

# Tangencijalna naprezanja u poprečnim presjecima grednih nosača

---

**Krajinović, Anamarija**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:143640>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**



image not found or type unknown

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET U RIJECI**

**Anamarija Krajinović**

**Tangencijalna naprezanja u poprečnim  
presjecima grednih nosača**

**Završni rad**

**Rijeka, 2019.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET U RIJECI**

**Preddiplomski  
Sveučilišni  
Otpornost materijala II**

**Anamarija Krajinović  
JMBAG: 0114026581**

**Tangencijalna naprezanja u poprečnim presjecima  
grednih nosača**

**Završni rad**

**Rijeka, Rujan, 2019.**

## IZJAVA

Završni rad izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Anamarija Krajinović

Rijeka, 16.09.2019.

## SADRŽAJ:

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1. Uvod .....   | 5                                   |
| 2. Važnost tangencijalnih naprezanja.....   | 6                                   |
| 3. Izvod formule za $\tau_{xz}$ za gredu konstantnog presjeka .....   | 8                                   |
| 3.1.Izvod formule za $\tau_{xz}$ uzimajući u obzir djelovanje kontinuiranog opterećenja (q).....  | 11                                  |
| 4. Izvod formule za $\tau_{xz}$ za gredu promjenjivog presjeka .....  | 13                                  |
| 4.1.Izvod formule za $\tau_{xz}$ za gredu postupno promjenjivog presjeka uzimajući u obzir djelovanje kontinuiranog opterećenja (q) ..... | 17                                  |
| 5. Raspodjela posmičnih naprezanja za karakteristične presjeke .....  | 17                                  |
| 5.1.Pravokutni presjek.....   | 18                                  |
| 5.2.Kružni presjek .....  | 19                                  |
| 5.3.Trokutni presjek .....  | 20                                  |
| 5.4.I-presjek.....  | <b>Error! Bookmark not defined.</b> |
| 6. Literatura .....   | 26                                  |

## 1. Uvod

Naprezanje možemo definirati kao unutarnju silu raspodijeljenu po jedinici površine nekoga čvrstog tijela. Ono se javlja kao reakcija na djelovanje vanjskih sila ili promjene temperature tijela. Izražavamo ga mjernom jedinicom paskal, koja je jednaka omjeru veličine sile koja djeluje na neko tijelo i površine tog tijela ( $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ ).

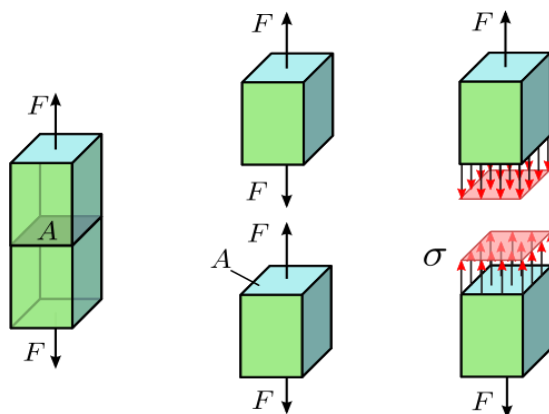
Veličina naprezanja u nekoj točki tijela ovisi o orijentaciji presjeka tijela na kojem se naprezanje promatra. Takvo puno naprezanje je vektor općenito položen pod kutom prema normali na presjek i može se rastaviti na tri skalarne komponente vezane uz koordinatni sustav: jednu u smjeru normale  $x$  na presjek ( $\sigma_x$ , normalno naprezanje) i dvije na nju okomite koje leže u površini presjeka u smjeru preostalih dviju osi ( $\tau_{xy}$  i  $\tau_{xz}$ , tangencijalna ili posmična naprezanja).

Normalnim naprezanjem tijelo se opire međusobnom primicanju ili razmicanju svojih čestica, dok se posmičnim naprezanjem tijelo opire klizanju jednog sloja čestica po drugom.

### Normalno naprezanje

Najjednostavniji prikaz naprezanja se dobije, ako se promatra štap što ga rastežu dvije jednake i suprotno usmjerene sile. Kaže se da je štap osno opterećen, zato što pravac djelovanja sile prolazi kroz os štapa. Ako promatramo sliku 1, vidimo da normalno naprezanje  $\sigma$  djeluje jednoliko po poprečnom presjeku ploštine  $A$ , pa je ukupna sila u presjeku  $\sigma \cdot A$ . Iz ravnoteže odsječenog dijela slijedi  $\sigma \cdot A = F$ , odnosno

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad [1]$$

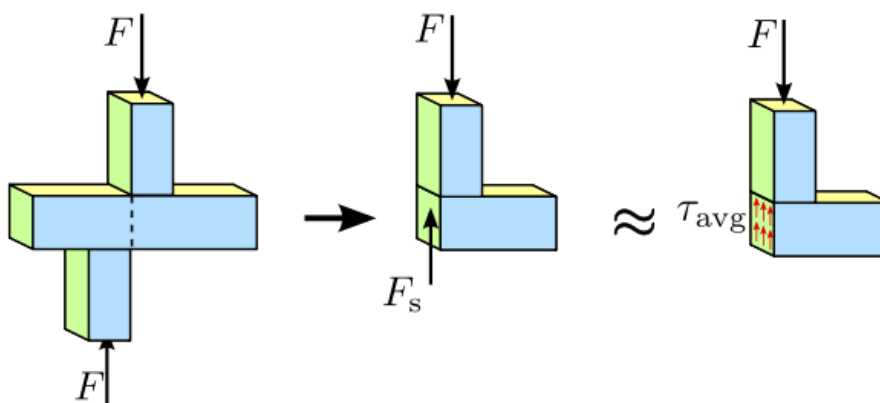


Slika 1: Normalno naprezanje. Preuzeto sa: <https://hr.wikipedia.org/wiki/Naprezanje>

## Tangencijalno naprezanje

Ako se promatra naprezanje u vodoravnoj šipki, uslijed djelovanja dvije okomite šipke, čije su osi pomaknute (kao na primjer škare), u presjeku vodoravne šipke pojavljuje se posmično ili tangencijalno naprezanje kao na slici 2. Posmično naprezanje nije jednoliko raspodijeljeno po presjeku, ali je njegova prosječna vrijednost:

$$\tau_{avg} = \frac{F_s}{A} \quad [2]$$



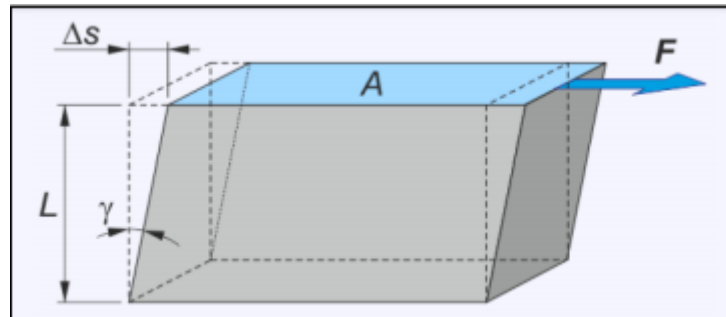
Slika 2: Posmično naprezanje u vodoravnoj šipki uslijed djelovanja dvije okomite šipke čije su osi pomaknute. Preuzeto sa: <https://hr.wikipedia.org/wiki/Naprezanje>

## 2. Važnost tangencijalnih naprezanja

Puno razumijevanje mehaničkog ponašanja je vrlo bitno za sigurno dimenzioniranje svih konstrukcija. Kada putujemo automobilom, brodom, željeznicom, avionom ili se koristimo liftovima, žičarama, mostovima i drugim konstrukcijama nismo ni svjesni u kojoj mjeri sigurnost konstrukcije ovisi o točnoj analizi kritičnih naprezanja i deformacija.

