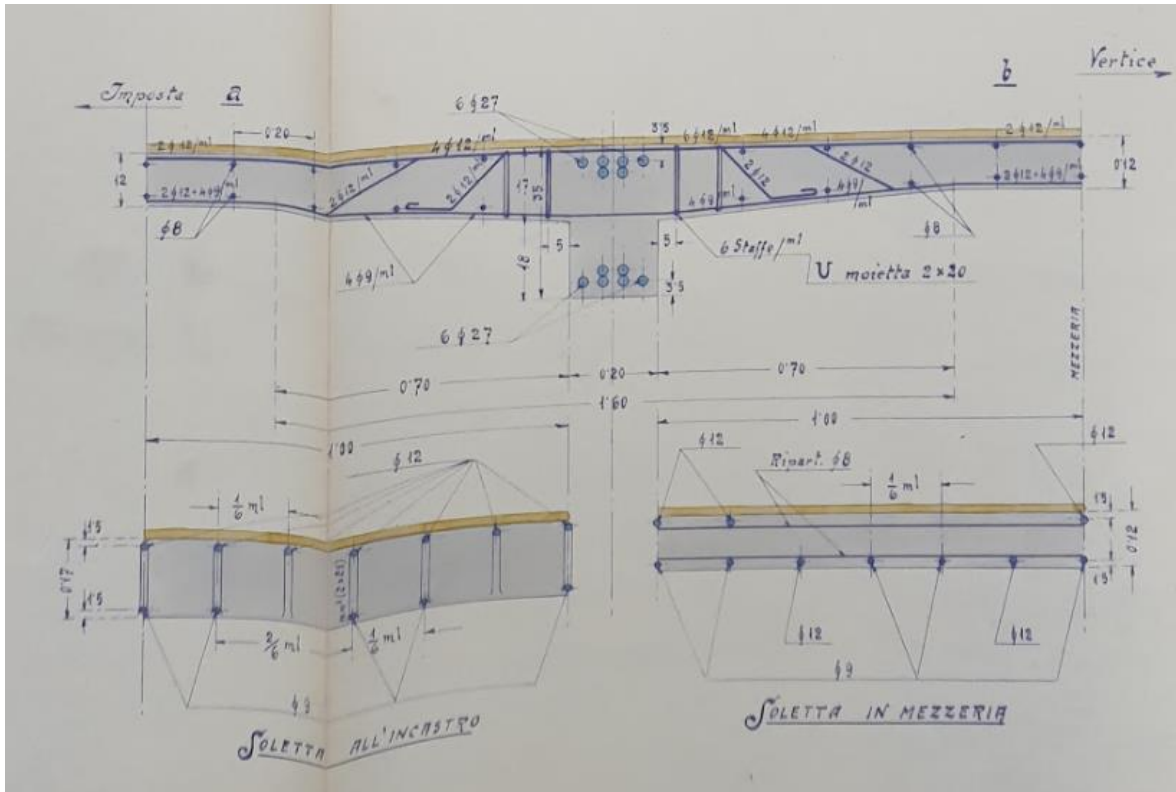
Slika 33: Kupola Gina Veronesea – presjek kroz rebro (meridijan) [4]



Slika 34: Poprečni presjek rebra u podnožju [4]



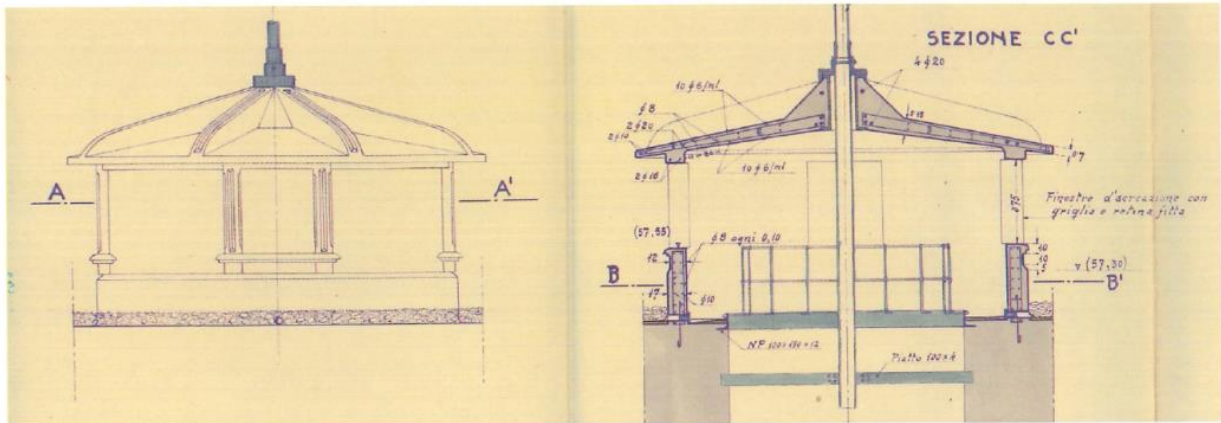
Slika 35: Poprečni presjek grede A uzduž paralela (na osloncu) [4]



Slika 36: Poprečni presjek grede A uzduž paralela (u polju) [4]



Slika 37: Tlačni prsten uz svjetlarnik [4]



Slika 38: Nacrt svjetlarnika kaptacijskog objekta izvora Sv. Ivan kod Buzeta [4]

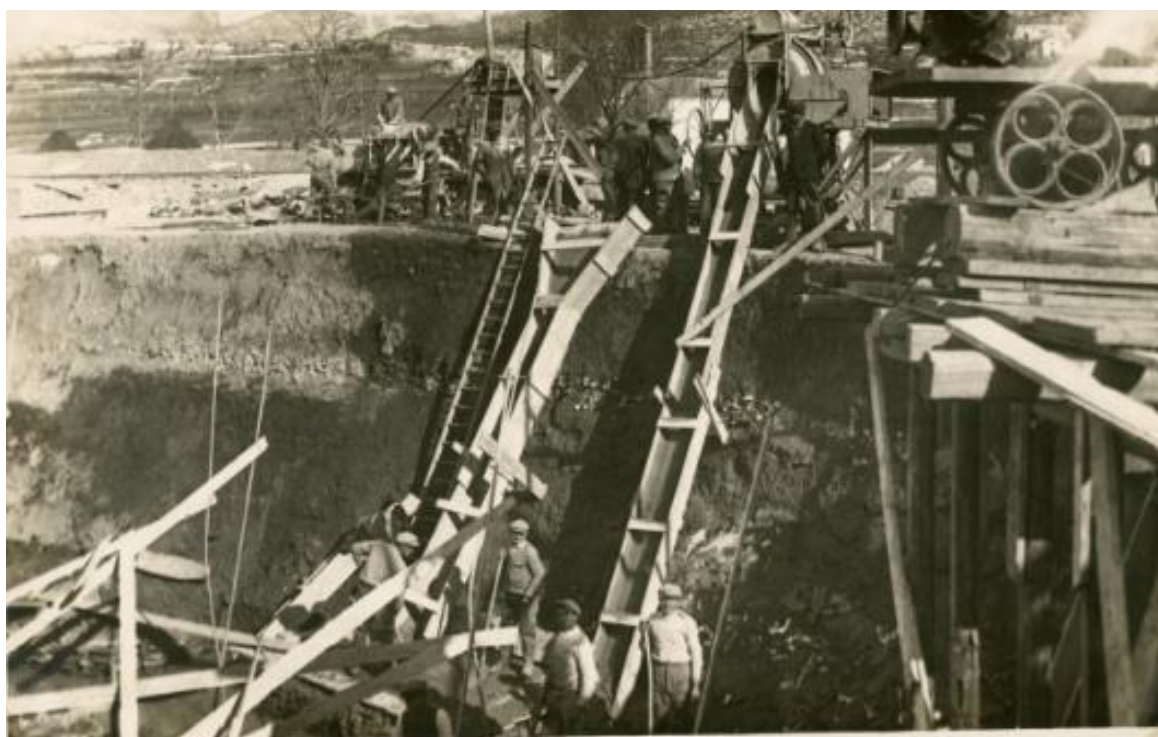
Zbog prevelikih troškova izgradnje cjelokupnog vodovoda, odlučilo se na reduciranje troškova. Kod ove kupole razlozi su bili da je oplata previše složena, složena unutarnja obloga, prevelika količina armature. Također, iz projekta je izostavljen i svjetlarnik.

### 3.2.2. Proces izgradnje kupole

Na slikama 39 i 40, moguće je vidjeti početak pripremih radova, točnije iskope. Radovi na iskopima započeli su u ožujku 1932. godine te su trajali do sredine svibnja. Osim iskopa, u isto vrijeme se uklanjao iskopan materijal, održavanje odvodnje.



Slika 39: Iskopi za temelje kupole [6]



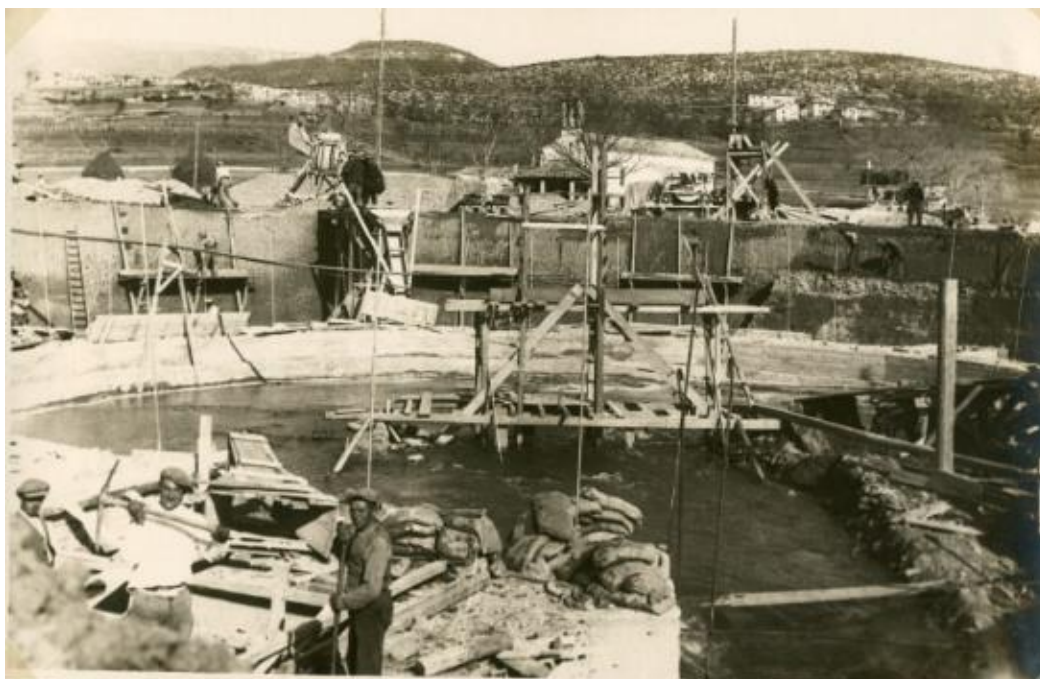
Slika 40: Iskopi za temelje kupole [6]

Uz pripreme radove, počeli su radovi na betoniranju temelja kupole kao što je vidljivo na slici 41. Za betoniranje su se koristile motorne pumpe. Betoniranje temelja trajalo je usporedno s iskopima do 9.svibnja 1932.godine.



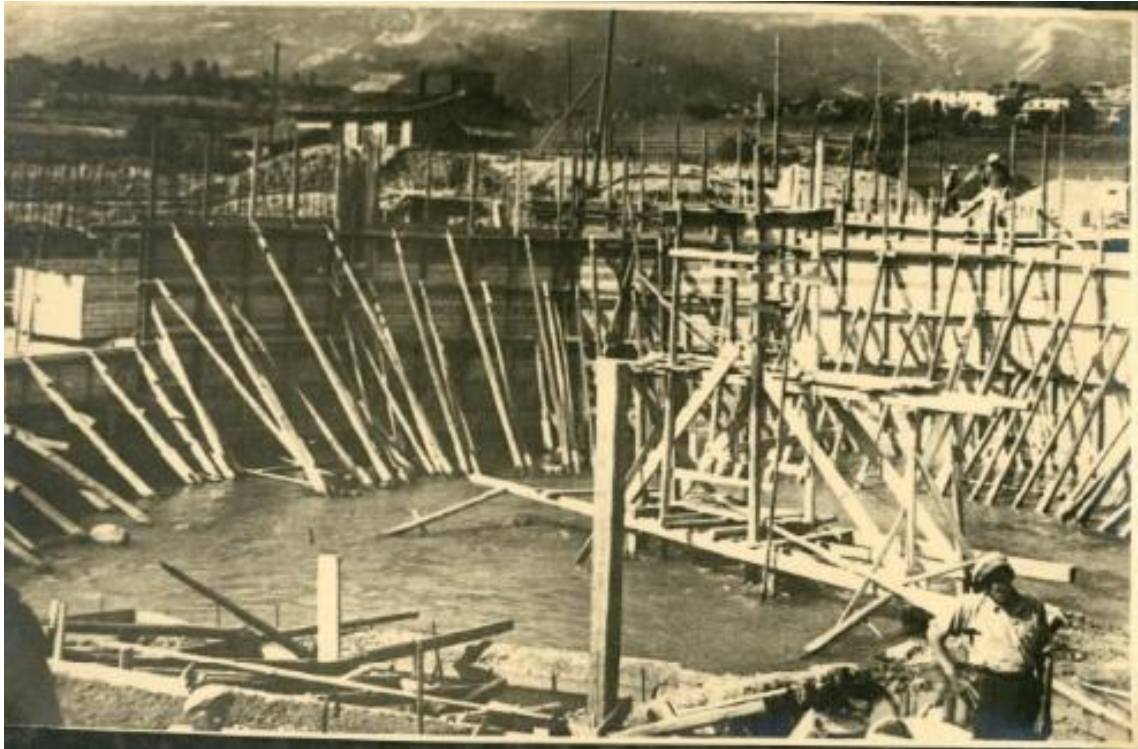
Slika 41: Betoniranje temelja kupole [6]

Nakon betoniranja temelja, započelo je i postavljanje oplata za obodne zidove – oslonce kupole (slika 42). Na slici 43 može se vidjeti postavljena oplata. Slika je od 10.lipnja 1932.godine kada je bila pri kraju postavljena oplata i armatura za zid.



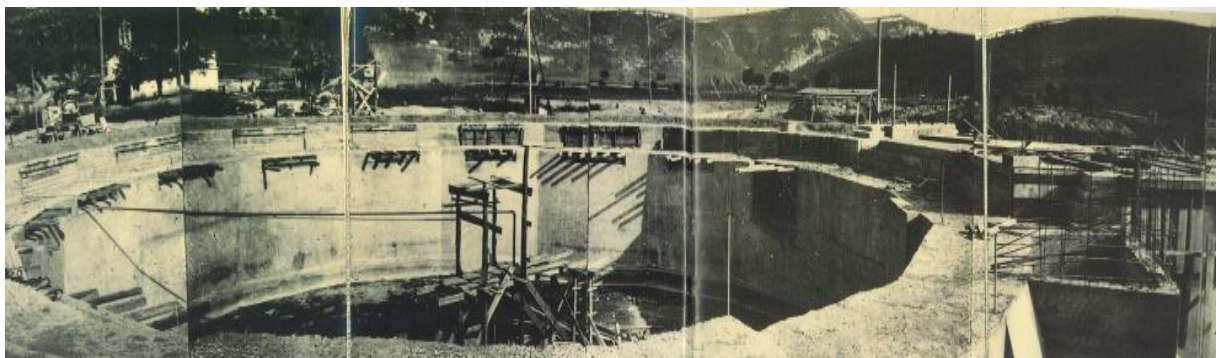
Slika 42: Postavljanje oplata za obodne zidove kupole [6]





Slika 43: Postavljena oplata zida kupole [6]

Na sljedećoj slici (slika 44) moguće je vidjeti izvedeni zid kupole. Slika je nastala 10. srpnja 1932.godine. Osim betoniranja, zid kupole je i ožbukan. Na slici su vidljivi otvori za višak vode, s izvora koji su poslužili kao oslonci za skelu kupole.



Slika 44: Zid kupole [5]

Po završetku betoniranja zida, započelo je postavljanje oplata i armature za samu kupolu. Radovi su trajali otprilike tri mjeseca. Sljedeće slike (slika 45, 46, 47 i 48) prikazuju tijek postavljanja oplata kupole.



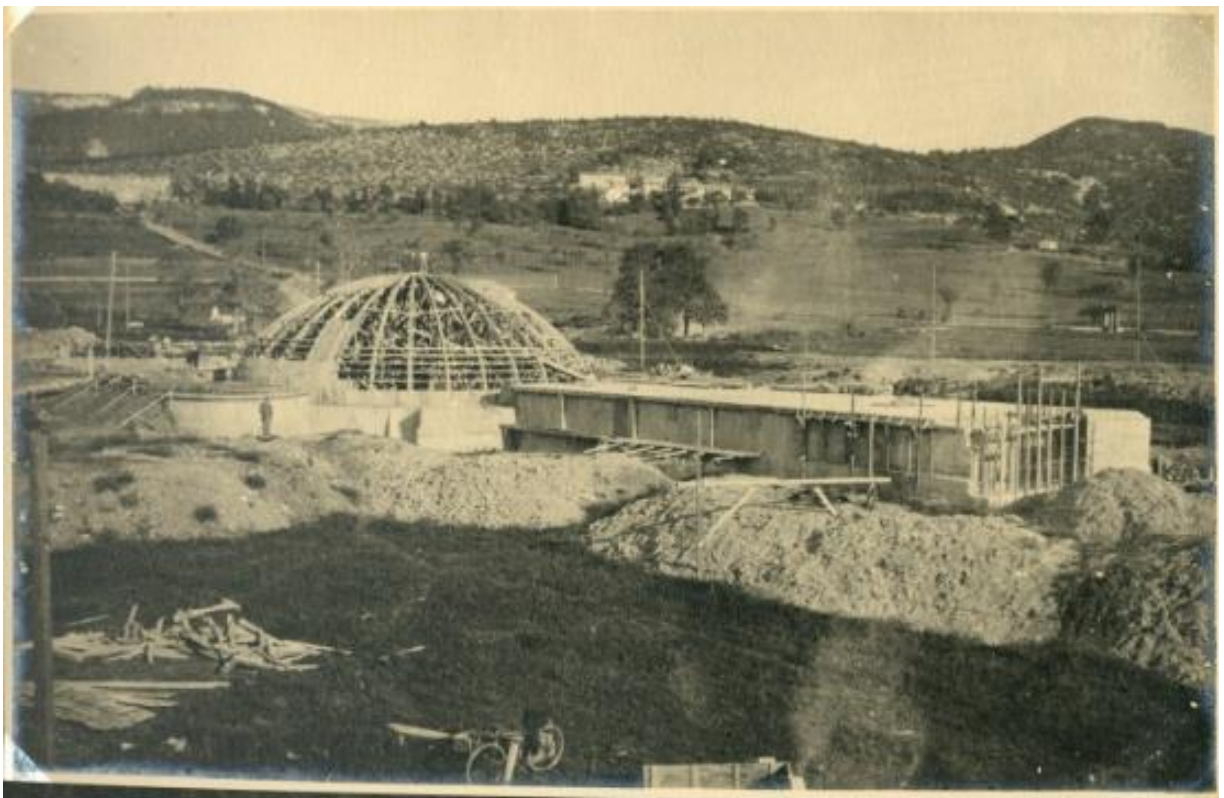
Slika 45: Postavljanje oplata za kupolu [5]



Slika 46: Postavljanje oplata za kupolu [6]



Slika 47: Postavljanje oplata za kupolu [7]



Slika 48: Postavljanje oplata za kupolu [6]

Na slici 49 vidi se kupola s postavljenim velikim dijelom armature.



