

# Dinamičko ponašanje krutih stupova povezanih s podlogom lijepljenjem

---

**Bilić, Toma**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:092781>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



*image not found or type unknown*

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Toma Bilić**

**Dinamičko ponašanje krutih stupova povezanih s podlogom  
lijepljenjem**

**Završni rad**

**Rijeka, 2024.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI**  
**GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Prijediplomski sveučilišni**  
**Građevinarstvo**  
**Mehanika 2**

**Toma Bilić**  
**0114035930**

**Dinamičko ponašanje krutih stupova povezanih s podlogom**  
**lijepljenjem**

**Završni rad**

**Rijeka, 15. rujna 2024.**



## **IZJAVA**

Završni rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentoricom i komentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Toma Bilić

U Rijeci, 15. rujna 2024.

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se mentorici izv. prof. Nini Čeh, komentoru izv. prof. Leu Škecu i laborantu Dominiku Štroku bacc. ing. aedif. na izdvojenom vremenu, uloženom trudu i pomoći pri izradi završnog rada. Posebno se zahvaljujem svim članovima moje obitelji što su me podržavali i bili velika podrška tijekom studija.

# SAŽETAK

U ovom završnom radu analizirano je statičko i dinamičko ponašanje krutih stupova s lijepljenom vezom s podlogom te je izrađen numerički model za simulaciju takvog ponašanja. U uvodnom djelu objašnjena je problematika dinamičkog odgovora konstrukcija na seizmičku pobudu. Zatim su izvedene jednačbe ravnoteže i kretanja te potrebne matrice krutosti i masa za problem krutog bloka u ravnini elastično povezanog s podlogom. Za izvođenje matrice krutosti sustava morali smo izjednačavati rad vanjskih sila i potencijalnu energiju deformacije veznog sloja, dok su jednačbe kretanja koje uključuju i prigušenje izvedene na temelju 2. Newtonovog zakona. Provedena su laboratorijska ispitivanja drvenih uzoraka s lijepljenim kontaktom opterećenim vlačno, tlačno i posmično. Na kraju su provedena dinamička laboratorijska ispitivanja kojim smo predočili slobodne i prisilne oscilacije. Dobivene rezultate smo analizirali te su nam poslužili pri verifikaciji i kalibraciji numeričkog modela za simulaciju ponašanja krutih stupova s podlogom.

**Ključne riječi:** dinamička analiza, numerički model, kruti blok, lijepljeni sloj, inovativna veziva, zidane konstrukcije

# ABSTRACT

In this final thesis, the static and dynamic behavior of rigid columns with an adhesive connection to the foundation was analyzed, and a numerical model for simulating such behavior was developed. The first part explains the issue of the dynamic response of structures to seismic excitation. After that, equilibrium and motion equations were then derived, as well as the required stiffness and mass matrices for the problem of a rigid block in a plane elastically connected to the foundation. To derive the stiffness matrix of the system, we had to equate the work of external forces with the potential energy of deformation of the bonding layer, while the equations of motion, which also include damping, were derived based on Newton's second law. Laboratory tests were conducted on wooden samples with adhesive connection subjected to tensile, compressive, and shear loading. Finally, dynamic laboratory tests were performed to illustrate free and forced oscillations. We analyzed the obtained results, which were used for the verification and calibration of the numerical model for simulating the behavior of rigid columns with a foundation.

**Keywords:** dynamic analysis, numerical model, rigid block, adhesive joints, innovative binders, masonry structures.





# Sadržaj

<b>Popis slika</b>	<b>iv</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>v</b>
<b>1 UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2 OPIS PROBLEMA</b>	<b>3</b>
2.1 Određivanje pomaka težišta i uglova blokova . . . . .	3
2.2 Izvod jednadžbi i matrice krutosti . . . . .	6
2.3 Proširenje jednadžbi i dinamičko ponašanje . . . . .	12
<b>3 LABORATORIJSKO ISPITIVANJE</b>	<b>17</b>
3.1 Ispitivanje uzoraka na vlak . . . . .	20
3.2 Ispitivanje uzoraka na tlak . . . . .	21
3.3 Ispitivanje uzoraka na posmik . . . . .	22
3.4 Opis i rezultati dinamičkih ispitivanja . . . . .	24
<b>4 KALIBRACIJA MODELA I REZULTATI</b>	<b>29</b>
4.1 Kalibracija modela . . . . .	29
4.2 Dinamičko ponašanje . . . . .	30
<b>5 ZAKLJUČAK</b>	<b>33</b>
<b>Literatura</b>	<b>39</b>



# Popis slika

1.1	Reparacija pukotina poliuretanskom pjenom (Kevin Farley [1]) . . . . .	2
2.1	Geometrija bloka u koordinatnom sustavu . . . . .	4
2.2	Blok prije i nakon dinamičkog opterećenja . . . . .	4
2.3	Pomak točaka na kontaktu . . . . .	7
2.4	Spoj točaka na kontaktu . . . . .	8
2.5	Normalna naprezanja (lijevo) i tangencijalna naprezanja (desno) . . . . .	8
2.6	Ljepilo na kontaktnoj površini . . . . .	10
2.7	Izjednačavanje DST i DMA . . . . .	12
2.8	Pomaknuta konfiguracija bloka . . . . .	14
2.9	Izjednačavanje DST i DMA bloka pod utjecajem pobude podloge . . . . .	14
3.1	Donji radni prostor univerzalnog tlačno-vlačnog stroja (kidalica) Z600 (Zwick/Roell) . . . . .	18
3.2	Priprema uzoraka za ispitivanje . . . . .	19
3.3	Uzorci za ispitivanje na posmik (lijevo), vlak (sredina) i tlak (desno) . . . . .	19
3.4	Dijagram sila-pomak vlačnog ispitivanja . . . . .	20
3.5	Dijagram naprezanje-deformacija vlačnog ispitivanja . . . . .	21
3.6	Dijagram sila-pomak tlačnog ispitivanja . . . . .	21
3.7	Dijagram naprezanje-deformacija tlačnog ispitivanja . . . . .	22
3.8	Dijagram sila-pomak posmičnog ispitivanja . . . . .	23
3.9	Dijagram naprezanje-deformacija posmičnog ispitivanja . . . . .	23
3.10	Uzorak bloka i podloge za dinamičko istraživanje . . . . .	25
3.11	Uzorak bloka i podloge na uređaju za dinamičko ispitivanje . . . . .	25
3.12	Dijagram horizontalnih pomaka podloge kroz vrijeme . . . . .	26
3.13	Dijagram horizontalnog relativnog pomaka bloka u odnosu na podlogu . . . . .	26
3.14	Usporedba najvećih izmjerenih posmičnih dijagramom naprezanje-deformacija za posmik . . . . .	27
3.15	Usporedba najvećih izmjerenih vlačnih naprezanja s dijagramom naprezanje-deformacija za vlak . . . . .	28
3.16	Usporedba najvećih izmjerenih tlačnih naprezanja s dijagramom naprezanje-deformacija za tlak . . . . .	28

4.1	Dijagram relativnih pomaka u vremenu iz numeričkog modela i laboratorijskog ispitivanja s koeficijentom prigušenja $\zeta = 0,08397$ . . . . .	31
4.2	Dijagram relativnih pomaka u vremenu iz numeričkog modela i laboratorijskog ispitivanja s koeficijentom prigušenja $\zeta = 0,174812245$ . . . . .	31
4.3	Dijagram konačnih relativnih pomaka iz numeričkog modela sa uključenim potresnim zapisom i laboratorijskog ispitivanja za čitavi potresni zapis s koeficijentom prigušenja $\zeta = 0,174812245$ . . . . .	32

# Popis tablica

3.1	Određivanje krutosti . . . . .	24
4.1	Određivanje koeficijenta prigušenja . . . . .	30

# 1. UVOD

Dinamički odgovor konstrukcije javlja se kod konstrukcija koje su izložene dinamičkim opterećenjima, koja mogu biti izazvana potresima, udarima vjetrova, ljudskom aktivnošću, eksplozijom i drugim pojavama. Stoga je potrebno razumijeti kako određene konstrukcije reagiraju na opterećenja promjenjiva u vremenu. Analiza takvih problema može se obrađivati in situ ili pomoću numeričkih simulacija i eksperimentalnih ispitivanjima u građevinskim laboratorijima. Izvođenje ispitivanja na umanjenim fizikalnim modelima i analiza njihovog ponašanja nam pokazuje kakve ishode možemo očekivati na realnim konstrukcijama. Takva istraživanja su nam korisna i potrebna pri projektiranju željeznica, aerodroma, brana, zgrada, mostova i drugih konstrukcija kod kojih se mogu pojaviti problemi uslijed dinamičkih opterećenja. Takva opterećenja imaju izrazito nepogodne utjecaje na konstrukcije određenih karakteristika, jedne od takvih su zidane konstrukcije kojima ćemo se baviti u ovom radu [2].

Zidane konstrukcije su konstrukcije koje su izgrađene od blokova, cigla ili kamena međusobno povezanih vezivom kao što su mort, poliuretanske pjene i slično. Zidane konstrukcije su zbog svojih karakteristika (izgrađene od više blokova naslaganih jedan na drugoga) osjetljive na dinamičke pobude, posebno pri opterećenjima kod kojih dolazi do naglih pomaka što može rezultirati slomom. Vrste otkazivanja koje se pojavljuju u zidanim konstrukcijama jesu pucanje u predjelu veziva, nastajanje pukotina i oštećenja te prevrtanja koje na kraju rezultira rušenjem konstrukcija. Proučavanjem ovog ponašanja doprinosimo razvoju boljih konstrukcijskih rješenja, odabiru boljih veziva te povećanju otpornosti zidanih konstrukcija na dinamička opterećenja [3] [4].

U ovom radu posvetiti ćemo se otkazivanju veziva i vibraciji blokova koji su određenim vezivom povezani s podlogom te problemima koji se tu javljaju. Počet ćemo s određivanjem pomaka točaka na bloku koji je povezan sa podlogom uslijed djelovanja opterećenja na blok. Zatim ćemo izvesti potrebne jednadžbe ravnoteže na temelju kojih ćemo izraditi numerički model u programskom jeziku Python. Nakon toga krećemo s laboratorijskim ispitivanjima bloka povezanim vezivom za podlogu. Dobivene rezultate iz numeričkog i laboratorijskog modela na kraju ćemo usporediti kako bismo odredili parametre modela za koje najbolje opisuje realno ponašanje. To će nam omogućiti da pomoću numeričkog modela predvidimo kakvo ponašanje bloka i veziva očekujemo za određeno opterećenje.

Veziva između bloka i podloge koja ćemo analizirati su inovativna ljepila koja predstavljaju alternativnu zamjenu za tradicionalni mort. Takva ljepila nude brojne prednosti u odnosu na klasičnu metodu kao što su brža izvedba i sušenje, veća preciznost i slično. Najčešći primjer toga su poliuretanske (PU) pjene iz razloga što su jedne od najnaprednijih vrsta ljepila radi svoje velike čvrstoće te brzog sušenja, što utječe na brzinu izgradnje te jednostavnost upotrebe (koja doprinosi i vrlo visokoj preciznosti). Izvedbe PU pjene se često koriste i za adaptaciju odnosno rekonstrukciju postojećih zidanih konstrukcija (kao na Slici 1.1). Zbog svojih karakteristika otpornije su na vibracije i potrese od tradicionalnog morta, te doprinose termičkoj (smanjuju toplinske mostove i umanjuju potrebu za grijanjem) i zvučnoj izolaciji. Smatra se da spojevi izrađeni od PU pjene mogu biti čvrsti i povezivati blokove preko 100 godina te da oni doprinose stabilnosti i čvrstoći u svim vremenskim uvjetima. Pogodne su za povezivanje raznih tipova blokova za zidanje, kao što su porobeton, brušene keramičke opeke i betonski blokovi. PU pjene su samo jedna vrsta inovativnih ljepila, dok se u nekim situacijama predlažu i koriste druge vrste kao što su epoksidna ljepila, polimerna ljepila, silikatna ljepila i slično [5].



Slika 1.1: Reparacija pukotina poliuretanskom pjenom (Kevin Farley [1])

## 2. OPIS PROBLEMA

U ovom djelu završnog rada baviti ćemo se određivanjem pomaka težišta i uglova blokova od kojih je sačinjena zidana konstrukcija, te ćemo prikazati izvod jednadžbi i matrice krutosti koje su nam potrebne za razvoj numeričkog modela.

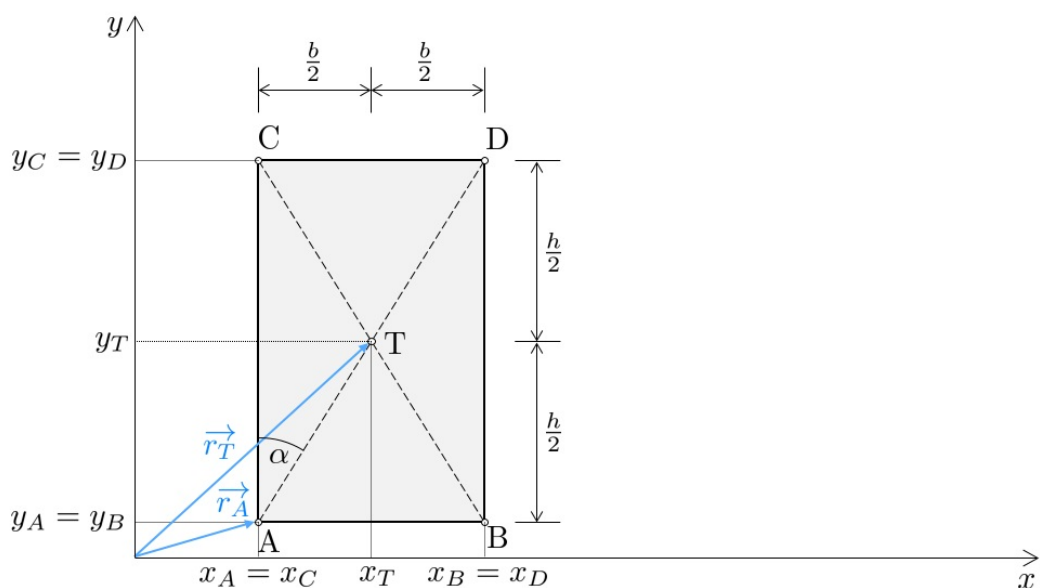
### 2.1 Određivanje pomaka težišta i uglova blokova

Na Slici 2.1 prikazana je geometrija jednog bloka u koordinatnom sustavu sa sljedećim oznakama:

- visina bloka,  $h$ ,
- širina bloka,  $b$ ,
- kut koji zatvara dijagonala bloka i duža stranica bloka,  $\alpha$ ,
- vektor položaja točke T,  $\vec{r}_T$ ,
- vektor položaja točke A,  $\vec{r}_A$ ,
- koordinata točke n na y osi,  $y_n$ ,
- koordinata točke n na x osi,  $x_n$ .