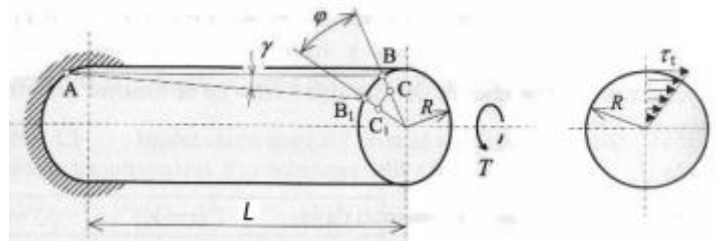
Pri različitim opterećenjima javljaju se i različita naprezanja u materijalima. Tangencijalno naprezanje javlja se pri smicanju, uvijanju i savijanju silama.

Prilikom smicanja opterećenje silom i tangencijalno naprezanje djeluju paralelno s površinom kao što je prikazano na slici 3.



Slika 3 : Smicanje. Preuzeto sa : <https://www.ffri.hr/~mdundjer/Elementi%20strojeva%20I/02-CvrstocaMaterijala.pdf?fbclid=IwAR1WPZSxYPWIVS0kCsPFdocsSqEN4aptc0qxndZwqtpLhhGPXuE7JuFJXhc>

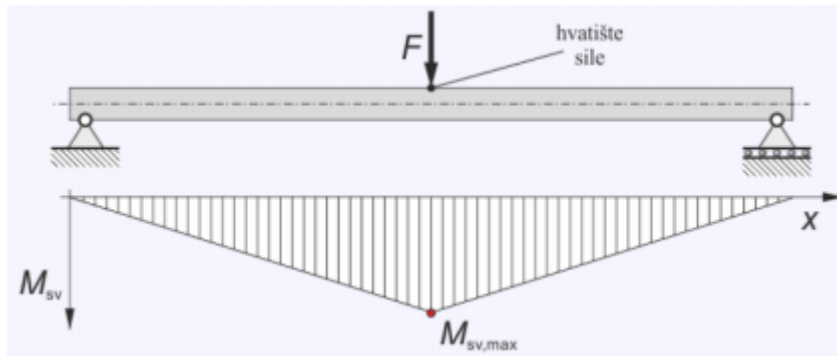
Uvijanja uzrokuju momenti torzije, a prateća naprezanja spadaju u tangencijalna naprezanja. Izvodnice, koje su u neopterećenom stanju pravci, prilikom uvijanja se deformiraju i dobiju oblik zavojne linije. Kut između izvornog pravca i zavojne linije jednak je kutu smicanja  $\gamma$ . Kako je taj kut mali može se zavojna krivulja aproksimirati pravcem.



Slika 4: Uvijanje. Preuzeto sa: <https://www.ffri.hr/~mdundjer/Elementi%20strojeva%20I/02-CvrstocaMaterijala.pdf?fbclid=IwAR1WPZSxYPWIVS0kCsPFdocsSqEN4aptc0qxndZwqtpLhhGPXuE7JuFJXhc>

Razlikuju se dvije vrste savijanja: čisto savijanje i savijanje silama. Čisto savijanje se javlja kod elemenata opterećenih po duljini konstantnim momentima, dok u slučaju savijanja silama moment savijanja nije konstantan (slika 5).

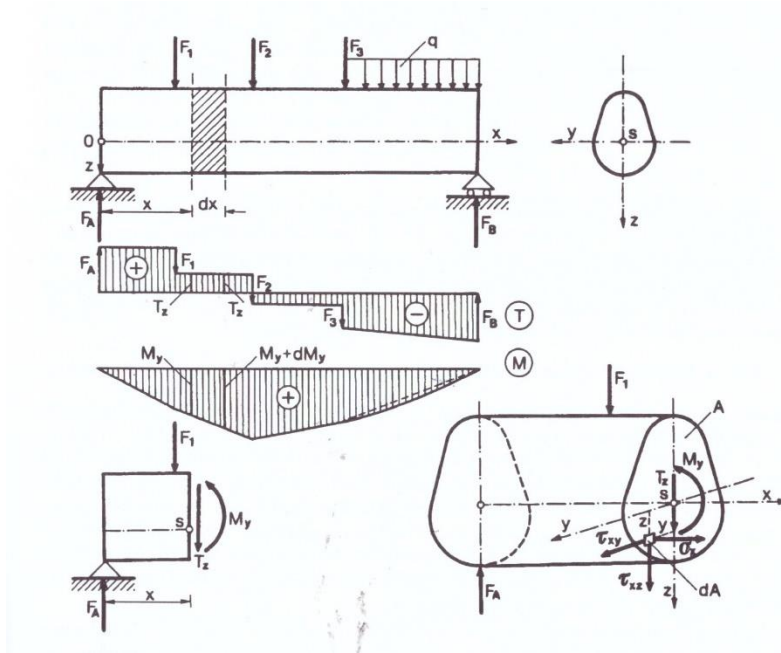




Slika 5: Moment savijanja silama. Preuzeto sa: <https://www.ffri.hr/~mdundjer/Elementi%20strojeva%20I/O2-CvrstocaMaterijala.pdf?fbclid=IwAR1WPZSxYPWIVS0kCsPFdocsSqEN4aptc0qxdZwqtplhhGPXuE7JuFJXhc>

### 3. Izvod formule za $\tau_{xz}$ za gredu konstantnog presjeka

Za ovaj slučaj promatramo ravni štap, konstantnog poprečnog presjeka koji ima jednu os simetrije. Budući da se savijanje štapa obavlja u ravnini u kojoj leže os štapa i os simetrije, ravnina savijanja štapa se poklapa s ravninom opterećenja. U proizvoljnom presjeku štapa uz moment savijanja djeluje i poprečna sila  $T_z$  te se zbog toga u presjeku osim normalnih naprezanja  $\sigma_x$  po osi x, pojavljuju i posmična naprezanja  $\tau_{xy}$  po osi x i y, te  $\tau_{xz}$  po osi x i z. Unutarnje sile na nekom elementu površine  $dA$  predstavljene su produktom  $\sigma_x dA$ ,  $\tau_{xy} dA$  i  $\tau_{xz} dA$ .



Slika 6: Opći slučaj savijanja štapa. Preuzeto sa: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

Za promatrani dio štapa, prema slici 6, postavljamo 6 uvjeta ravnoteže:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \int_A \sigma_x dA = 0 \quad [3]$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \int_A \tau_{xy} dA = 0 \quad [4]$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad ; \quad \int_A \tau_{xz} dA = T_z \quad [5]$$