Slika 49: Postavljanje armature kupole [6]

18. studenog 1932. godine započeto je betoniranje betonskog vlačnog prstena. Radovi su trajali četiri dana (do 22. studenog). I dalje se postavljala armatura za kupolu. 26. studenog započelo je betoniranje kupole te je to trajalo do 30. studenog 1932. godine. (slika 50).



Slika 50: Betoniranje kupole [6]

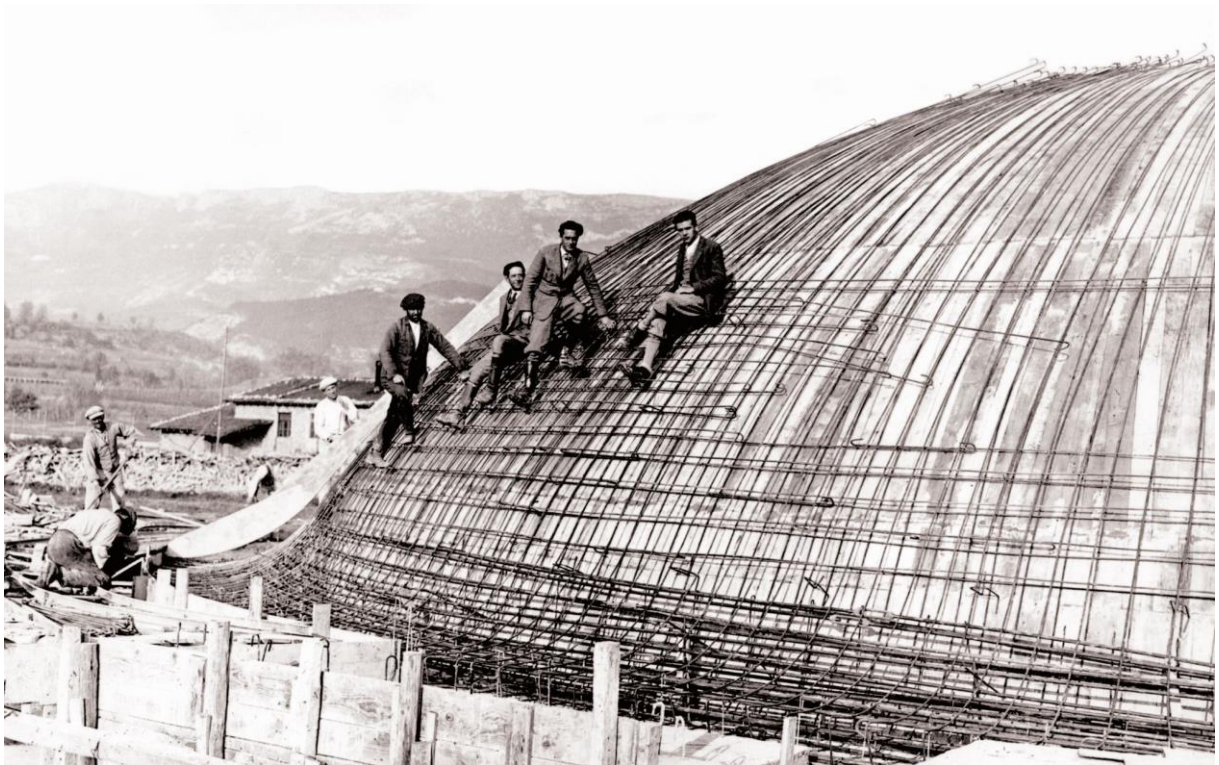
Nakon toga kreće se sa žbukanjem kupole s vanjske strane i postavljanjem oplata za zgradu do kupole. 4. siječnja 1933.godine započinju radovi demontaže oplata kupole. Zatim slijedi žbukanje kupole s unutarnje strane i postavljanje nadsloja zemlje. Na slici 51 moguće je vidjeti konačan izgled kupole s postavljenim zemljanim nadslojem na vrhu.



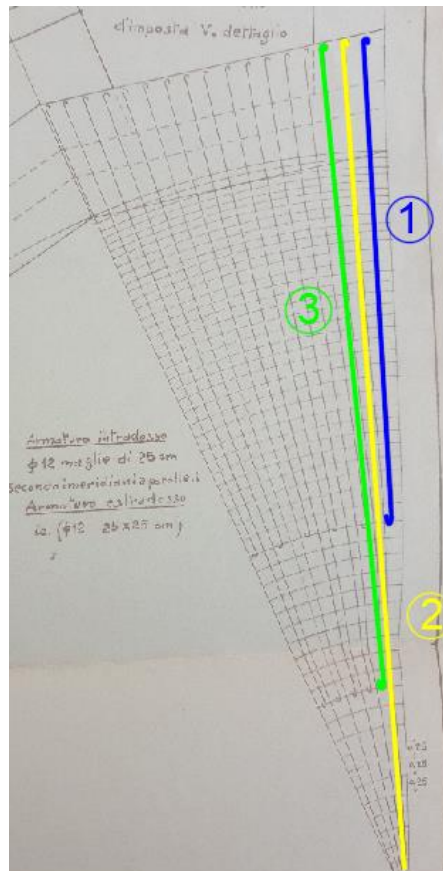
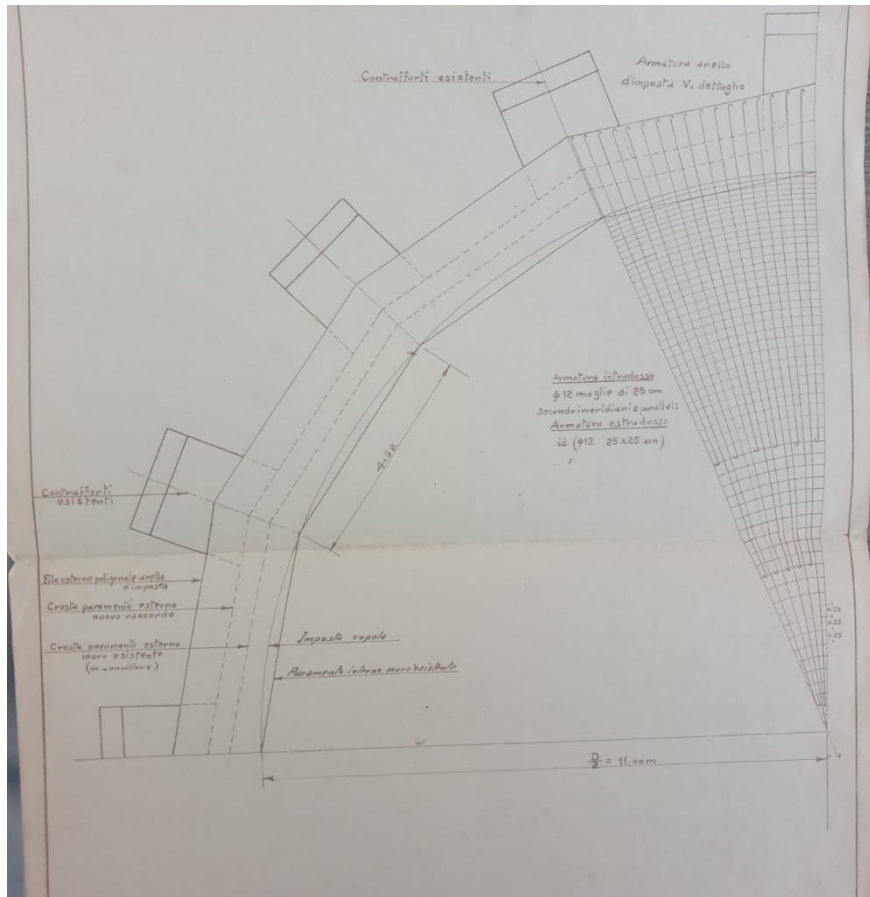
Slika 51: Završena kupola s konačnim slojem zemlje [6]

### 3.3. Armatura kupole

Armatura sferne kupole postavljena je mrežasto, u smjeru paralela i u smjeru meridijana (slika 52). Armatura je postavljena u dva sloja, gornja i donja mreža. Koristila se armatura  $\varnothing 12$  i to tri različite dužine (slika 53). Jedna vrsta šipki bila je po čitavoj duljini kupole (poz 2), druga vrsta je bila nešto kraća (poz 3), a treća još i kraća (poz 1). Ovakav postupak se koristio kako bi bio jednak razmak na svim dijelovima kupole budući da se duljina paralela smanjuje prema vrhu kupole. Sva armatura se postavila na dnu kupole te se postepeno prekidala prema vrhu tako da je na vrhu ostala samo ona najdulja vrsta armature. Razmak armature u smjeru paralela i meridijana uzduž čitave kupole iznosi 25 cm (slika 53). Šipke se sidre kukama.



Slika 52: Armatura kupole [6]

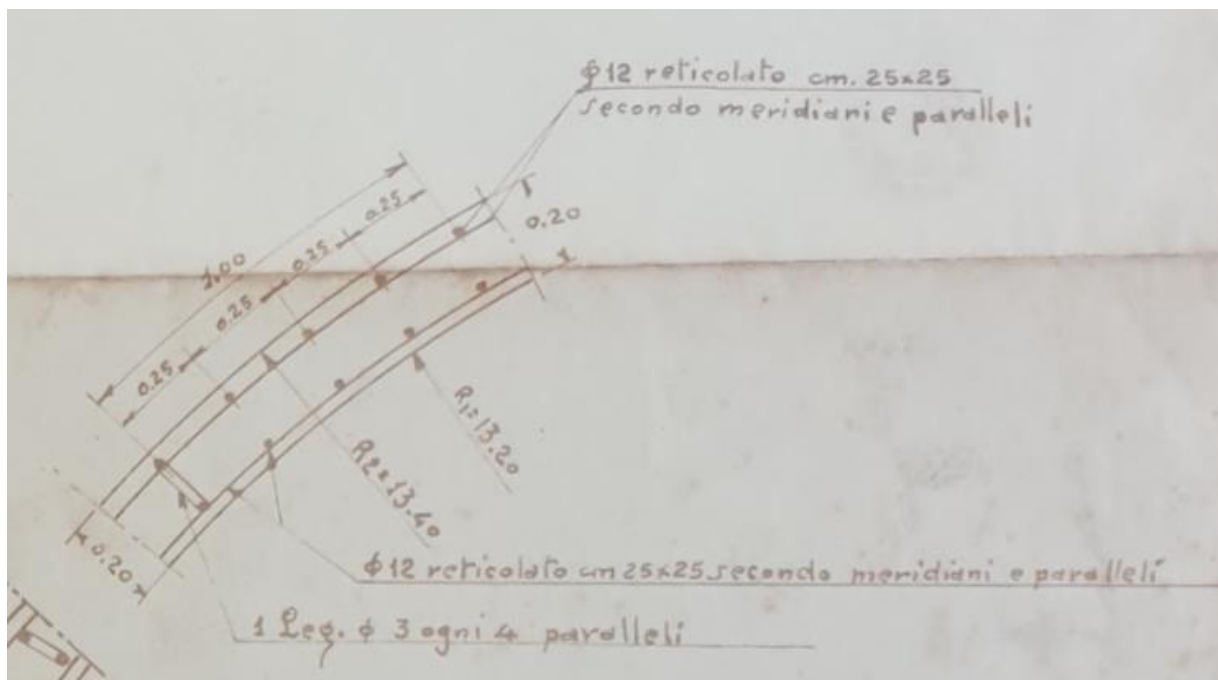


Slika 53: Armatura sferne kupole [4]

Za odvajanje gornje i donje mreže, umetnuti su jahači koji su vidljivi na slici 54.



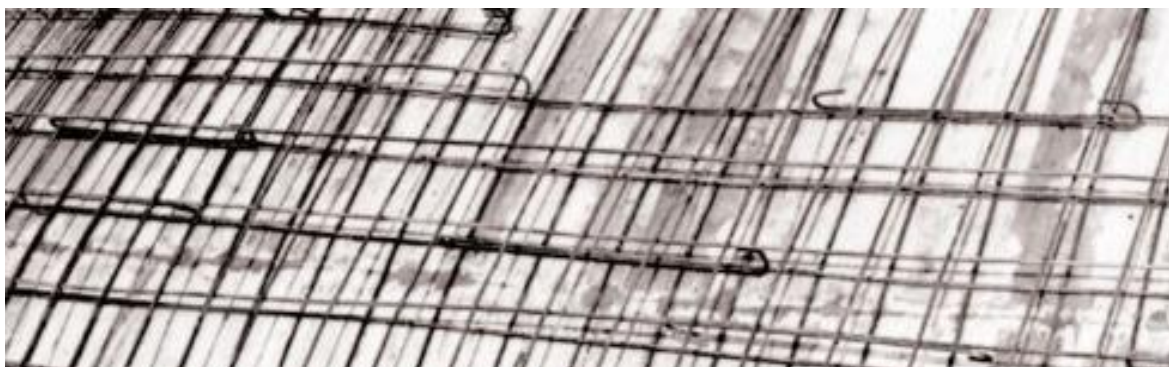
Slika 54: Jahači između gornje i donje armature [6]



Slika 55: Spone između armature (svaka četvrta šipka duž paralele povezana sa φ3 [4]



Armatura kupole koja ide uzduž paralela se nastavljala preklapanjem, šipke završavaju kukama (slika 56). Na osnovu razmaka armature (25 cm) procijenjena je duljina prijeklopa na  $\approx 90$  cm.

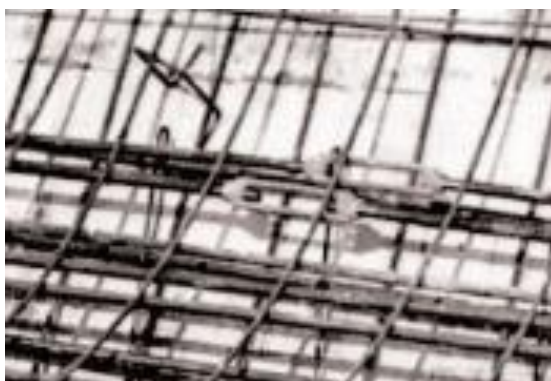


Slika 56: Nastavljanje armature [6]

U vlačnom prstenu kupole, širine 1,0 metar, postavljena je neprekinuta spiralna armatura, 20Ø24. Nastavljanje te armature vrši se s mehaničkim spojnicama (tal. manicotto filettato) prikazano na slikama 57 i 58.

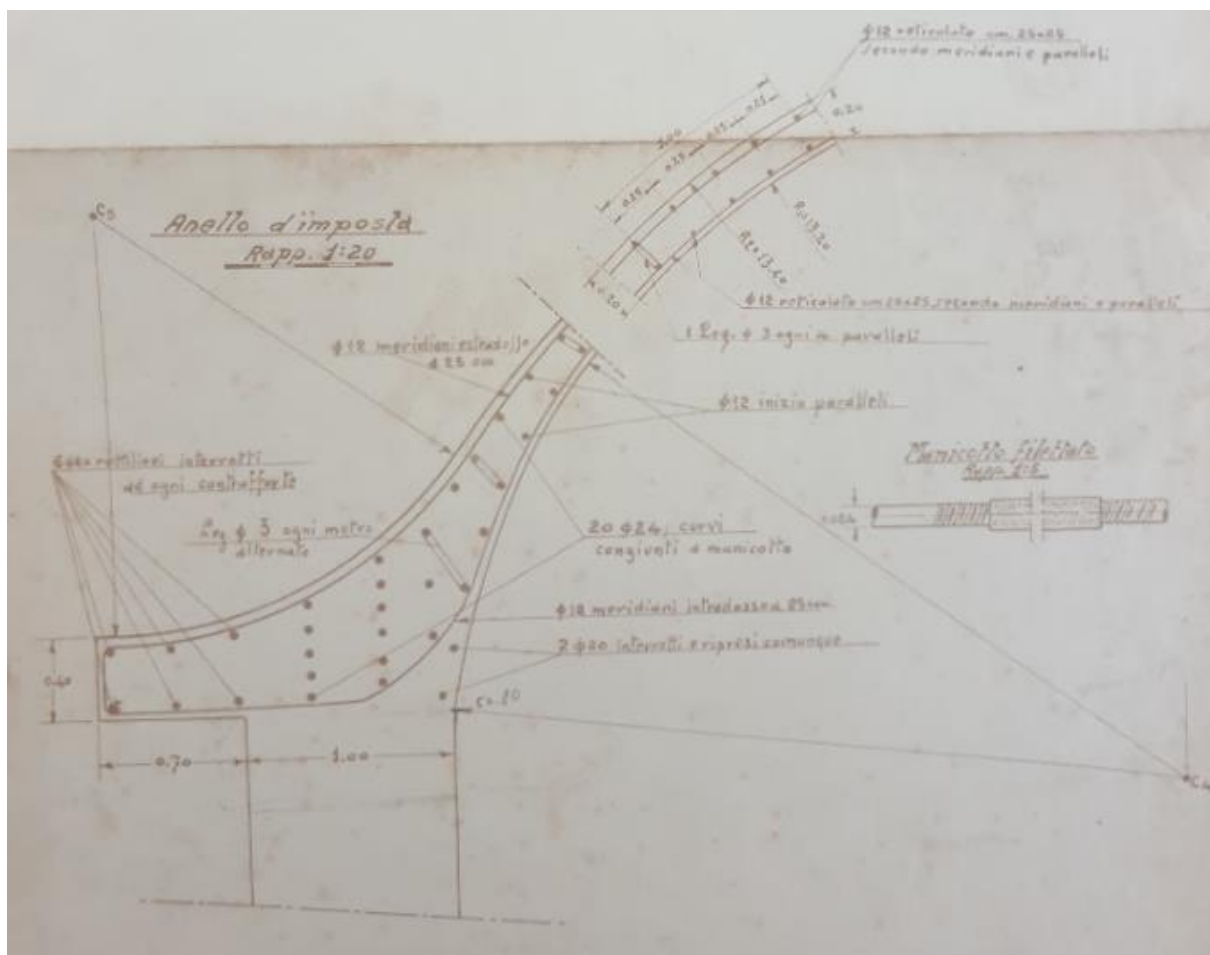


Slika 57: Mehanička spojnica armature u prstenu [4]



Slika 58: Mehanička spojnica armature u prstenu [6]

