

Centrično i ekscentrično izvijanje ravnih grednih nosača

Tomljanović, Ante

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:195144>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-01**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET U RIJECI**

Ante Tomljanović

Centrično i ekscentrično izvijanje ravnih grednih nosača

Završni rad

Rijeka, rujan 2019.

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET U RIJECI**

**Preddiplomski sveučilišni studij građevine
Otpornost materijala 2**

**Ante Tomljanović
JMBAG: 0082050830**

Centrično i ekscentrično izvijanje ravnih grednih nosača

Završni rad

Rijeka, rujan 2019.

IZJAVA

Završni rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Ante Tomljanović

U Rijeci, 16. rujna 2019.

IZJAVA

Završni rad izrađen je u sklopu znanstvenog projekta

Računski i eksperimentalni postupci za određivanje materijalnih parametara Cosseratovog kontinuuma

Šifra projekta: uniri-technic-18-248

Financijer projekta: Sveučilište u Rijeci

Završni/Diplomski rad nastao je kao rezultat rada u okviru projekta

Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci

Šifra projekta RC.2.2.06-0001

Financijer projekta Europski fond za regionalni razvoj (EFRR)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH

Centrično i ekscentrično izvijanje ravnih grednih nosača

Sažetak

Konstruktivni elementi izloženi djelovanju tlačne sile podložni su izvijanju. Do izvijanja dolazi pri djelovanju kritične sile. U ovom radu će se analitičkim putem ocijeniti veličina kritične sile za slučajeve centričnog i ekscentričnog osnog opterećenja u elastičnim gredama sa različitim uvjetima oslanjanja. Rezultate dobivene analitičkim putem usporediti će se s mjerenjima na opremi za analizu izvijanja.

Centric and eccentric bending of straight beams

Abstract

Structural elements exposed to compressive force are subject to buckling. Buckling occurs when critical force acts. In this paper, the magnitude of the critical force for cases of centric and eccentric axial loading in elastic beams with different support conditions will be evaluated analytically. The results obtained analytically will be compared with the measurements made on the buckling-analysis equipment.

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. VRSTE RAVNOTEŽE I KRITIČNO OPTEREĆENJE	2
3. IZVIJANJE ŠTAPA U ELASTIČNOM PODRUČJU	5
3.1. Eulerova kritična sila	7
3.1.1. Štap zgloбно učvršćen na oba kraja	10
3.1.2. Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan.....	13
3.1.3. Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen.....	15
3.1.4. Štap upet na oba kraja.....	17
3.2. Duljina izvijanja	19
3.3. Kritično naprezanje.....	20
4. IZVIJANJE ŠTAPOVA U PLASTIČNOM PODRUČJU	23
5. EMPIRIJSKI IZRAZI ZA KRITIČNO NAPREZANJE.....	32
6. EKSCENTRIČNO OPTEREĆENJE VITKIH ŠTAPOVA	34
7. EKSPERIMENTALNO ISPITIVANE ŠIPKI NA IZVIJANJE	36
7.2.1 Uvodno ispitivanje.....	37
7.2.2 Test utjecaja uvjeta oslanjanja.....	39
8. ZAKLJUČAK.....	43
9. LITERATURA	44
10. POPIS SLIKA	45

1. UVOD

Iz samog naziva ovog rada „Centrično i ekscentrično izvijanje ravnih grednih nosača“ može se zaključiti da će se u radu baviti dijelom područja mehanike deformabilnog tijela i to izvijanjem, odnosno gubitkom stabilnosti štapa ili kojega drugog vitkog elementa konstrukcije osno opterećenoga prekomjerno velikom tlačnom silom.

Za dimenzioniranje elemenata konstrukcije radi se:

- proračun čvrstoće – određivanje najmanjih dimenzija pojedinih dijelova konstrukcije pod djelovanjem zadanog opterećenja,
- proračun krutosti – određivanje deformacija konstrukcija pod djelovanjem zadanog opterećenja, koje moraju ostati u dopuštenim granicama određenima uvjetima uporabe same konstrukcije.
- proračun stabilnosti – određivanje opterećenja pod kojim konstrukcija i njezini elementi zadržavaju prvobitni elastični oblik.

U ovom radu analitičkim putem ocijenit će se veličina kritične sile za slučaj centričnog i ekscentričnog osnog opterećenja u elastičnom području s različitim uvjetima oslanjanja. Isto tako analizirat će se i veličina kritične sile u plastičnom području. Analitičke rezultate će se usporediti s mjerenjima na opremi za analizu izvijanja za slučaj centričnog opterećenja u elastičnom području .

Greda je izdužena vodoravna ili kosa nosiva građevna konstrukcija za prenošenje vertikalnih opterećenja na ležaje. Ležaji mogu biti klizni, zglobni ili upeti. Prema broju ležaja razlikuju se greda s jednim ležajem (konzolna), s dva ležaja (prsto oslonjena, s prepustima), s više ležaja (kontinuirana). Opterećena je na savijanje, a prema vrsti može biti statički određena ili statički neodređena. Izrađuje se od drveta, čelika, armiranoga betona, rjeđe od kamena različita poprečnog presjeka. Može se izvoditi i kao kosa konstrukcija, na elastičnoj podlozi, ojačana pločom, kao dio mosta, dio zgrade i drugo.

O sigurnosti građevinskih konstrukcija ovise ljudski životi i materijalna dobra, te je vrlo značajno pravilno izabrati dimenzije i metode proračuna.

Izvijanje, kojim ćemo se baviti u ovom radu, zbog promjene geometrije i preraspodjele sila može dovesti do gubitka stabilnosti i havarije cijele konstrukcije. Zbog toga se u proračunima konstrukcija posebno promatraju tlačno najopterećeniji elementi kao mogući uzroci trajnih velikih deformacija, odnosno gubitka stabilnosti.

2.VRSTE RAVNOTEŽE I KRITIČNO OPTEREĆENJE

Ravnoteža je stanje odnosno odnos u kojem su sve sile koje djeluju na nešto (neki predmet ili sustav) međusobno neutralizirane, u potpunosti ili u mjeri takvoj da se promatrani objekt ne pomiče unutar referentnog sustava. U mehanici materijalna je točka u ravnoteži ako je vektorski zbroj sila koje djeluju na tu točku jednak nuli. Kruto je tijelo u ravnoteži ako je vektorski zbroj svih sila koje na nj djeluju jednak nuli i ako je algebarski zbroj svih momenata sila, s obzirom na svaku od tri bilo koje međusobno okomite osi, jednak nuli. Obično razlikujemo tri vrste ravnoteže ovisno o tome je li potencijalna energija promatranog sustava minimalna, maksimalna ili pak konstantnoga iznosa:

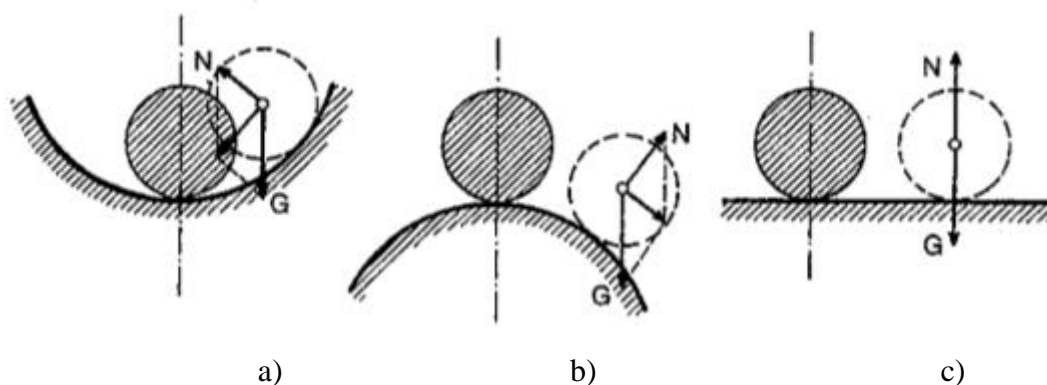
stabilna ravnoteža - potencijalna energija promatranog sustava minimalna

labilna ravnoteža - potencijalna energija promatranog sustava je maksimalna

indiferentna.