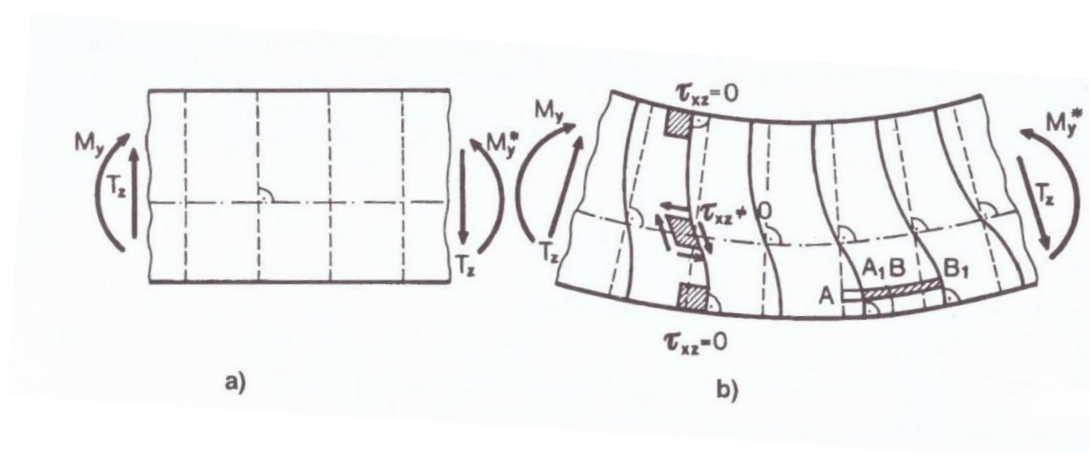
$$\Sigma M_x = 0 \quad \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0 \quad [6]$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad \int_A \sigma_x z dA = M_y \quad [7]$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad \int_A \sigma_x y dA = 0 \quad [8]$$

Nadalje, promatramo preostala 4 uvjeta ravnoteže koja uključuju normalna naprezanja  $\sigma_x$  i tangencijalna naprezanja  $\tau_{xz}$  paralelna s poprečnom silom  $T_z$ .

Na površini štapa ne djeluju opterećenja u smjeru osi štapa pa prema zakonu o uzajamnosti posmičnih naprezanja, u točkama gornjeg i donjeg ruba poprečnog presjeka posmično naprezanje  $\tau_{xz}=0$  a time i posmične deformacije  $\gamma_{xz}=2\varepsilon_{xz}=0$  te je zbog toga raspodjela posmičnih naprezanja i deformacija po visini nejednolika. Takva raspodjela izaziva vitoperenje (iskrivljenje) poprečnog presjeka.



Slika 7: Vitoperenje poprečnog presjeka pri savijanju silama. Preuzeto sa: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

Na slici 7 punim linijama prikazano je vitoperenje poprečnog presjeka zbog tangencijalnih naprezanja a iscrtkanim linijama zaokretanje poprečnog presjeka zbog čistog savijanja.

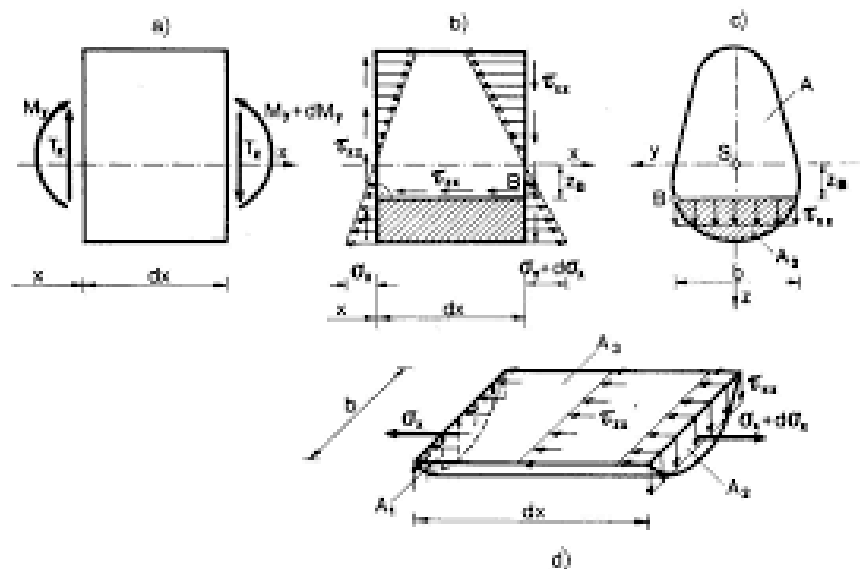
Iskrivljenje svih poprečnih presjeka bit će jednako ukoliko je poprečna sila konstantna jer je pomak  $AA_1$  jednak pomaku  $BB_1$  tako da njihovo produljenje kao i deformacija i naprezanje po osi  $x$  se ne mijenja ukoliko poprečni presjeci ne ostaju ravni. Suprotno tome, ako se poprečna sila mijenja uzduž promatranog dijela štapa tada je i vitoperenje na tom dijelu štapa različito. Zbog poprečne sile  $T_z$  različite veličine i različite veličine posmičnih naprezanja  $\tau_{xz}$  u uzdužnim presjecima štapa pojavljuju se normalna naprezanja koja prikazuju međusobno djelovanje uzdužnih vlakana.

Ako je duljina štapa mnogo veća od visine poprečnog presjeka možemo reći da su pomaci koji nastaju zbog rotacije poprečnog presjeka oko neutralne osi pri čistom savijanju mnogo veći od pomaka zbog vitoperenja. Zbog toga možemo pretpostaviti da i u ovom slučaju vrijedi hipoteza ravnih poprečnih presjeka.

Na temelju ovih analiza došli smo do zaključka da se deformacija štapova i normalno naprezanje za savijanje silama računa isto kao i u slučaju čistog savijanja.

Preostaje nam još jedna jednačina koja daje vezu između poprečne sile  $T_z$  i posmičnog naprezanja  $\tau_{xz}$ .

Najlakše ih određujemo preko konjugiranih posmičnih naprezanja  $\tau_{zx}$  koja se pojavljuju u uzdužnome presjeku štapa prikazanog na slici 8b jer je  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ .



Slika 8: Raspodjela posmičnih naprezanja na izdvojenom dijelu štapa. Preuzeto sa: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

Promatramo ravnotežu ispruganog dijela oko točke B (aksonometrijski prikazano na slici 8d).

$$\Sigma F_x = - \int_{A_1} \sigma_x dA_1 - \int_{A_3} \tau_{zx} dA_3 + \int_{A_2} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_2 = 0 \quad [9]$$

Radi pretpostavke o jednolikoj raspodjeli naprezanja  $\tau_{zx}$  po širini presjeka i male duljine elemenata smatramo da je tangencijalno naprezanje  $\tau_{zx}$  konstantno na površini  $A_3 = b dx$ .

Primjenom izraza  $\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$  dobivamo:

$$- \int_{A_1} \frac{My}{I_y} z dA_1 - \tau_{zx} b dx + \int_{A_2} \frac{My+dMy}{I_y} z dA_2 = 0 \quad [10]$$

Kako je  $A_1 = A_2$  dobivamo:

$$\tau_{zx} b dx - \frac{dMy}{I_y} \int_{A_2} z dA_2 = 0 \quad [11]$$

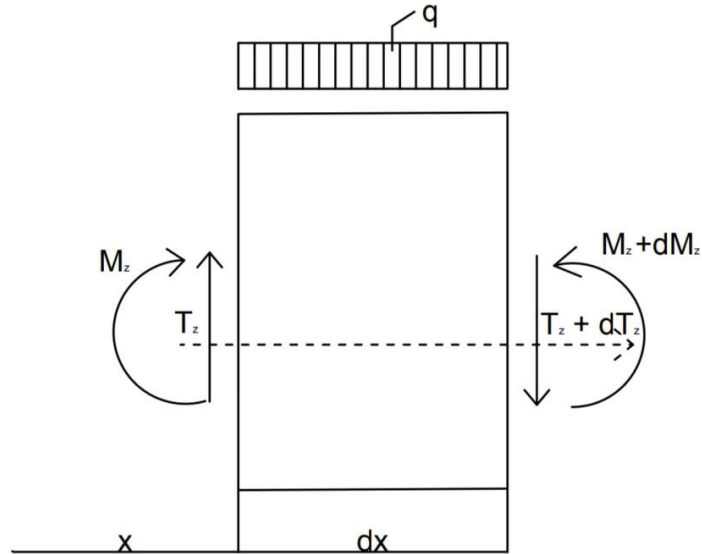
$$\tau_{zx} = \frac{dMy}{dx I_y b} \int_{A_2} z dA_2 \quad [12]$$

Ako uzmemo u obzir da je  $\frac{dMy}{dx} = T_z$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ , a da integral  $\int_{A_2} z dA_2 = S_y$  označava statički moment površine odrezanog dijela presjeka  $A_2$  i  $A_1$  u odnosu na os  $y$ , dobivamo izraz za tangencijalno (posmično) naprezanje:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} \quad [13]$$

### 3.1. Izvod formule za $\tau_{xz}$ uzimajući u obzir djelovanje kontinuiranog opterećenja ( $q$ )

Nakon opterećenja štapa silama promatramo štap opterećen kontinuiranim opterećenjem.