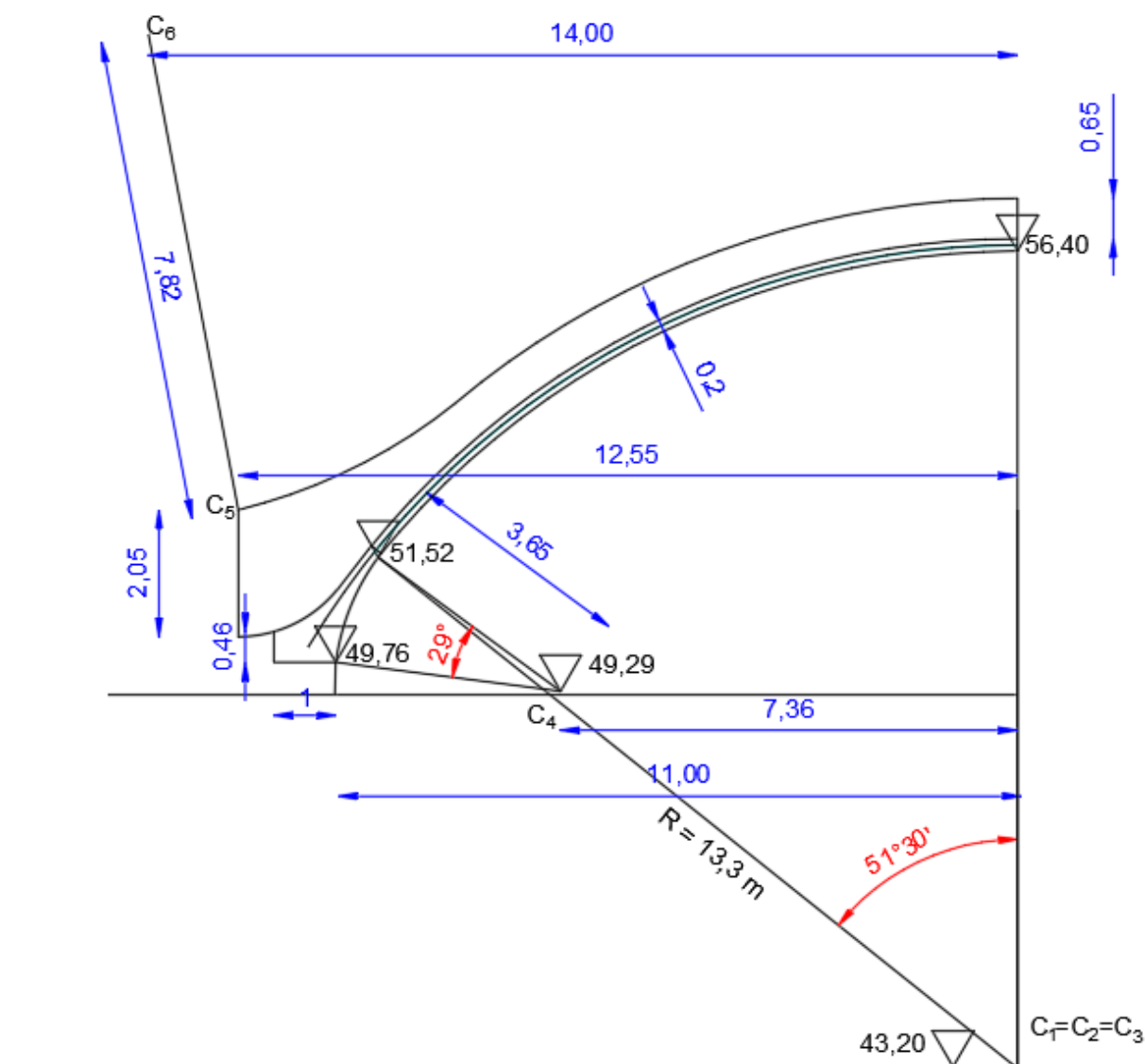
U svakome od 16 kontrafora smještene su ravne šipke,  $6\phi 20$  (nisu kontinuirane) što se može vidjeti na slici 59 zajedno s armaturom čitavog prstena kupole.



Slika 59: Armatura kupole i vlačnog prstena [4]

#### 4. NUMERIČKI PRORAČUN KUPOLE

Na slici 60 prikazan je poprečni presjek armiranobetonske kupole. Promjer središnje osi kupole iznosi 13,3 m dok promjer kupole u bazi iznosi 22,0 m. Debljina kupole je 20 cm te se na njoj nalazi nadsloj zemlje koji varira od 0,65 m (na vrhu kupole) do 2,05 m (na dnu kupole). Na dnu je kupola povezana s vlačnim prstenom, a neposredno uz prsten debljina kupole se postepeno povećava sljedeći različite radijuse na intradosu ( $r_1 = 3,65$  m) i ekstradosu ( $r_2 = 2,05$  m). Vlačni prsten ima širinu od 1,0 m, dok mu je visina na rubu 0,46 m i postepeno se povećava.



Slika 60: Poprečni presjek kupole

## Analiza opterećenja

### Stalno opterećenje

- vlastita težina kupole, $t = 20$ cm	$0,2 \cdot 25 = 5,0 \text{ kN/m}^2$
- nadsloj zemlje, prosječna debljina 0,75 m	$0,75 \cdot 18 = 13,5 \text{ kN/m}^2$
ukupno stalno	$g = 18,5 \text{ kN/m}^2$

### Promjenjivo opterećenje

- korisno	$q = 5,0 \text{ kN/m}^2$
-----------	--------------------------

Proračun unutarnjih sila u kupoli (meridijalna sila, prstenasta sila te moment savijanja) i sile u vlačnom prstenu proveden je na nekoliko modela:

- Model 0: proračun prema izrazima danim u poglavlju 2.2 i 2.3. (membranska teorija ljuske s uključenim utjecajem rubnom prstena)
- Model 1: numerički proračun u STAAD.Pro programskom paketu gdje je kupola modelirana pločastim konačnim elementima, a vlačni prsten grednim konačnim elementima
- Model 2: numerički proračun u STAAD.Pro programskom paketu gdje je kupola modelirana pločastim konačnim elementima, a vlačni prsten grednim konačnim elementima pri čemu je spoj ostvaren naredbom „offset“
- Model 3: numerički proračun u STAAD.Pro programskom paketu gdje je kupola modelirana pločastim konačnim elementima, a vlačni prsten prostornim konačnim elementima.

Usporedba modela najprije je provedena za jednoliko raspodijeljeno opterećenje u iznosu od  $5,0 \text{ kN/m}^2$

#### 4.1. Model 0

##### Ulazni podaci

Radijus:  $R = a = 13,3$  m

Debljina kupole:  $h = t = 0,2$  m

Kut:  $\alpha = 58^\circ$

Visina rubne grede:  $h = 0,5$  m

Širina rubne grede:  $b = 1,0$  m

Opterećenje:  $q = 5$  kN/m<sup>2</sup>

Modul elastičnosti:  $E = 30\,000$  MPa

Poissonov koeficijent:  $\nu = 0,2$

$y_0 = 0,1974$  m

$e = -0,052$  m

$r = 11,28$  m

$$\lambda^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{R}{t}\right)^2 = 10,623$$

Prema izrazima danim u poglavlju 2.3 proračunani su potrebni koeficijenti fleksibilnosti koji su prikazani u tablici 2 i 3.

*Tablica 2: Koeficijenti fleksibilnosti za kupolu i prsten*

$D_{11}^D$	1016,135	1/E
$D_{12}^D = D_{21}^D$	957,0583	1/E
$D_{22}^D$	1802,832	1/E

$D_{11}^R$	730,327	1/E
$D_{12}^R$	-2410,81	1/E
$D_{22}^R$	12212,81	1/E

$D_{10}^D$	954,2059	1/E
$D_{20}^D$	620,3472	1/E
$D_{10}^R$	-411,504	1/E
$D_{20}^R$	-27604	1/E

Tablica 3: Konačni koeficijenti

D <sub>11</sub>	1746,462	1/E
D <sub>12</sub>	-1453,75	1/E
D <sub>22</sub>	14015,64	1/E
D <sub>10</sub>	542,7021	1/E
D <sub>20</sub>	-26983,6	1/E

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo nepoznate veličine – silu H i moment savijanja  $M_\alpha$ :

$$H = 1,414 \text{ kN} \quad M_\alpha = 2,072 \text{ kNm}$$

Za odrediti polje savijanja u kupoli, potrebno je koristiti sljedeće pomoćne numeričke vrijednosti prikazane u tablici 4

Tablica 4: Pomoćne numeričke vrijednosti

Kut $\varphi$	$\psi = \alpha - \varphi$	$\sin \lambda \psi$	$\sin (\lambda \psi + \pi/4)$	$\sin (\lambda \psi - \pi/2)$	$\sin (\lambda \psi - \pi/4)$	$\cot (\alpha - \psi)$	$e^{-\lambda \psi}$
0	58	-0,971	-0,856	0,239	-0,517	-	0,000
10	48	0,501	-0,257	0,865	0,966	5,671	0,000
20	38	0,691	1,000	-0,723	-0,023	2,747	0,001
30	28	-0,887	-0,302	-0,461	-0,953	1,732	0,006
40	18	-0,195	-0,831	0,981	0,556	1,192	0,036
50	8	0,996	0,766	-0,087	0,643	0,839	0,227
51	7	0,963	0,872	-0,270	0,490	0,810	0,273
52	6	0,897	0,947	-0,442	0,321	0,781	0,329
53	5	0,800	0,990	-0,600	0,141	0,754	0,396
54	4	0,676	0,999	-0,737	-0,044	0,727	0,476
55	3	0,528	0,974	-0,849	-0,227	0,700	0,573
56	2	0,362	0,915	-0,932	-0,403	0,675	0,690
57	1	0,184	0,825	-0,983	-0,565	0,649	0,831
57,5	0,5	0,093	0,770	-0,996	-0,639	0,637	0,911
58	0	0,000	0,707	-1,000	-0,707	0,625	1,000

Vrijednosti moment savijanja i membranskih sila u kupoli uslijed utjecaja rubne grede prikazani su u tablici 5 (tzv. korekcije).

Tablica 5: Momenti savijanja i sile u kupoli

KOREKCIJE			
Kut $\varphi$	$M_{\varphi}$ [kNm/m]	$N_{\theta}$ [kN/m]	$N_{\varphi}$ [kN/m]
0	0,00	0,00	-
10	0,00	-0,01	0,00
20	0,00	0,02	-0,01
30	-0,01	0,33	0,04
40	-0,10	-1,87	-0,01
50	0,85	-6,75	-0,84
51	1,09	-4,79	-0,89
52	1,36	-1,55	-0,90
53	1,62	3,27	-0,86
54	1,88	9,99	-0,75
55	2,09	18,88	-0,55
56	2,23	30,21	-0,24
57	2,24	44,13	0,19
57,5	2,18	52,07	0,45
58	2,07	60,64	0,75

Može se primijetiti kako je utjecaj rubne grede na unutarnje sile u kupoli iznimno lokaliziran, te se javlja samo neposredno na rubu za  $\varphi > 50^{\circ}$ .

Tablica 6: Moment savijanja i sile u kupoli prema membranskoj teoriji

MEMBRANSKA TEORIJA			
Kut $\varphi$	$M$ [kNm/m]	$N_{\theta}$ [kN/m]	$N_{\varphi}$ [kN/m]
0	0,00	-33,25	-33,25
10	0,00	-31,99	-33,50
20	0,00	-28,21	-34,28
30	0,00	-21,95	-35,64
40	0,00	-13,29	-37,65
50	0,00	-2,27	-40,48
51	0,00	-1,04	-40,81
52	0,00	0,22	-41,16
53	0,00	1,49	-41,52
54	0,00	2,79	-41,88
55	0,00	4,12	-42,26
56	0,00	5,46	-42,65
57	0,00	6,83	-43,05
57,5	0,00	7,53	-43,26
58	0,00	8,23	-43,47

U posljednjem koraku potrebno je superponirati vrijednosti dobivene zbog utjecaja grede i vrijednosti iz membranske teorije. Rezultati su prikazani u tablici 7.

*Tablica 7: Ukupni moment savijanja i sile u kupoli*

Kut $\varphi$	$M_{\varphi}$ [kNm/m]	$N_{\theta}$ [kN/m]	$N_{\varphi}$ [kN/m]
0	0,00	-33,25	-33,25
10	0,00	-31,99	-33,51
20	0,00	-28,19	-34,29
30	-0,01	-21,62	-35,59
40	-0,10	-15,16	-37,67
50	0,85	-9,01	-41,32
51	1,09	-5,82	-41,70
52	1,36	-1,33	-42,06
53	1,62	4,77	-42,38
54	1,88	12,78	-42,63
55	2,09	23,00	-42,81
56	2,23	35,68	-42,89
57	2,24	50,96	-42,86
57,5	2,18	59,59	-42,81
58	2,07	68,86	-42,72



Vrijednosti membranskih sila i momenata savijanja za proračunsku situaciju djelovanja ( $1,35 g + 1,5 q = 32,475 \text{ kN/m}^2$ ) prikazani su u tablici 8.

Tablica 8: Moment savijanja i sile u kupoli za proračunsku kombinaciju djelovanja

KOREKCIJE			
Kut $\varphi$	$M_{\phi}$ [kNm/m]	$N_{\theta}$ [kN/m]	$N_{\phi}$ [kN/m]
0	0,00	0,00	-
10	0,00	-0,06	-0,02
20	0,02	0,11	-0,04
30	-0,08	2,14	0,29
40	-0,63	-12,16	-0,08
50	5,51	-43,83	-5,43
51	7,10	-31,08	-5,78
52	8,80	-10,05	-5,86
53	10,54	21,26	-5,59
54	12,20	64,86	-4,86
55	13,58	122,66	-3,55
56	14,46	196,24	-1,56
57	14,54	286,62	1,22
57,5	14,17	338,17	2,93
58	13,46	393,84	4,87

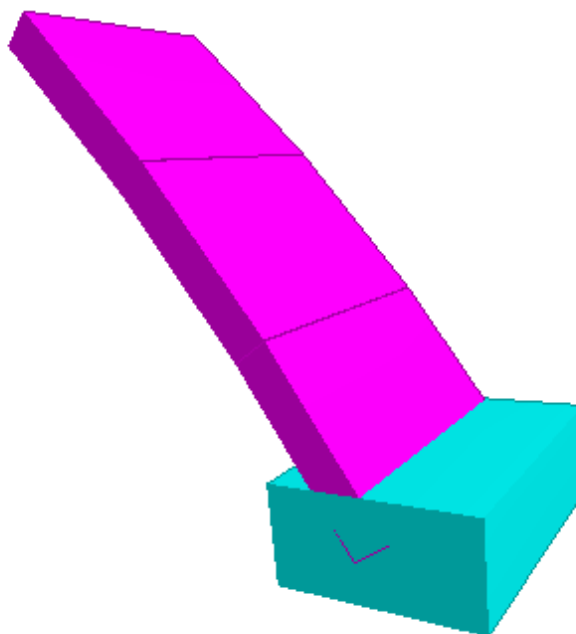
Kut $\varphi$	$M_{\phi}$ [kNm/m]	$N_{\theta}$ [kN/m]	$N_{\phi}$ [kN/m]
0	0,00	-215,96	-215,96
10	0,00	-207,81	-217,63
20	0,02	-183,09	-222,71
30	-0,08	-140,45	-231,18
40	-0,63	-98,46	-244,65
50	5,51	-58,54	-268,34
51	7,10	-37,81	-270,87
52	8,80	-8,63	-273,19
53	10,54	30,97	-275,24
54	12,20	83,01	-276,89
55	13,58	149,40	-278,03
56	14,46	231,73	-278,58
57	14,54	331,00	-278,41
57,5	14,17	387,06	-278,03
58	13,46	447,27	-277,45

MEMBRANSKA TEORIJA			
Kut $\varphi$	M [kNm/m]	$N_{\theta}$ [kN/m]	$N_{\phi}$ [kN/m]
0	0,00	-215,96	-215,96
10	0,00	-207,74	-217,61
20	0,00	-183,20	-222,67
30	0,00	-142,59	-231,46
40	0,00	-86,30	-244,57
50	0,00	-14,71	-262,92
51	0,00	-6,72	-265,09
52	0,00	1,42	-267,33
53	0,00	9,71	-269,64
54	0,00	18,15	-272,03
55	0,00	26,74	-274,48
56	0,00	35,49	-277,01
57	0,00	44,38	-279,62
57,5	0,00	48,89	-280,96
58	0,00	53,43	-282,31

## 4.2. Numerički modeli u STAAD.Pro programskom paketu

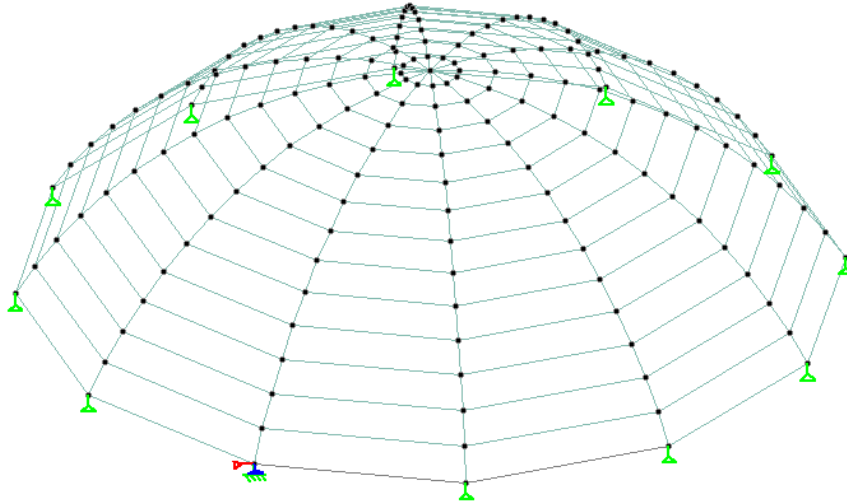
### 4.2.1. Model 1

U prvom modelu kupola se sastoji od četveročvornih pločastih elemenata (uz iznimku u tjemenu kupole gdje su korišteni trokutni konačni elementi) te od grednih konačnih elemenata u podnožju kojima je simuliran vlačni prsten. Vlačni prsten je modeliran kao greda pravokutnog poprečnog presjeka. Širina prstena iznosi 1,0 m, a za visinu je usvojena srednja vrijednost od 0,5 m. U ovom slučaju kupola završava u težištu vlačnog prstena. Oslonci se kod ovog slučaja nalaze upravo u težištu vlačnog prstena. Svi su oslonci modelirani kao vertikalni pomični oslonci, osim jednog čvora u kojem su dodatno spriječene i horizontalne komponente pomaka te kutevi zaokreta.