Kada se sustav izvede iz stabilne ravnoteže, on ponovno sam od sebe prelazi u prijašnje stanje; ako se pomakne iz stanja labilne ravnoteže, prijeći će u stanje stabilne ravnoteže, dok će u slučaju indiferentne ravnoteže ostati u onome stanju u koje se dovede. (Ravnoteža (mehanika) [https://hr.wikipedia.org/wiki/Ravnote%C5%BEa_\(mehanika\)](https://hr.wikipedia.org/wiki/Ravnote%C5%BEa_(mehanika)), pristup 26.08.2019.)

Iz mehanike krutog tijela poznato je da ravnoteža tijela može biti stabilna, labilna i indiferentna.



Slika 1. Vrste ravnoteže, (Šimić, 1995.)

Kugla na konkavnoj podlozi (slika1.a) nalazi se u stabilnoj ravnoteži. Ako se pomakne iz tog položaja ona će se vratiti u prvobitni ravnotežni položaj. Pri bilo kakvom pomaku kugle iz ravnotežnog položaja njezina energija raste. Iz tog proizlazi da stabilnom položaju kugle na konkavnoj podlozi odgovara minimum potencijalne energije.

Kugla na konveksnoj podlozi (slika 1.b) nalazi se u labilnoj (nestabilnoj) ravnoteži. Ako se pomakne iz tog položaja ona se neće moći sama vratiti u prvobitni ravnotežni položaj već će se od njega udaljavati. Svako udaljšavanje kugle od prvobitnog položaja popraćeno je smanjenjem potencijalne energije. Iz tog proizlazi da labilnoj ravnoteži kugle na konveksnoj podlozi odgovara maksimum potencijalne energije.

Kugla na horizontalnoj podlozi (slika 1.c) nalazi se u indiferentnoj ravnoteži. Ako se pomakne iz tog položaja ona se neće vratiti u prvobitni ravnotežni položaj već će ostati u ravnoteži u nekom novom položaju. Pri tom potencijalna energija kugle ostaje nepromijenjena.

Iz prethodnog proizlazi da stabilnost kugle ovisi samo o obliku površine, a ne ovisi o težini kugle. (Šimić, 1995.)

U mehanici je stabilnost položaja krutoga tijela vezana uz ravnotežu tijela. Vitki elastični elementi konstrukcija (štapovi), uzdužno opterećeni tlačnom silom, zadržavaju stabilnost sve dok sila ne prijeđe kritičnu vrijednost (Eulerova kritična sila) i izazove izvijanje elementa, što zbog promjene geometrije i preraspodjele sila može dovesti do gubitka stabilnosti i havarije cijele konstrukcije. Zbog toga se u proračunima građevnih i strojarskih konstrukcija (rešetkasti nosači, dizalice, štapni mehanizmi i drugo) posebno promatraju tlačno najopterećeniji elementi kao mogući izvori trajnih velikih deformacija, odnosno gubitka stabilnosti. Proračuni stabilnosti mehaničkih konstrukcija, posebno građevnih, zahtijevaju rješavanje složenih diferencijalnih jednadžbi, najčešće primjenom elektroničkih računala. (Statička stabilnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Stabilnost>, pristup 26.08.2019.)

Ako se razmatra ravnotežu ravnog apsolutno krutog štapa koji je na donjem kraju zgloбно oslonjen, a na gornjem pridršan elastičnom oprugom i aksijalno opterećen malom silom, primijetit će se da je štap u labilnoj ravnoteži obzirom da se štap pod djelovanjem sile opruge vraća u prvobitni položaj. Nakon prestanka djelovanja bočne sile koja je uzrokovala mali bočni pomak štap će zadržati novi položaj, položaj indiferentne ravnoteže. Da štap nije pridršan oprugom vertikalni položaj mu je labilan jer i najmanji bočni pomak uzrokuje rotaciju štapa na zglobnom osloncu. Promatrajući potencijalnu energiju sistema može se istražiti stabilnost sistema. Ako je potencijalna energija elastične opruge veća od rada sile na odgovarajućem pomaku, sistem je stabilan. Ako je potencijalna energija elastične opruge manja od rada sile na odgovarajućem pomaku, sistem je labilan. Stanje ravnoteže je indiferentno ako je potencijalna energija elastične opruge jednaka radu sile.

Kritično opterećenje (silu) možemo odrediti statičkom ili energijskom metodom.

Sličan problem stabilnosti ravnoteže postoji kod elastičnog odnosno deformabilnog tijela. Pod opterećenjem elastično se tijelo deformira dok se ne uspostavi ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila. Ravnotežni deformirani oblik može biti stabilan, labilan i indiferentan, ovisno o veličini opterećenja koje djeluje na tijelo.

Ravni štap aksijalno opterećen na tlak će se skratiti, ali će zadržati ravan oblik. Ukoliko je vrijednost sile manja od neke kritične vrijednosti ravan je oblik vrijednosti ravnoteže stabilan. Ukoliko je sila veća od kritične vrijednosti nakon prestanka djelovanja štap se vraća u prvobitni ravni oblik koji predstavlja njegov stabilni oblik ravnoteže. Međutim pri kritičnoj vrijednosti sile štap se nakon prestanka djelovanja bočne sile ne vraća u prvobitni ravan oblik, već zadržava novi oblik izazvan kratkotrajnim djelovanjem malog bočnog opterećenja. U tom slučaju govorimo o indiferentnoj elastičnoj ravnoteži, odnosno o kritičnom stanju štapa.

Kada sila F prijeđe kritičnu vrijednost ($F > F_{kr}$) ravan oblik ravnoteže štapa postaje labilan. Vrlo malo bočno opterećenje uzrokuje velike progibe koji nakon prestanka djelovanja bočnog opterećenja ne nestaju već pod aksijalnim opterećenjem i dalje rastu. Zbog povećanja momenta savijanja od aksijalnog opterećenja može nastati lom štapa. Gubitak stabilnosti ravnog štapa opterećena centričnom tlačnom silom naziva se izvijanje, a granična vrijednost centrične tlačne sile naziva se kritična sila.

Da ne dođe do izvijanja štapa opterećenog centričnom tlačnom silom mora biti ispunjen uvjet stabilnosti:

$$F \leq F_{i\ dop} \quad (1)$$

gdje je:

$$F_{i\ dop} = \frac{F_{kr}}{k_i} \quad (2)$$

k_1 – koeficijent sigurnosti protiv izvijanja. (Šimić, 1995.)

3. IZVIJANJE ŠTAPA U ELASTIČNOM PODRUČJU

Izvijanje je gubitak stabilnosti štapa ili kojega drugog vitkog elementa konstrukcije osno opterećenoga prekomjerno velikom tlačnom silom. Tako se na primjer štap, postavljen okomito na tlo i odozgo pritisnut tlačnom silom, izvije (izboči) u trenutku kada se sila poveća preko određene granice (Eulerova kritična sila). Rešetkaste konstrukcije koje su sastavljene od štapova (stupovi dalekovoda, čelični mostovi, dizalice) obično gube stabilnost zbog izvijanja jednog ili više štapova, pa se u proračunima takvih konstrukcija posebna pozornost posvećuje tlačno najopterećenijim štapovima. Intenzitet kritične sile pri kojem nastaje izvijanje ovisi o vitkosti štapa, to jest načinu učvršćenja njegovih krajeva i njegovim geometrijskim svojstvima, te o mehaničkim svojstvima materijala od kojega je štap načinjen. Kod konstrukcija s pločama, stijenama i ljuskastim elementima izvijanje je složenije. Kritičnom silom bavio se švicarski matematičar, fizičar i astronom Leonhard Euler, po kojem je ta sila i nazvana. (Izvijanje, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Izvijanje>, pristup 26.08.2019.)

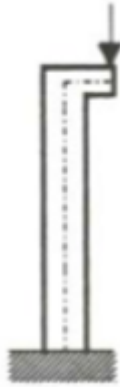
Elastičnost je svojstvo čvrstih tijela (materijala) da pod utjecajem vanjske sile mijenjaju svoj oblik ili volumen i da se, nakon prestanka njezina djelovanja, vraćaju u prvotan oblik. Povezanost naprezanja i deformaciju tijela opisuje Hookeov zakon.