Slika 9: Štap opterećen kontinuiranim opterećenjem

S obzirom da imamo kontinuirano opterećenje, pretpostavljamo da će se dogoditi promjena sile  $T_z$  za neki mali prirast  $dT_z$ . Uzimajući tu pretpostavku u obzir u prethodni izraz [9] dodajemo i promjenu posmičnih naprezanja.

$$\Sigma F_x = -\int_{A_1} \sigma_x dA_1 + \int_{A_2} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_2 - [(\tau_{zx} + d\tau_{zx}) dA_3] = 0$$

Zbog male duljine elementa i pretpostavke o jednolikoj raspodjeli naprezanja  $\tau_{zx}$  po širini presjeka, posmično naprezanje je konstantno na površini  $A_3 = b dx$  (slika 8d).

$$\Sigma F_x = -\int_{A_1} \frac{My}{I_y} z dA_1 + \int_{A_2} \frac{My+dMy}{I_y} z dA_2 - [(\tau_{zx} + d\tau_{zx}) b dx] = 0$$

$$\Sigma F_x = -\int_{A_1} \frac{My}{I_y} z dA_1 + \int_{A_2} \frac{My+dMy}{I_y} z dA_2 - \tau_{zx} b dx = 0$$

$$\Sigma F_x = \tau_{zx} b dx - \frac{dMy}{I_y} \int_{A_2} z dA_2 = 0$$

$$\tau_{zx} = \frac{dMy}{dx} \frac{1}{I_y} \int_{A_2} z dA_2$$

Ako uzmemo u obzir da je  $\frac{dMy}{dx} = T_z$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ , a da integral  $\int_{A_2} z dA_2 = S_y$  označava statički moment površine odrezanog dijela presjeka  $A_2$  i  $A_1$  s obzirom na neutralnu os  $y$ , dobivamo izraz za tangencijalno (posmično) naprezanje:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y}$$

Dolazimo do zaključka da je izraz za tangencijalna naprezanja primjenjiv i u ovom slučaju.

#### 4. Izvod formule za $\tau_{xz}$ za gredu promjenjivog presjeka

Raspodjela posmičnih naprezanja za gredu promjenjiva presjeka bitno se razlikuje od raspodjele naprezanja u štapu konstantnog presjeka. Općenito, štapove promjenjiva presjeka grupiramo u tri osnovne skupine (Izvor: "Otpornost materijala 1, Vice Šimić") :

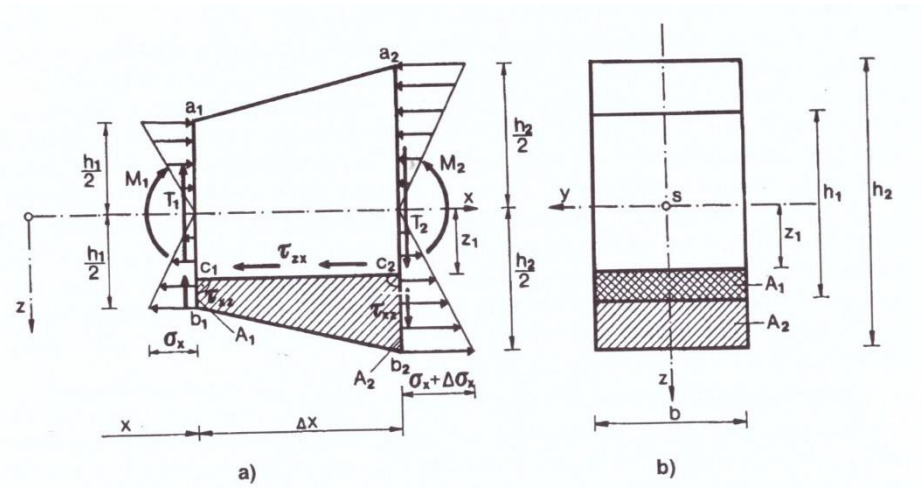
- a) Štapovi lokalno promjenjivog presjeka (otvori i slična oslabljenja mijenjaju presjek i uzrokuju nagle promjene u raspodjeli naprezanja, no te promjene su lokalnog karaktera te stoga nemaju znatniji ujecaj na naprezanje štapa u cijelosti. Osnovni uvjet čvrstoće stavljamo za opasnu točku koja se nalazi u jednom od oslabljenih presjeka i ono glasi:

$$\frac{M}{W_n} \leq \sigma_{dop} \quad \text{gdje je } W_n \text{ - moment otpora oslabljenog presjeka.}$$

- b) Štapovi stepenasto promjenjivog presjeka ( na mjestima gdje se dijelovi štapa spajaju s različitim poprečnim presjecima pojavljuje se koncentracija naprezanja. Materijal osjetljiv na koncentraciju naprezanja ima uvjet čvrstoće  $\sigma_{max} = \alpha_k \frac{M}{W_n} \leq \sigma_{dop}$ , gdje je  $\alpha_k$  faktor koncentracije naprezanja, a  $W_n$  moment otpora oslabljenog presjeka. Uvjet čvrstoće mora se primjeniti na sve krajnje presjeke prizmatičnih dijelova štapa. U slučaju da u bilo kojem presjeku prizmatičnog dijela štapa moment savijanja ima veću vrijednost nego u presjeku stepenastog prijelaza, čvrstoću u tim presjecima provjeravamo izrazom  $\frac{M}{W_n} \leq \sigma_{dop}$  )
- c) Štapovi postupno promjenjivog presjeka (u jednostavnijim slučajevima, ukoliko kut nagiba ravnine plašta štapa prema osi štapa ne prelazi  $20^\circ$  možemo prihvatiti

pravolinijsku raspodjelu normalnih naprezanja po visini štapa:  $\sigma_x = \frac{M(x)}{I_y(x)} z$ , a uvjet čvrstoće postavljamo za opasnu točku tražeći maksimum funkcije:  $\sigma_{x \max}(x) = \frac{|M(x)|}{W(x)}$

U slučajevima kada su  $M(x)$  i  $W(x)$  prekinute funkcije opasni presjek određujemo grafički.)