Prije pojave opterećenja ili dinamičke pobude blok se nalazi u početnom položaju za koji je na Slici 2.1 prikazan vektor položaja točke T (težišta) te jedne rubne točke A. Blok je s podlogom povezan veznim slojem konstantne debljine duž stranice AB.

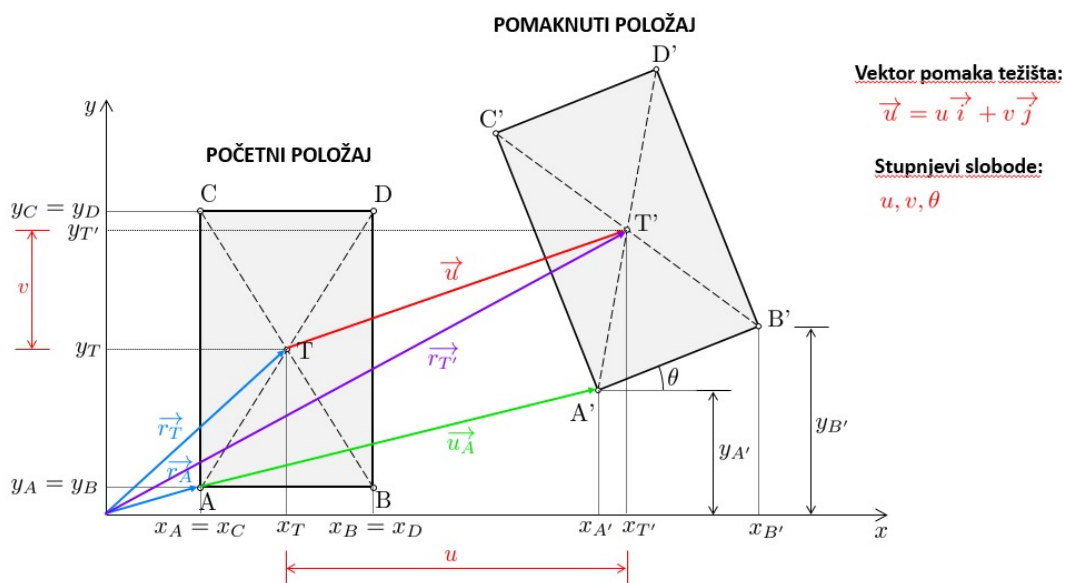




Slika 2.1: Geometrija bloka u koordinatnom sustavu

Nakon nanošenja opterećenja na blok on se zaokreće i pomiče u smjeru nanošenja opterećenja, što je prikazano na Slici 2.2, gdje pratimo pomak težišta i rubnih točaka bloka. Kako bismo odredili pomak određene točke definirali smo položaj bloka preko tri stupnja slobode:

- horizontalnog pomaka,  $u$ ,
- vertikalnog pomaka,  $v$ ,
- kuta zaokreta,  $\theta$ .



Slika 2.2: Blok prije i nakon dinamičkog opterećenja

Na temelju [6] zapisujemo osnovni izraz za vektor pomaka koji glasi:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad (2.1)$$

Svaka točka ima svoj vertikalni i horizontalni položaj, koji zajedno daju ukupni pomak pojedine točke u ravnini. Za neku proizvoljnu točku n vektor pomaka možemo zapisati kao:

$$\vec{u}_n = u_n\vec{i} + v_n\vec{j} \quad (2.2)$$

Izveli smo vektor pomaka za svaku točku bloka s obzirom na početni i pomaknuti položaj. Iz Slike 2.2 vektori pomaka četiri ugla bloka su:

$$\vec{U}_A = \left[\frac{b}{2} + u - R \cdot \sin(\alpha - \theta)\right]\vec{i} + \left[\frac{h}{2} + v - R \cdot \cos(\alpha - \theta)\right]\vec{j}, \quad (2.3)$$

$$\vec{U}_B = \left[u - \frac{b}{2} + R \cdot \sin(\alpha + \theta)\right]\vec{i} + \left[\frac{h}{2} + v - R \cdot \cos(\alpha + \theta)\right]\vec{j}, \quad (2.4)$$

$$\vec{U}_C = \left[\frac{b}{2} + u - R \cdot \sin(\alpha + \theta)\right]\vec{i} + \left[-\frac{h}{2} + v + R \cdot \cos(\alpha + \theta)\right]\vec{j}, \quad (2.5)$$

$$\vec{U}_D = \left[u - \frac{b}{2} + R \cdot \sin(\alpha + \theta)\right]\vec{i} + \left[-\frac{h}{2} + v + R \cdot \cos(\alpha - \theta)\right]\vec{j}. \quad (2.6)$$

Potom smo linearizirali prethodne jednadžbe za koje nam je bilo potrebno nekoliko koraka. Krenuli smo redom sa trigonometrijskim identitetima:

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta, \quad (2.7)$$

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \sin\theta, \quad (2.8)$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta, \quad (2.9)$$

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\theta. \quad (2.10)$$

Zatim smo uveli pretpostavke o malim rotacijama što znači:

$$\sin\theta \sim \theta, \quad (2.11)$$

$$\cos\theta \sim 1. \quad (2.12)$$

Potom uvodimo supstituciju za poznate vrijednosti:

$$R \cdot \sin \alpha = \frac{b}{2}, \quad (2.13)$$

$$R \cdot \cos \alpha = \frac{h}{2}. \quad (2.14)$$

Primjenom svih prethodnih koraka dobivamo konačne jednadžbe koje glase:

$$\vec{U}_A = [u + \frac{h}{2}\theta]\vec{i} + [v - \frac{b}{2}\theta]\vec{j}, \quad (2.15)$$

$$\vec{U}_B = [u + \frac{h}{2}\theta]\vec{i} + [v + \frac{b}{2}\theta]\vec{j}, \quad (2.16)$$

$$\vec{U}_C = [u - \frac{h}{2}\theta]\vec{i} + [v - \frac{b}{2}\theta]\vec{j}, \quad (2.17)$$

$$\vec{U}_D = [u + \frac{h}{2}\theta]\vec{i} + [v + \frac{b}{2}\theta]\vec{j}. \quad (2.18)$$

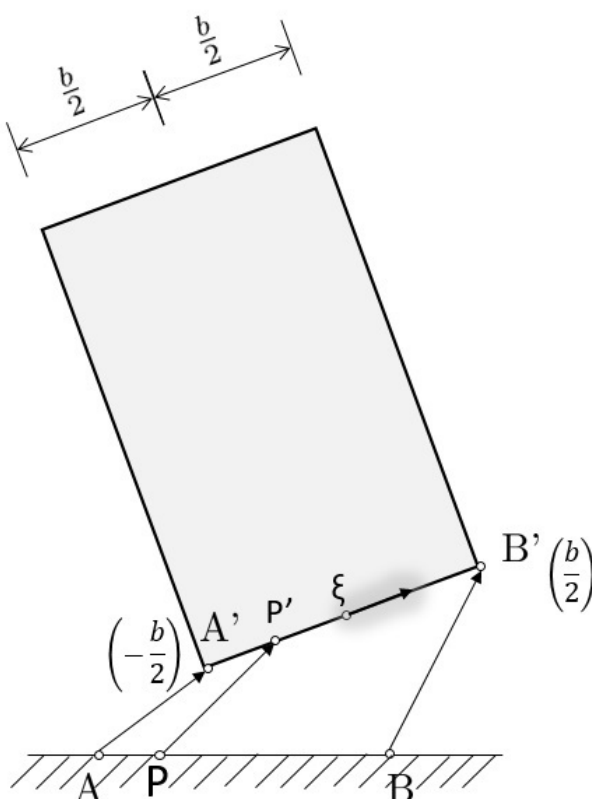
Tako smo dobili potrebne jednadžbe pomaka rubnih točaka koje će nam koristiti u nastavku rada za određivanje relativnih pomaka na kontaktu i izračuna naprezanja u vezivu.

## 2.2 Izvod jednadžbi i matrice krutosti

Blok i podloga povezani su vezivom koje se nalazi između njih odnosno duž stranice AB. Nanošenjem opterećenja blok se pomiče i rotira te pratimo pomak točaka stranice koja je vezivom povezana za podlogu. S obzirom da blok promatramo kao kruto tijelo, funkcija pomaka točaka duž stranice AB je linearna. Kao što smo prije naveli, svaka točka ima horizontalne i vertikalne pomake. Zbog uvođenja malih kuteva rotacije bloka te zbog linearizacije jednadžbi, točke na kontaktu bloka i podloge imaju iste horizontalne pomake (koliko se u horizontalnom smjeru pomakne neka točka na kontaktu, za toliko će se i sve ostale točke horizontalno pomaknuti). Vertikalni pomak točaka na kontaktu nije jednak za svaku točku iz razloga što se blok pomiče, ali i rotira i ta rotacija utječe na vertikalni pomak točaka koji nije jednak za sve. Zato uvodimo novu lokalnu koordinatu  $\xi$  čije ishodište postavljamo u sredinu stranice AB (vidi Sliku 2.3). Od ishodišta u smjeru točke A (lijevo) nalaze se negativne vrijednosti, a od ishodišta u smjeru točke B (desno) nalaze se pozitivne vrijednosti. Na Slici 2.3 prikazan je linearni pomak točaka duž stranice kontakta te ishodište novog koordinatnog sustava koji prikazuje negativne i pozitivne vrijednosti. Ovo je vektorski prikaz pomaka jedne proizvoljne točke

P na kontaktu koja je ovisna o funkciji  $\xi$ :

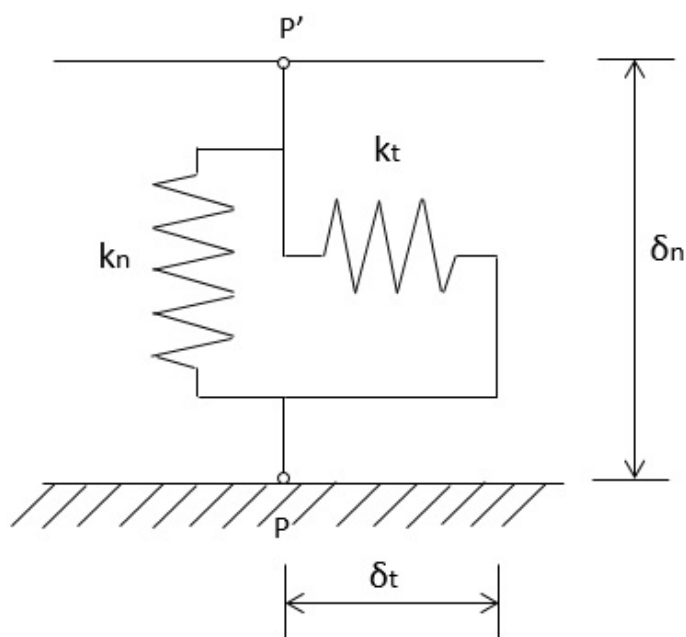
$$\underset{\sim}{u}_P = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h}{2}\theta \\ v + \xi\theta \end{Bmatrix}. \quad (2.19)$$



Slika 2.3: Pomak točaka na kontaktu

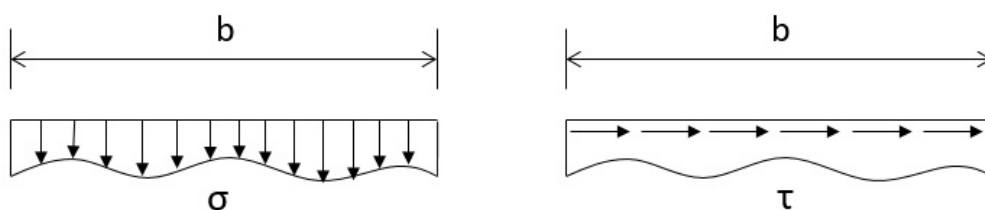
Spoj točaka podloge i bloka predočujemo oprugama kao na Slici 2.4. Svaka točka na stranici AB s podlogom je povezana s dvije opruge od kojih se jedna suprostavlja horizontalnoj kretnji, a druga vertikalnoj kretnji. Pomak točke u horizontalnom smjeru označit ćemo s  $\delta_t$ , a pomak u vertikalnom smjeru s  $\delta_n$ , pri čemu indeksi t i n označavaju tangencijalni i normalni smjer, slijedom. Sada jednadžbu (2.19) možemo zapisati kao:

$$\underset{\sim}{u}_P = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h}{2}\theta \\ v + \xi\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_t \\ \delta_n(\xi) \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$



Slika 2.4: Spoj točka na kontaktu

Opruga koja sprječava horizontalnu kretnju predstavlja tangencijalnu krutost veziva  $k_t$ . Opruga koja sprječava vertikalnu kretnju predstavlja normalnu krutost veziva  $k_n$ .