Hookeov zakon je zakonitost koja opisuje ovisnost promjene oblika čvrstoga tijela u obliku štapa o djelovanju vanjske sile, što ju je utvrdio Robert Hooke. Opterećenjem izazvano naprezanje σ razmjerno je deformaciji ε . Faktor razmjernosti E je modul elastičnosti i karakterističan je za pojedini materijal. Do određene granice naprezanja Hookeov zakon može se primijeniti na većinu konstrukcijskih materijala. Za složenija opterećenja tijela različitih oblika rabi se Hookeov zakon u poopćenom obliku, koji se izražava s više skalarnih linearnih jednadžbi. (Elastičnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Elasti%C4%8Dnost>, pristup 26.08.2019.)

Kada na idealno ravan štap izrađen od homogenog materijala nanesimo idealno centrično opterećenje (F) štap će se skratiti ali će ostati ravan. Štap je tada u položaju stabilne ravnoteže, što znači ako na njega djeluje bočna sila i izazove bočne pomake, nakon uklanjanja bočne sile i pomaci nestaju. Međutim ako tlačna sila raste i dostigne kritičnu vrijednost, ravni deformirani oblik štapa prestaje biti stabilan. Rastom bočne sile rastu i progibi koji ostaju nakon prestanka djelovanja bočne sile što znači da se štap neće vratiti u

početni oblik. Prijelaz štapa u saviti ravnotežni oblik nazivamo izvijanje, a tlačnu silu pri kojoj se to dogodi, kritična sila izvijanja.

U stvarnosti, prije dostizanja kritične sile konstruktivni elementi otkazuju neelastičnim izvijanjem zbog raznih nesavršenosti u izvedbi samih elemenata.



Slika 2. Ekscentrični unos sile, (Androić i dr., 1994.)



Slika 3. Lokalna početna deformacija, (Androić i dr., 1994.)



Slika 4. Početni deformirani položaj, (Androić i dr., 1994.)

Osim toga, potrebno je uzeti u obzir nesavršenosti strukture promatranog elementa, a to su:

- vlastiti naponi (uzrokovani valjanjem ili zavarivanjem profila),
- promjena granice popuštanja po poprečnom presjeku.

Kako bi se sa sigurnošću moglo reći da neće doći do izvijanja ravnog štapa, kritičnu silu pri kojoj dolazi do izvijanja dijeli se s koeficijentom sigurnosti za izvijanje (k_i).

Proračun stabilnosti ravnih štapova opterećenih tlačnom silom svodi se na određivanje kritične sile, koja ovisi o obliku i dimenziji štapa te vrsti materijala od kojega je izrađen. Za određivanje kritične sile koristi se teorijom drugog reda, jednačbe ravnoteže postavljaju se na deformiranome štapu, a u izrazu za deformaciju zadržavaju se samo linearni članovi.

3.1. Eulerova kritična sila

Pod djelovanjem sila stup (ili bilo koje čvrsto tijelo) se deformira i poprima novi ravnotežni oblik. Ako su naprezanja u stupu pretežno tlačna, ravnotežni deformirani oblik stupa može biti nestabilan, što znači da vrlo mali poremećaj opterećenja može uzrokovati potpunu promjenu ravnotežnog oblika, koja često uzrokuje lom materijala. Najmanja sila pri kojoj se pojavljuje izvijanje jest sila izvijanja F . Godine 1757. Leonhard Euler je izveo jednakost za silu izvijanja koja se i naziva Eulerova kritična sila.

$$F = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

gdje je:

F - sila izvijanja (na primjer okomita sila na stup),

E - Youngov modul elastičnosti,

I - moment tromosti stupa,

L - duljina stupa,

K - način učvršćenja stupa, koje može biti:

ako su oba kraja zglobna (mogu se okretati), $K = 1,0$;

ako su oba kraja kruto učvršćena, $K = 0,50$;

ako je jedan kraj kruto a drugi zglobno učvršćen, $K = 0,699\dots$;

ako je jedan kraj kruto učvršćen i drugi se može slobodno kretati bočno, $K = 2,0$.

KL - se naziva i slobodna duljina izvijanja. Elastičnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Elasti%C4%8Dnost>, pristup 26.08.2019.)

Stabilnost štapova aksijalno opterećenih tlakom prvi je proučavao Leonhard Euler 1774. godine. Izveo je izraz za kritičnu silu i pokazao da kritična sila ovisi o načinu učvršćenja krajeva štapa. Ideja Eulerove metode zasniva se na određivanju sile pri kojoj štap podjednako može biti ravan ili izvijen.

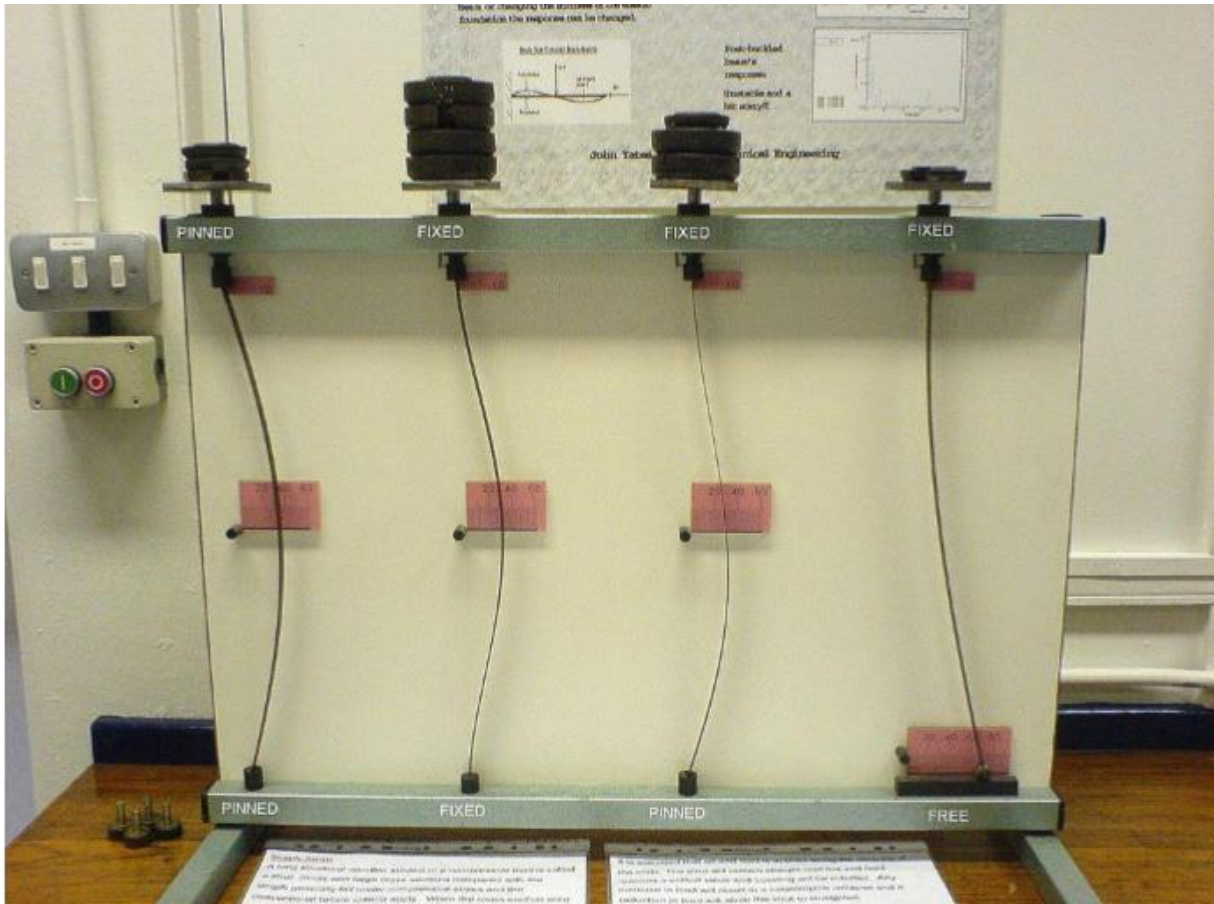
Razlikujemo četiri slučaja učvršćenja krajeva štapa:

-štap zglobno učvršćen na oba kraja

-štap na jednom kraju upet a na drugom slobodan

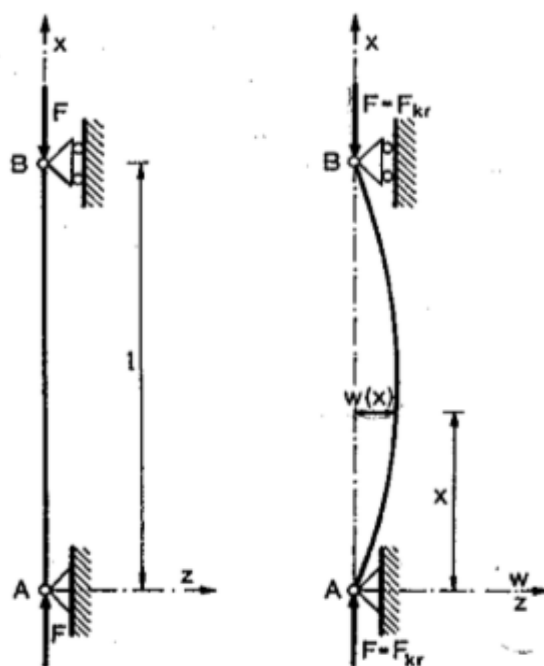
-štap na jednom kraju upet a na drugom zglobno oslonjen

-štap upet na oba kraja



Slika 5. Slučajevi pridržavanja: 1) zglobno učvršćen na oba kraja, 2) obostrano upet, 3) na jednoj strani upet, a na drugoj zglobno oslonjen, 4) konzola (Izvijanje, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Izvijanje>, pristup 26.08.2019.)

3.1.1. Štap zglobno učvršćen na oba kraja



Slika 6. Izvijanje štapa zglobno učvršćenog u oba kraja, (Šimić, 1995.)

Štap zglobno pričvršćen na oba kraja opterećen centričnom tlačnom silom ostaje ravan, dok je centrična tlačna sila manja od kritične. Kada sila dosegne kritičnu vrijednost F_{kr} uz ravan oblik moguće je da štapa poprimi krivocrtan oblik. U nekom presjeku tako izvijenog štapa pojavljuje se moment savijanja.

$$M = F \cdot w \quad (4)$$

Ako se pretpostave mali progibi približna linearna diferencijalna jednačba glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F \cdot w}{EI_{min}} \quad (5)$$

U jednačbi se nalazi minimalni moment tromosti poprečnog presjeka štapa (I_{min}), jer je očito da će se izvijanje dogoditi u ravnini najmanje fleksijske krutosti štapa.

Ako uvedemo oznaku a^2 slijedi:

$$a^2 = \frac{F}{EI_{min}} \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} + a^2w = 0$$

Opće rješenje ove homogene diferencijalne jednačbe 2. reda s konstantnim koeficijentima glasi:

$$w = A \sin ax + B \cos ax \quad (6)$$

Konstante integracije A i B također su homogene te se određuju iz rubnih uvjeta i glase:

$$1) w(0) = 0$$

$$2) w(l) = 0$$

Iz prvog uvjeta dobivamo da je B=0, te homogena diferencijalna jednačba prima oblik:

$$w = A \sin ax \quad (7)$$

Iz drugog uvjeta dobivamo:

$$A \sin al = 0 \quad (8)$$

Moguća su dva slučaja: $A = 0$ ili $\sin al = 0$. Za prvi slučaj dobit ćemo rješenje $w(x) = 0$ što pokazuje da je ravni oblik štapa mogući ravnotežni oblik štapa. Za izvijeni oblik štapa $A \neq 0$ pa je $\sin al = 0$. Iz ovoga dobivamo uvjet za kritično stanje štapa:

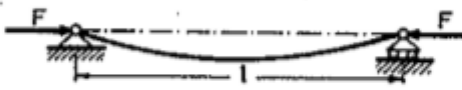
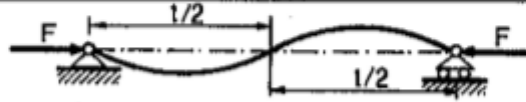
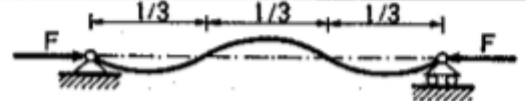
$$al = n\pi \text{ ili } a = \frac{n\pi}{l}, n = 1,2,3, \dots$$

Jednačba elastične linije glasi:

$$w = A \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9)$$

Na temelju izraza $a^2 = \frac{F}{El_{min}}$ i izraza $\sin al = 0$ dobit ćemo vrijednost sile pri kojoj dolazi do izvijanja štapa:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 El_{min}}{l^2} . \quad (10)$$

n	Jednadžba elastične linije	Oblik elastične linije	F
1	$w = A \sin \frac{\pi x}{l}$		$\frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$
2	$w = A \sin \frac{2\pi x}{l}$		$\frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}$
3	$w = A \sin \frac{3\pi x}{l}$		$\frac{9\pi^2 EI_{min}}{l^2}$

Slika 7. Vrijednosti kritične sile i odgovarajući oblici elastične linije štapa za $n = 1, 2$ i 3 , (Šimić, 1995.)

U ovoj tablici navedene su vrijednosti kritične sile i prikazani odgovarajući oblici elastične linije štapa za $n = 1, 2$ i 3 . Iz ovoga proizlazi da n označava broj poluvalova sinusoide koji su rasprostranjeni na dužini izvijenog štapa.

Najmanja moguća vrijednost kritične sile kod koje može doći do izvijanja štapa vrlo je značajna u praksi, a najmanja je za $n = 1$ i iznosi:

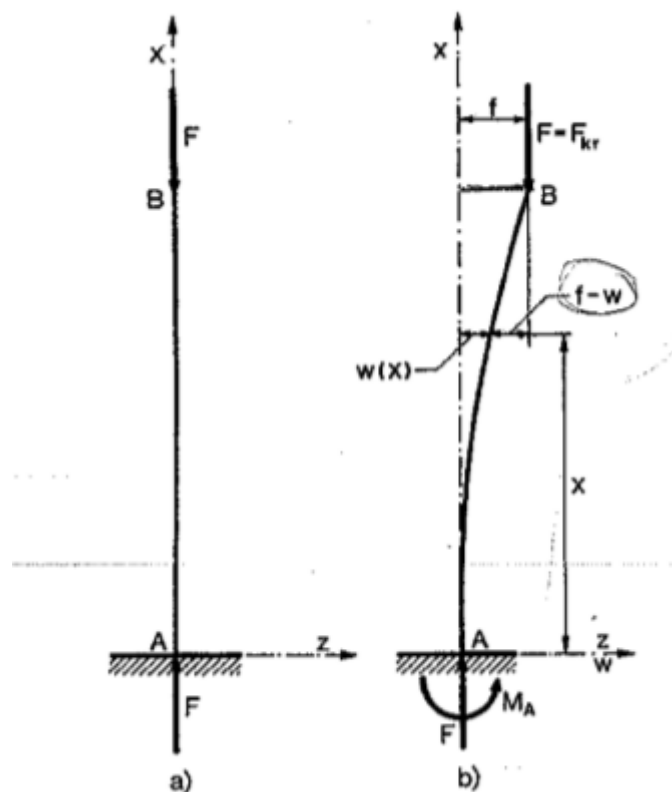
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (11)$$

Ovo je Eulerova kritična sila za štap zglobno oslonjen na oba kraja.

Jednadžba elastične linije $w = A \sin \frac{n\pi}{l} x$ daje samo oblik elastične linije izvijena štapa, ali ne daje veličinu progiba. Razlog je u tome što je promatrano samo za male progibe (teorija drugog reda). Da bi dobili veličinu progiba mora se za zakrivljenost uzeti točan izraz i riješiti nelinearnu diferencijalnu jednadžbu (teorija trećeg reda).

Rješenje problema izvijanja svodi se na integriranje homogene diferencijalne jednadžbe čije rješenje ovisi o nekom parametru pri homogenim rubnim uvjetima (problem vlastitih vrijednosti). Svakoj vlastitoj vrijednosti parametra odgovara određeno rješenje diferencijalne jednadžbe (vlastita funkcija). Problem izvijanja ima beskonačno mnogo vlastitih vrijednosti, ali za praktične potrebe zanima nas najmanja vlastita vrijednost. (Šimić, 1995.)

3.1.2. Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan



Slika 8. Izvijanje štapa na jednom kraju upetog, a na drugom slobodan, (Šimić, 1995.)