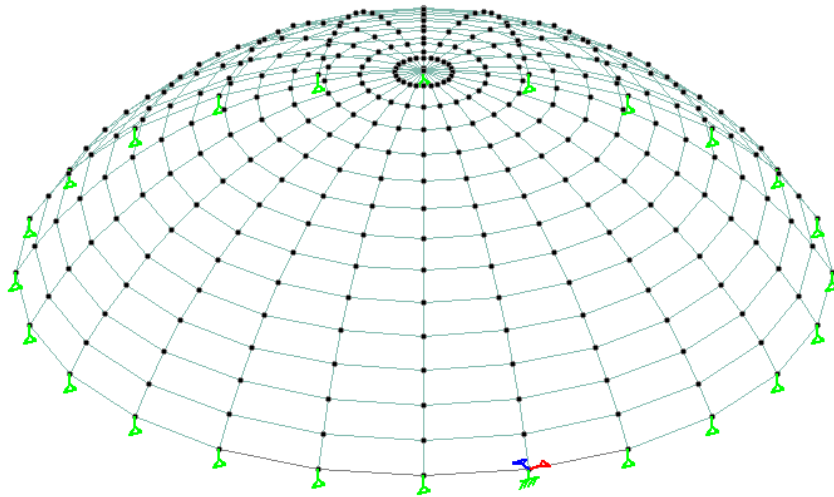


Slika 61: Odsječak dijela kupole i prstena u Modelu 1

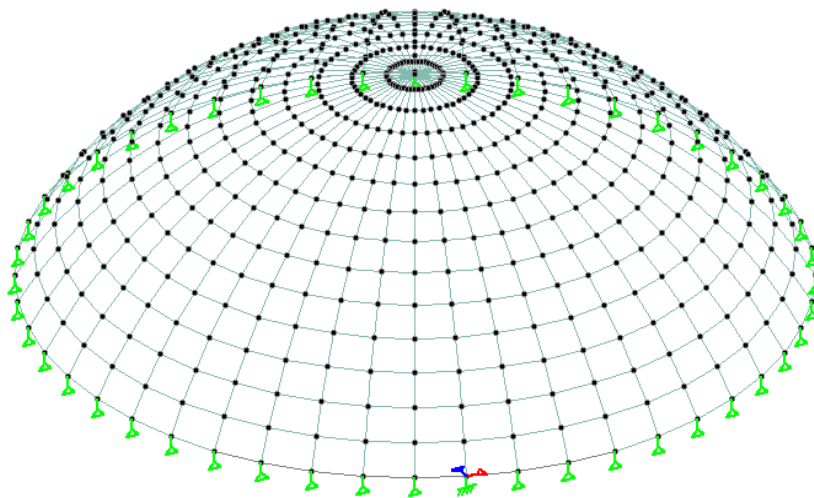
Kako bi ustanovili koji je optimalan broj konačnih elemenata provedena je parametarska analiza u kojoj je variran broj konačnih elemenata duž prstena (paralela) – analizirane su mreže sa 12, 24, 48 i 96 elemenata za opterećenje od 5,0 kN/m<sup>2</sup>.



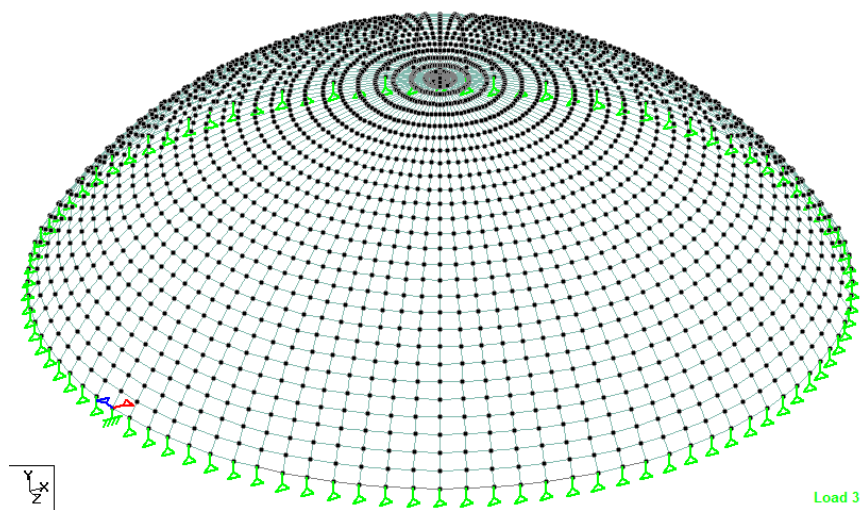
Slika 64: Model 1 - kupola s 12 konačnih elemenata u prstenu



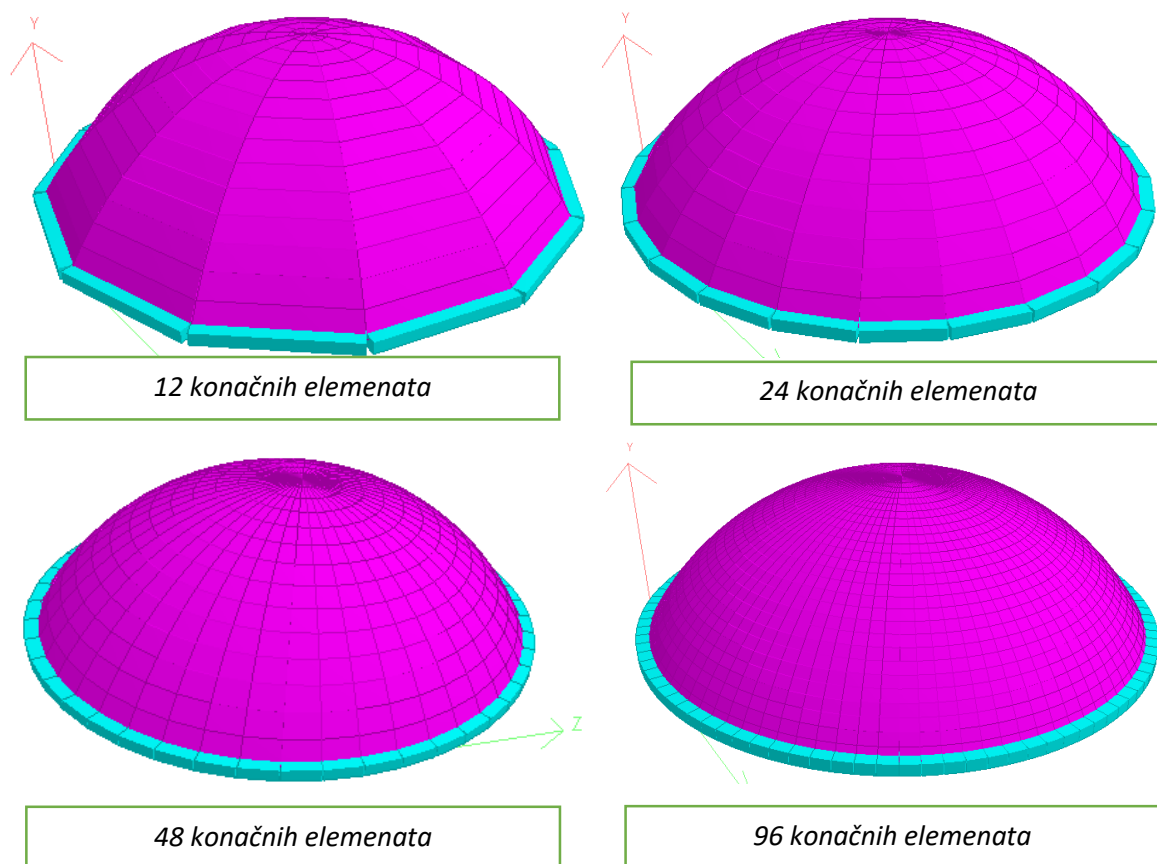
Slika 63: Model 1 - kupola s 24 konačnih elemenata u prstenu



Slika 62: Model 1 - kupola s 48 konačnih elemenata u prstenu

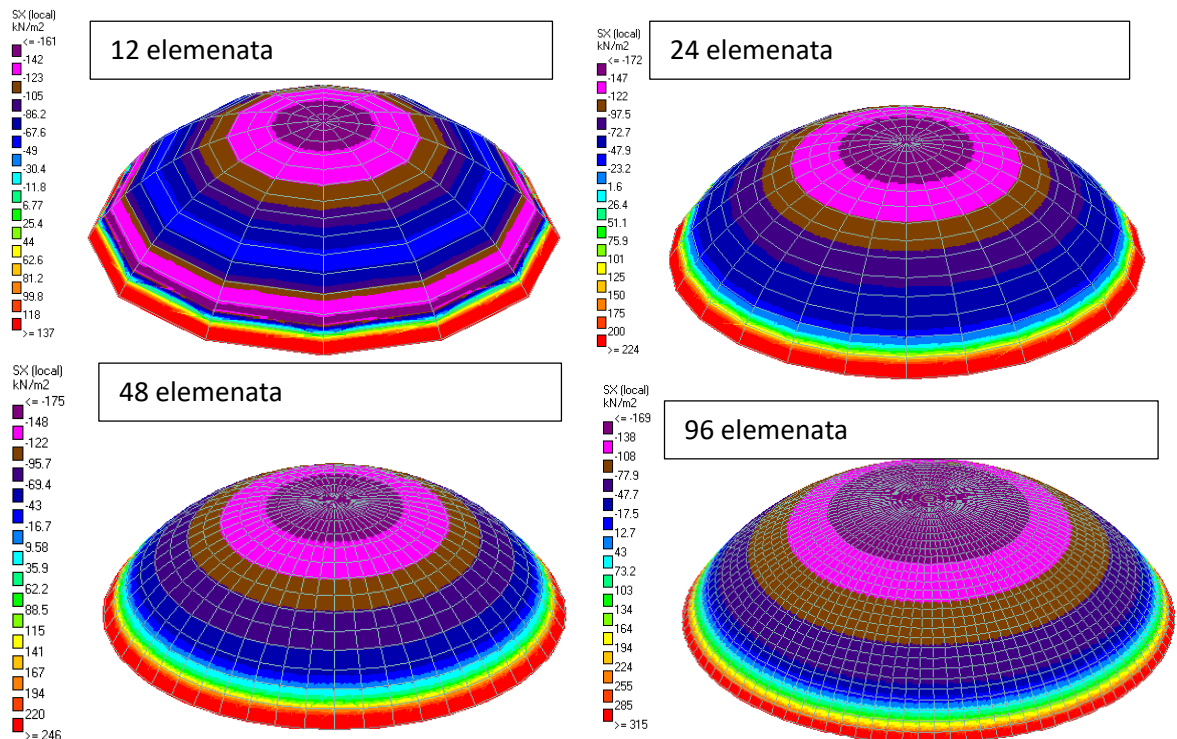


Slika 65: Model 1 - kupola sa 96 konačnih elemenata u prstenu

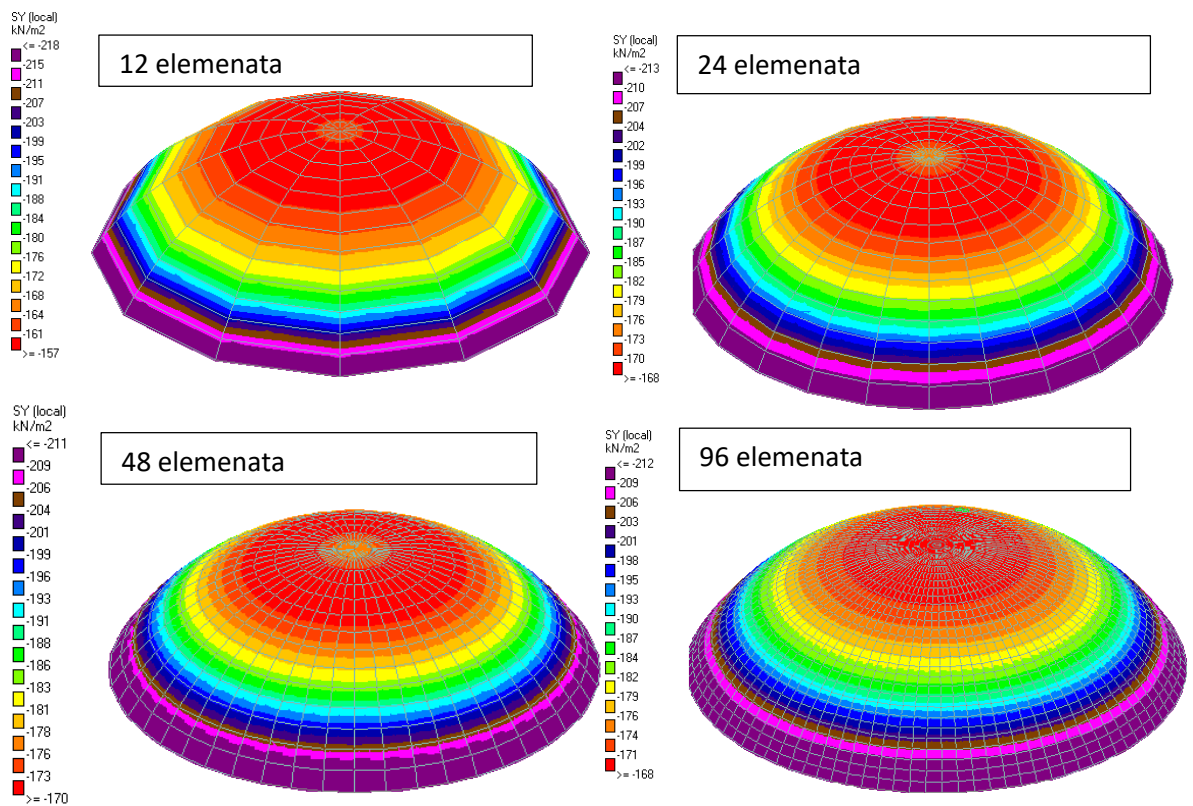


Slika 66: 3D prikaz modela 1 s 12, 24, 48 i 96 konačnih elemenata u prstenu

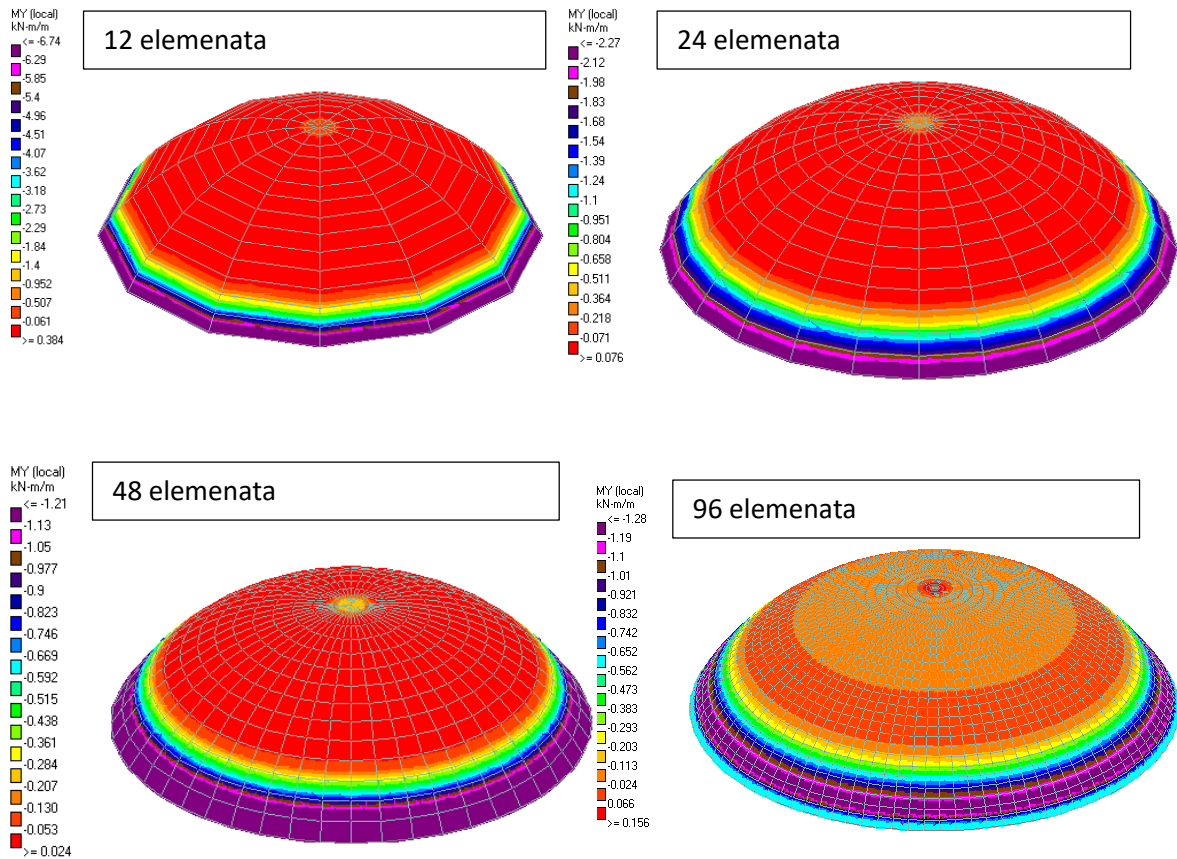
Na slikama u nastavku prikazani su rezultati numeričkih analiza za različit broj konačnih elemenata duž paralela.