Slika 2.5: Normalna naprezanja (lijevo) i tangencijalna naprezanja (desno)

Na Slici 2.5 prikazana je raspodjela naprezanja duž kontakta. Kod normalne krutosti pojavljuju su normalna naprezanja koja su pozitivna odnosno vlačna. Kod tangencijalne krutosti pojavljuju se tangencijalna naprezanja koja su pozitivna u smjeru prema desno. Možemo zapisati jednadžbe za normalno naprezanje ( $\sigma$ ) i tangencijalno naprezanje ( $\tau$ ) na kontaktu u ovisnosti o koordinati  $\xi$  kao:

$$\sigma(\xi) = k_n \cdot \delta_n(\xi) = k_n \cdot (v + \xi \theta), \quad (2.21)$$

$$\tau = k_t \cdot \delta_t = k_t \cdot \left(u + \frac{h}{2} \theta\right). \quad (2.22)$$

Razmatramo opruge koje su linearno-elastične pa stoga vrijedi da je naprezanje proporcionalno pomaku. Bitno je također da su krutosti  $k_n$  i  $k_t$  konstantne za čitavi kontakni sloj. Tangencijalno i normalno naprezanje zajedno daju vektor naprezanja koji glasi:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_t \cdot \left(u + \frac{h}{2} \theta\right) \\ k_n \cdot (v + \xi \theta) \end{Bmatrix}. \quad (2.23)$$

Isto tako, horizontalni i vertikalni pomaci zajedno daju vektor pomaka koji glasi:

$$\underset{\sim}{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta_t \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h}{2} \theta \\ v + \xi \theta \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

Prethodno zapisani vektori naprezanja i vektor relativnih pomaka prikazat ćemo u matricnom zapisu. Vektor naprezanja razvijit ćemo na konstitutivnu matricu  $C$ , transformacijsku matricu  $B$  i na vektor traženih stupnjeva slobode  $u$ . Matricni zapis jednadžbe (2.23) glasi:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{u}. \quad (2.25)$$

Vektor relativnih pomaka je, dakle, razdvojen na transformacijsku matricu i na vektor traženih stupnjeva slobode. Matricni zapis jednadžbe (2.24) glasi:

$$\underset{\sim}{\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{u}. \quad (2.26)$$

Na temelju [7] uravnotežujemo rad vanjskih sila i potencijalnu energiju deformacija. Vodimo se pravilom ako silom djelujemo na deformabilno tijelo ono se mora deformirati. Rad vanjskih sila glasi:

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot (F_H \cdot u + F_V \cdot v + M \cdot \theta). \quad (2.27)$$

U jednadžbi (2.27) izrazi  $F_H$ ,  $F_V$  i  $M$  predstavljaju horizontalne sile, vertikalne sile i moment koji djeluje u težištu.

Rad unutrašnjih sila jednak je potencijalnoj energiji deformacije.  $dU$  je specifična energija deformacije u jednoj točki koju definiramo ovako:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot dy \cdot dz \cdot \varepsilon \cdot dx. \quad (2.28)$$

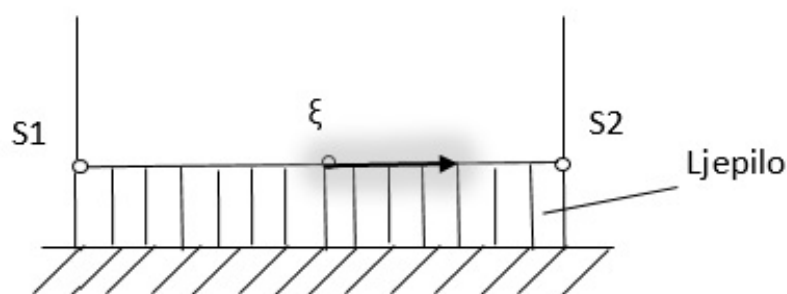
Ako pretpostavimo da naprezanje  $\sigma$  djeluje na površinu  $dA = dy \cdot dz$ , a deformaciju u smjeru naprezanja definiramo kao  $\varepsilon = \frac{\delta}{dx}$ , jednadžbu (2.28) možemo zapisati u bliku (2.29) kod kojeg dijelovi  $\sigma \cdot dA$  predstavljaju silu pomaka, gdje je  $dA = dy \cdot dz$ , a pomak kao  $\delta = \varepsilon \cdot dx$ . Jednadžba tada izgleda:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot dA \cdot \delta. \quad (2.29)$$

Ukupnu potencijalnu energiju deformacije dobivamo kao:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV. \quad (2.30)$$

Također bitna je površina kontakta odnosno duljina lijepljenog kontakta. To nam predstavlja udaljenost između početne i krajnje točke lijepljene plohe. Početna točka ima koordinatu  $S_1$ , a završna  $S_2$ . Ponovno postavljamo isto ishodište novog koordinatnog sustava  $\xi$  između točaka  $S_1$  i  $S_2$  na sredini kontakne plohe. Po novom koordinatnom sustavu referiramo pozitivan (desno od ishodišta prema  $S_2$ ) i negativan (lijevo od ishodišta prema  $S_1$ ) smjer što je prikazano na Slici 2.6. Predpostavljamo da će se ljepilo prostirati uzduž cijele plohe kontakta s toga možemo zaključiti da će granice plohe ujedno biti i granice lijepljenog kontakta. Što znači da je  $S_1 = -\frac{b}{2}$  i  $S_2 = \frac{b}{2}$ , što je također prikazano na Slici 2.6.



Slika 2.6: Ljepilo na kontaktnoj površini

Jednadžbe rada vanjskih sila i potencijalne energije deformacije zapisati ćemo u matričnom obliku. Jednadžba rada vanjskih sila odnosno jednadžba (2.29) u matričnom obliku glasi:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \underset{\sim}{\delta}^T \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot dA. \quad (2.31)$$

Proširenjem i integracijom jednadžbe (2.31) te dodavanjem granica duljine ljepljenog kontakta konačna jednadžba potencijalne energije deformacije izgleda ovako:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \cdot \delta^T \cdot \sigma \cdot dA = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \int_{S_1}^{S_2} \cdot \delta^T \cdot \sigma \cdot d\xi. \quad (2.32)$$

U jednadžbi (2.32) pojavljuje se novi član  $d$  koji predstavlja dubinu bloka koji stavljamo ispred integrala i integriramo samo po širini bloka odnosno u granicama od  $S_1$  do  $S_2$ .

Matrični zapis jednadžbe rada vanjskih sila odnosno jednadžba (2.27) glasi:

$$W = \frac{1}{2} \langle u \quad v \quad \theta \rangle \cdot \begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \underset{\sim}{u}^T \cdot \underset{\sim}{f}. \quad (2.33)$$

Preostaje nam izjednačavanje rada vanjskih sila ( $W$ ) i potencijalne energije deformacije ( $U$ ). Jednadžba (2.33) predstavlja rad vanjskih sila, a jednadžba (2.32) predstavlja potencijalnu energiju deformacije. Izjednačavanjem rada vanjskih sila s potencijalnom energijom deformacije dobivamo:

$$\begin{aligned} W &= U, \\ \frac{1}{2} \cdot \underset{\sim}{u}^T \cdot \underset{\sim}{f} &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot \int_{S_1}^{S_2} \cdot \delta^T \cdot \sigma \cdot d\xi, \\ \underset{\sim}{u}^T \cdot \underset{\sim}{f} &= d \cdot \int_{S_1}^{S_2} \cdot \underset{\sim}{u}^T \cdot \underset{\approx}{B}^T \cdot \underset{\approx}{C} \cdot \underset{\approx}{B} \cdot \underset{\sim}{u} \cdot d\xi, \\ \underset{\sim}{f} &= d \cdot \int_{S_1}^{S_2} \cdot \underset{\approx}{B}^T \cdot \underset{\approx}{C} \cdot \underset{\approx}{B} \cdot d\xi \cdot \underset{\sim}{u}, \\ \underset{\sim}{f} &= \underset{\approx}{K} \cdot \underset{\sim}{u}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Iz ravnotežne jednadžbe  $W = U$  dobili smo jednadžbu (2.34) iz koje izvodimo  $\underset{\sim}{u}$  koji glasi:

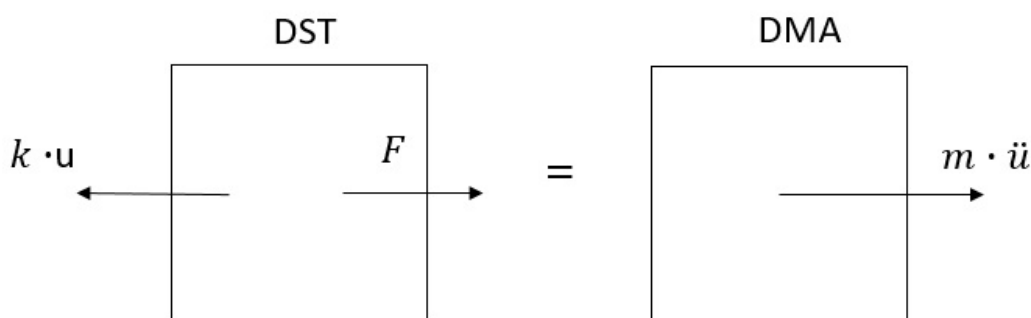
$$\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{K}^{-1} \cdot \underset{\sim}{f} \quad (2.35)$$

Pronalaženje rješenja u cijelini "Izvod jednadžbi i matrice krutosti" temelji se na [7].



## 2.3 Proširenje jednadžbi i dinamičko ponašanje

Za određivanje dinamičkog odgovora potrebna nam je jednadžba kretanja. Jednadžbu kretanja odnosno jednadžbu dinamičke ravnoteže dobit ćemo izjednačavanjem dijagrama slobodnog tijela (DST) i dijagrama masa puta ubrzanja (DMA) prema Newtonovom 2. zakonu. Na Slici 2.7 su prikazani dijagrami za primjer krutog bloka s jednim stupnjem slobode (horizontalnim pomakom) se temelje na [6].



Slika 2.7: Izjednačavanje DST i DMA

Iz Slike 2.7 proizlazi jednadžba kretanja na kojoj će se sve temeljiti, a ona glasi:

$$\begin{aligned} -k \cdot u + F &= m \cdot \ddot{u}, \\ m \cdot \ddot{u} + k \cdot u &= F \end{aligned} \quad (2.36)$$

Na Slici 2.7 prikazan je primjer za sustav s jednim stupnjem slobode te je izvedena i jednadžba (2.36) za isti. Isti taj princip može se primjeniti na sustavu s više stupnjeva slobode i tako dobiti potrebne jednadžbe koje su dane u nastavku.

Za statički problem sustava s tri stupnja slobode smo ranije izveli jednadžbu ravnoteže (2.34), a sada ćemo morati dodati matricu masa  $\tilde{M}$  i vektor ubrzanja  $\tilde{u}$  analogno izrazu (2.36). Te ćemo, kako bismo jednadžbu riješili koristeći odabranu metodu numeričke integracije, za trenutak  $t$  istu zapisati u matričnom obliku koji glasi:

$$\tilde{M} \cdot \tilde{u}_t + \tilde{K} \cdot \tilde{u}_t = \tilde{f}. \quad (2.37)$$

Koristit ćemo matricu masa  $\tilde{M}$  koja ima ispunjenu samo dijagonalu, a ostale vrijednosti su 0. Dijagonala je ispunjena redom masom bloka koji je označen sa  $m_1$  i sa momentom

inercije koji je označen sa  $I_{g1}$ .

$$\underset{\approx}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{g1} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Veličine  $m_1$  i  $I_{g1}$  označavaju masu i moment inercije za jedan blok. Koristeći Newmarkovu metodu numeričke integracije, vektor ubrzanja  $\underset{\approx}{\ddot{u}}_t$  možemo zapisati i kao:

$$\underset{\approx}{\ddot{u}}_t = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} (\underset{\approx}{u}_t - \underset{\approx}{u}_{t-\Delta t}) - \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \underset{\approx}{\dot{u}}_{t-\Delta t} + (1 - \frac{1}{2\beta}) \cdot \underset{\approx}{\ddot{u}}_{t-\Delta t}, \quad (2.39)$$

gdje  $\Delta t$  označava veličinu vremenskog koraka. U izrazu (2.39) koristimo Newmarkove parametre koji glase  $\beta = \frac{1}{2}$  i  $\gamma = \frac{1}{4}$ . Potom uvrštavajući jednadžbu (2.39) u jednadžbu (2.37) i sređujući lijevu i desnu stranu dobivamo:

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{M} \cdot \left[ \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} (\underset{\approx}{u}_t - \underset{\approx}{u}_{t-\Delta t}) - \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \underset{\approx}{\dot{u}}_{t-\Delta t} + (1 - \frac{1}{2\beta}) \cdot \underset{\approx}{\ddot{u}}_{t-\Delta t} \right] + \underset{\approx}{K} \cdot \underset{\approx}{u}_t &= \underset{\approx}{f}, \\ \left[ \underset{\approx}{M} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} + \underset{\approx}{K} \right] \cdot \underset{\approx}{u}_t &= \underset{\approx}{f} + \underset{\approx}{M} \cdot \left[ \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \underset{\approx}{\dot{u}}_{t-\Delta t} + (1 - \frac{1}{2\beta}) \cdot \underset{\approx}{\ddot{u}}_{t-\Delta t} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Djelove jednadžbe (2.40) možemo zapisati kao  $\underset{\approx}{K}_{eff}$  i  $\underset{\approx}{f}_{eff}$ :

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{K}_{eff} &= (\underset{\approx}{M} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} + \underset{\approx}{K}), \\ \underset{\approx}{f}_{eff} &= \underset{\approx}{f} + \underset{\approx}{M} \cdot (\frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \underset{\approx}{\dot{u}}_{t-\Delta t} + (1 + \frac{1}{2\beta}) \cdot \underset{\approx}{\ddot{u}}_{t-\Delta t}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Tako dobivamo konačnu jednadžbu iz koje proizlazi izraz:

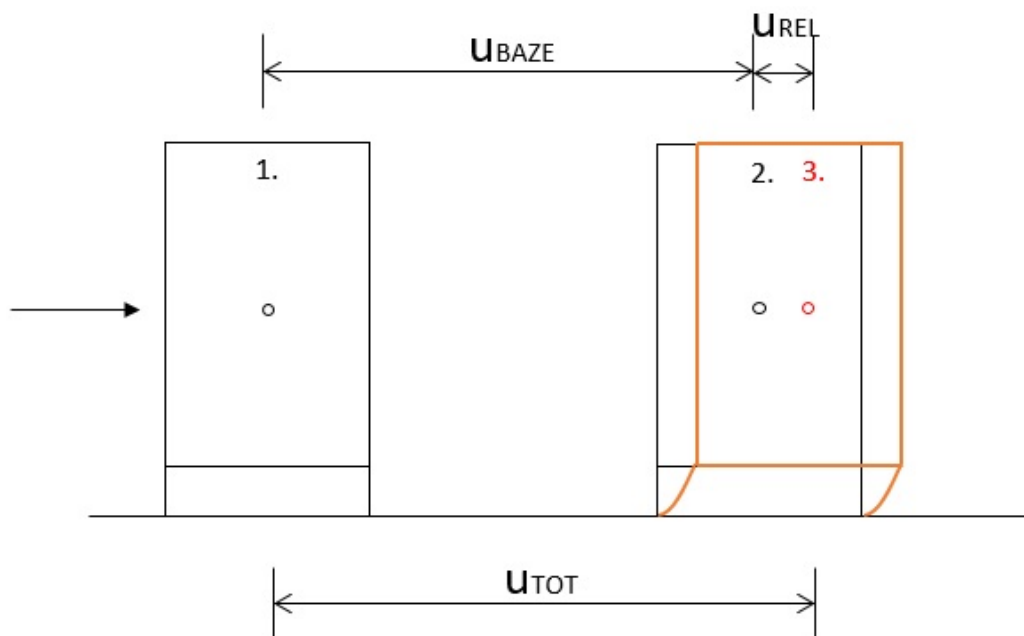
$$\begin{aligned} \underset{\approx}{K}_{eff} \cdot \underset{\approx}{u}_t &= \underset{\approx}{f}_{eff,t}, \\ \underset{\approx}{u}_t &= \underset{\approx}{K}_{eff}^{-1} \cdot \underset{\approx}{f}_{eff,t}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Dobiveni izraz iz jednadžbe (2.42), pomoću programa Pyhton Spyder ubacujemo u petlju te dobivamo traženi vektor pomaka  $\underset{\approx}{u}_t$ . Za to nam je potrebno i poznavanje vektora brzine  $\underset{\approx}{\dot{u}}_t$  i vektora ubrzanja  $\underset{\approx}{\ddot{u}}_t$  koji je prethodno definiran u jednadžbi (2.39). Vektora brzine  $\underset{\approx}{\dot{u}}_t$  glasi:

$$\underset{\approx}{\dot{u}}_t = \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot (\underset{\approx}{u}_t - \underset{\approx}{u}_{t-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \cdot \underset{\approx}{\dot{u}}_{t-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \cdot \Delta t \cdot \underset{\approx}{\ddot{u}}_{t-1}. \quad (2.43)$$

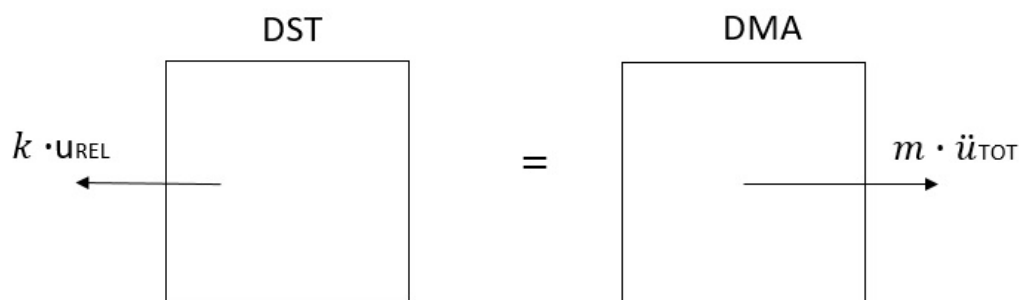
Jednadžba (2.42) koristila bi nam kada bi nam opterećenje u obliku sile i/ili mo-

menta koje djeluju na model bilo poznato u svakom trenutku, a u našem slučaju nisu u obliku sila i/ili momenta, već u obliku pomaka podloge (npr. potres). Zbog toga nas zanima kako izgleda pomaknuta konfiguracija bloka koja je prikazana na Slici 2.8.



Slika 2.8: Pomaknuta konfiguracija bloka

Na Slici 2.8 prikazan je pomak bloka tijekom djelovanja pobude podloge na kojoj se on nalazi. Ukupni pomak bloka nazivamo  $u_{TOT}$  te on predstavlja zbroj pomaka baze/podloge  $u_{BAZE}$  i relativnog pomaka bloka  $u_{REL}$ . Relativni pomak bloka predstavlja pomak jedne točke bloka u odnosu na podlogu koji nastaje zbog deformacije veziva. Potreban nam je vektor totalnog ubrzanja  $\ddot{u}_{TOT}$  koji dobivamo kao drugu derivaciju totalnog pomaka. Sada za postojeću konfiguraciju bloka možemo ponovno napraviti DST i DMA dijagrame koji su prikazani na Slici 2.9.



Slika 2.9: Izjednačavanje DST i DMA bloka pod utjecajem pobude podloge

Na temelju izjednačavanja DST i DMA dijagrama prikazanog na Slici 2.9 možemo zapisati novu jednadžbu sa novim pomacima:

$$\begin{aligned}
-k \cdot u_{REL} &= m \cdot \ddot{u}_{TOT}, \\
-k \cdot u_{REL} &= m \cdot (\ddot{u}_{BAZE} + \ddot{u}_{REL}), \\
-k \cdot u_{REL} &= m \cdot \ddot{u}_{BAZE} + m \cdot \ddot{u}_{REL}, \\
k \cdot u_{REL} + m \cdot \ddot{u}_{REL} &= -m \cdot \ddot{u}_{BAZE}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Kako bismo zapisali jednadžbu (2.44) u matričnom obliku potrebno je matricu  $\tilde{M}$  pomnožiti sa vektorom  $e$ , koji u obzir uzima statičke pomake stupnjeva slobode bloka uslijed pomaka podloge. Matrični zapis jednadžbe glasi:

$$\tilde{K} \cdot \tilde{u}_{REL} + \tilde{M} \cdot \ddot{\tilde{u}}_{REL} = -\tilde{M} \cdot e \cdot \ddot{\tilde{u}}_{BAZE}. \tag{2.45}$$

Time smo postigli da na desnoj strani jednadžbe imamo potrebne članove koji su nam potrebni za promatrano stanje modela. Vanjsku silu  $F$  zamjenjujemo umnoškom matrice masa  $m$  i ubrzanjem podloge  $\ddot{u}_{BAZE}$ . Uzimanjem u obzir prigušenja, u DST dijagramu javlja se i sila prigušenja. Modeliramo prigušenje kao viskozno prigušenje, pa je ono proporcionalno brzini. Time dobivamo jednadžbu:

$$\tilde{K} \cdot \tilde{u}_{REL} + \tilde{C} \cdot \dot{\tilde{u}}_{REL} + \tilde{M} \cdot \ddot{\tilde{u}}_{REL} = -\tilde{M} \cdot e \cdot \ddot{\tilde{u}}_{BAZE}. \tag{2.46}$$

Izraz  $\tilde{C} \cdot \dot{\tilde{u}}_{REL}$  predstavlja silu koja proizlazi iz modela viskoznog prigušenja u kojem izraz  $\dot{\tilde{u}}_{REL}$  predstavlja relativnu brzinu bloka, a izraz  $\tilde{C}$  je matrica prigušenja koju zapisujemo kao:

$$\tilde{C} = a_0 \cdot \tilde{M} + a_1 \cdot \tilde{K}. \tag{2.47}$$

U jednadžbi (2.47) izrazi  $\tilde{M}$  i  $\tilde{K}$  predstavljaju redom matrice masa i krutosti, dok su izrazi  $a_0$  i  $a_1$  su Rayleighovi koeficijenti koji se dobivaju na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \zeta \cdot \frac{2 \cdot \omega_i \cdot \omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \\
a_1 &= \zeta \cdot \frac{2}{\omega_i + \omega_j}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

gdje su  $\omega_i$  i  $\omega_j$  vrijednosti kružne frekvencije i-tog i j-tog tona za prigušeni sustav, a  $\zeta$  predstavlja koeficijent prigušenja. Numerički model izradili smo u programskom jeziku Python. Unijeli smo prethodno navedene izvedene jednadžbe i matrične zapise te smo dobili algoritam koji će nam koristiti za simulaciju problema. Kod iz Python Spydera biti će priložene u radu kao Prilog 1.



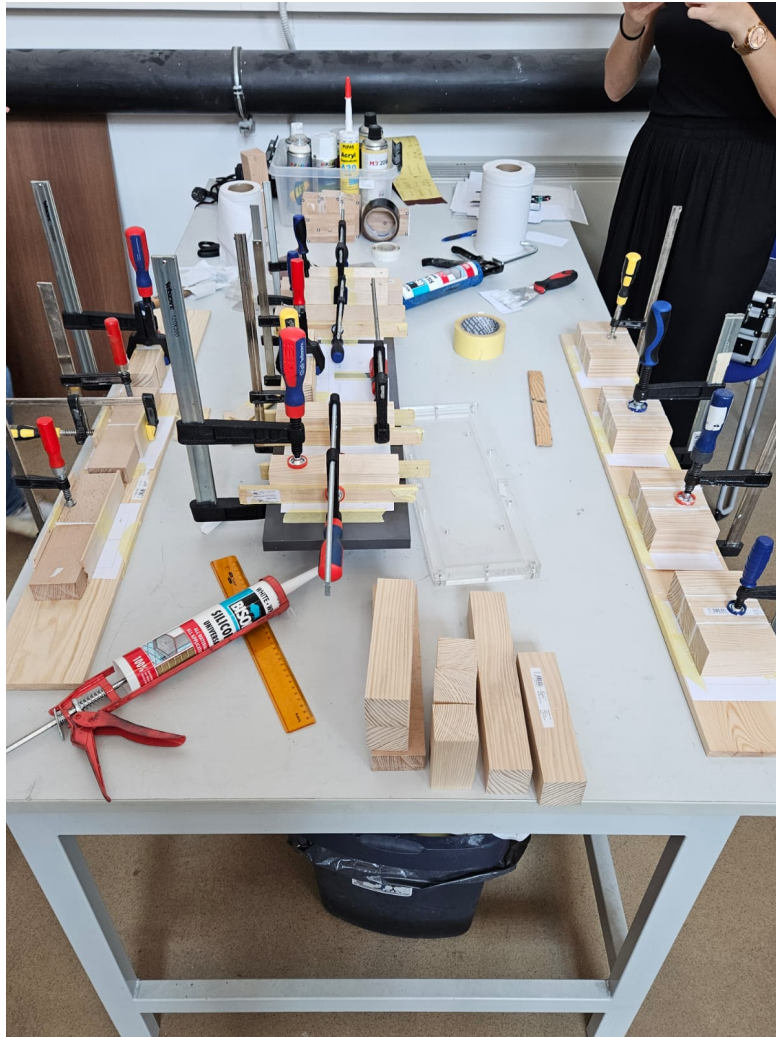
## 3. LABORATORIJSKO ISPITIVANJE

Laboratorijska ispitivanja se provode kako bismo određene probleme analizirali pomoću simulacija na umanjenim modelima, te praćenjem njihovog ponašanja saznajemo kakav ishod možemo očekivati na realnim konstrukcijama. Laboratorijska ispitivanja proveli smo u Laboratoriju za konstrukcije na Građevinskom fakultetu u Rijeci. U laboratoriju se vrše ispitivanja svojstava raznih građevinskih materijala, kao što su beton, čelik, drvo, aluminij, staklo, plastika i kompoziti. Osim toga, analiziraju se konstrukcijski elementi pod statičkim i dinamičkim opterećenjima, te se provode dinamička ispitivanja smanjenih modela konstrukcija i njihovih elemenata. U laboratoriju nam je najprije bio cilj dobiti rezultate mjerenja za statičko vlačno ispitivanje uzoraka, tlačno ispitivanje uzoraka i ispitivanje uzoraka na posmik. Također smo proveli dinamičko ispitivanje bloka povezanog za podlogu pri dinamičkoj pobudi podloge. Ispitivanja smo provodili pomoću laboratorijske opreme koja je detaljnije opisana u nastavku. Za statička ispitivanja smo koristili univerzalni tlačno-vlačni stroj (kidalica) Z600 (Zwick/Roell) koja je prikazana na Slici 3.1. Kidalicu pokreće elektromotor, a namijenjena je za precizna statička ispitivanja i niskociklička ispitivanja do 0,5 Hz. Gornji radni prostor namijenjen je za vlačna ispitivanja (čelik, drvo, plastika, kompoziti i dr.). A donji radni prostor namijenjen je za tlačna ispitivanja i ispitivanja na savijanje manjih uzoraka do 2,0 m. Kidalicom upravlja računalo (program testXpert II). Za dinamička ispitivanja odnosno za mjerenja pomaka potreban nam je bio sustav kamera za optička mjerenja (GOM mbH PONTOS 3D 4M) i stol za nanošenje dvostrukog impulsnog opterećenja. Sustav kamera omogućuje 3D beskontaktna optička mjerenje pomaka i deformacija. Sustav se sastoji od dvije brze kamere koje imaju mogućnost snimanja do 168 fps rezolucijom od 2400×1728 piksela, te do 1300 fps u smanjenoj rezoluciji [8].



Slika 3.1: Donji radni prostor univerzalnog tlačno-vlačnog stroja (kidalica) Z600 (Zwick/Roell)

Za ispitivanja je bilo potrebno najprije pripremiti uzorke od drvenih blokova povezanih univerzalnim silikonskim ljepilom marke BISON u sloju debljine 2 mm. Nakon nanošenja silikonskog ljepila uzorke smo pričvrstili za podlogu da se ne pomiču te smo ih tako ostavili da se suše 24 sata. Na Slici 3.2 prikazano je silikonsko ljepilo i kako su izgledali uzorci nakon nanošenja silikona i pričvršćivanja istih. Nakon sušenja uzoraka uklonili smo ih sa stola, označili ih te zaljepili točkice na rubove i težišta blokova kako bismo mogli pomoću video snimka ispitivanja analizirati pomake blokova pri opterećenju. Uzorci koji su spremni za ispitivanje prikazani su na Slici 3.3 Uzorke smo postavili u kidalicu te smo nanosili opterećenje pomoću računala pri čemu se kontinuiranim povećanje pomaka na kidalicu u vremenu odbilo odgovarajuće stanje naprezanja u ljepilu (čisti vlak, tlak ili posmik). Nakon nekog vremena došlo je do ponašanja koje je rezultiralo slomom odnosno krajem ispitivanja. Za svaki od ispitivanja (tlak, vlak i posmik) proveli smo 4 eksperimenta kako bismo dobili što reprezentativnije rezultate te mogli odrediti vjerodostojne mehaničke karakteristike.