Ukoliko postoji progib gornjeg kraja štapa, tada se u nekom presjeku izvijenog štapa pojavljuje moment savijanja.

$$M = -P(f - w) \quad (12)$$

Diferencijalna jednačba elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + a^2w = a^2f \quad (13)$$

gdje je:

$$a^2 = \frac{F}{EI_{min}}$$

Ovo je nehomogena diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Opće rješenje jednačbe je:

$$w = A \sin ax + B \cos ax + f \quad (14)$$

Jednadžba nije homogena.

Za štap sa slike 8.b) rubni uvjeti glase: $w(0) = 0$ i $w'(0) = 0$, a za slobodan kraj vrijedi $w(l) = f$.

Iz rubnih uvjeta dobivamo $B = -f, A = 0$, tako da je:

$$w = f(1 - \cos ax) \quad (15)$$

Iz uvjeta za slobodni kraj slijedi:

$$\cos al = 0. \quad (16)$$

Uvjet za kritično stanje štapa dobivamo iz prethodnog:

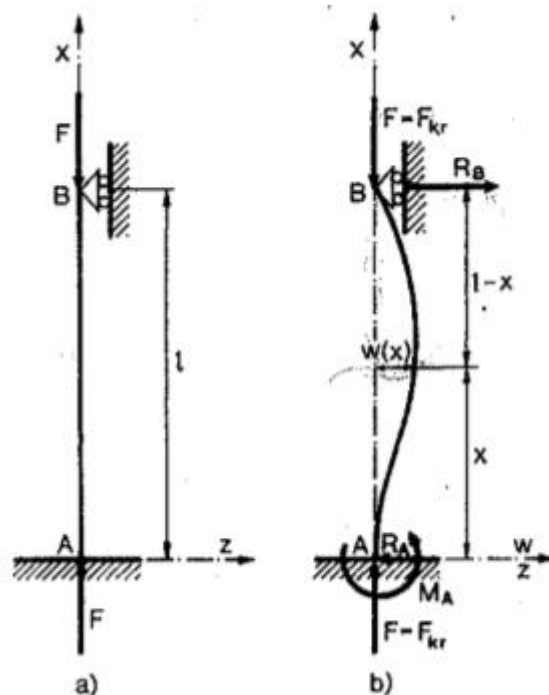
$$al = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Najmanja vrijednost kritične sile biti će za $n = 1$, tj. za $al = \frac{\pi}{2}$.

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2} \quad (17)$$

(Šimić, 1995.)

3.1.3. Štap na jednom kraju upetog, a na drugom slobodno oslonjen



Slika 9. Izvijanje štapa na jednom kraju upetog, a na drugome slobodno oslonjen, (Šimić, 1995.)

Kada sila F dostigne kritičnu vrijednost, osim ravnog oblika podjednako je moguć i izvijeni oblik štapa. Pri izvijanju štapa pojavljuju se ležajne reakcije $R_A - R_B$ i reaktivni moment M_A .

Moment savijanja u nekom presjeku štapa je:

$$M = Fw - R_B(l - x), \quad (18)$$

a diferencijalna jednačina elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{Fw}{EI_{min}} = \frac{R_B}{EI_{min}}(l - x). \quad (19)$$

Ako uvedemo oznaku:

$$a^2 = \frac{F}{EI_{min}}$$

dobit ćemo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + a^2w = \frac{R_B}{F} a^2(l - x). \quad (20)$$

Opće rješenje nehomogene jednadžbe glasi:

$$w = A \sin ax + B \cos ax + \frac{R_B}{F} (l - x). \quad (21)$$

Uz konstante integracije A i B, nepoznata je i reakcija R_a .

Uz rubne uvjete $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(l) = 0$, deriviranjem dobivamo:

$$\frac{dw}{dx} = a A \cos ax - aB \sin ax - \frac{R_B}{F}. \quad (22)$$

Uvrštavanjem rubnih vrijednosti dobit ćemo vrijednosti za integracijske konstante A i B. Ako iste uvrstimo u opće rješenje nehomogene jednadžbe dobit ćemo jednadžbu elastične linije.

$$w = \frac{R_B}{F} \left[\frac{1}{a} \sin ax - l \cos ax + (l - x) \right] \quad (23)$$

Iz rubnog uvjeta $w(l)=0$ i budući da je $\frac{R_a}{F} \neq 0$, dobit ćemo:

$$tg al = al. \quad (24)$$

Ovo je transcendentalna jednadžba.

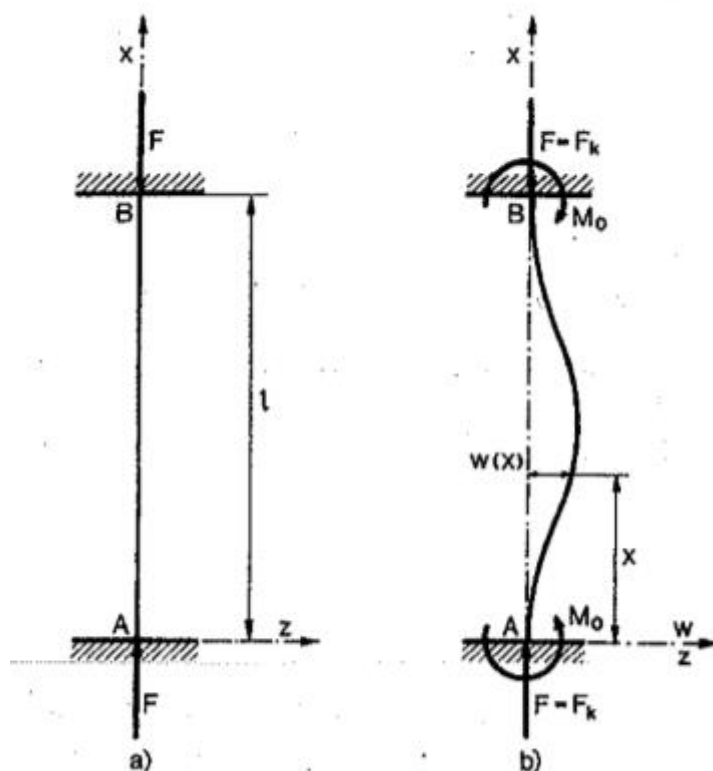
Korijenima ove jednadžbe odgovaraju apscise sjecišta pravca $y = al$ i funkcije $y = tg al$. Najmanji korijen te jednadžbe je $al = 4,493$.

Kritična sila izvijanja je:

$$F_{kr} = a^2 EI_{min} = \frac{4,493^2 EI_{min}}{l^2} = \frac{20,187 EI_{min}}{l^2} \approx \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (25)$$

(Šimić, 1995.)

3.1.4. Štap upet na oba kraja



Slika 10. Izvijanje štapa upetog na oba kraja, (Šimić, 1995.)

Uz pretpostavku da je oblik izvijenog štapa simetričan, momenti upetosti na oba kraja su jednaki. U nekom presjeku izvijenog štapa pojavljuje se moment savijanja:

$$M = Fw - M_0. \quad (26)$$

Diferencijalna jednačina elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}} w = \frac{M_0}{EI_{min}}. \quad (27)$$

Ako uvedemo oznaku:

$$a^2 = \frac{F}{EI_{min}},$$

dobit ćemo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + a^2 w = \frac{M_0}{F} a^2. \quad (28)$$

Opće rješenje ove jednačine glasi:

$$w = A \sin ax + B \cos ax + \frac{M_0}{F}. \quad (29)$$

Rubni uvjet: $w(0) = 0$ daje:

$$B = -\frac{M_0}{F}.$$

Iz uvjeta $w'(0) = 0$ dobivamo da je $A = 0$.

Jednadžba se sada može prikazati u slijedećem obliku:

$$w = \frac{M_0}{F} (1 - \cos ax) \quad (30)$$

i

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{F} a \sin ax. \quad (31)$$

Rubni uvjet $w(l) = 0$ daje:

$$w(l) = \frac{M_0}{F} (1 - \cos al) = 0. \quad (32)$$

Budući je $\frac{M_0}{F} \neq 0$ dobiva se da je

$$\cos al = 1.$$

Rubni uvjet $w'(l) = 0$ daje

$$w' = \frac{M_0}{F} a \sin al = 0,$$

odnosno

$$\sin al = 0.$$

Jednadžbe $\cos al = 1$ i $\sin al = 0$ zadovoljene su za:

$$al = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Najmanju vrijednost za kritičnu silu dobit ćemo za $n = 1$,

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (33)$$

(Šimić, 1995.)