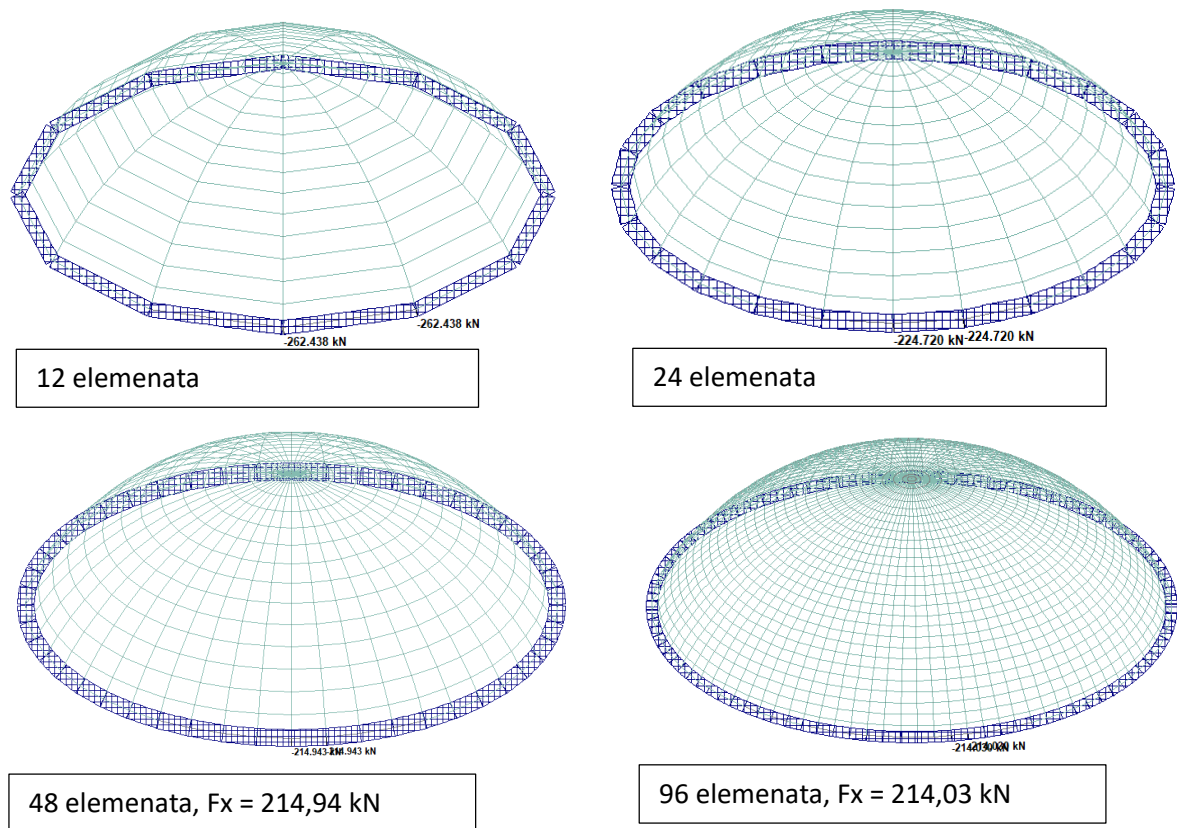
Slika 67: Model 1 - Naprezanja u kupoli u prstenastom smjeru



Slika 68: Model 1 - Naprezanja u kupoli u meridijalnom smjeru



Slika 69: Model 1 - Momenti savijanja u meridijalnom smjeru

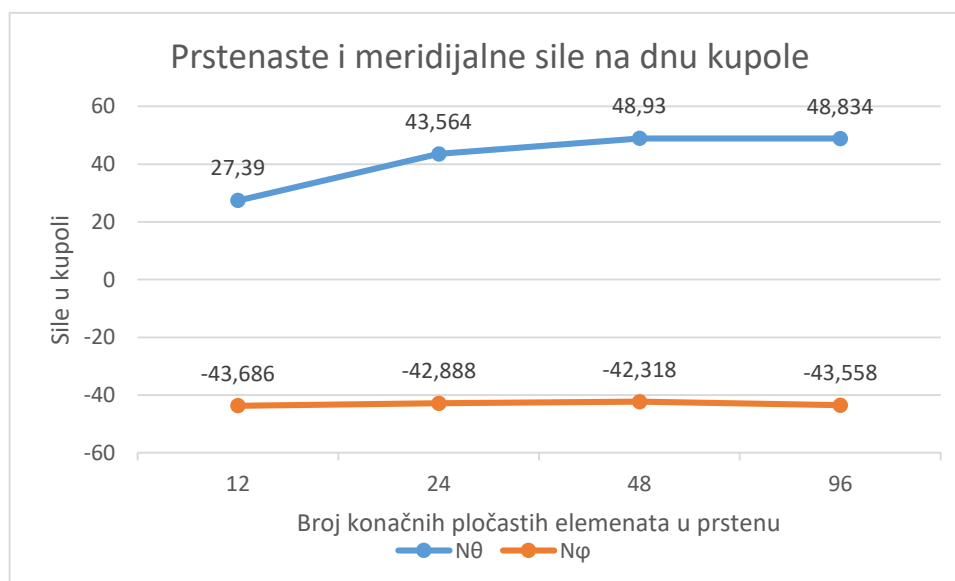


Slika 70: Sile u vlačnom prstenu

Dobiveni su sljedeći rezultati sila u vlačnom prstenu te sila u kupoli za model 1. Rezultati prstenaste i meridijalne sile za kupolu sa 96 konačnih pločastih elemenata u prstenu su očitani iz najdonjeg elementa (na vrhu elementa), a za ostale kupole su očitani također iz najdonjeg elementa, ali u središtu elementa. Očitani su rezultati na visini od 0,5 m od vlačnog prstena.

Tablica 9: Ukupne sile u vlačnom prstenu i sile u kupoli

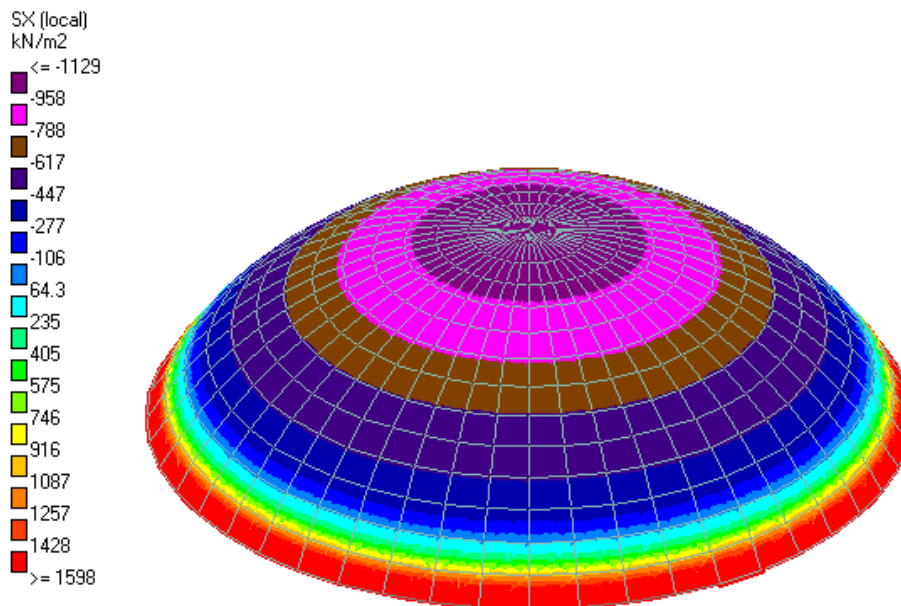
	q = 5 kN/m <sup>2</sup>							
	96		48		24		12	
	Dno kupole	Tjeme kupole	Dno kupole	Tjeme kupole	Dno kupole	Tjeme kupole	Dno kupole	Tjeme kupole
<b>F<sub>x</sub> - sila u vlačnom prstenu [kN]</b>	214,03		214,94		224,72		262,44	
<b>S<sub>x</sub> - Prstenasta sila u kupoli [kN/m']</b>	48,83	-33,74	48,93	-34,27	43,56	-33,70	27,39	-31,49
<b>S<sub>y</sub> - meridijalna sila u kupoli [kN/m']</b>	-43,56	-33,68	-42,32	-34,61	-42,89	-34,04	-43,69	-31,83
<b>M<sub>y</sub> [kNm/m']</b>	-1,27	-0,01	-1,26	-0,38	-2,27	-0,38	-6,74	-0,38



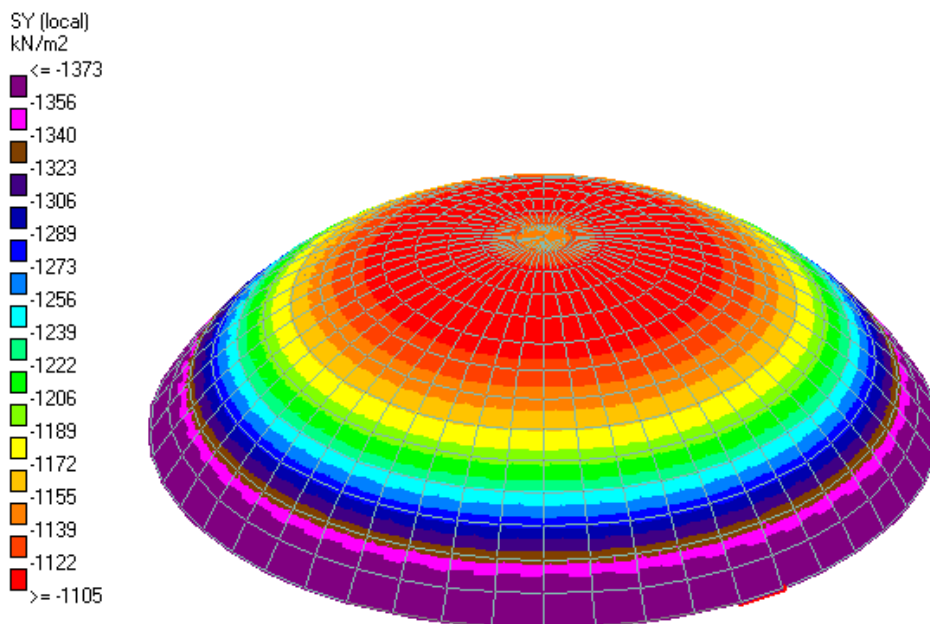
Slika 71: Usporedba prstenaste i meridijalne sile na dnu kupole povećanjem broja konačnih pločastih elemenata u prstenu

Iz tablice 9 je moguće zaključiti kako se vlačna sila u prstenu znatno razlikuje ovisno o gustoći mreže – smanjuje se što je mreža gušća. Prstenaste sile su na dnu kupole vlačne dok su na vrhu tlačne (mijenja se predznak na kutu od 51° 49'). Meridijalne sile su duž cijele kupole u tlaku te se povećavaju s vrha na dno kupole. Može se zaključiti kako ne postoje značajna odstupanja rezultata između mreža s podjelom na 48 i 96 konačnih elemenata u prstenastom smjeru, te se stoga u nastaku rada koristi mreža s podjelom na 48 elemenata.

Proračunska kombinacija opterećenja je  $1,35 \cdot VLASTITA TEŽINA + 1,35 \cdot SLOJ ZEMLJE + 1,5 \cdot KORISNO OPTEREĆENJE$

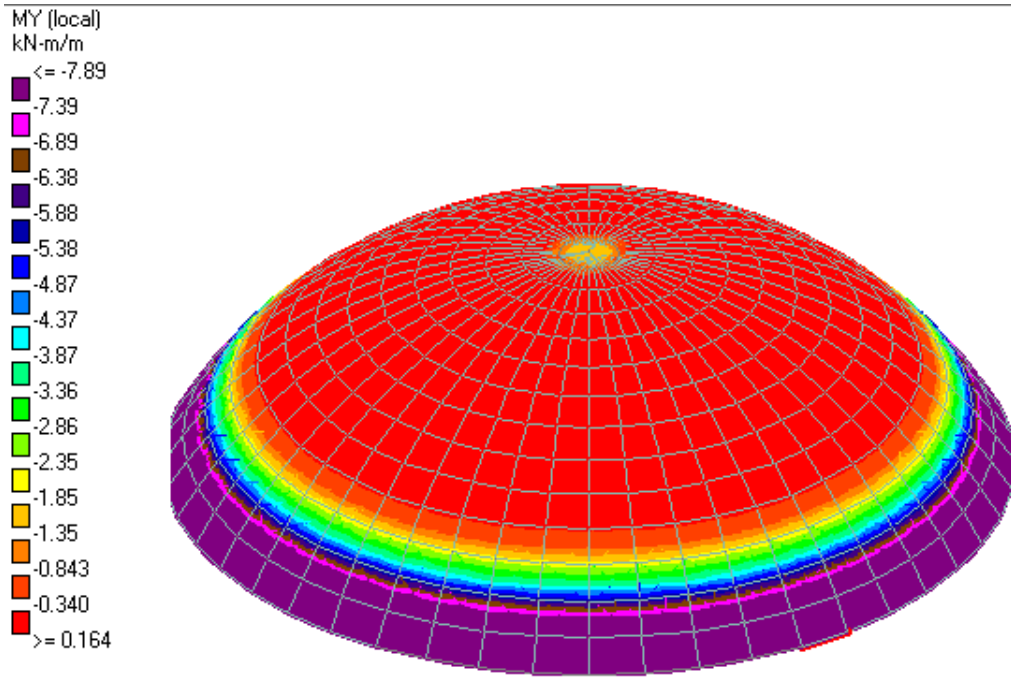


Slika 72: Model 1 - naprezanja u kupoli u prstenastom smjeru (kombinacija opterećenja)

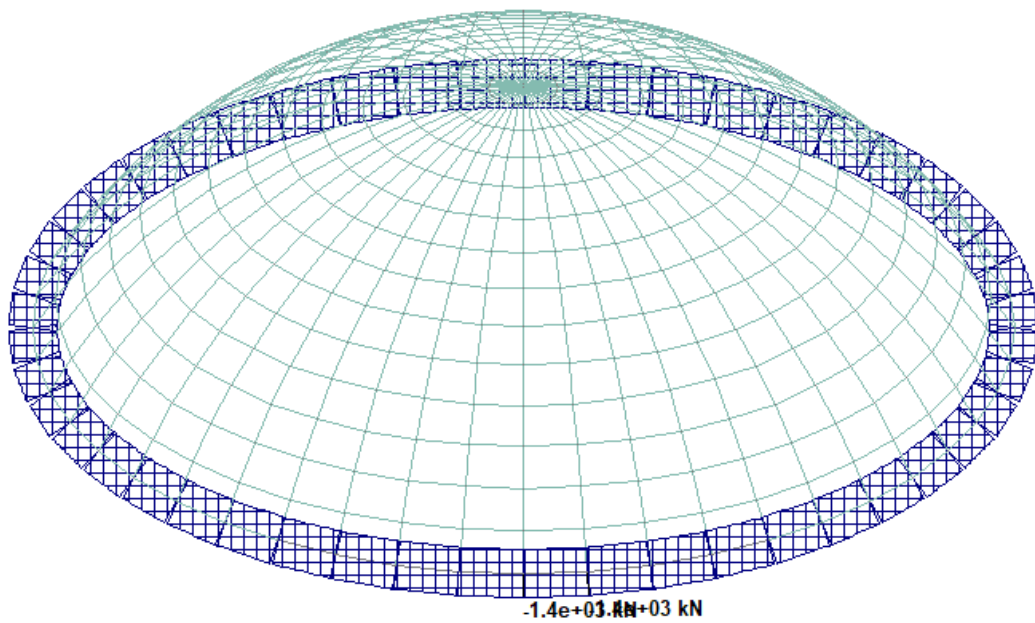


Slika 73: Model 1 - naprezanja u kupoli u meridijalnom smjeru (kombinacija opterećenja)





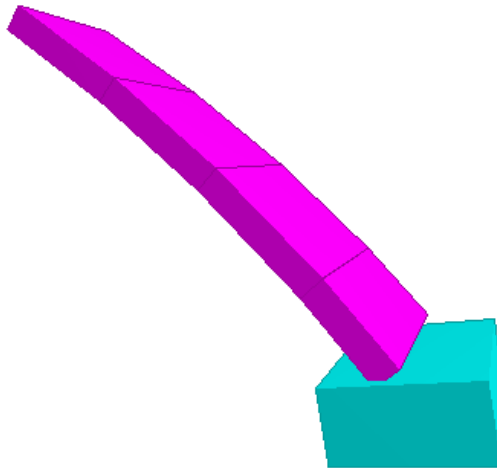
Slika 74: Model 1 - momenti savijanja u meridijalnom smjeru (kombinacija opterećenja)



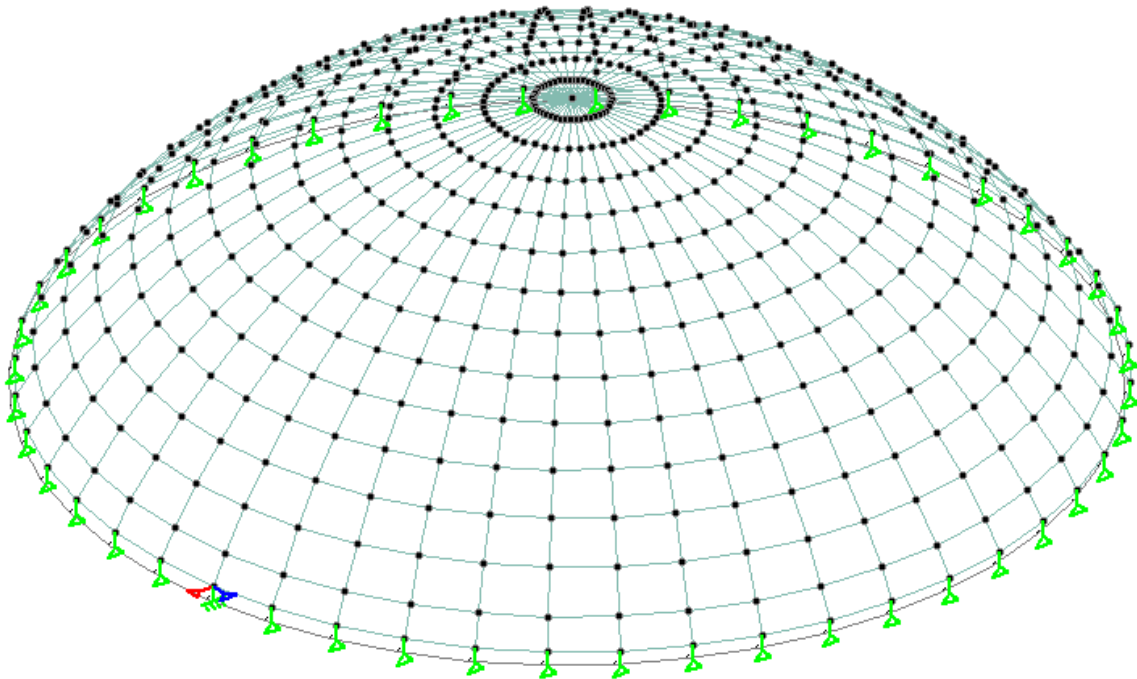
Slika 75: Model 1 - vlačna sila u prstenu (kombinacija opterećenja),  $F_x = 1398,17 \text{ kN}$

#### 4.2.2. Model 2

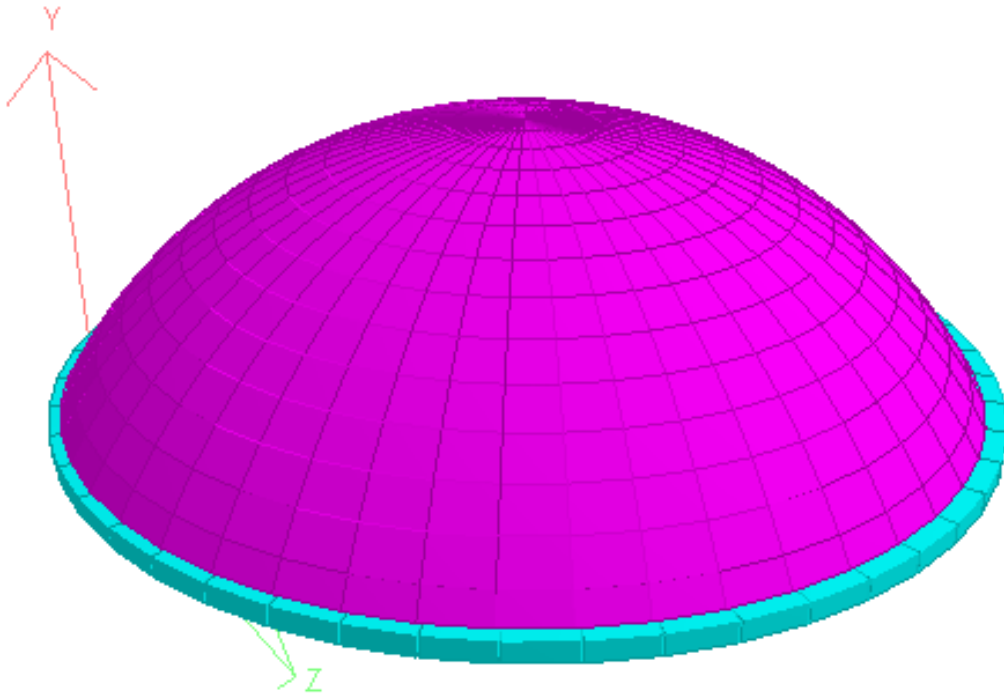
U modelu 2 ponovno se kupola sastoji od pločastih elemenata i vlačni prsten predstavljaju gredni konačni elementi kao u modelu 1, ali u ovom slučaju se sa funkcijom "offset" u STAAD.Pro-u ta greda odmiče od ponožja kupole, kako ne bi postojalo preklapanje na mjestu grede. Može se na slici 76 vidjeti kako kupola ne završava u težištu prstena već na njegovom vrhu. Oslonci kupole se u ovom slučaju nalaze na dnu ploče.