Slika 3.2: Priprema uzoraka za ispitivanje

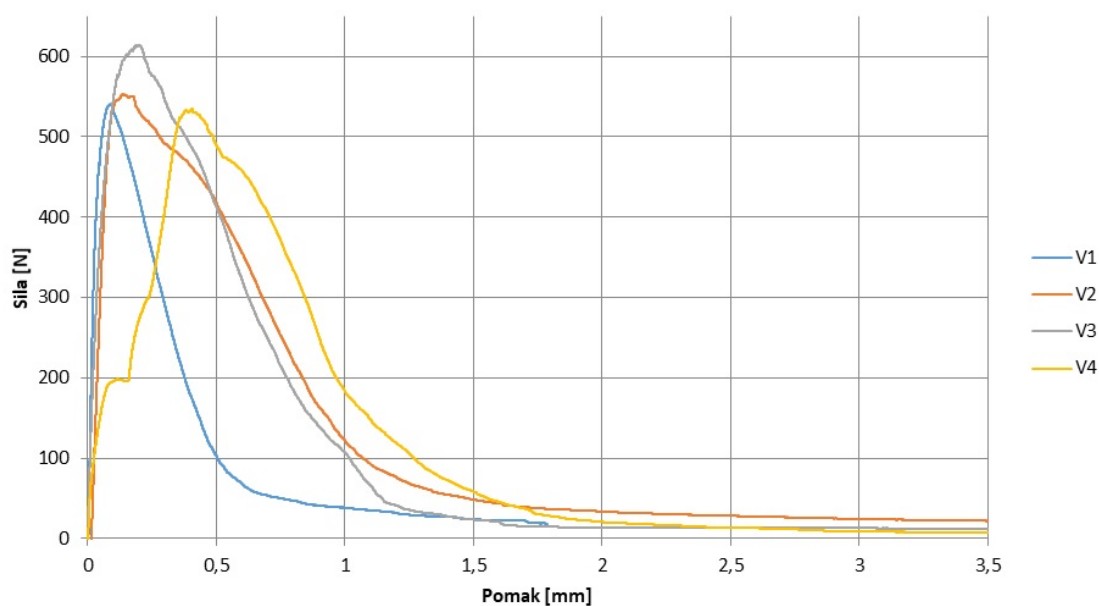


Slika 3.3: Uzorci za ispitivanje na posmik (lijevo), vlak (sredina) i tlak (desno)



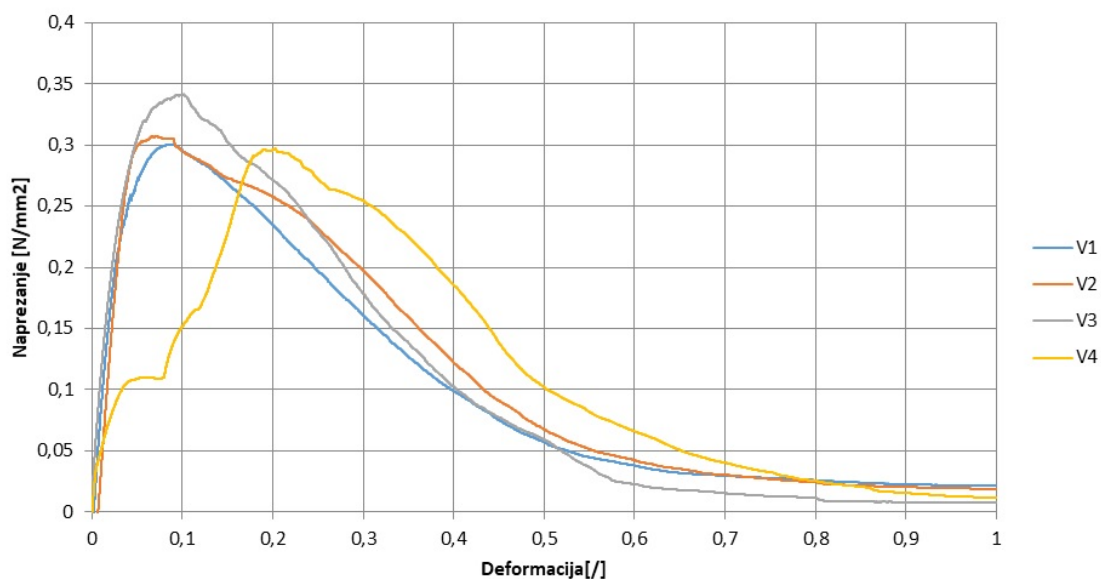
### 3.1 Ispitivanje uzoraka na vlak

Drvene uzorke dimenzija 120x60x30 mm spojene ranije navedenim silikonskim ljepljom postavili smo u univerzalnu kidalicu te smo ih opteretili vlačno. Cijeli proces u kidalici smo snimali kako bismo kasnije mogli analizirati ispitivanje te, po potrebi, pomoću sustava za optičko mjerenje izmjeriti neke dodatne pomake, zaokrete i/ili deformacije. Prilikom nanošenja opterećenja u nekom trenutku dolazi do sloma ljepila te time ispitivanje završava. Takav proces smo ponovili na 4 uzorka za svaki tip ispitivanja (vlak, tlak, i posmik). Softver je rezultate ispitivanja bilježio u programu Microsoft Excel na temelju čega smo dobili dijagrame sila-pomak koji su prikazani na Slici 3.4.



Slika 3.4: Dijagram sila-pomak vlačnog ispitivanja

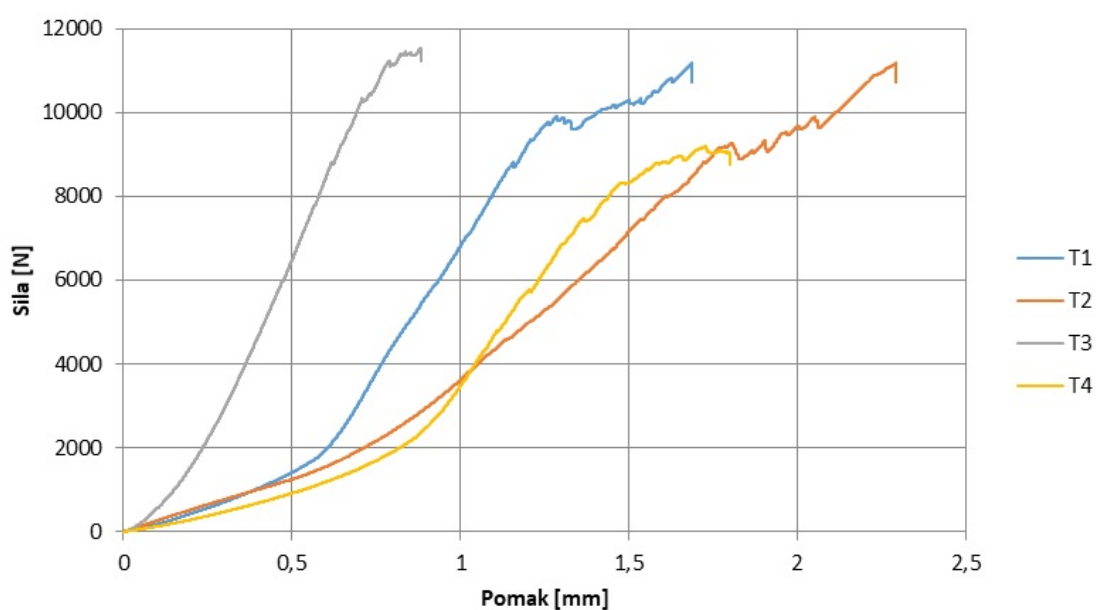
Iz dobivenih rezultata smo odredili dijagram naprezanje-deformacija koji nam je potreban da odredimo krutost  $k_n$ . Naprezanje smo dobili kao količnik sile i površine bloka, a deformaciju kao količnik pomaka i debljine lijepljenog sloja. Na dijagramu naprezanje-deformacija uzimamo u obzir linearni dio dijagrama iz kojeg dobivamo modul elastičnosti u vlaklu, čijim dijeljenjem s debljinom ljepila (2 mm) dobivamo krutost  $k_n$ . Ispitivanje V4 zanemarujemo jer se značajno odstupa od ostala 3 uzorka za vlak.



Slika 3.5: Dijagram naprezanje-deformacija vlačnog ispitivanja

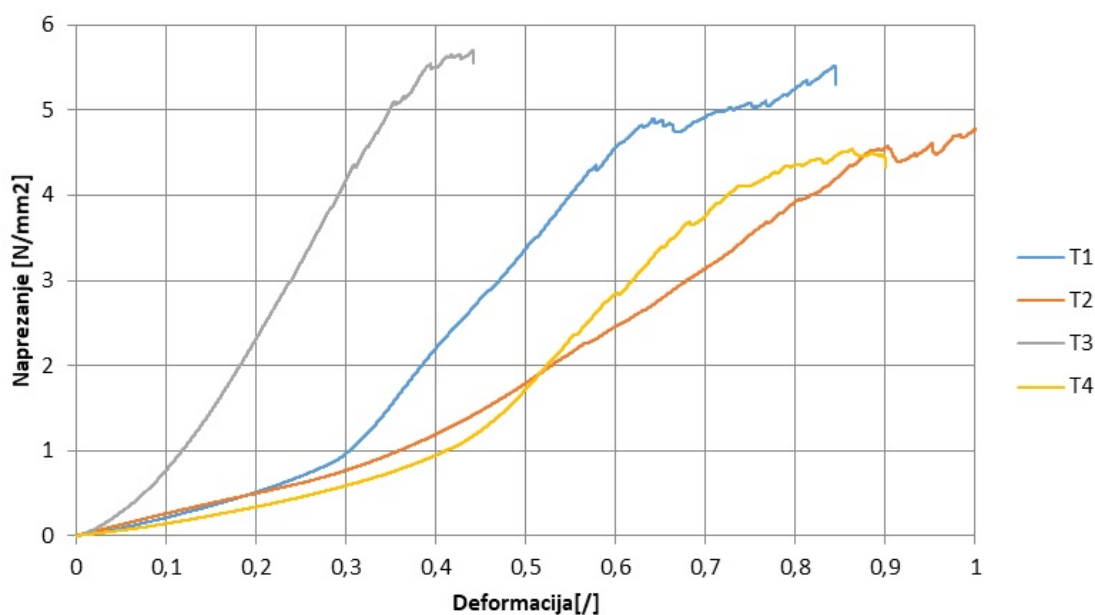
### 3.2 Ispitivanje uzoraka na tlak

Drvene uzorke dimenzija 90x45x45 mm spojene univerzalnim silikonskim ljepljivom postavili smo u kidalicu te smo ih opteretili tlačno. Cijeli proces u kidalici smo snimali kako bismo kasnije mogli analizirati ispitivanje. Prilikom nanošenja opterećenja u nekom trenutku dolazi do deformacija odnosno sloma ljepljive te time završava ispitivanje. Takav proces smo ponovili za svaki od 4 uzorka za tlak. Dijagrami sila-pomak su prikazani na Slici 3.6.



Slika 3.6: Dijagram sila-pomak tlačnog ispitivanja

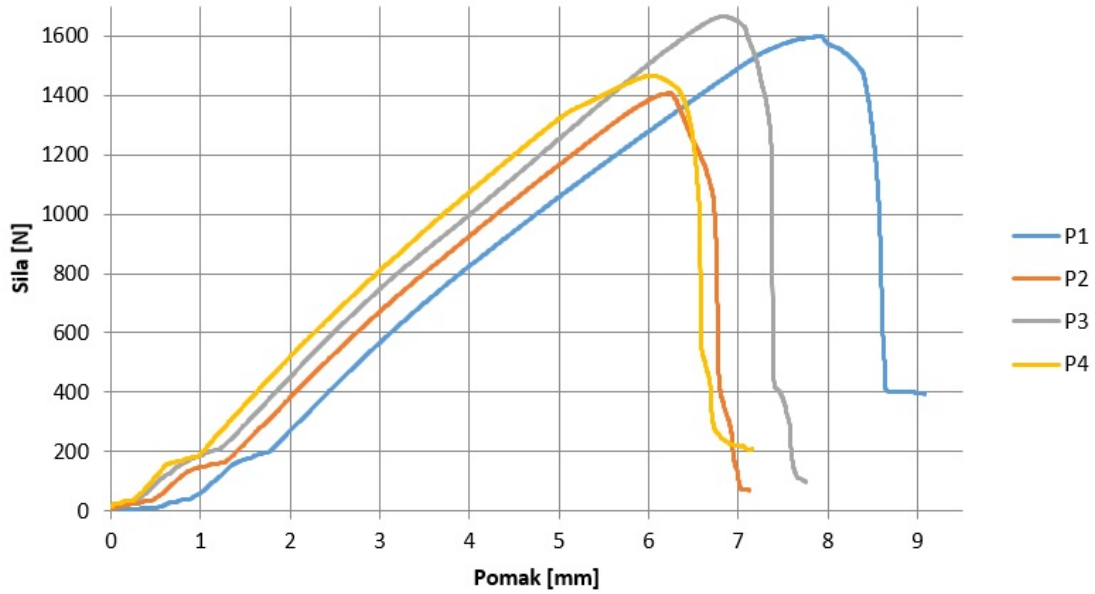
Iz dobivenih rezultata, također određujemo dijagram naprezanje-deformacija koji nam je potreban da odredimo krutost  $k_n$ . Ispitivanje T3 zanemarujemo jer se previše razlikuje od ostala 3 uzorka za tlak.