3.2. Duljina izvijanja

Usporedbom slijedećih izraza za kritičnu silu:

- štap zglobno učvršćen na oba kraja

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

- štap na jednom kraju upet, a na drugome slobodan

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2}$$

- štap na jednom kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen

$$F_{kr} \approx \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

- štap upet na oba kraja

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

Možemo zaključiti da u svim navedenim slučajevima izraz za kritičnu silu možemo prikazati u općem obliku:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} \quad (34)$$

gdje je:

μ – koeficijent duljine izvijanja štapa i iznosi

$$\mu = \frac{l}{n},$$

gdje je n broj poluvalova sinusoide elastične linije izvijena štapa.

Označimo li

$$l_i = \mu l,$$

Izraz za kritičnu silu možemo pisati:

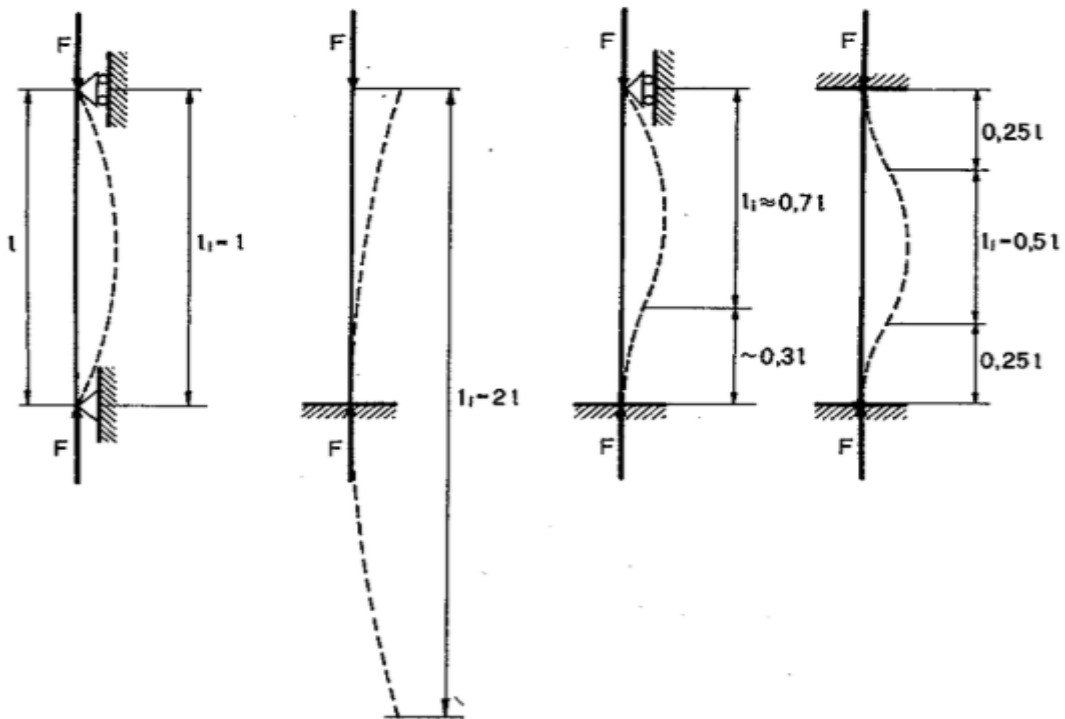
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} \quad (35)$$

gdje je:

l_i – duljina izvijanja.

Duljina izvijanja (slika 11.) je dio duljine štapu na kojoj se pojavljuje jedan poluval sinusoida, odnosno duljina između dviju susjednih točaka infleksije elastične linije izvijenog štapu.

Iz izraza za kritičnu silu proizlazi da kritična sila ovisi o materijalu štapu, poprečnom presjeku štapu, duljini štapu i o načinu učvršćivanja njegovih krajeva.



Slika 11. Duljine izvijanja štapova ovisno o oslanjanju, (Šimić, 1995.)

3.3. Kritično naprezanje

Štap aksijalno opterećen na pritisak u kritičnom stanju još zadržava ravan oblik ravnoteže, pa je kritično naprezanje u štapu u trenutku izvijanja:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2 A} \quad (36)$$

Uzimajući u obzir da je minimalni polumjer tromosti presjeka:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

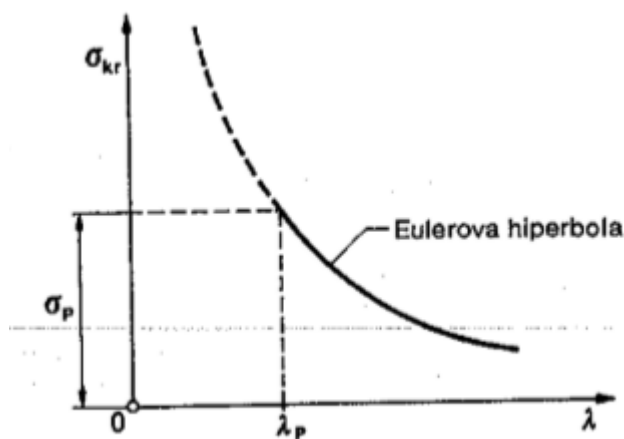
možemo zaključiti da je:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_i^2} \quad (37)$$

ili

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (38)$$

$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}}$ - bezdimenzionalna karakteristika štapa i naziva se vitkost štapa.



Slika 12. Eulerova hiperbola, (Šimić, 1995.)

Kritično naprezanje ovisi o svojstvima materijala i o vitkosti štapa. Pri velikoj vitkosti štapa kritično naprezanje teži nuli, a za malu vitkost kritično naprezanje naglo raste, tako da ispod određene vitkosti prelazi granicu proporcionalnosti materijala.

Eulerovi izrazi za kritičnu silu i kritično naprezanje zasnovani su na linearnoj diferencijalnoj jednadžbi elastične linije i na valjanosti Hookeova zakona. To znači da izraz za kritično naprezanje materijala vrijedi samo za kritično naprezanje koje ne prelazi granicu proporcionalnosti naprezanja materijala pri jednoosnome pritisku, tj. kada je $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$ ili $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$.

λ_p – granična vitkost ispod koje Eulerovi izrazi za kritičnu silu i kritično naprezanje ne vrijede

Štapovi velike vitkosti $\lambda \geq \lambda_p$ izvijaju se u elastičnom području, dok se štapovi male i srednje vitkosti $\lambda < \lambda_p$, $\sigma_{kr} > \sigma_p$ izvijaju u plastičnom području.

Pokusi pokazuju da je stvarno kritično naprezanje za štapove male i srednje vitkosti uvijek manje od Eulerova kritičnog naprezanja. Primjena Eulerova izraza za kritičnu silu i kritično naprezanje na štapove koji se izvijaju u plastičnom području, načelno je pogrešno i krajnje opasno za sigurnost konstrukcija. (Šimić, 1995.)

4. IZVIJANJE ŠTAPOVA U PLASTIČNOM PODRUČJU

Plastičnost je svojstvo nekih tvari (materijala) da pod djelovanjem dovoljno velike sile mijenjaju oblik, koji gotovo u potpunosti trajno zadržavaju i nakon prestanka djelovanja sile (plastična deformacija). Plastičnost nastupa kada se pod djelovanjem sila prijeđe takozvana granica tečenja, koja ovisi o temperaturi materijala. Tako i neki krhki materijali (bronca, mramor, staklo, kristali) mogu prijeći u plastično stanje pri povišenim temperaturama. Proučavanjem plastičnosti i postavljanjem teorija bavi se na makrorazini mehanika čvrstih tijela (teorija plastičnosti), promatrajući tijelo kao kontinuum bez ulaženja u njegovu mikrostrukturu, dok se plastičnost na mikrorazini, kao posljedica poremećaja unutar kristala, to jest pomicanja dijelova kristala duž dislokacijskih ravnina, proučava u okviru fizike materijala. Metali na temperaturi višoj od temperature rekristalizacije imaju gotovo idealnu plastičnost, jer su deformirani kristali spontano pretvoreni u nove nenapregnute, a s temperaturom je povećan i broj dislokacija. U takvu se stanju pri djelovanju stalne sile deformacije u materijalu s vremenom povećavaju (tečenje materijala). Plastičnost je bitna pojava u tehnologiji oblikovanja deformiranjem, kao što su valjanje, kovanje, savijanje, duboko vučenje i drugo, dok se u konstrukcijama javlja samo lokalno unutar ograničenih manjih područja (Plastičnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Plastičnost>, pristup 26.08.2019.)