Slika 10: Raspodjela naprezanja za nosač promjenjivog poprečnog presjeka. Preuzeto iz: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

U ovom slučaju moramo uzeti u obzir utjecaj promjene visine nosača, stoga zamislimo da smo iz nosača promjenjivog presjeka izrezali mali element duljine  $\Delta x$  prikazan na slici 10. U presjeku s lijeve strane djeluje moment  $M_1$ , a sa desne  $M_2$  dok su visine označene sa  $h_1$  i  $h_2$  a  $z_1$  udaljenost od neutralne osi do točke u kojoj se određuje posmično naprezanje. Za element  $b_1c_1c_2b_2$  uvjet ravnoteže u smjeru osi  $x$  je:

$$\Sigma F_x = \int_{A_1} \sigma_x dA_1 + \tau_{zx} b \Delta x - \int_{A_2} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) dA_2 = 0$$

Koristeći se gore izvedenim izrazima dobivamo:

$$\Sigma F_x = \int_{A_1} \frac{M_1}{I_{y1}} z dA_1 + \tau_{zx} b \Delta x - \int_{A_2} \frac{M_2}{I_{y2}} z dA_2 = 0$$

Integrali  $\int_{A_1} z dA_1 = S_{y1}$  i  $\int_{A_2} z dA_2 = S_{y2}$  predstavljaju statički moment površine odrezanog dijela presjeka  $A_1$  i  $A_2$  obzirom na neutralnu os  $y$ , te dobivamo izraz za posmično naprezanje:

$$\tau_{zx} b \Delta x = \frac{M_2 S_{y2}}{I_{y2}} - \frac{M_1 S_{y1}}{I_{y1}},$$

gdje je  $b$  širina presjeka nosača u razini točke u kojoj tražimo posmično naprezanje.

Ovaj izraz koristimo za određivanje posmičnih naprezanja u svakom konkretnom nosaču promjenjivog presjeka uvrštavanjem vrijednosti birajući točno onaj presjek u kojem želimo odrediti posmično naprezanje. Nakon toga biramo susjedni presjek koji je udaljen od prvog za  $\Delta x$ . Za svaki od presjeka moramo odrediti moment savijanja  $M$ , moment tromosti  $I_y$  i statički moment  $S_y$  odrezane površine poprečnog presjeka.

Dakle, formula za posmično naprezanje grede promjenjivog presjeka je:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{M_2 S_{y2}}{I_{y2} b \Delta x} - \frac{M_1 S_{y1}}{I_{y1} b \Delta x} \quad [14]$$

U slučaju promjene samo visine nosača a ne cjelokupnog presjeka izraz [14] može se svesti na točniji oblik. Aksijalni moment tromosti  $I_y$  i statički moment  $S_y$  za poprečne presjeke 1 i 2 iznose:

$$\begin{aligned} I_{y1} &= \frac{bh_1^3}{12}, & I_{y2} &= \frac{bh_2^3}{12} \\ S_{y1} &= \frac{b}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - z_1^2 \right), & S_{y2} &= \frac{b}{2} \left( \frac{h_2^2}{4} - z_1^2 \right) \end{aligned}$$

Ako prirast visine pri prijelazu iz poprečnog presjeka 1 u poprečni presjek 2 označimo kao  $\Delta h$ , I pomoću toga izrazimo da je  $h_2 = h_1 + \Delta h$  dobivamo vezu između  $S_{y1}$  i  $S_{y2}$  te isto tako između  $I_{y1}$  i  $I_{y2}$ :

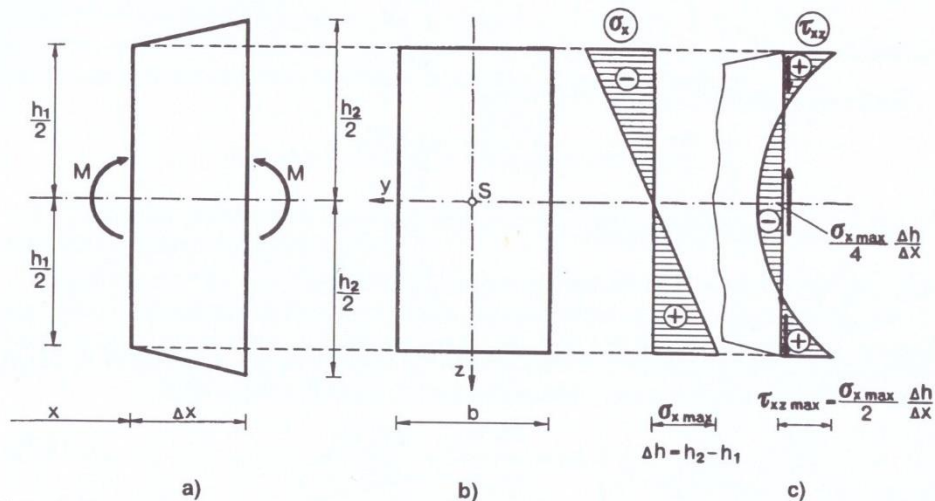
$$I_{y2} = I_{y1} + \frac{bh_1^2 \Delta h}{4}$$

$$S_{y2} = S_{y1} + \frac{bh_1 \Delta h}{4}$$

Članove koji su sadržavali  $\Delta h$  na drugu ili treću potenciju zanemarili jer ovdje možemo dobiti rezultat za  $\Delta h \rightarrow dh$  odnosno za  $\Delta h^2 \rightarrow 0$  i  $\Delta h^3 \rightarrow 0$ .

Nadalje imamo da je  $M_2 = M_1 + \Delta M$ .





Slika 11: Dijagrami normalnih i posmičnih napreznja za štap promjenjivog presjeka konstantne širine i promjenjive visine.  
Izvor: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

Prema tome, izraz [14] možemo napisati u ovom obliku:

$$\tau_{zx} b \Delta x = \frac{(M_1 + \Delta M) \left( S_{y1} + \frac{b h_1 \Delta h}{4} \right)}{I_{y1} + \frac{b h_1^2 \Delta h}{4}} - \frac{M_1 S_{y1}}{I_{y1}}$$

$$\tau_{zx} b \Delta x = \frac{M_1 S_{y1} + \Delta M S_{y1} + M_1 \frac{b h_1 \Delta h}{4} + \Delta M \frac{b h_1 \Delta h}{4} - M_1 S_{y1} - M_1 S_{y1} \frac{b h_1^2 \Delta h}{4 I_{y1}}}{I_{y1} \left( 1 + \frac{b h_1^2 \Delta h}{4 I_{y1}} \right)}$$

Drugi član u nazivniku  $\frac{b h_1^2 \Delta h}{4 I_{y1}} = 3 \frac{\Delta h}{h_1}$  mala je veličina u odnosu na jedinicu pa ju možemo zanemariti, isto napravimo i s članovima u brojniku koji sadrže produkt dviju malih veličina te dobivamo:

$$\tau_{zx} = \frac{\Delta M}{\Delta x} \frac{S_{y1}}{b I_{y1}} + \frac{M_1 h_1}{4 I_{y1}} \left( 1 - \frac{S_{y1} h_1}{I_{y1}} \right) \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

Ako uzmemo u obzir da  $\Delta h \rightarrow dh$ ,  $\Delta x \rightarrow dx$ ,  $\Delta M \rightarrow dM$  te da je  $\frac{dM}{dx} = T$  konačno dobivamo:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{T_z S_y}{b I_y} + \frac{M h}{4 I_y} \left( 1 - \frac{S_y h}{I_y} \right) \frac{dh}{dx} \quad [15]$$

Dobiveni izraz vrijedi za nosače čija širina ostaje ista a visina se postupno mijenja. Na temelju toga vidimo da nam posmična napreznja ovise ne samo o poprečnoj sili nego i o momentu savijanja  $M$  i brzini promjene visine  $h$  u ovisnosti u uzdužnoj koordinati  $x$ . Na dijagramu iz slike 11 vidimo da posmična napreznja  $\tau_{xz}$  najveću vrijednost imaju u najudaljenijim točkama od neutralne osi presjeka.