Slika 3.7: Dijagram naprezanje-deformacija tlačnog ispitivanja

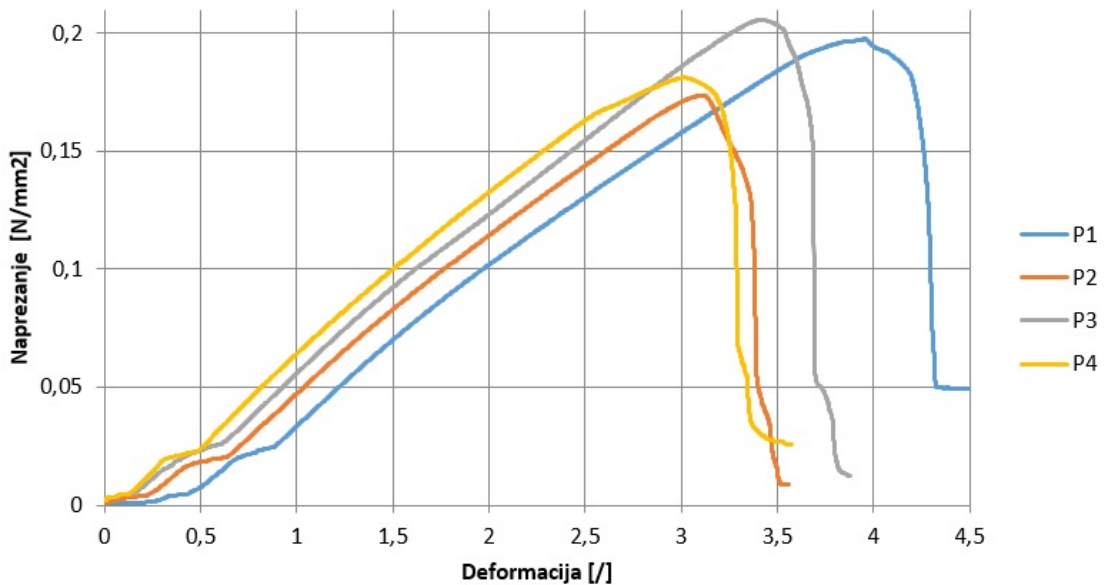
### 3.3 Ispitivanje uzoraka na posmik

Drvene uzorke dimenzija 90x45x45 mm spojene univerzalnim silikonskim ljepljivom postavili smo u kidalicu te smo ih opteretili posmično. Cijeli proces u kidalici smo snimali kako bismo kasnije mogli analizirati ispitivanje. Prilikom nanošenja opterećenja u nekom trenutku dolazi do smicanja blokova koji uzrokuju slom ljepljiva te time završava ispitivanje. Takav proces smo ponovili za svaki od 4 uzorka za posmično ispitivanje. Softver je rezultate ispitivanja prikazao u programu Excel na temelju čega smo dobili sila-pomak koji su prikazani na Slici 3.8.



Slika 3.8: Dijagram sila-pomak posmičnog ispitivanja

Iz dobivenih rezultata, na identičan način kao i ranije određujemo dijagram naprezanje-deformacija koji nam je potreban da odredimo krutost  $k_t$ . U obzir smo uzeli sva 4 ispitivanja.



Slika 3.9: Dijagram naprezanje-deformacija posmičnog ispitivanja

Za određivanje krutosti, u obzir smo uzeli samo linearni dio na svim dijagramima naprezanje-deformacija te smo za te djelove dijagrama u programu Microsoft Excel odredili koeficijent nagiba pravca koji ih najbolje opisuje. Koeficijente nagiba podijelili smo sa debljinom ljepljenog spoja 2 mm kako bi dobili odogovarajuće krutosti  $k_n$  i  $k_t$  krutosti. Za normalnu krutost  $k_n$  smo za potrebe daljnjih analiza odabrali srednju

vrijednost krutosti dobivenih iz tlačnih i vlačnih ispitivanja, a za tangencijalnu krutost  $k_t$  smo odabrali srednju vrijednost krutosti dobivenih iz ispitivanja na posmik. One redom iznose  $k_n = 2.78 \text{ N/mm}^3$  i  $k_t = 0.32 \text{ N/mm}^3$ . Postupak je prikazan u Tablici 3.1.

Tablica 3.1: Određivanje krutosti

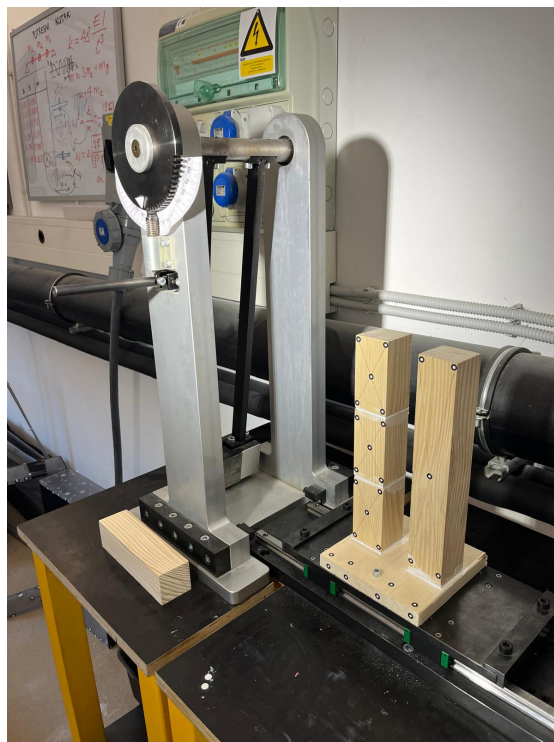
Ispitivanja	Koef. nagiba [N/mm <sup>2</sup> ]	Debljina ljepljenog spoja [mm]	Krutost [N/mm <sup>3</sup> ]	Krutost [N/m <sup>3</sup> ]	Normalna krutost [N/m <sup>3</sup> ]	Tangencijalna krutost [N/m <sup>3</sup> ]	
V1	9,1149	2	4,55745	4557450000	2778766667		
V2	9,5328	2	4,7664	4766400000			
V3	7,2796	2	3,6398	3639800000			
V4	/	2	/	/			
T1	2,82	2	1,41	1410000000			
T2	2,4757	2	1,23785	1237850000			
T3	/	2	/	/			
T4	2,1222	2	1,0611	1061100000			
P1	0,0602	2	0,0301	30100000			32237500
P2	0,0638	2	0,0319	31900000			
P3	0,0653	2	0,03265	32650000			
P4	0,0686	2	0,0343	34300000			

### 3.4 Opis i rezultati dinamičkih ispitivanja

Dinamičko ispitivanje vršili smo na jednom uzorku s drvenim blokom povezanim sa drvenom podlogom univerzalnim silikonskim ljepljivom BISON u sloju od 2 mm koji se može vidjeti na Slici 3.10. Podlogu s uzorkom smo vijcima učvrstili za postolje kako tijekom ispitivanja ne bi došlo do pomicanja drvene podloga uzorka u odnosu na klizno postolje uređaja za nanošenje opterećenja. Eksperiment se izvodio na stolu za nanošenje dvostrukog impulsnog opterećenja na ispuštanjem čekića a s određene visine kako bi dobili željenu jačinu impulsa na postolje koje se potom skupa sa uzorkom pomiče dok ne udari u branik u sudaru s kojim dobiva drugi impuls te se nakon toga zaustavlja. Na Slici 3.11 možemo vidjeti kako se uzorak postavlja na uređaj te također kako uređaj izgleda. Ispitivanje je praćeno pomoću sustava kamera za optička mjerenja GOM mbH PONTOS 3D 4M. Na uzorku i podlozi zaljepljene su točke kako bismo mogli napraviti analizu pomaka obradom video snimka koji je dobiven optičkim mjerenjem u programu ARAMIS Professional.



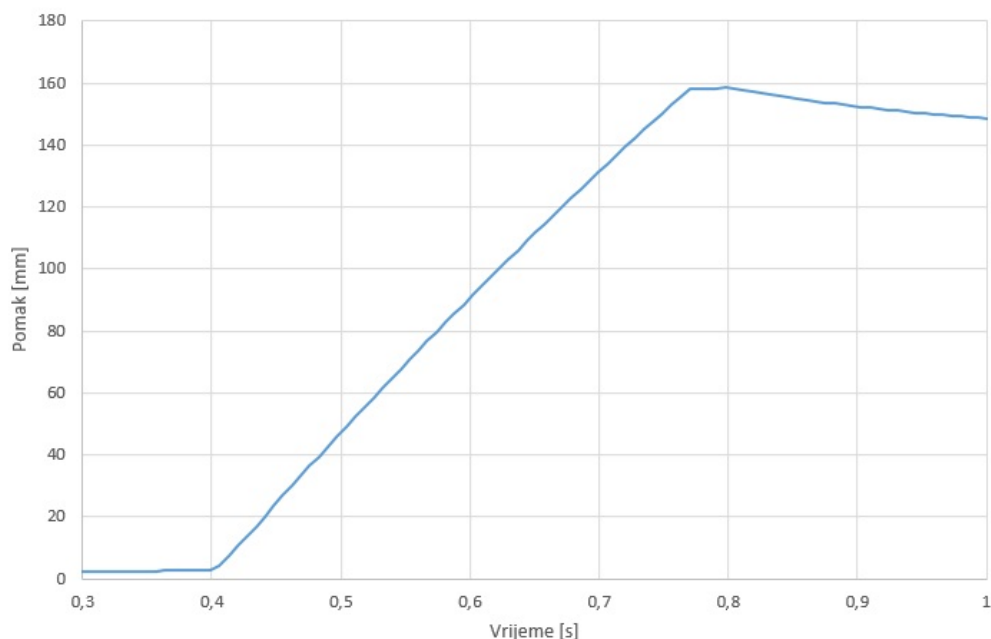
Slika 3.10: Uzorak bloka i podloge za dinamičko istraživanje



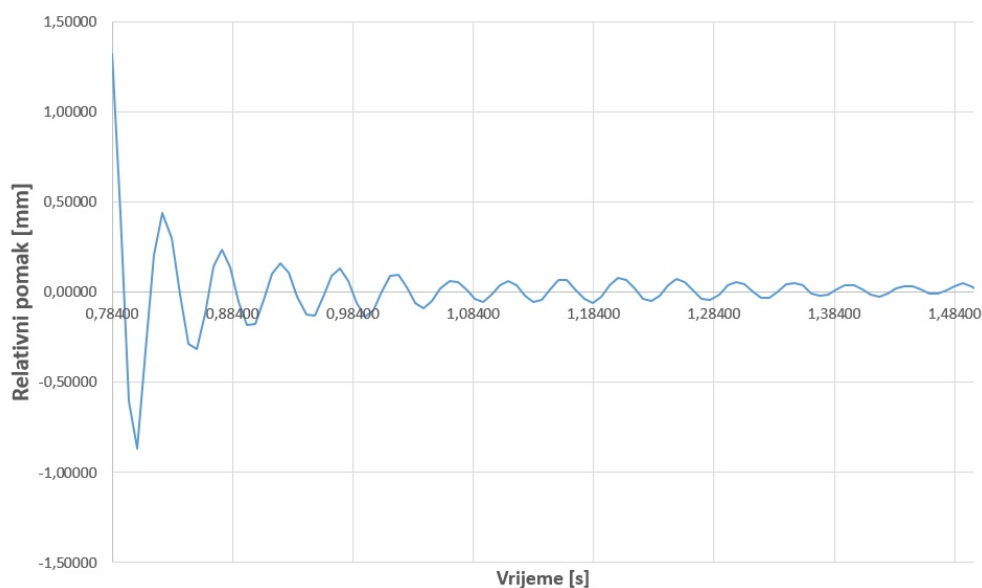
Slika 3.11: Uzorak bloka i podloge na uređaju za dinamičko ispitivanje

Izveli smo 5 eksperimenata, od kojih je za analizu izabran jedan s najkvalitetnije provedenim mjerenjem. Radi se o 3. eksperimentu s dodanim utegom težine 2 N na vrhu bloka dimenzija 270x45x45 mm. Nanijeli smo dvostruko impulsno opterećenje te

smo optički pratili pomak podloge i bloka. Udarcem utega u uzorak nastaje prvi impuls, te kad uzorak udara u branik javlja se drugi impuls. U nastavku su analizirane slobodne prigušene oscilacije nakon drugog impulsa kako bi se provela usporedba eksperimentalnih rezultata s predikcijama numeričkog modela. Na temelju analize snimaka optičkih mjerenja (i dobivenih podataka iz iste) izrađujemo dijagram horizontalnih pomaka podloge uzorka što je prikazano na Slici 3.12, te prikazujemo relativne horizontalne pomake bloka u odnosu na podlogu što predstavlja oscilacije prikazane na Slici 3.13.



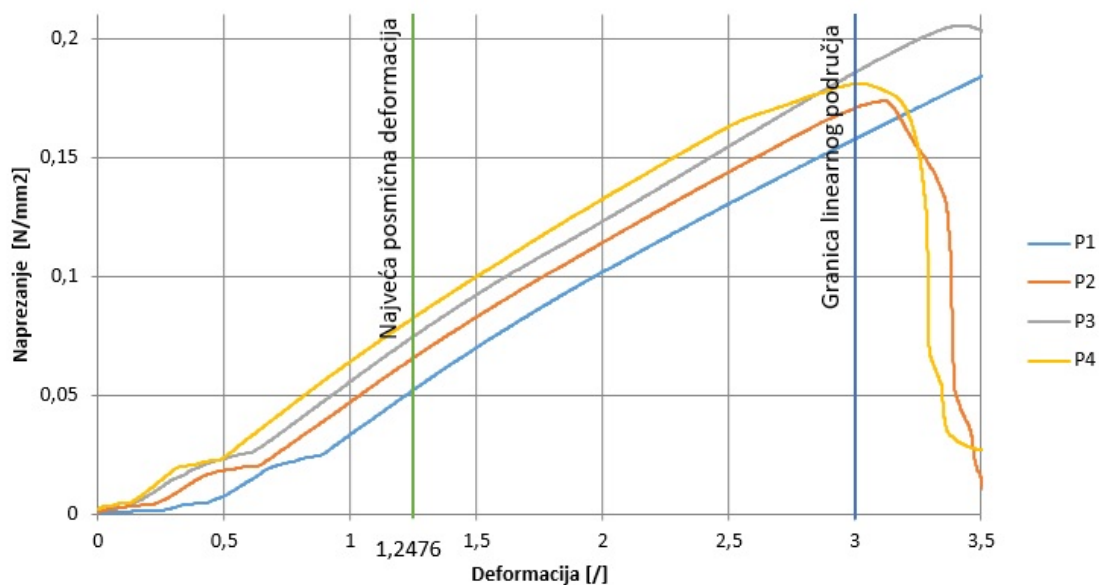
Slika 3.12: Dijagram horizontalnih pomaka podloge kroz vrijeme



Slika 3.13: Dijagram horizontalnog relativnog pomaka bloka u odnosu na podlogu

Na dijagramu sa Slike 3.13 odredili smo period koji iznosi  $p = 0,049$  s te smo ga