O sigurnosti građevinskih konstrukcija ovise ljudski životi i materijalna dobra, te je vrlo značajno pravilno izabrati dimenzije i metode proračuna.

Izvijanje, kojim ćemo se baviti u ovom radu, zbog promjene geometrije i preraspodjele sila može dovesti do gubitka stabilnosti i havarije cijele konstrukcije. Zbog toga se u proračunima konstrukcija posebno promatraju tlačno najopterećeniji elementi kao mogući uzroci trajnih velikih deformacija, odnosno gubitka stabilnosti.

Izvijanje štapa u plastičnom području prvi je istraživao Engesser 1889. godine polazeći od slijedećih pretpostavki:

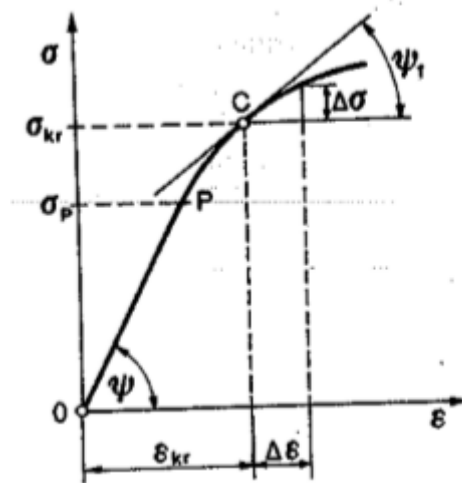
- da je štap idealno ravan i izrađen od homogenog materijala,
- da je štap zglobno učvršćen na krajevima i idealno centrično opterećen na tlak,
- da su progibi zbog savijanja štapa mali,
- da Bernoullijeva hipoteza ravnih presjeka pri savijanju vrijedi i za plastično područje

- da se modul elastičnosti u nekoj točki C dijagrama $\sigma - \varepsilon$ izražava tangentnim modulom elastičnosti:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg}\psi_1 \quad (39)$$

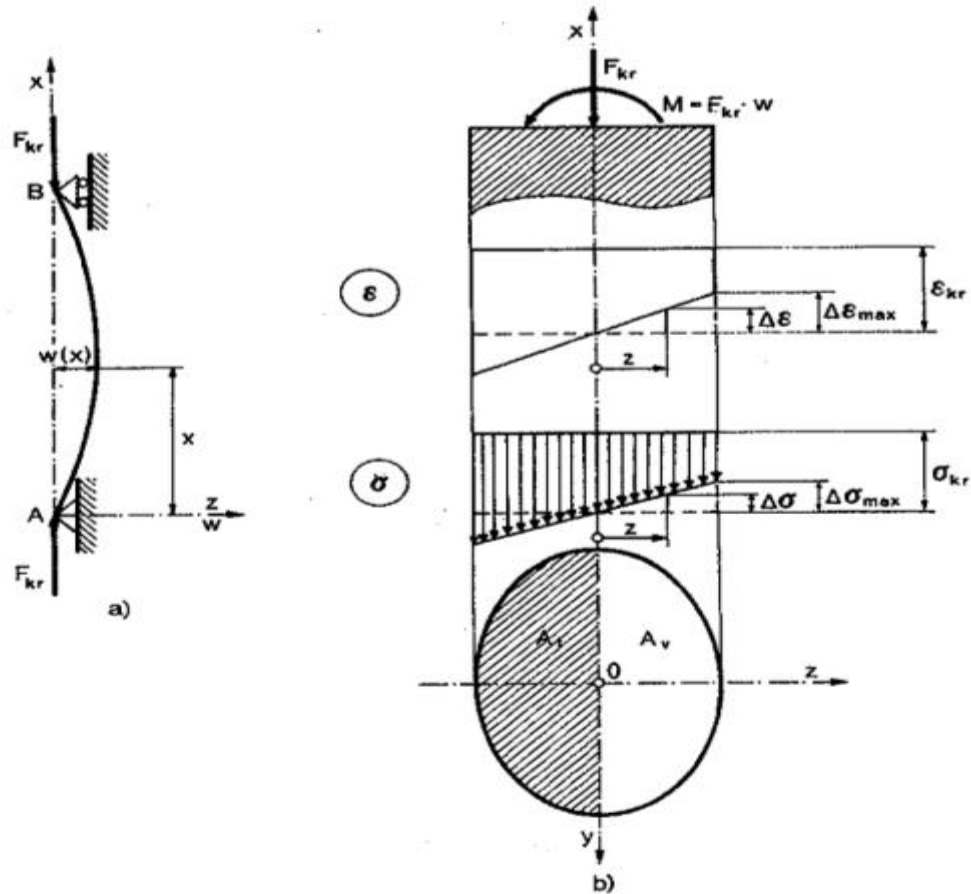
ψ_1 - nagib tangente,

te se pretpostavlja da je tangentni modul u okolišu točke C konstantan, što odgovara pretpostavci da se u okolišu točke C linija opterećenja poklapa s linijom rasterećenja.



Slika 13. $\sigma - \varepsilon$ dijagram, okoliš točke C, (Šimić, 1995.)

Prilikom opterećenja tlačnom silom u presjeku se javlja jednoliko raspoređeno tlačno naprezanje. Ako se uzme neki presjek u središtu nosača gdje je moment savijanja $M = F_{kr} \cdot w$, raspodjela naprezanja postaje linearna zbog pojave dodatnog tlačnog naprezanja u jednom dijelu nosača i pojave vlačnih naprezanja. Naprezanja su još uvijek jednoznačna jer su progibi mali (ekscentricitet sile) te se sile još uvijek nalaze u jezgri presjeka. (Šimić, 1995.)



Slika 14. Izvijeni, slobodno oslonjeni štap i prikaz stanja naprezanja u presjeku x, (Šimić, 1995.)

Ako se promatra izvijeni štap opterećen centričnom kritičnom silom zaključit ćemo da se u nekom presjeku x štapa pojavljuje uzdužna sila F_{kr} i moment savijanja $M = F_{kr}w$.

Dopunska deformacija zbog savijanja je

$$\Delta\varepsilon = \frac{z}{\rho}. \quad (40)$$

Dopunska naprezanja zbog savijanja u tlačnoj i vlačnoj zoni poprečnog presjeka može se izraziti slično Hookeovu zakonu:

$$\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon = E_t\frac{z}{\rho}. \quad (41)$$

Ukupno naprezanje u nekoj točki promatranog presjeka je:

$$\sigma = \sigma_{kr} + \Delta\sigma = \sigma_{kr} + E_t\frac{z}{\rho} \quad (42)$$

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa $\sum F_x = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma dA &= \int_A (\sigma_{kr} + \Delta\sigma) dA = \int_A (\sigma_{kr} + E_t) dA = \int_A \sigma_{kr} dA + \frac{E_t}{\sigma} \int_A z dA = \\ &= F_{kr} + \frac{E_t}{\sigma} \int_A z dA = F_{kr}. \end{aligned} \quad (43)$$

Izlazi da je:

$$\int_A z dA = 0, \quad (44)$$

što znači da neutralna os zbog djelovanja momenta savijanja prolazi težištem poprečnog presjeka.

Iz uvjeta ravnoteže $\sum M_y = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma z dA = \int_A (\sigma_{kr} + \Delta\sigma) z dA = \int_A \left(\sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} \right) dA = \\ &= \sigma_{kr} \int_A z dA + \frac{E_t}{\rho} \int_A z^2 dA = Fw. \end{aligned} \quad (45)$$

Ako se uzme u obzir $\int_A z dA = 0$ i činjenicu da integral $\int_A z^2 dA = I_y = I_{min}$ predstavlja moment tromosti poprečnog presjeka s obzirom na os najmanje krutosti, dobit će se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Fw}{E_t I_{min}}. \quad (46)$$

Ako pretpostavimo da su progibi mali, zakrivljenost možemo izraziti približnim izrazom $\frac{i}{\rho} = -\frac{d^2w}{dx^2}$. Tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu elastične linije štapa izvijena u plastičnom području:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{Fw}{E_t I_{min}} = 0. \quad (47)$$

Razlika između ove diferencijalne jednadžbe i linearne diferencijalne jednadžbe izvijanja štapa u elastičnom području $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{Fw}{E_t I_{min}}$ je samo u tome što u ovoj jednadžbi umjesto

modula elastičnosti E dolazi tangenti modul E_t . To znači da se izrazi dobiveni za kritičnu silu i kritično naprezanje u elastičnom području formalno mogu zadržati i u plastičnom području ako se modul elastičnosti E zamijeni tangentnim modulom E_t .