Slika 76: Odsječak kupole i vlačnog prstena u modelu 2

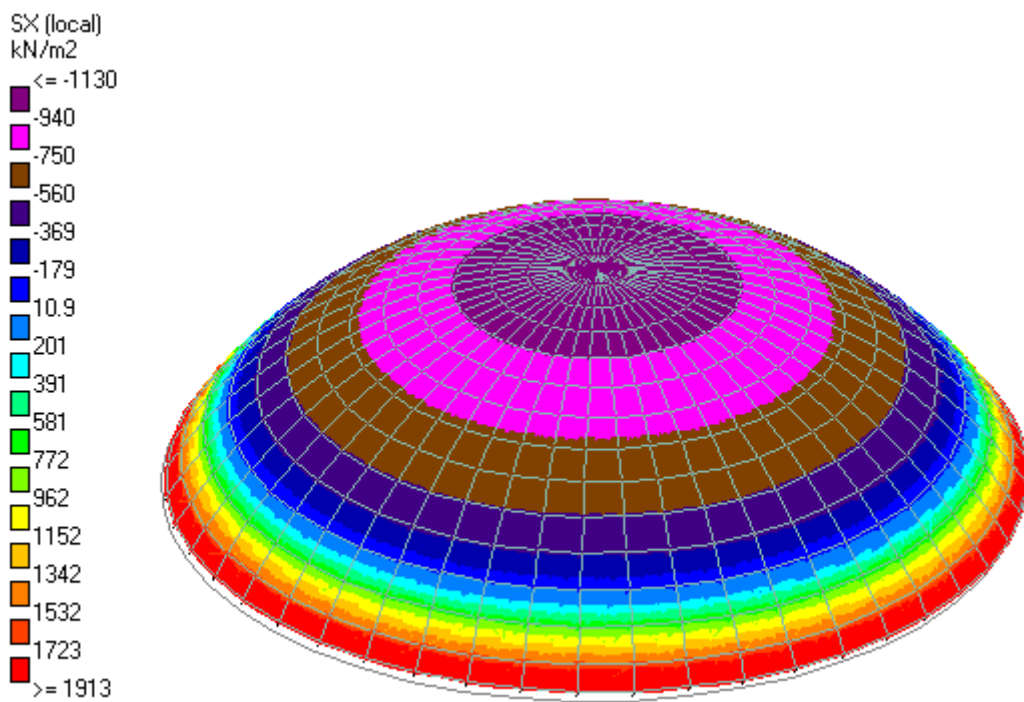


Slika 77: Model 2 - kupola sa 48 konačnih elemenata u prstenu

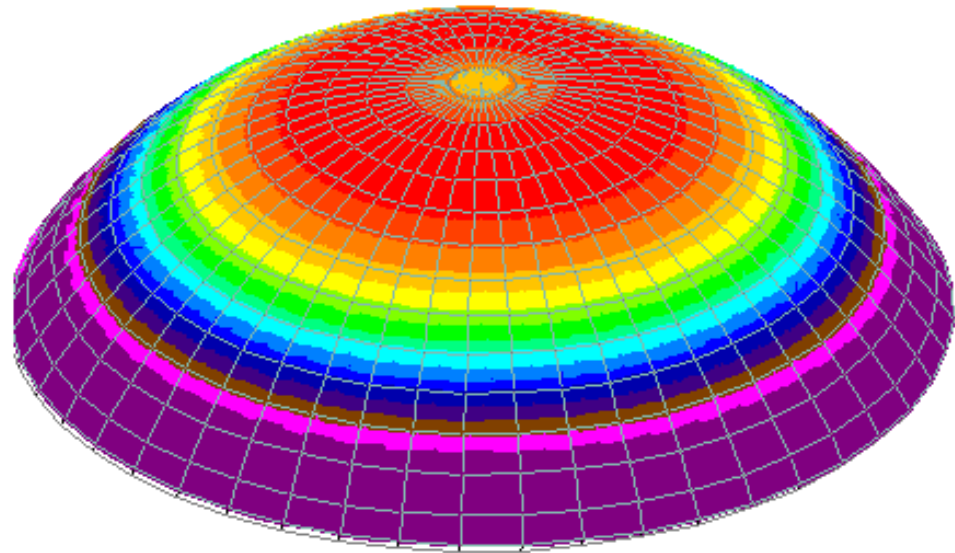
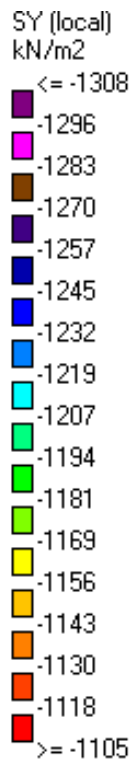


Slika 78: 3D prikaz modela 2

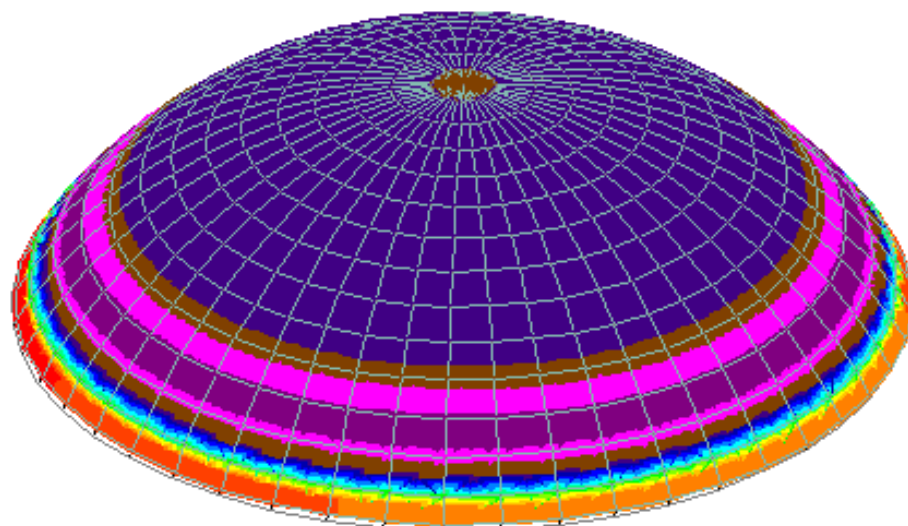
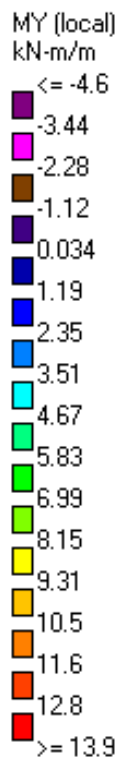
U nastavku su prikazani rezultati za proračunsku kombinaciju opterećenja.



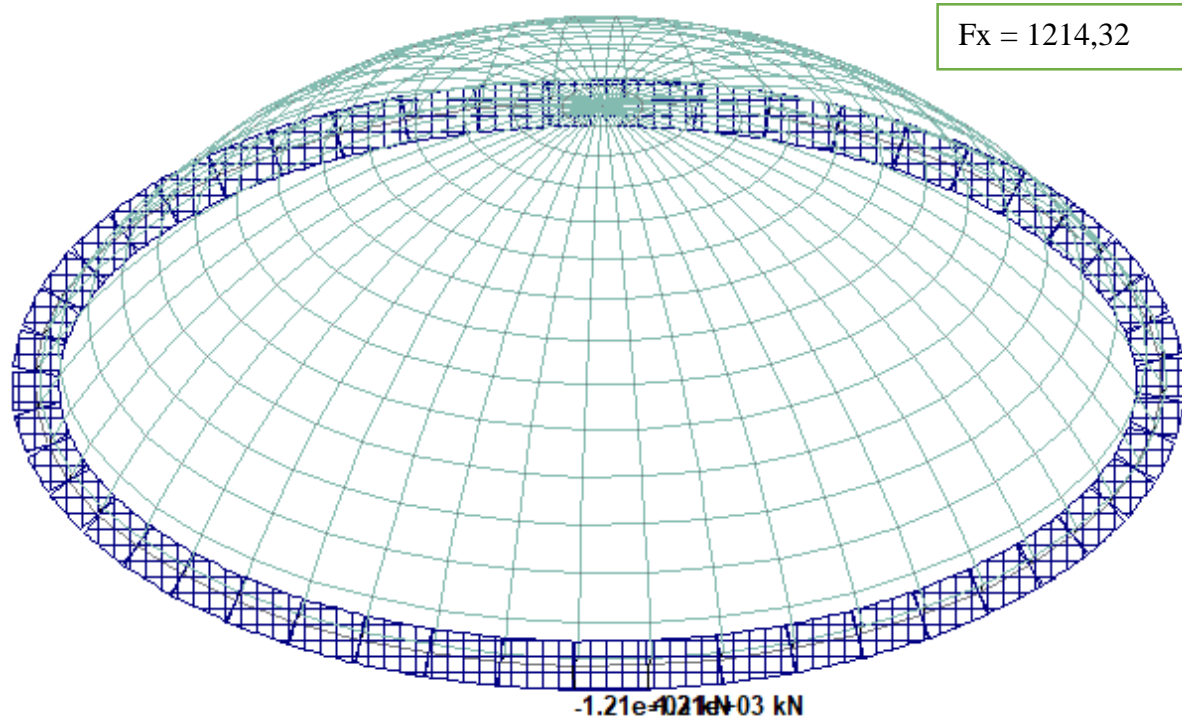
Slika 79: Model 2 – naprezanja u prstenastom smjeru



Slika 80: Model 2 – naprezanja u meridijalnom smjeru



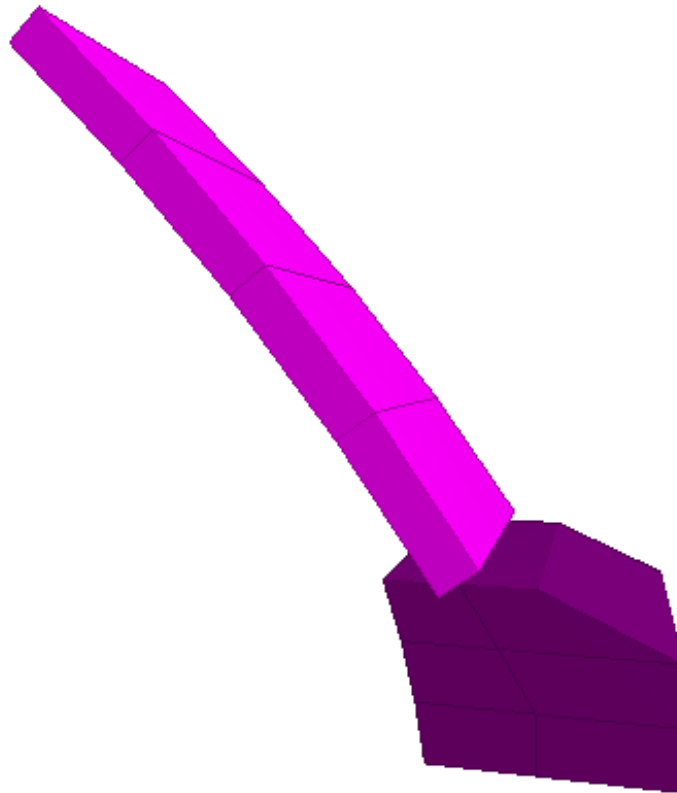
Slika 81: Model 2 - Momenti savijanja u meridijalnom smjeru



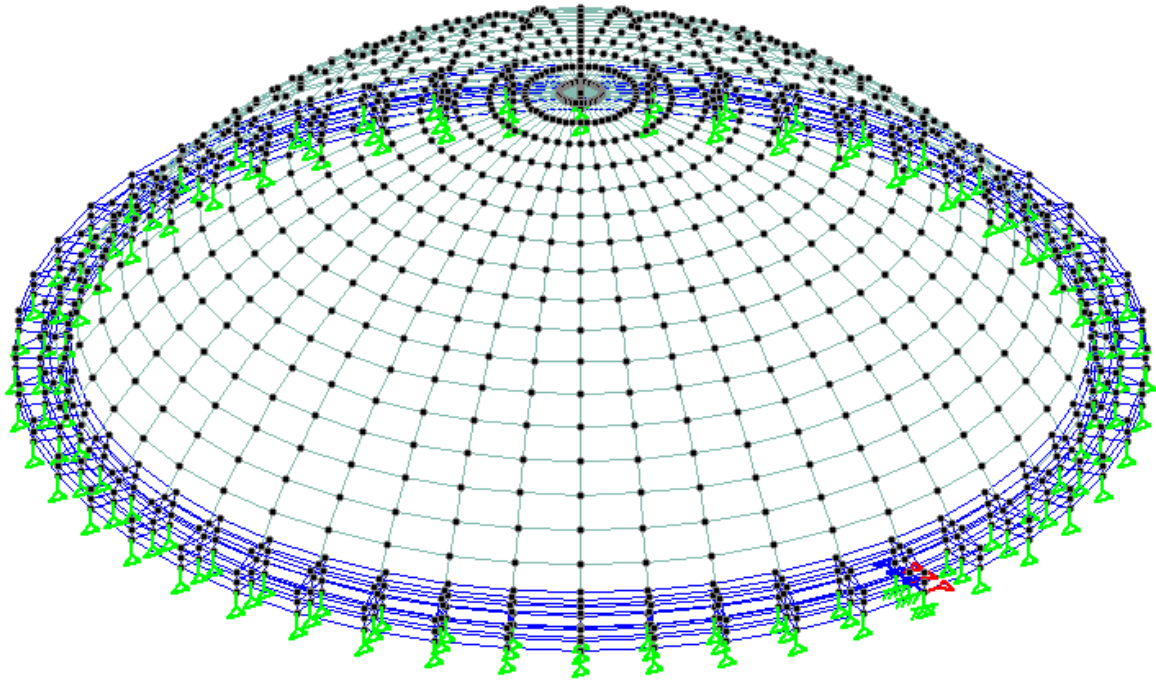
Slika 82: Model 2 - vlačna sila u prstenu

### 4.2.3. Model 3

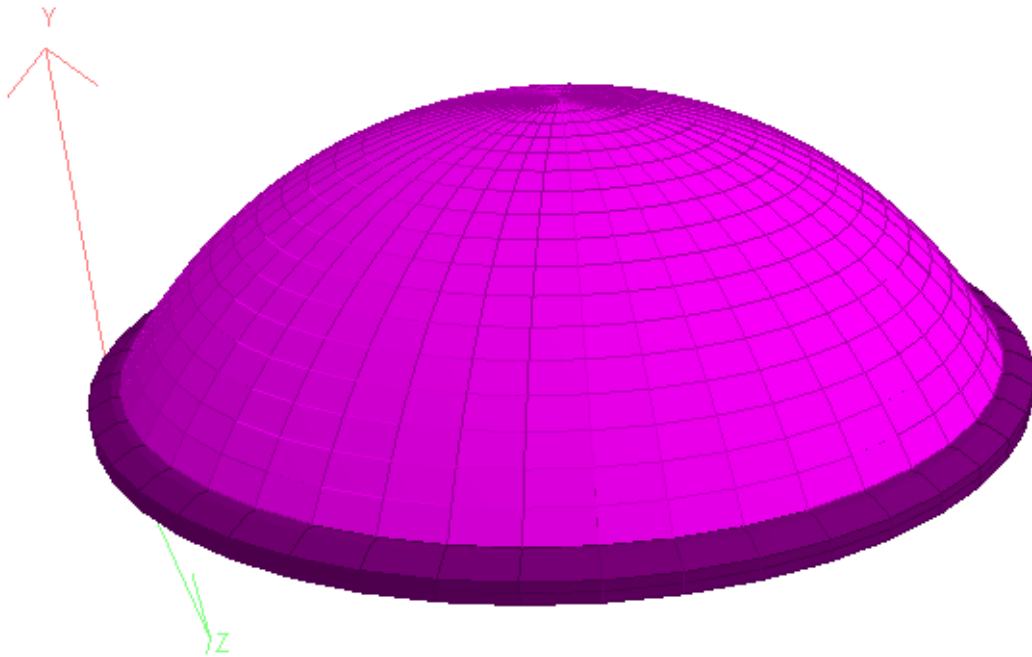
Kod posljednjeg modela, kupola je ponovno modelirana pomoću pločastih elemenata. U ovom slučaju kako bi se što realnije prikazao vlačni prsten, on je modeliran pomoću prostornih osmeročvornih "solid" elemenata. Sveukupno jedan odsječak sastoji se od šest takvih elemenata. Podebljanje vlačnog prstena na spoju s kupolom modeliranom je dodatnim elementima: vlačni prsten u prva dva modela bio je visine 0,5 m dok je ovdje 0,75 m, a širina mu je promjenjiva (bila je 1,0 m u prva dva modela). Kupola se spaja s prstenom na vrhu "solid" elementa kao što se može vidjeti na sljedećoj slici. Oslonci su u ovom modelu postavljeni u sve donje čvorove prostornih elemenata na dnu prstena.