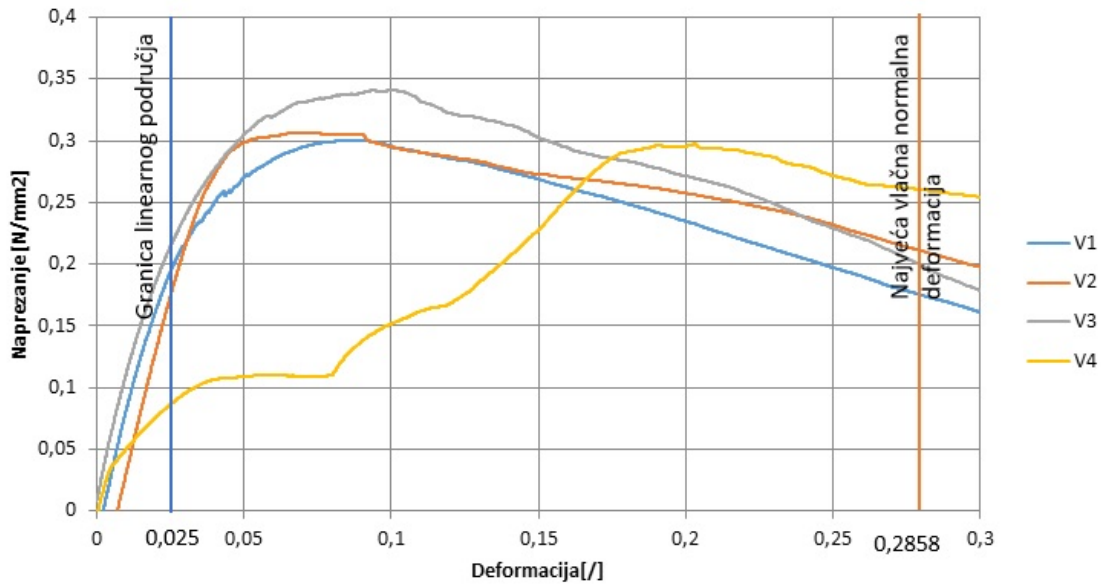
usporedili sa periodom koji smo dobili u Pythonu kako bismo dobili što veća podudaranja. Iz Pythona za  $k_n$  kao srednju vrijednost vlačnih i tlačnih ispitivanja koja iznosi  $k_n = 277876667 \text{ N/mm}^3$ , period je  $p = 0,030 \text{ s}$ . Zatim smo odredili maksimalne relativne pomake na kontaktu bloka sa podlogom u točkama A i B, kako bismo provjerili izlaze li u tom slučaju deformacije ljepila izvan linearno-elastičnog područja. Na temelju jednadžbi (2.15) i (2.16), pri čemu su nam bili potrebni pomaci težišta u i v te kut  $\theta$  za najveći pomak, odredili smo horizontalni i vertikalni pomak rubnih točaka A i B. Te vrijednosti su nam bile potrebne kako bismo odredili pojavljuju li se pomaci odnosno maksimalne deformacije samo u linearno-elastičnom području ili postoje i veličine koje izlaze iz linearnog područja na prethodno izrađenim dijagramima naprezanje-deformacija (pomoću kojih smo određivali normalnu i tangencijalnu krutost). Relativni horizontalni pomak je  $u = 2,4952 \text{ mm}$ , odnosno deformacija iznosi  $1,2476 [.]$ . Tu se radi o posmičnoj deformaciji koja ulazi u linearni dio dijagrama naprezanje-deformacija iz posmičnog testa, kao što je prikazano na Slici 3.14 (gdje plava linija predstavlja granicu linearnog područja dok zelena predstavlja najveću posmičnu deformaciju).



Slika 3.14: Usporedba najvećih izmjerenih posmičnih dijagramom naprezanje-deformacija za posmik

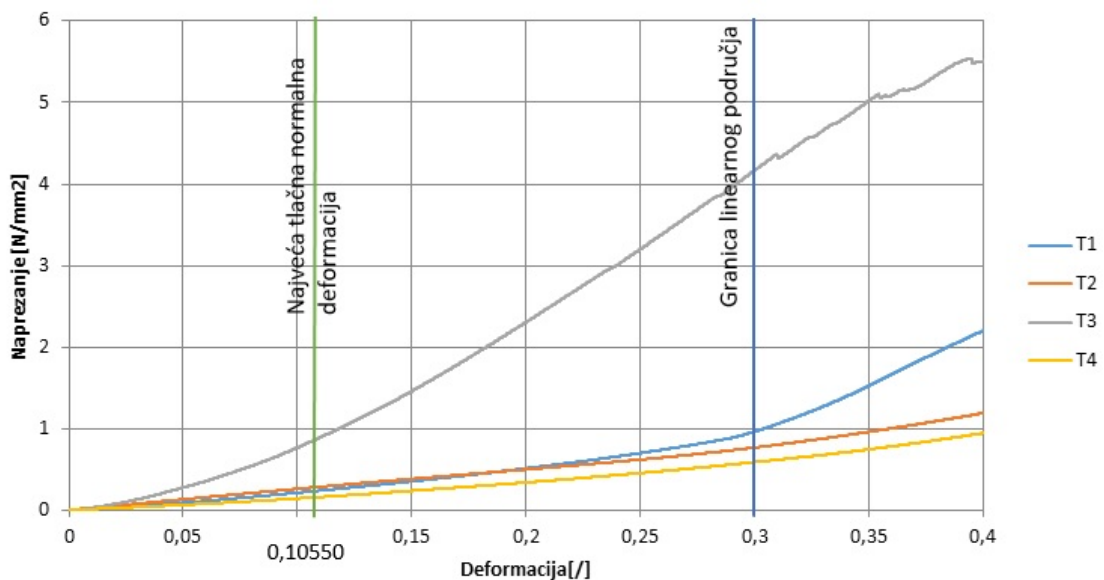
Pozitivni (vlačni) vertikalni pomak iznosi  $v = 0,5715 \text{ mm}$  odnosno deformacija iznosi  $0,2858 [.]$ . To je normalna deformacija koja se nalazi izvan linearnog područja na vlačnom dijagramu naprezanje-deformacija, što je prikazano na Slici 3.15 (gdje plava linija predstavlja granicu linearnog područja, a crvena linija predstavlja najveću vlačnu normalnu deformaciju).





Slika 3.15: Usporedba najvećih izmjerenih vlačnih naprezanja s dijagramom naprezanje-deformacija za vlak

Negativni (tlačni) vertikalni pomak iznosi  $v = 0,2110$  mm, što daje deformaciju iznosa  $0,1055$  [%]. Deformacija se nalazi unutar linearnog područja na tlačnom dijagramu naprezanje-deformacija, što je prikazano na Slici 3.16 (gdje plava linija predstavlja granicu linearnog područja, a zelena linija predstavlja najveću tlačnu normalnu deformaciju koja se nalazi unutar linearnog područja).



Slika 3.16: Usporedba najvećih izmjerenih tlačnih naprezanja s dijagramom naprezanje-deformacija za tlak

# 4. KALIBRACIJA MODELA I REZULTATI

## 4.1 Kalibracija modela

Uspoređujući rezultate iz laboratorijskih ispitivanja i numeričkog modela zaključili smo da je potrebno kalibrirati model. Prvo smo usporedili period dobiven (dobiven je kao vremenska razlika između dva ekstrema tj. dva susjedna vrha brijega) na dijagramu na Slici 3.13 sa periodom izračunatim u Pythonu na temelju definiranih matrica krutosti i masa. Period dobiven iz ispitivanja iznosi 0,049 s. Za kalibriranje numeričkog modela, potrebno je odabrati normalnu krutost koja je u granicama ispitivanja između one dobivene iz vlačnih i one dobivene iz tlačnih testova i daje nam što sličnije ponašanje onome iz eksperimenta. Krutosti koje smo izračunali već su prikazane u Tablici 3.1, ali srednja normalna krutost (koja u obzir uzima i vlak i tlak) nije davala zadovoljavajuće poklapanje s eksperimentom pa smo stoga odredili srednju vrijednost vlačnih i tlačnih krutosti odvojeno. Krutost dobivena iz tlačnih ispitivanja nam pokazuje donju granicu raspona krutosti koji iznosi  $k_{n,t} = 1236316667 \text{ N/m}^3$ , a krutost dobivena iz vlačnih ispitivanja prikazuje gornju granicu raspona krutosti koja iznosi  $k_{n,v} = 4321216667 \text{ N/m}^3$ . Stoga uzimamo tlačnu krutost kao mjerodavnu normalnu krutost koja iznosi  $k_n = 1236316667 \text{ N/m}^3$ . Tada u numeričkom modelu dobivamo period koji iznosi 0,043 s što nam daje odstupanje od 14 %. Budući da smo u numeričkom modelu pretpostavili da sloj ljepila između bloka i podloge ima konstantnu debljinu od 2 mm, a naknadnim mjerenjem ustanovili smo da se debljina može varirati između između 2,5 i 3 mm, to može biti razlog odstupanja numeričkog modela u odnosu na eksperiment. Iz usporedbe dinamičkog ponašanja koja će biti prikazana kasnije vidjet će se utjecaj ovog odstupanja na rezultate, ali za potrebe ovog rada takvo će odstupanje biti prihvatljivo.

U sustav je uvedeno i prigušenje, koje određujemo eksperimentalno. Prigušenje smanjuje oscilacije odnosno opisuje gubitak energije u vremenu, pri čemu se mehanička energija pretvara u toplinsku. Prigušenje u našu matricnu jednadžbu gibanja uvodimo pomoću matrice prigušenja (koja ovisi o koeficijentu prigušenja kojeg smo izračunali) koju množimo s vektorom brzine, te je izvedena kao jednadžba (2.46). Jednadžba za

izračunavanje koeficijenta prigušenja proizlazi iz [3], te glasi:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} \quad (4.1)$$

Članovi jednadžbe (4.1) jesu:

- prigušenje,  $\zeta$ ,
- broj perioda unutar promatranog intervala,  $j$ ,
- pomak na početku promatranog intervala,  $u_i$ ,
- pomak na kraju promatranog intervala,  $u_{i+j}$ .

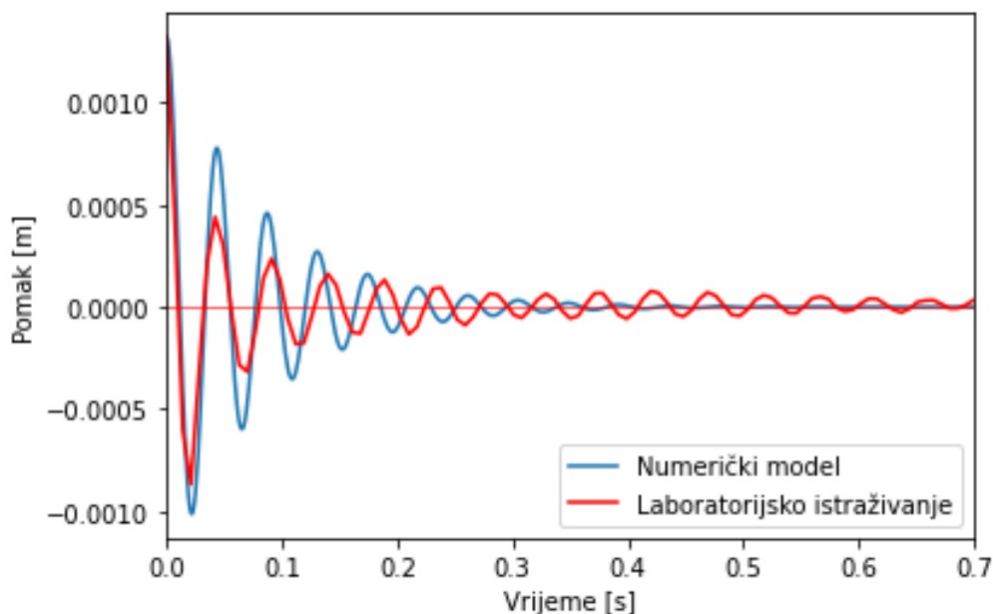
Koeficijent prigušenja odredili smo za 5 uzastopnih intervala na dijagramu koji je prikazan na Slici 3.13 te smo odredili srednju vrijednost koju uzimamo kao mjerodavni koeficijent prigušenja, što je prikazano u Tablici 4.1.

Tablica 4.1: Određivanje koeficijenta prigušenja

/	j [V]	ui[mm]	ui+j[mm]	$\zeta$ [V]	$\zeta$ [V]
Brijeg 1	1	1,32146	0,44059	0,174812245	0,08397
Brijeg 2	1	0,44059	0,23653	0,099000691	
Brijeg 3	1	0,23653	0,16138	0,060847038	
Brijeg 4	1	0,16138	0,13289	0,030914274	
Brijeg 5	1	0,13289	0,0945	0,054259403	

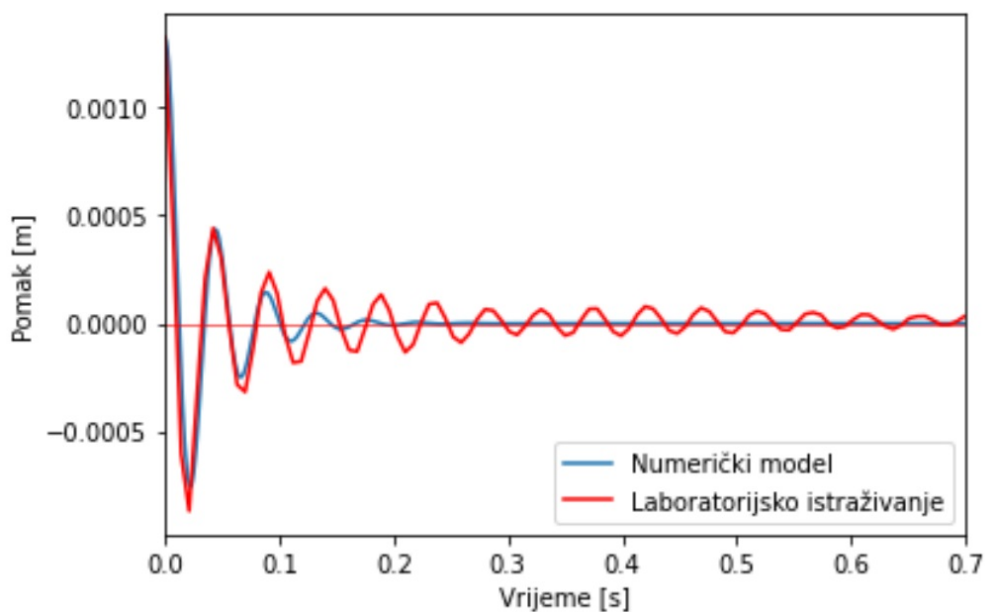
## 4.2 Dinamičko ponašanje

Srednju vrijednost koeficijenta prigušenja koji iznosi  $\zeta = 0,08397$  iz Tablice 4.1 smo unijeli u numerički model te usporedili rezultate sa relativnim pomacima iz laboratorijskih ispitivanja, što je prikazano na Slici 4.1. Primjećujemo razlike u periodu koje se povećavaju u vremenu što je rezultat nakupljanju grešaka odnosno odstupanja, koje se kroz vrijeme samo sve više povećavaju.