#### 4.1. Izvod formule za $\tau_{zx}$ za gredu postupno promjenjivog presjeka uzimajući u obzir djelovanje kontinuiranog opterećenja (q)

Ravnoteža bez kontinuiranog opterećenja je:

$$\Sigma F_x = \int_{A_1} \frac{M_1}{I_{y1}} z dA_1 + \tau_{zx} b \Delta x - \int_{A_2} \frac{M_2}{I_{y2}} z dA_2 = 0 ,$$

Ako zamislimo da smo na element promjenjivog poprečnog presjeka dodali kontinuirano opterećenje q, u tom slučaju nam zapis izgleda ovako:

$$\begin{aligned} & 0 \\ & \Sigma F_x = \int_{A_1} \sigma_x dA_1 + (\tau_{zx} + d\tau_{zx}) b \Delta x - \int_{A_2} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) dA_2 = 0 \\ & \Sigma F_x = \int_{A_1} \sigma_x dA_1 + \tau_{zx} b \Delta x - \int_{A_2} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) dA_2 = 0 \\ & \Sigma F_x = \frac{M_1}{I_{y1}} z dA_1 + \tau_{zx} b \Delta x - \frac{M_2}{I_{y2}} z dA_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{A_1} z dA_1 = S_{y1}$$

$$\int_{A_2} z dA_2 = S_{y2}$$

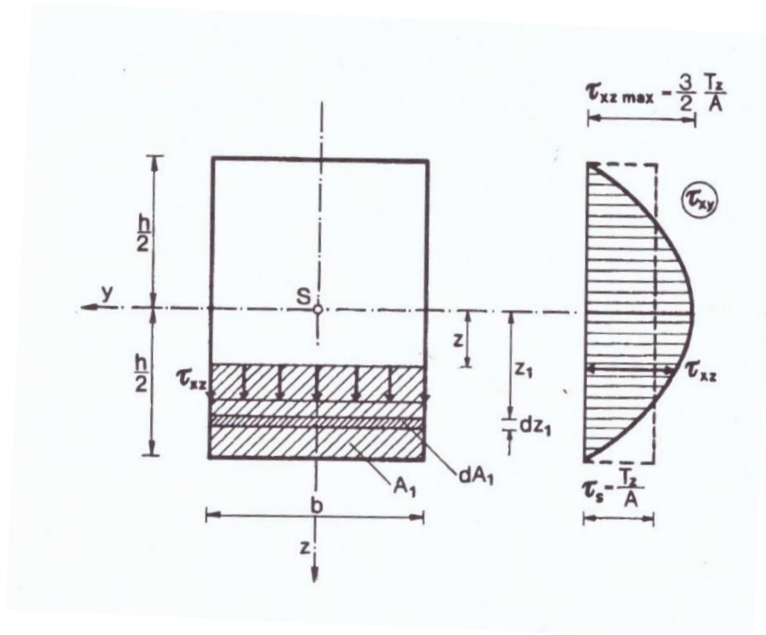
$$\tau_{zx} = \frac{M_2 S_{y2}}{I_{y2} b \Delta x} - \frac{M_1 S_{y1}}{I_{y1} b \Delta x}$$

Zaključujemo da je izraz za tangencijalna naprezanja postupno promjenjivog presjeka štapa primjenjiv i u slučaju djelovanja kontinuiranog opterećenja.

### 5. Raspodjela posmičnih naprezanja za karakteristične presjeke

Postoje mnogi oblici karakterističnih presjeka, no u ovom poglavlju bit će izdvojeni najčešći oblici poprečnog presjeka.

## 5.1. Pravokutni presjek



Slika 12: Raspodjela posmičnih napreznja za pravokutni presjek. Preuzeto sa: Otpornost materijala, Vice Šimić

Moment tromosti ovog presjeka iznosi  $I_y = \frac{b h^3}{12}$ , a širina presjeka  $b(z) = b = \text{konst.}$  Statički moment površine izražavamo relacijom  $S_y = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$ .

Prema tome, posmično napreznje na nekoj udaljenosti  $z$  od neutralne osi iznosi:

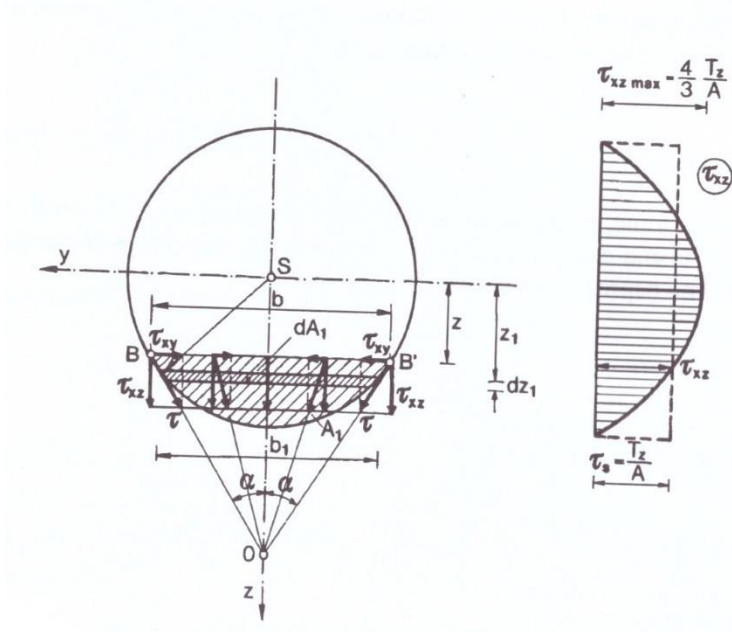
$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} = \frac{6 T_z}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Kako su posmična napreznja po visini pravokutnog presjeka raspodijeljena po zakonu kvadratne parabole u krajnjim je vlaknima posmično napreznje 0, a maksimalnu vrijednost prima u visini neutralne osi presjeka ( $z=0$ ).

$$\tau_{xz} = \frac{3 T_z}{2 b h} = \frac{3 T_z}{2 A} \quad [16]$$

Dolazimo do zaključka da je maksimalno opterećenje 50% veće od srednjeg napreznja pri jednolikoj raspodjeli.

## 5.2. Kružni presjek



Slika 13: Raspodjela posmičnih naprezanja na kružnom presjeku. Preuzeto sa: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

Moment tromosti kružnog presjeka iznosi  $I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ , širina presjeka  $b(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2}$

A statički moment površine s obzirom na os y je  $S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1$ , gdje je

$dA_1 = b_1 dz_1$ ,  $dA_1 = 2\sqrt{r^2 - z_1^2} dz_1$  i iz toga dobivamo

$$S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1 = 2 \int_z^r z_1 \sqrt{r^2 - z_1^2} dz_1 = \frac{2}{3} (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u formulu za posmična naprezanja dobivamo:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{I_y b} = \frac{T_z \frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{I_y 2(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{T_z}{3I_y} (r^2 - z^2),$$

Skraćeno:

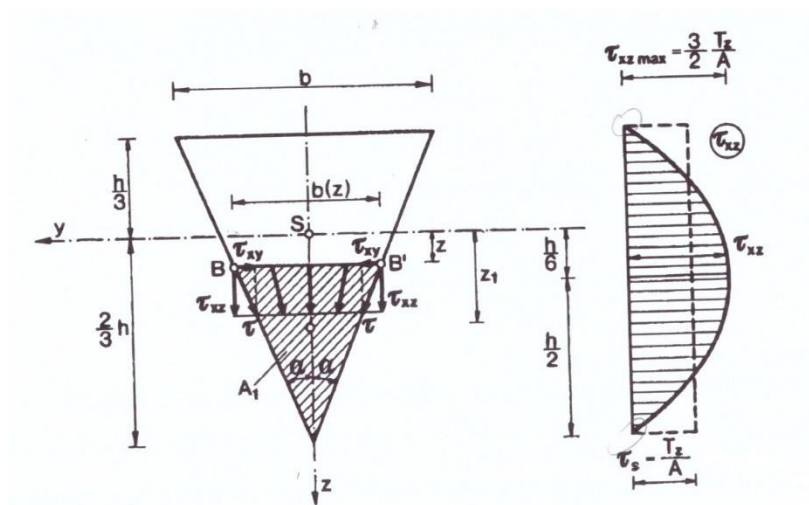
$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{3 \frac{\pi r^4}{4}} (r^2 - z^2) = \frac{4}{3} \frac{T_z}{\pi r^4} (r^2 - z^2).$$

Maksimalna vrijednost:

$$\tau_{xz \max} = \frac{4}{3} \frac{T_z}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{T_z}{A} \quad [17]$$

Dolazimo do zaključka da je maksimalno posmično naprezanje veće za 33% od srednjeg naprezanja pri jednolikoj raspodjeli napezanja.

### 5.3. Trokutni presjek



Slika 14: Raspodjela posmičnih naprezanja na trokutnom presjeku. Preuzeto iz: Otpornost materijala 1, Vice Šimić

Za početak određujemo površinu ispruganog dijela presjeka, odnosno  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{b(z)}{2} \left( \frac{2}{3}h - z \right)$$

Nakon što smo odredili površinu, potrebna nam je udaljenost težišta tog istog dijela od y:

$$z_1 = z + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3}h - z \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{h}{3} + z \right)$$

Prema tome možemo odrediti statički moment koji iznosi:

$$S_y = A_1 z_1 = \frac{b(z)}{3} \left( \frac{2}{3}h - z \right) \left( \frac{h}{3} + z \right)$$

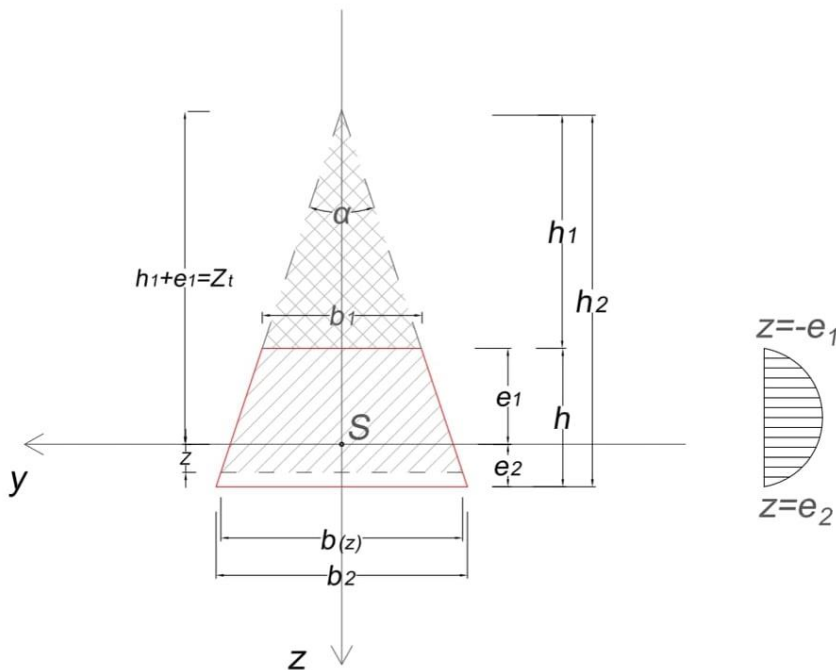
Kada to uvrstimo u izraz za posmična naprezanja dobivamo:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{I_y b(z)} = \frac{12T_z}{bh^3} \left(\frac{2}{3}h - z\right) \left(\frac{h}{3} + z\right)$$

Kako su posmična naprezanja po visini kao i u ostalim primjerima raspodijeljena po zakonu kvadratne parabole u krajnjim vlaknima naprezanja su jednaka 0. Prema tome dobivamo da se maksimalno posmično naprezanje pojavljuje na udaljenosti  $z = \frac{1}{6}h$  od neutralne osi i iznosi:

$$\tau_{xz \max} = 3 \frac{T_z}{bh} = \frac{3 T_z}{2 A} \quad [18]$$

#### 5.4. Trapezni presjek



Slika 15: Raspodjela posmičnih naprezanja na trapeznom presjeku.

Za trapezni presjek:

$$e2 = \frac{h}{3} * \frac{2b1 + b2}{b1 + b2}$$

$$e_1 = \frac{h}{3} * \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}$$

Moment tromosti trapeznog presjeka:

$$I_y = \frac{h^3}{36} * \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$$

Iz sličnosti trokuta prema slici 15. možemo izraziti kut  $\alpha$  :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b_2}{2}}{h_2} = \frac{\frac{b_2 - b_1}{2}}{h} = \frac{\frac{b_1}{2}}{h_1} = \frac{\frac{1}{2}b(z)}{z_T + z}$$

uz uvjet da je  $-e_1 \leq z \leq e_2$  te iz toga dobivamo vrijednost  $b(z)$ :

$$\frac{1}{2}b(z) = \frac{b_2}{h_2} (z_T + z)$$

$$b(z) = \frac{b_2}{h_2} (z_T + z) \quad [19]$$

Statički moment s obzirom na os  $y$  dobit ćemo oduzimanjem statičkog momenta maloga trokuta od velikoga:

$$S_y(z) = S_{y1} - S_{y2}$$

$$S_y(z) = A_1 * z_1 - A_2 * z_2$$

$$S_y(z) = \frac{b(z)(z_T + z)}{2} * \left[ \frac{1}{3}(z_T + z) - z \right] - \frac{b_1 h_1}{2} \left( \frac{1}{3} h_1 + e_1 \right)$$

$$S_y(z) = \frac{b(z)(z_T + z)}{2} * \left[ \frac{1}{3} z_T - \frac{2}{3} z \right] - \frac{b_1 h_1}{2} \left( \frac{1}{3} h_1 + e_1 \right) \quad [20]$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u izraz za tangencijalna naprezanja  $[\tau = \frac{T}{I_y} \frac{S_y(z)}{b(z)}]$  slijedi:

$$\tau = \frac{T}{I_y} * \frac{\frac{b(z)(z_T + z)}{6} * (z_T - 2z) - \frac{b_1 h_1}{2} \left(\frac{1}{3} h_1 + e_1\right)}{\frac{b_2}{h_2} (z_T + z)}$$

$$\tau = \frac{T}{I_y} \left[ \frac{1}{6} (z_T + z)(z_T - 2z) - \frac{b_1 h_1}{2} * \frac{h_1 + 3e_1}{3} * \frac{h_2}{b_2 (z_T + z)} \right]$$

$$\tau = \frac{T}{6I_y} \left[ (z_T^2 - z_T z - 2z^2) - \frac{b_1 h_1 (h_1 + 3e_1) h_2}{b_2} * \frac{1}{z_T + z} \right] \quad [21]$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta  $z = -e_1$  i  $z = e_1$  u izraz [21] dobivamo tangencijalna naprezanja jednaka nuli te prema tome zaključujemo da nam dijagram naprezanja u krajnjim točkama ide u nulu a prema jednadžbi možemo zaključiti da se radi o paraboli.