Slika 83: Odsječak kupole i vlačnog prstena u modelu 3

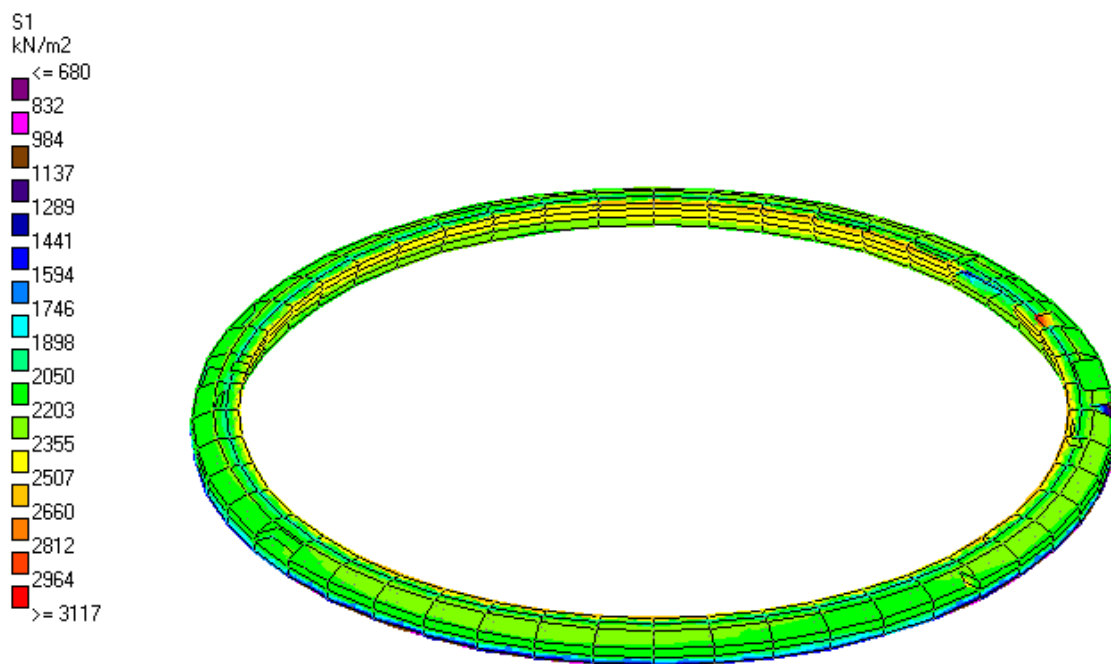


Slika 84: Model 3 - kupola s 48 konačnih elemenata u prstenu

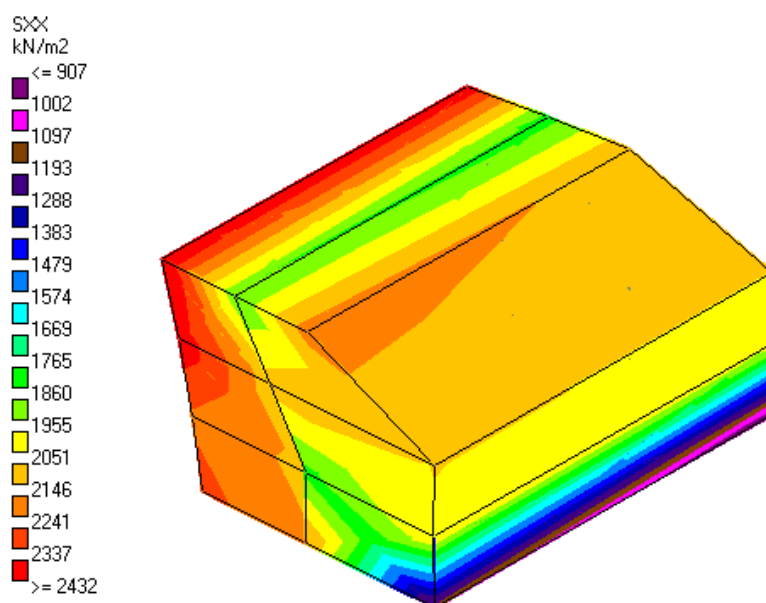


Slika 85: 3D prikaz modela 3

U nastavku su prikazani rezultati za proračunsku kombinaciju opterećenja.

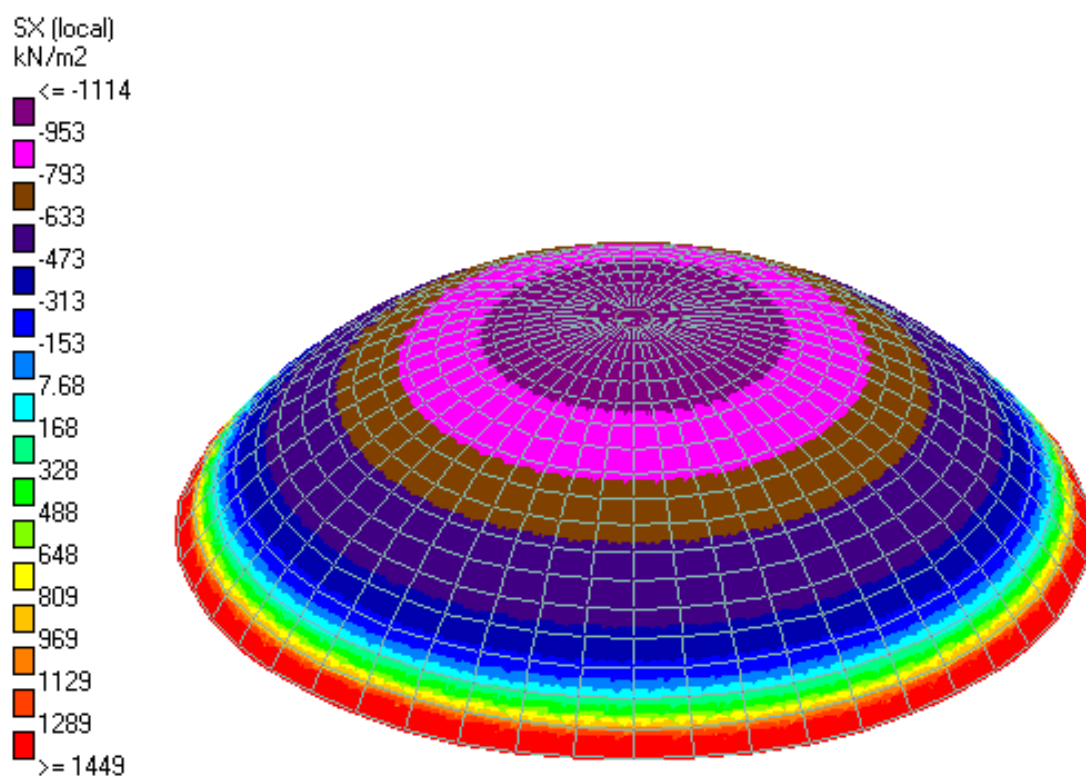


Slika 86: Model 3 - naprezanja u vlačnom prstenu

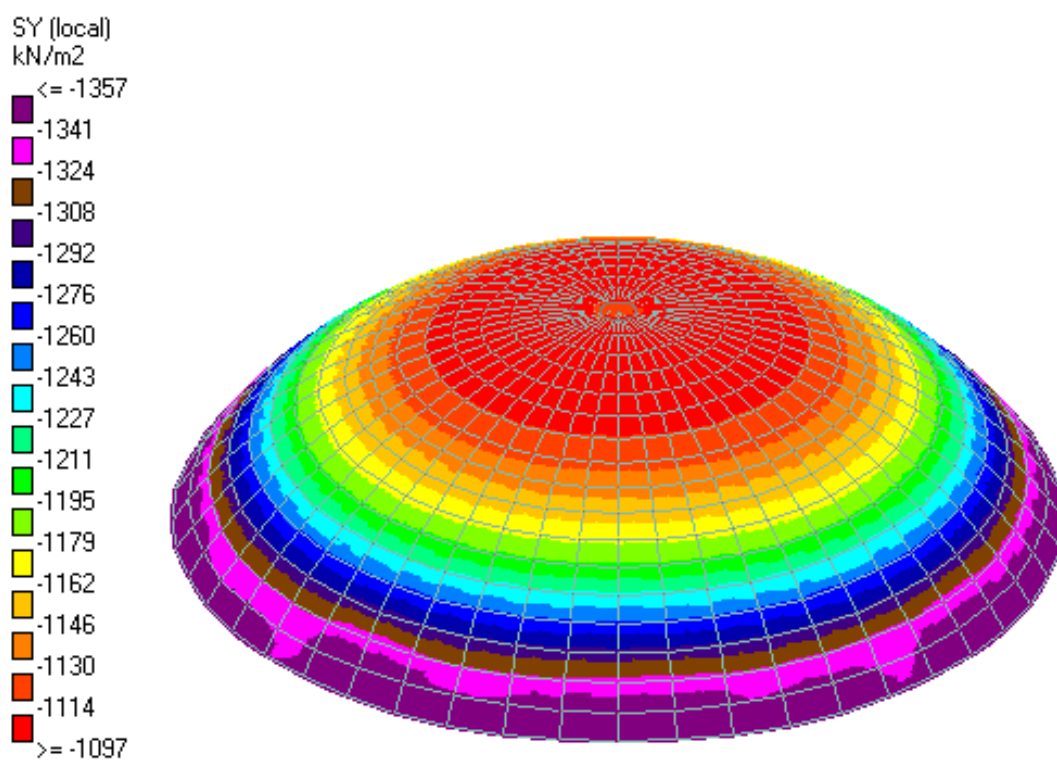


Slika 87: Model 3 - naprezanja u jednom odsječku vlačnog prstena

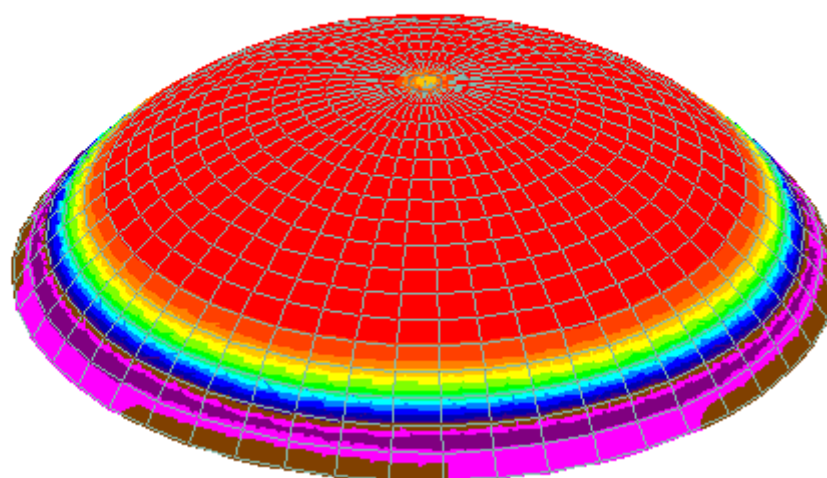
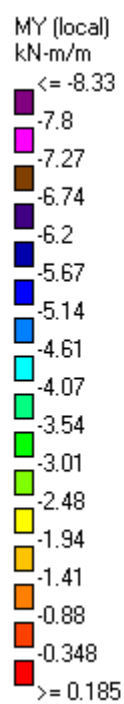




Slika 88: Model 3 - naprezanja u prstenastom smjeru



Slika 89: Model 3 - naprezanja u meridijalnom smjeru



Slika 90: Model 3 - momenti savijanja u meridijalnom smjeru

Usporedba rezultata vlačne sile u prstenu

Prikazuje se usporedba rezultata za vlačnu silu u prstenu za opterećenje 5,0 kN/m<sup>2</sup>

Vlačna sila u Modelu 1 jednaka je zbroju sile u grednom konačnom elementu T i vlačne sile u ljuski (pločastom elementu koji se nalazi unutar grede – poklapa se s gredom na visini od 25 cm)

Vlačna sila u Modelu 3 dobivena je umnoškom srednjeg naprezanja u prostornom elementu i poprečnog presjeka promatranog elementa.

Sila u vlačnom prstenu

Za  $\varphi = 58^\circ$

$$T = r \cdot N_{\varphi H}$$

$$N_{\varphi H} = N_{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$N_{\varphi H} = 42,72 \cdot \cos 58^\circ = 22,64 \text{ kN/m}$$

$$T = 11,28 \cdot 22,64 = 255,38 \text{ kN}$$

Model 1:

$$T + S_x \cdot h$$

$$T = 214,03 \text{ kN}$$

$S_x = 314,91 \text{ kN/m}^2$  – na 25 cm visine od vlačnog prstena

$$S_x \cdot h = 314,91 \cdot 0,2 = 62,98 \text{ kN/m}$$

$$T + S_x \cdot h = 214,03 + 62,98 = 277,01 \text{ kN/m}$$

Tablica 10: Usporedba vlačne sile u prstenu za modele 0, 1, 2 i 3

	Sila u prstenu	Sila u kupoli	Ukupno	
Model 0	255,38	0,00	255,38	kN
Model 1	214,03	62,98	277,01	kN
Model 2	184,05	0,00	184,05	kN
Model 3	238,13	0,00	238,13	kN

Veće odstupanje može se primijetiti kod modela 2, što se dijelom može objasniti time što se oslonci ne nalaze na istom mjestu (manji je promjer kupole u bazi)

### 4.3. PROVJERA GRANIČNOG STANJA NOSIVOSTI

#### Armatura u vlačnom prstenu za kombinaciju opterećenja

U vlačnom prstenu nalaze se šipke 15 $\phi$ 24 (67,8 cm<sup>2</sup>)

$$A_s = \frac{F_x}{f_{yd}}$$

$F_x$  – sila u vlačnom prstenu

$f_{yd}$  – proračunska granica popuštanja čelika za armiranje

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

Pretpostavljena armatura: glatka armatura GA 240/360 sa granicom popuštanja od 240 MPa

$$f_{yk} = 240 \text{ Mpa} = 24 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{24}{1,15} = 20,87 \text{ kN/cm}^2$$

Za model 0:

$$N_{\phi H} = 277,45 \cdot \cos 58^\circ = 147,03 \text{ kN/m}$$

$$T = 11,28 \cdot 147,03 = 1658,50 \text{ kN}$$

Tablica 11: Ukupne vlačne sile u prstenu

	Vlačna sila [Fx]	Sila u kupoli [Sx*h]	Ukupno [kN]
Model 0	1658,50	0,00	1658,50
Model 1	1398,16	144,58	1542,74
Model 2	1217,56	0,00	1217,56
Model 3	1361,97	0,00	1361,97

U modelu 1 osim vlačne sile u prstenu, treba se zbrojiti prstenasta sila u kupoli pošto se dio kupole nalazi unutar prstena.

Model 0

$$A_s = \frac{1658,50 \text{ kN}}{20,87 \text{ kN/cm}^2} = 79,47 \text{ cm}^2$$

Model 1

$$A_s = \frac{1542,74 \text{ kN}}{20,87 \text{ kN/cm}^2} = 73,92 \text{ cm}^2$$

Model 2

$$A_s = \frac{1217,56 \text{ kN}}{20,87 \text{ kN/cm}^2} = 58,34 \text{ cm}^2$$

Model 3

$$A_s = \frac{1361,97 \text{ kN}}{20,87 \text{ kN/cm}^2} = 65,26 \text{ cm}^2$$

Provjera nosivosti ne zadovoljava u Modelu 0 i Modelu 1, ali je potrebno napomenuti kako u podnožju zidova ispod kupole postoji 16 masivnih kontrafora koji u stvarnosti preuzimaju dio opterećenja horizontalnog potiska kupole.

### Tlačna naprezanja u kupoli

Pretpostavljeni razred betona (na strani sigurnosti) C20/25:

$f_{ck}$  – karakteristična tlačna čvrstoća betona

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa} = 20 \text{ N/cm}^2$$

$f_{cd}$  – proračunska tlačna čvrstoća betona  $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$

$$\gamma_c = 1,5$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{20}{1,5} = 13,33 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 13300 \text{ kN/m}^2$$

Model 0:

$$\sigma_y = \frac{277,45 \text{ kN}}{0,2 \text{ m}^2} = 1387,25 \text{ kN/m}^2$$

Tablica 12: Provjera tlačnih naprezanja u kupoli za model 1, 2 i 3 (kombinacija opterećenja)

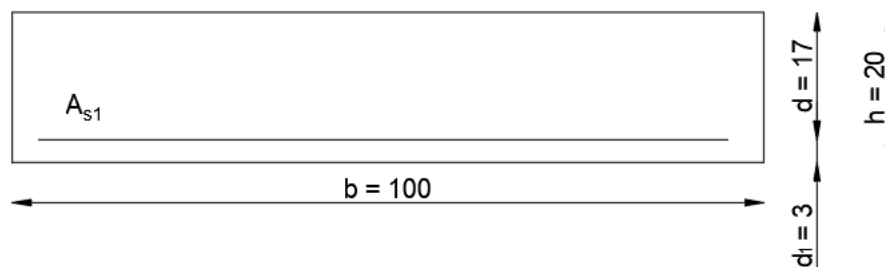
Tlak u kupoli		
$f_{cd}$	13300	kN/m <sup>2</sup>
Model 0	1387,25	kN/m <sup>2</sup>
Model 1	1314,67	kN/m <sup>2</sup>
Model 2	1290,65	kN/m <sup>2</sup>
Model 3	1308,51	kN/m <sup>2</sup>

Kod sva tri modela zadovoljava uvjet da je tlak u kupoli manji od proračunskog.

U gornjem dijelu kupole nije potrebna proračunska armatura, budući da se javljaju samo tlačna naprezanja. Ugrađena armatura  $\phi 12/25$  cm u smjeru meridijana i prstena preuzima naprezanja nastala od skupljanja betona i temperaturnih promjena. Isto vrijedi i za armaturu u smjeru meridijana, uzduž kojih se javljaju samo tlačna naprezanja.

#### Armatura za savijanje pri dnu kupole

U slučaju djelovanja samo momenta savijanja:



Slika 91: Poprečni presjek ploče

$$M_{Rd} = A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot d \cdot \zeta$$

$A_{s1}$  – ugrađena armatura  $\phi 12/25$  cm (4,5 cm<sup>2</sup>)

$f_{yd}$  – granica popuštanja čelika 20,87 kN/cm<sup>2</sup>

$d$  – statička visina – 17 cm

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{f_{cd} \cdot b \cdot d}$$

$$f_{cd} = 1,33 \text{ kN/cm}^2$$

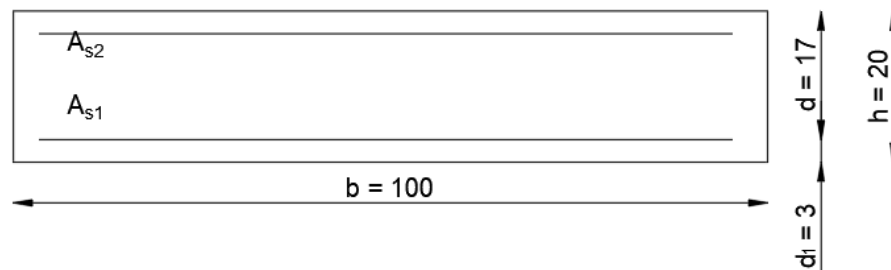
$$b = 100 \text{ cm}$$

$$\omega_1 = \frac{4,5 \cdot 20,87}{1,33 \cdot 100 \cdot 17} = 0,042$$

$$\text{Očitano: } \mu_{Eds} = 0,042 \quad \xi = 0,053 \quad \zeta = 0,978$$

$$M_{Rd} = 4,5 \cdot 20,87 \cdot 17 \cdot 0,978 = 15,61 \text{ kNm}$$

Provjera za moment savijanja + uzdužna tlačna sila



Slika 92: Poprečni presjek ploče

$$A_{s1} = \omega \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot b \cdot h \rightarrow \omega_1 = \frac{A_{s1}}{b \cdot h} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,035$$

$$v_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \rightarrow M_{Rd} = \mu_{Rd} \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd}$$

Model 0

$$v_{Ed} = \frac{-277,45}{100 \cdot 20 \cdot 1,33} = -0,104$$

$$\mu_{Ed} = \mu_{Rd} = 0,073$$

$$M_{Rd} = 0,073 \cdot 100 \cdot 20^2 \cdot 1,33 = 38,84 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 13,46 \text{ kNm} < M_{Rd} = 38,84 \text{ kNm}$$

Model 1

$$v_{Ed} = \frac{-274,55}{100 \cdot 20 \cdot 1,33} = -0,103$$

$$\mu_{Ed} = \mu_{Rd} = 0,072$$

$$M_{Rd} = 0,072 \cdot 100 \cdot 20^2 \cdot 1,33 = 38,30 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 7,55 \text{ kNm} < M_{Rd} = 38,30 \text{ kNm}$$

Model 2

$$v_{Ed} = \frac{-257,89}{100 \cdot 20 \cdot 1,33} = -0,097$$

$$\mu_{Ed} = \mu_{Rd} = 0,070$$

$$M_{Rd} = 0,070 \cdot 100 \cdot 20^2 \cdot 1,33 = 37,24 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 13,90 \text{ kNm} < M_{Rd} = 37,24 \text{ kNm}$$

Model 3

$$v_{Ed} = \frac{-261,53}{100 \cdot 20 \cdot 1,33} = -0,098$$

$$\mu_{Ed} = \mu_{Rd} = 0,071$$

$$M_{Rd} = 0,071 \cdot 100 \cdot 20^2 \cdot 1,33 = 37,72 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 9,80 \text{ kNm} < M_{Rd} = 37,72 \text{ kNm}$$

Svi modeli zadovoljavaju armaturu za savijanje pri dnu kupole.