Slika 4.1: Dijagram relativnih pomaka u vremenu iz numeričkog modela i laboratorijskog ispitivanja s koeficijentom prigušenja  $\zeta = 0,08397$

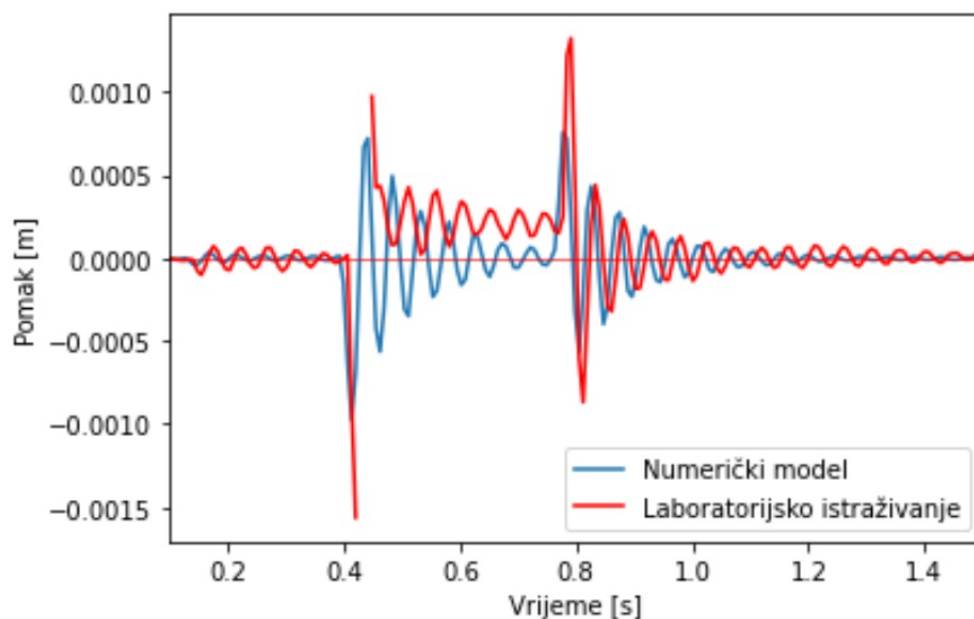
Kako bi numerički model bolje simulirao stvarno ponašanje sustava, kalibrirali smo koeficijent prigušenja te smo za daljnje korištenje odabrali onaj koji smo odredili za prvi brijeg dijagrama, koji iznosi  $\zeta = 0,174812245$  [/] (prikazan u Tablici 4.1). S usvojenim novim koeficijentom prigušenja dobivamo bolje rezultate za simulaciju ponašanja u početku pa je usvojena ta vrijednost. Usporedba dobivenih rezultata prikazana je na Slici 4.2.



Slika 4.2: Dijagram relativnih pomaka u vremenu iz numeričkog modela i laboratorijskog ispitivanja s koeficijentom prigušenja  $\zeta = 0,174812245$

Također, za slučaj sa većim koeficijentom prigušenja prikazanim na Slici 4.2 imamo bolje poklapanje u početnom dijelu dijagrama, ali za slučaj sa manjim koeficijentom prigušenja prikazanim na Slici 4.1 ukupno trajanje oscilacija bliže je onome što smo vidjeli u laboratoriju. Konačnim rezultatom prikazanim na Slici 4.2 zaključujemo da se rezultati dobiveni iz laboratorijskih ispitivanja i rezultati dobiveni iz numeričkog modela dovoljno dobro podudaraju. Odnosno, kalibriranjem normalne krutosti i koeficijena prigušenja dobili smo numerički model koji zadovoljavajuće simulira dinamičko ponašanje krutog bloka s elastičnom vezom s podlogom.

Na Slici 4.3 prikazani su rezultati iz numeričkog modela sa uključenim potresnim zapisom (koji predstavlja seizmičku pobudu) zajedno s rezultatima iz laboratorijskih ispitivanja. Amplitude i periodi poklapaju se u značajnim djelovima vrlo dobro, te se vidi da imaju istu formu. Razlog nedostatka eksperimentalnih podataka između 0,4 i 0,5 sekunde je taj da je pri optičkim mjerenjima došlo do manjih gubitaka podataka. Možemo zaključiti da kalibriranjem normalne krutosti i koeficijena prigušenja dobivamo rezultate vrlo slične realnima i kada uzmemo u obzir pobudu podloge.



Slika 4.3: Dijagram konačnih relativnih pomaka iz numeričkog modela sa uključenim potresnim zapisom i laboratorijskog ispitivanja za čitavi potresni zapis s koeficijentom prigušenja  $\zeta = 0,174812245$

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu analizirali smo dinamičko ponašanje krutih stupova s lijepljenom vezom s podlogom te izradili numerički model u programskom jeziku Python za simulaciju tog problema.

U programskom jeziku Python zapisali smo osnovne jednadžbe problema u kojima se pojavljuju ranije izvedene matrice kurtosti dobivene izjednačavanjem rada vanjskih sila i potencijalne energije. Nakon toga model je proširen na dinamiku pri čemu smo riješili jednadžbe kretanja te dodali prigušenje za opis gubitka energije u sustavu.

U laboratorijskim ispitivanjima napravili smo ukupno 12 eksperimenata na po 4 uzorka za vlačno, tlačno i posmično opterećenje na temelju kojih smo odredili dijagrame naprezanje-deformacija, iz čijih smo linearnih dijelova dobili tangencijalne i normalne krutosti ljepila. Također, napravili smo dinamičko ispitivanje drvenog uzorka bloka za ljepljenog za podlogu te smo analizirali relativne pomake bloka u odnosu na podlogu dobivene pomoću optičkih mjerenja.

Na temelju usporedbe s eksperimentalno dobivenim podacima je provedena kalibracija numeričkog modela kako bismo dobili zadovoljavajuće predviđene periode i amplituda osciliranja sustava. Kalibracijom normalne krutost i ustanovljeno je da eksperiment možemo najbolje opisati kada koristimo donju granicu krutosti (koju smo dobili iz tlačnih ispitivanja). Zaključili smo da smanjivanjem krutosti postižemo veći period, što bolje opisuje rezultate laboratorijskog istraživanja. Također smo kalibrirali koeficijent prigušenja radi postizanja opadanja amplituda što sličnijeg onom dobivenom iz laboratorijskih ispitivanja. Usvojili smo kao mjerodavni koeficijent prigušenja onaj koji proizlazi iz prvog perioda slobodnog osciliranja, a ne onaj koji je srednja vrijednost svih dobivenih.

Na kraju možemo zaključiti da konstrukcije sa većom krutosti imaju manje periode pri dinamičkim opterećenjima. Ta karakteristika je ključna pri projektiranju zidanih (i općenito) konstrukcija koje su izložene dinamičkim odnosno seizmičkim opterećenjima, kao što je potres, zato što konstrukcije s kraćim periodima (većom krutosti) rjeđe ulaze u rezonanciju jer prirodni period oscilacija nije u zoni karakterističnih frekvencija potresa što smanjuje rizik od velikih oštećivanja. Ako se period oscilacija građevine podudara s frekvencijom potresa, može doći do rezonancije što značajno povećava amplitude oscilacija i opterećenje na konstrukciju. Također veliku ulogu ima fleksibilnost

i krutost ljepila i veziva koje se koristi, jer što ono ima veću krutost doći će do manjih pomaka i deformacija. Stoga krutost doprinosi povećanoj stabilnosti konstrukcije odnosno omogućava konstrukciji da učinkovitije prenese opterećenje na podlogu, što ne znači da je to prednost pri pojavi potresa jer to ovisi o potresnom zapisu, vrsti tla gdje se nalazi konstrukcija i sličnome.

# PRILOG 1



```

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.linalg import eigh
import math
kt= 32237500 #N/m3,normalna krutost
kn= 1236316667 #N/m3,tangencijalna krutost
b= 0.045 #m
h= 0.272 #m
d= 0.045 #m
S1= -b/2
S2= b/2

#matrica K
K= np.zeros([3,3])

K[0,0]=kt*(S2-S1)

K[0,1]=0

K[0,2]=kt*h/2*(S2-S1)

K[1,0]=0

K[1,1]=kn*(S2-S1)

K[1,2]=kn*((S2**2)-(S1**2))/2

K[2,0]=kt*h/2*(S2-S1)

K[2,1]=kn*((S2**2)-(S1**2))/2

K[2,2]=kt*(h**2)/4*(S2-S1)+kn*((S2**3)-(S1**3))/3
K=K*d
K1= np.linalg.inv(K)

V=b*h*d #m3
m=0.2619+0.203943242 #kg

Ig=m*(b**2+h**2)/12 + 0.203943242*(0.37/2)**2 #moment inercije

#matrica M
M= np.zeros([3,3])

M[0,0]=m

M[0,1]=0

M[0,2]=0

M[1,0]=0

M[1,1]=m

M[1,2]=0

M[2,0]=0

M[2,1]=0

M[2,2]=Ig

```

```

M1= np.linalg.inv(M)

# Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
w, v = eigh(K, M)

omega = np.sqrt(w)
freq = omega/(2*np.pi)
period = 1/freq

phi_1 = v[:,0]/v[0,0]
phi_2 = v[:,1]/v[0,1]
phi_3 = v[:,2]/v[1,2]

# Koeficijent prigusenja
zeta = 0.08396673
a0 = zeta * ((2*omega[0] * omega[1])/(omega[0] + omega[1]))
a1 = zeta * (2/(omega[0] + omega[1]))

# Matrica prigusenja
C = a0*M + a1*K

#vektor U
U = np.zeros(3)

#parametri za Newmarkovu integraciju

dt = 0.007
n = 288
t_end = n*dt

u = np.zeros([n,3])
#u[0] = [0.00132146,0.000180249,0.008694672]
#u[0] = [0.00132146,0,0.00132146*phi_1[2]]
l = np.zeros([1,3])
#l[0]= [0.00132146/0.00132146,0.000180249/0.00132146,0.008694672/0.00132146]
du = np.zeros([n,3])

ddu = np.zeros([n,3])

t = np.zeros(n)

#najnovija jednadzba (rel pomak)
e= np.array([1,
             1,
             1])
#e = np.zeros(3)

# #vrijednosti iz pythona (podaci iz excela)
df = pd.read_excel('potresni zapis.xlsx', usecols=[0], engine='openpyxl')

# Pretvorite podatke u numpy matricu
potresnizapis = df.to_numpy()

#definiranje f
f1= np.dot(M,e)

#rezultat ddu (vektor ubrzanja)
ddu0 = np.dot(M1, (np.dot(-C, du[0]) + np.dot(-K, u[0])))

```

```

ddu[0,:] = np.transpose(ddu0)

#priguseni period
Td= period/(math.sqrt(1-zeta**2))

#konstantni parametri
beta = 0.25
gama = 0.5

#parametri potrebni za petlju
b1= 1/(beta*dt**2)
b2= -1/(beta*dt)
b3= 1-1/(2*beta)
b4= gama/(beta*dt)
b5= 1-gama/beta
b6= dt*(1-gama/(2*beta))

# Efektivna matrica krutosti:
K_eff = b1*M + K + b4*C
Keff1 = np.linalg.inv(K_eff)

#petlja
for i in range(1,n):
    t[i] = i*dt
    feff= np.dot(M,(b1*u[i-1]-b2*du[i-1]-b3*ddu[i-1])) + np.dot(C, (b4*u[i-1] - b5*du[i-1] - b6
    u[i]=np.dot(Keff1, feff)
    du[i]= b4 * (u[i]-u[i-1]) + b5 * du[i-1] + b6 * ddu[i-1]
    ddu[i]= b1 * (u[i]-u[i-1]) + b2 * du[i-1] + b3 * ddu[i-1]

plt.plot(t[:,], u[:,0], label="Numerički model")
plt.xlabel("Vrijeme [s]")
plt.ylabel("Pomak [m]")
plt.axhline(0, color="red", linewidth=0.6)

#vrijednosti iz excela

df=pd.read_excel('potresni zapis.xlsx', sheet_name='Sheet1')

x_new= df.iloc[:,1]
y_new= df.iloc[:,2]

plt.plot(x_new, y_new, label='Laboratorijsko istraživanje', color='red')
plt.legend(loc="lower right")
plt.xlim([0.1, 1.5])
plt.show()

#plt.plot(t, potresnizapis)

```

# LITERATURA

- [1] Legal code - attribution-noncommercial-noderivs 2.0 generic - creative commons. URL <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/legalcode.en>.
- [2] Li, Jie and Chen, Jianbing. Stochastic dynamics of structures. 2009.
- [3] Chopra, Anil K. Dynamics of structures : theory and applications to earthquake engineering. 2007. URL [https://books.google.com/books/about/Dynamics\\_of\\_Structures.html?hl=hr&id=0dU1bDaRyP4C](https://books.google.com/books/about/Dynamics_of_Structures.html?hl=hr&id=0dU1bDaRyP4C).
- [4] zidane konstrukcije - hrvatska enciklopedija. URL <https://www.enciklopedija.hr/clanak/zidane-konstrukcije>.
- [5] Foti, Dora, Lerna, Michela, and Vacca, Vitantonio. Experimental characterization of traditional mortars and polyurethane foams in masonry wall. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2018:8640351, 1 2018. ISSN 1687-8442. doi: 10.1155/2018/8640351. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1155/2018/8640351><https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2018/8640351><https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1155/2018/8640351>.
- [6] Čeh, Nina. Predavanja iz mehanike 2, 2023.
- [7] Škec, Leo. Predavanja otpornost materijala 2, 2023.
- [8] Laboratorij za konstrukcije – laboratoriji gradri. URL <https://laboratoriji.gradri.uniri.hr/konstrukcije/>.