Mjesto maksimalnog posmičnog naprezanja odredit ćemo pomoću izraza  $\frac{d\tau}{dz} = 0$  :

$$\frac{T}{6I_y} \left[ -z_T - 4z - \frac{b_1 h_1 (h_1 + 3e_1) h_2}{b_2} * \frac{-1}{(z_T + z)^2} \right] = 0$$

$$\frac{b_1 h_1 h_2 (h_1 + 3e_1)}{b_2} * \frac{1}{(z_T + z)^2} = z_T + 4z$$

$$\frac{b_1 h_1 h_2 (h_1 + 3e_1)}{b_2} = (z_T + 4z)(z_T + z)^2 \quad [22]$$

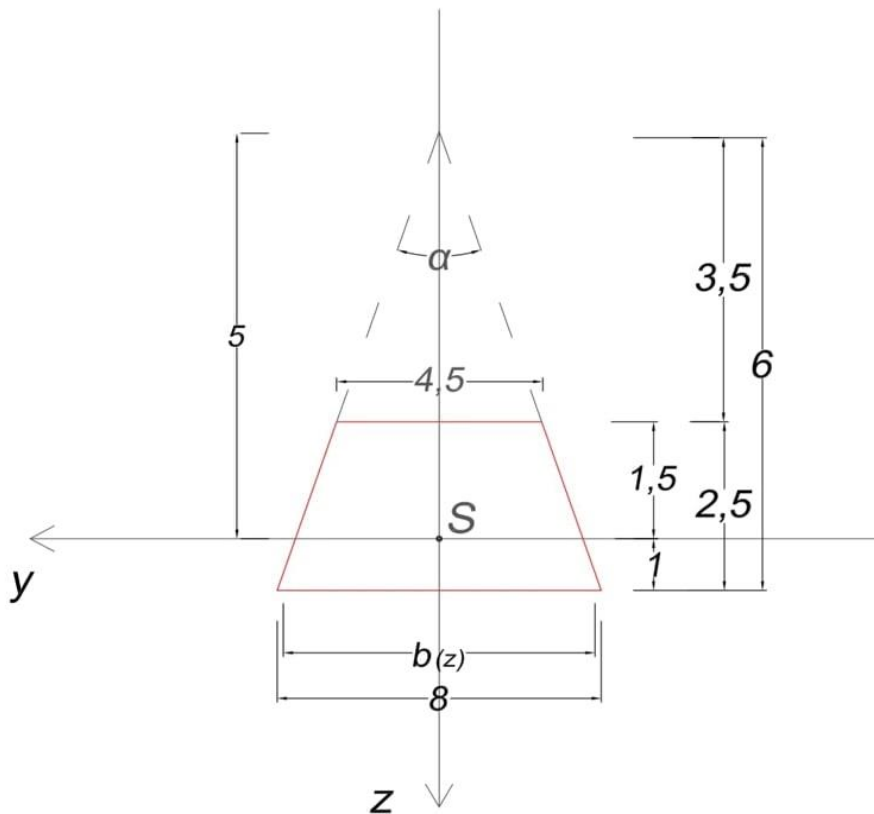
Dobiveni izraz s desne strane sadrži kubnu jednadžbu a s lijeve strane se nalaze konstante koje se mogu označiti slovom "K" te u općem izrazu dobivamo:

$$(z_T + 4z)(z_T + z)^2 = K$$



Kako bismo bolje shvatili određivanje maksimalnog posmičnog naprežanja poslužit ćemo se idućim primjerom zadatka:

**Primjer 1.** Odredi maksimalno posmično naprežanje na trapeznom presjeku.



$$\frac{4,5 * 3,5 * 6(3,5 + 3 * 1,5)}{8} = (3,5 + 1,5 + 4z)(3,5 + 1,5 + z)^2$$

$$94,5 = (5 + 4z)(5 + z)^2$$

$$94,5 = (5 + 4z)(25 + 10z + z^2)$$

$$94,5 = (125 + 50z + 5z^2 + 100z + 40z^2 + 4z^3)$$

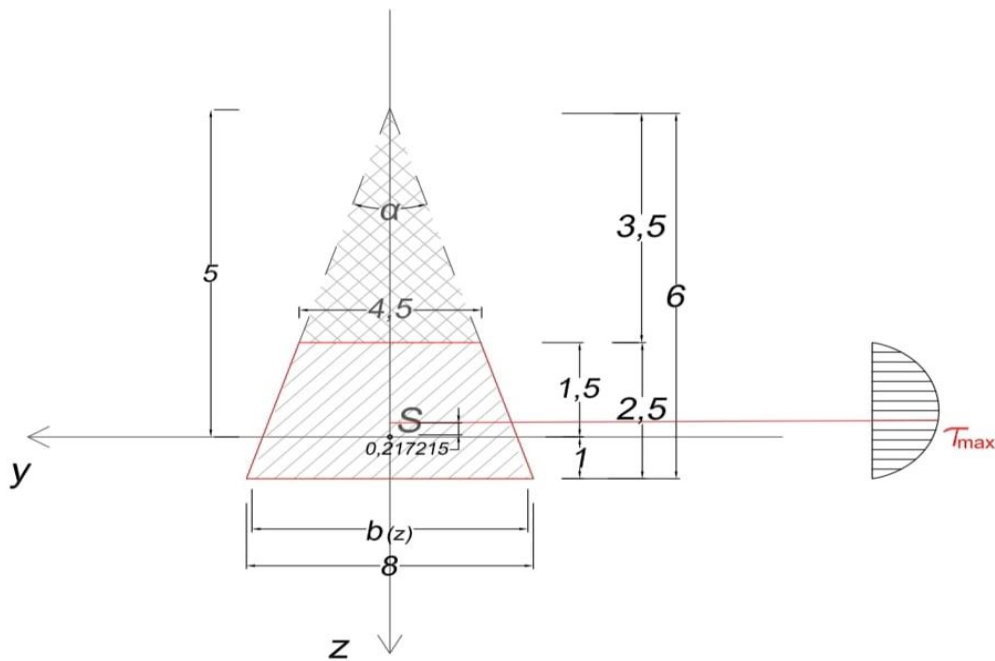
$$94,5 = 4z^3 + 45z^2 + 150z + 125$$

$$4z^3 + 45z^2 + 150z + 30,5 = 0$$

Uvrštavanjem u kalkulator dobijemo 3 rješenja, međutim samo je jedno rješenje realno i ono iznosi:

$$z = -0,217215$$

Ovo rješenje nam govori da se mjesto maksimalnog posmičnog naprezanja nalazi na udaljenosti 0,217215 od neutralne osi presjeka i to u suprotnom smjeru od postavljene osi.



## **6. Literatura**

1. <https://hr.wikipedia.org/wiki/naprezanje>
2. [https://www.pfri.uniri.hr/~rikard/DATA/Materijali/Materijali%20za%20izvanredne%20sudente/TM1%20BS3/CM\\_13-14.pdf](https://www.pfri.uniri.hr/~rikard/DATA/Materijali/Materijali%20za%20izvanredne%20sudente/TM1%20BS3/CM_13-14.pdf)
3. <https://www.ffri.hr/~mdundjer/Elementi%20strojeva%20I/02-CvrstocaMaterijala.pdf>
4. <https://repositorij.gfos.hr/islandora/object/gfos:474/preview>
5. Otpornost materijala I – Vice Šimić, Školska knjiga, Zagreb, 2002.