#### Armatura za preuzimanje vlačnih naprezanja u kupoli

Na dnu kupole nalaze se šipke  $5\phi 24$  ( $22,6 \text{ cm}^2$ ) koje preuzimaju vlačne sile.

	Vlačna sila u kupoli [kN]
Model 0	447,27
Model 1	319,53
Model 2	326,80
Model 3	420,95

$$A_{s1} \cdot f_{yd} = 22,6 \text{ cm}^2 \cdot 20,87 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 471,66 \text{ kN}$$

Svaki od modela zadovoljava vlačnu armaturu u kupoli.



## Komentar vezan uz stabilnost kupole

Kod kupola s velikim rasponom i malom debljinom ljuske javlja se problem gubitka stabilnosti. U slučaju ove kupole, raspon nije velik, a i debljina kupole je velika pa tog problema najvjerojatnije nema. Ipak, na početku se može izračunati teoretsko kritično opterećenje koje će izazvati gubitak stabilnosti kupole [3]:

$$q_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1+\nu^2)}} \left(\frac{t}{R}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^7}{\sqrt{3(1+0,2^2)}} \left(\frac{0,2}{13,3}\right)^2 = 7681 \text{ kN/m}^2$$

Teoretsko kritično opterećenje za izvijanje je mnogo veće od stvarnog opterećenja. To je zbog imperfekcija osjetljivosti ljuski koje utječu na stabilnost. Dodaje se parametar redukcije od 0,05 do 0,1 kako bi se dobila realnija formula za stabilnost na izvijanje [3]:

$$q_{cr} = 0,05 \cdot E \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 = 0,05 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{0,2}{13,3}\right)^2 = 340 \text{ kN}$$

Objе vrijednosti su znatno veće od promatranog proračunskog opterećenja te zato nisu potrebne daljnje analize stabilnosti kupole.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovome radu razmatrana je armiranobetonska kupola u Buzetu koja služi kao kaptaža izvora, izgrađena 1932. godine. Kupole zbog dvojne zakrivljenosti imaju veliku krutost, pa su stoga vrlo učinkovite u prijenosu opterećenja. U slučaju segmentnih kupola koje zatvaraju kut manji od  $51^{\circ}49'$  u kupoli se uslijed vlastite težine javljaju samo tlačna naprezanja, što ih čini povoljnim za izvedbu od betona.

Proučeno je više postupaka za dobivanje sila u kupoli i u vlačnom prstenu. Prvi postupak je proračun pomoću membranske teorije ljuske s uključivanjem utjecaja rubnog prstena. Vrijednosti sila u kupoli se izračuna po izrazima membranske teorije ljuske, a zatim se tim rezultatima superponira utjecaj rubne grede. Na taj način izraženi su rezultati za moment savijanja, prstenastu silu i meridijalnu silu za Model 0.

Drugi postupak je izrada numeričkog modela kupole u STAAD. Pro programskom paketu. Izrađena su tri različita prostorna modela. U svim modelima ljuska je modelirana pločastim konačnim elementima, dok se modeli razlikuju u načinu modeliranja vlačnog prstena. U Modelu 0 vlačni prsten je modeliran kao gredni element pravokutnog poprečnog presjeka. Najdonji red pločastih konačnih elemenata kupole se preklapa sa grednim elementom, te se oslonci nalaze u težištu grede. U prvom modelu napravljena su četiri slučaja različite gustoće mreže: s 12, 24, 48 i 96 konačna elementa u prstenu. Na taj način se zaključilo kolika je optimalna gustoća mreže kako bi se dobili dovoljno točni rezultati. Dovoljno je bilo 48 konačnih elemenata jer su sa 48 i 96 elemenata vrlo slični rezultati. Meridijalne sile su duž cijele kupole u tlaku (u tjemenu najmanje, na dnu najveće). Prstenaste sile su djelomično tlačne i djelomično vlačne. Otprilike oko kuta od  $52^{\circ}$  mijenja se predznak sile iz tlačnog u vlačno područje.

Model 2 je sličan kao Model 1, ali se od njega razlikuje po tome da je greda (vlačni prsten) odmaknuta od kupole "offset" naredbom. To također znači da se oslonci nalaze na dnu kupole, a ne na gredi što je bio slučaj u Modelu 1. Budući da su oslonci na drugoj poziciji i da je promjer baze kupole manji, dobivene su vrijednosti sila manje nego u Modelu 1.

Za treći, posljednji model, napravljena je sljedeća varijanta: prsten je sada modeliran pomoću prostornih osmeročvornih "solid" elemenata. U ovom modelu prsten više nije pravokutnog poprečnog presjeka kao u prva dva modela, sada se sastoji od šest prostornih

elemenata različitih poprečnih presjeka. Na ovaj način je vlačni prsten realnije modeliran zato što se u stvarnosti prsten sastoji od zaobljenja kada prelazi u kupolu.

Uspoređivanjem vlačne sile u prstenu ustvrđeno je kako sila za Model 2 odstupa od ostalih što je vjerojatno razlog manjeg promjera baze kupole. Prema projektu, armatura vlačnog prstena sastoji od 15 $\phi$ 24. U Modelima 2 i 3, ta je armatura zadovoljila provjeru nosivosti, dok Modeli 0 i 1 nisu zadovoljili uvjet, ali potrebno je uzeti u obzir da dio opterećenja horizontalnog potiska preuzimaju i kontrafori, koji se nalaze s vanjske strane obodnih zidova ispod kupole. Budući da je gornji dio kupole cijeli u tlačnom području, nije potrebna proračunska armatura.

Pri dnu kupole javljaju se momenti savijanja i uzdužna tlačna sila. Ugrađena je armatura  $\phi$ 12/25 cm. Kod svih modela armatura za savijanje na dnu kupole zadovoljava provjeru nosivosti. Također, pri dnu kupole javljaju se i vlačna naprezanja - ugrađena je armatura 5 $\phi$ 24 te svi modeli zadovoljavaju provjeru nosivosti.

## 6. LITERATURA

- [1] Tomičić, I: Betonske konstrukcije, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, Zagreb, 1996.
- [2] Terrington, J.S.: Design of domes, Concrete Publications Limited, London, 1937.
- [3] Farshad, M.: Design and Analysis of Shell Structures. Solid Mechanics and Its Applications, Volume 16, Springer, 1992.
- [4] Arhiv Istarskog vodovoda Buzet, Konzorcij za zemljišno uređenje Istre – Istarski vodovod
- [5] Krnac, D: Na izvorima istarskog vodovoda, Istarska kulturna agencija, Pula, 2013.
- [6] Arhiv Istarskog vodovoda Buzet, Zbirka fotografija
- [7] Kraljević, S: Pola stoljeća istarskog vodovoda, Radna organizacija "Istarski vodovod" Buzet, 1984.
- [8] Ventsel, E; Krauthammer, T, Thin Plates and Shells, Theory, Analysis and Applications, Marcel Dekker, 2001.

## **7. PRILOZI**

[1] Statički proračun kupole, ing. Pietro Vacchelli, 1932 [4]

Consegnato dal Sig. Prof. Muri il 12/IV/32

ING. PIETRO VACCHELLI

VIA MELLONI N. 24

MILANO (21)

TELEFONO 24-30+

CUPOLA  
a copertura  
della Polla Maggiore di PINGUENTE  
su muri esistenti

---

Relazione calcoli statici

---

Allegato al

Dij. N. 132-1

Dati ricevuti -

- Cupola a semplice calotta sferica senza lucernario con due o tre fori in chiave  $\phi$  100 ÷ 150 <sup>mm</sup> per passaggio tubazioni.
- Soletta spessore uniforme non minore di 20 cm. : eventualmente variare altezza nervature.
- Sovraccarichi come al vecchio progetto.
- Dal piano d'imposta in giù tutto deve restare come al vecchio progetto.
- Rispetto intradosso cupola vecchio progetto.
- Compressione massima ammissibile nel calcestruzzo 50 Kg/cmq.

Carichi vecchio progetto (da conservare)

- Sovraccarico 500 Kg/mq su tutta la superficie della cupola.
- Terrapieno spessore variabile da m. 0.65 al IV tronco soletta vecchio progetto a m. 2.00 all'imposta.
- Peso di 1 mc. terrapieno : 1800 Kg.

Dimensioni geometriche del vecchio progetto (da conservare)

- Diametro cupola al piano d'imposta m. 22.00
- Raggio d'intradosso (centro sull'asse a quota 43.20) m. 13.20
- Freccia risultante m. 6.05

1) Risultando l'angolo al centro del settore sferico poco superiore a 50° si può considerare lo strato medio della cupola come superficie di equilibrio rispetto al carico uniformemente ripartito tenuto conto però che a causa del valore dell'angolo suddetto si avranno i paralleli prossimi all'imposta tesi. La grande

rigidità data all'anello d'imposta favorisce quindi molto la struttura nel senso di assicurare in modo soddisfacente la continuità. Quest'ultima è poi garantita dalla capacità di resistere a trazione data ai paralleli della zona d'imposta.

La calotta risulta pertanto di spessore uniforme di 20 cm. fino all'angolo di  $51^\circ$  circa, dal qual punto in giù si raccorda all'intradosso ed all'estradosso con la progettata forma della sezione dell'anello atta a presentare le caratteristiche accennate.

Carico totale per mq.

Sovraccarico		Mq.	500
Terrapieno si assume $0,75 \times 1800$		"	1350
Peso proprio $0,20 \times 2400$		"	480
			<hr/>
	Totale	Mq.	2330

Si assumono Mq. 2000 per il carico fisso e Mq. 500 per il carico mobile.

2) Dall'equilibrio dell'elemento di strato medio si deducono le note relazioni:

$$1) \quad T ds = d(C x \cos \alpha)$$

$$2) \quad -p x ds = d(C x \sin \alpha)$$

nelle quali

$T$  e  $C$  sono le tensioni secondo i paralleli e secondo i meridiani rispettivamente che sollecitano l'elemento di meridiano.

$p$  è il carico

$x$  l'ascissa rispetto all'asse di meridiano

$d\alpha$  l'angolo al centro dell'elemento di meridiano compreso fra due paralleli distanti  $ds$ .

Giudicando con  $r$  il raggio medio della calotta sferica si ha:



$$x = r \operatorname{sen} \alpha$$

$$ds = r d\alpha$$

Sostituendo nella 2) ed integrando si ottiene

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d(C r \operatorname{sen}^2 \alpha) = -p r^2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

da cui

$$3) \quad C = - \frac{p r}{1 + \cos \alpha}$$

$$4) \quad T = -p r \frac{\cos 2\alpha + \cos^3 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}$$

Per  $\alpha = 51^\circ$  circa conviene sulla la compressione  $T$  nei paralleli e dopo tale valore si ha trazione.

### 3) Sollecitazioni -

- Al vertice della cupola si ha compressione in ogni direzione:

$$C = T = - \frac{p r}{2} = - \frac{2500 \times 13.30}{2} = 16.600 \text{ Kg./ml.}$$

- All' imposta (supposto  $\alpha_{\max} = 54^\circ$ ) si ha (per ml.) compressione nei meridiani:

$$C = - \frac{2500 \times 13.30}{1 + \cos 54^\circ} = 21.000 \text{ Kg./ml.}$$

- Nei seguenti paralleli generici si ha pressione:

$$\alpha = 20^\circ \quad T = -0.455 \times 2500 \times 13.30 = 15.100 \text{ Kg./ml.}$$

$$\alpha = 40^\circ \quad T = -0.33 \times \text{id.} = 11.000 \text{ "}$$

- Nell'anello d'imposta si avrebbe trazione:

$$21.000 \cos 54^\circ \times 11.10 = 138.000 \text{ Kg.}$$

- Pressione cupola per ml. di muro:

$$21.000 \operatorname{sen} 54^\circ = 17.000 \text{ Kg.}$$

### 4) Calotta sferica -

Con lo spessore prescelto di 20 cm. le sollecitazioni di trazione nel calcestruzzo

restano, come evidentemente risulta, molto basse.

Volendo condurre pertanto una verifica intesa a determinare con sufficiente approssimazione l'ordine di grandezza dei massimi momenti flettenti che possono essere indotti da eventuali dissimmetrie del sovraccarico fu elaborato un procedimento d'influenza del quale stante la piccolezza dei momenti risultanti non si riportano che gli elementi concreti.

Si dovrà cioè tener conto di valori di momenti massimi dell'ordine di

$\pm 800 \text{ Kg.m.}$  per ul. alle reati

$\pm 1400 \text{ " " "}$  all' imposta

Si nota che le corrispondenti sollecitazioni di trazione si mantengono assai moderate e pertanto fu predisposta nella calotta un'armatura uniforme, capace di assorbire trazioni e momenti, di  $\phi 12$  disposti in due strati, ciascuno ad armatura incrociata, ossia:

Reticolato  $\phi 12$  a maglie di cm. 25 secondo i meridiani ed i paralleli all'intradosso.

Reticolato  $\phi 12$  come sopra all'estradosso.

I due reticolati sono collegati da alcune legature  $\phi 3$ .

Volendo verificare la stabilità in relazione ai momenti massimi considerati, dalle consuete relazioni per sezione rettangolare in cemento armato con ferri di trazione e di compressione, si ricava, per le tensioni interne dovute alla sola flessione:

$$b = 100 \text{ cm.} \quad H = 20 \text{ cm.}$$

$$h' = \text{altezza utile} = 20 - 3 = 17 \text{ cm.}$$

$y_1 =$  distanza asse neutro dal bordo compresso astruendo dalla trazione nel calcestruzzo.

$y_2 =$  distanza asse neutro dal bordo compresso tenendo conto, per verificare il valore, della trazione nel calcestruzzo.

$w =$  area complessiva di  $4 \phi 12 = \text{cuq. } 4,50$

$\left. \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right\} =$  momenti d'inerzia corrispondenti astruendo o considerando trazione.

$$y_1 = \frac{\frac{100 y_1^2}{2} + 10 \times 4,5 \times 3 + 10 \times 4,5 \times 17}{100 y_1 + 10(4,5 + 4,5)} \quad \text{da cui } y_1 = 5,25 \text{ cm.}$$

$$J_1 = \frac{1}{3} 100 \times 5,25^3 + 10 \times 4,5 (17 - 5,25)^2 + 10 \times 4,5 (5,25 - 3)^2 = 10770 \text{ cm}^4$$

$$y_2 = \frac{\frac{100 \times 20^2}{2} + 10(4,5 \times 17 + 4,5 \times 3)}{100 \times 20 + 10(4,5 + 4,5)} = 10 \text{ cm.}$$

$$J_2 = \frac{100}{3} [10^3 + (20 - 10)^3] + 10 [4,5 \times 17^2 + 4,5 \times 3^2] = 71000 \text{ cm}^4$$

Sezioni alle reni -

$$\sigma_c (\text{compresso}) = \frac{80000 \times 5,25}{10770} = \underline{39} \text{ Kg./cuq.}$$

$$\sigma_c (\text{teso}) = \frac{80000 \times 10}{71000} = \underline{11,2} \text{ " "}$$

$$\sigma_f (\text{teso}) = \frac{10 \times 80000 \times (17 - 5,25)}{10770} = \underline{875} \text{ " "}$$

All' imposta si ha la sezione variabile e rapidamente crescente in altezza. Le tensioni interne calcolate come sopra per diverse posizioni non differiscono sensibilmente dai valori sopra trovati.

5) Anello d'imposta -

Si è condotta anzitutto una verifica di resistenza al rovesciamento del piedritto, tenuto conto della pressione idrostatica a serbatoio pieno e trascurando la contropinta del terreno naturale e del terrapieno; considerata poi la posizione del centro di pressione verticale della cupola che cade sul muro a m. 0,50 dall'intradosso si è modificato anzitutto il

(7)

paramento esterno con un raccordo più razionale (V. disegni).

Considerato poi il massiccio murario di cui si dispone, allo scopo di centrare meglio il carico e di sfruttare almeno in piccola parte il massiccio stesso ed i contrafforti è stata calcolata una quota di spinta della cupola come assorbita dai contrafforti col seguente criterio:

Carichi verticali a quota 46 di un contrafforte tonu. 140 ca.

Momenti rispetto allo spigolo interno A, a detta quota: totale t. m. 337 ca.

Braccio della risultante dei carichi verticali rispetto ad A  $\frac{337}{140} = m. 2,40$

In questi momenti figura anche quello dato dalla spinta della cupola se non esistesse l'auello.

La risultante dei carichi verticali di 140 tonu. trovasi quindi a m. 2,40 verso l'esterno del punto A. Nell'ipotesi che, ad equilibrio statico raggiunto, essa risultante cada circa a m. 1,10 da A (ossia prossima al baricentro della base considerata) e indicando con M il momento rispetto ad A della reazione radiale dell'auello si deve avere

$$M - 140 \times 1,10 = 0$$

da cui  $M = 154 T. m.$

Risultando il braccio di questa coppia di m. 3,90 si ha

$$\frac{154}{3,90} = 40 \text{ tonu. reazione radiale}$$
$$\frac{1,40}{4,32} = 9250 \text{ Kg. per mt. d'auello d'imposta}$$

Nell'auello d'imposta può quindi considerarsi una trazione effettiva di

$$9250 \times 11,10 = 103.000 \text{ Kg.}$$

da cui  $\frac{103.000}{1150} = 90 \text{ aug. di ferro} = 20 \text{ \& 24}$

Questi ferri di trazione saranno congiunti a manicotto. Tutto il fascio dei ferri dell'auello d'imposta può essere messo in opera come un'unica spirale, per maggior speditezza di lavoro, aggiungendo semplice-

mente barra a barra, col manico filettato in unico senso, fino alla fine della spirale che verrà ancorata nella massa cementizia.

Tutto il fascio dei ferri dell'anello d'imposta sarà circondato dai ferri provenienti dalla calotta, come indicato in disegno con gli altri dettagli.

Milano - 12 Febbraio 1938 X