Na taj način dobivamo kritičnu silu:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_t I_{min}}{l_i^2} \quad (48)$$

i kritično naprezanje:

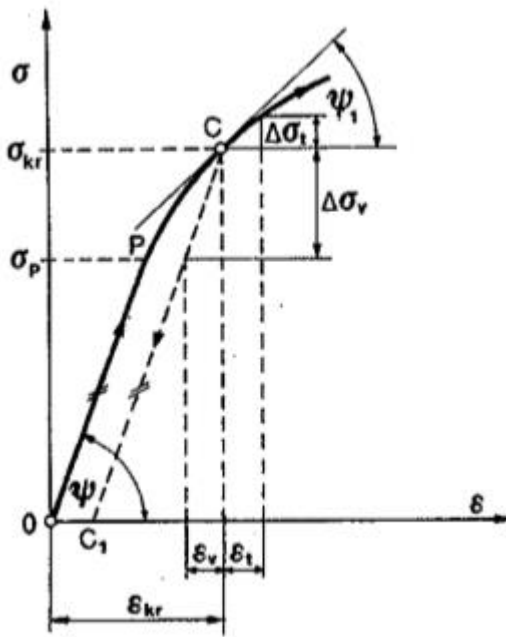
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \cdot \quad (49)$$

Izraz za kritičnu silu može se prikazati i kao:

$$F_{kr} = \frac{E_t}{E} \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_i^2} = \frac{E_t}{E} F_c \quad (50)$$

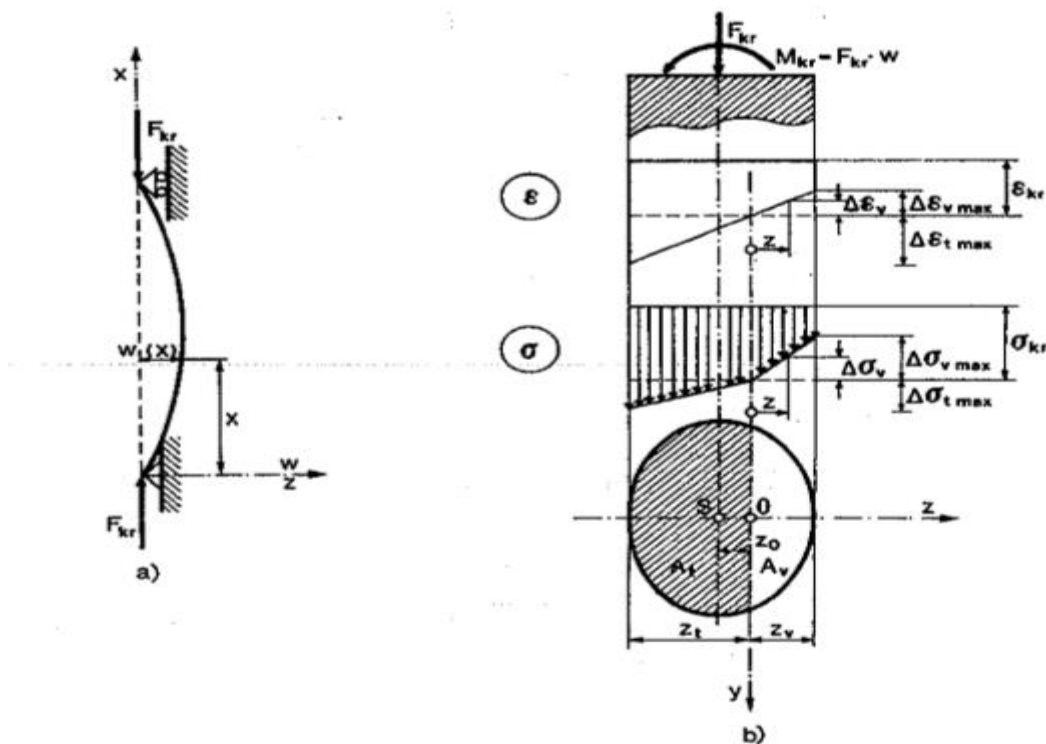
F_c – Eulerova kritična sila

F. S. Jasinski 1893. godine upozorio je na činjenicu da je u dijagramu $\sigma - \varepsilon$ linija rasterećenja $C - C_1$ paralelna s pravcem OP sa slijedećeg dijagrama.



Slika 15. Dijagram $\sigma - \varepsilon$ s linijom rasterećenja CC_1 paralelnom s pravcem OP , (Šimić, 1995.)

Engesser je tu primjedbu prihvatio i svoja je istraživanja 1895. godine dopunio uzimajući u obzir da će pri savijanju dio presjeka štapa biti rasterećen naprezanjima zbog savijanja i da će za taj dio presjeka vrijediti modul elastičnosti E , dok će u drugom dijelu presjeka vrijediti tangenti modul E_t .



Slika 16. Izvijeni, slobodno oslonjeni štapa i prikaz raspodjele napreznaja i deformacija, (Šimić, 1995.)

Ovdje je prikazana raspodjela napreznaja i deformacija u nekom presjeku x štapa. Dopunska mala napreznaja u tlačnoj i vlačnoj zoni presjeka štapa u kritičnom stanju su:

$$\Delta\sigma_t = E_t \Delta\epsilon = E_t \frac{z}{\rho}, \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = tg\psi l$$

$$\Delta\sigma_v = E \Delta\epsilon = E \frac{z}{\rho}, \quad E = tg\psi.$$

Pri malim progibima štapa uzdužna sila u poprečnom presjeku je približno konstantna, te je zato:

$$\int_A \Delta\sigma dA = 0. \quad (51)$$

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa $\sum M_y = 0$ dobivamo:

$$M = Fw . \quad (52)$$

Moment aksijalne sile F odnosi se na težišnu os, dok je moment unutarnjih sila uzet s obzirom na neutralnu os y .

Možemo pisati da je :

$$ES_V - E_t S_t = 0 \quad (53)$$

S_t i S_V – statički momenti površine A_t i A_V tlačne i vlačne zone presjeka s obzirom na neutralnu os y .

Ovom jednadžbom može se odrediti položaj neutralne osi, odnosno pomak z_0 neutralne osi od težišta presjeka prema rastegnutim vlaknima, a time i koordinate krajnjih vlakana z_t i z_V , pa iz jednadžbe $M = Fw$ dobivamo:

$$\frac{1}{\rho} (El_V + E_t I_t) = Fw \quad (54)$$

I_V i I_t – momenti tromosti površine A_V i A_t s obzirom na neutralnu os y .

Ako minimalni moment tromosti čitavog presjeka s obzirom na težišnu os presjeka označimo s I_{min} tada jednadžbu $\frac{1}{\rho} (El_V + E_t I_t) = Fw$ možemo pisati u obliku:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Fw}{E_r I_{min}} \quad (55)$$

$E_r = \frac{l}{I_{min}} (El_V + E_t I_t)$ – reducirani modul ili Engesser-Karmanov modul koji ovisi o σ_{kr} i o obliku poprečnog presjeka

Za pravokutni presjek je:

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} . \quad (56)$$

Uz pretpostavku da su progibi mali jednadžbu $\frac{1}{\rho} = \frac{Fw}{E_r I_{min}}$ možemo pisati u obliku:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Fw}{E_r I_{min}} = 0 . \quad (57)$$

Iz usporedbe ove jednadžbe s približnom linearnom diferencijalnom jednadžbom izvijanja štapa u elastičnom području $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{Fw}{EI_{min}}$ može se zaključiti da se one razlikuju samo u tome što u ovoj jednadžbi umjesto E dolazi E_r . Isto se događa i u rješenjima tih jednadžbi, pa izrazi za kritičnu silu i kritično naprezanje pri izvijanju u plastičnom području glase:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_r I_{min}}{l_i^2} \quad (58)$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \cdot \quad (59)$$

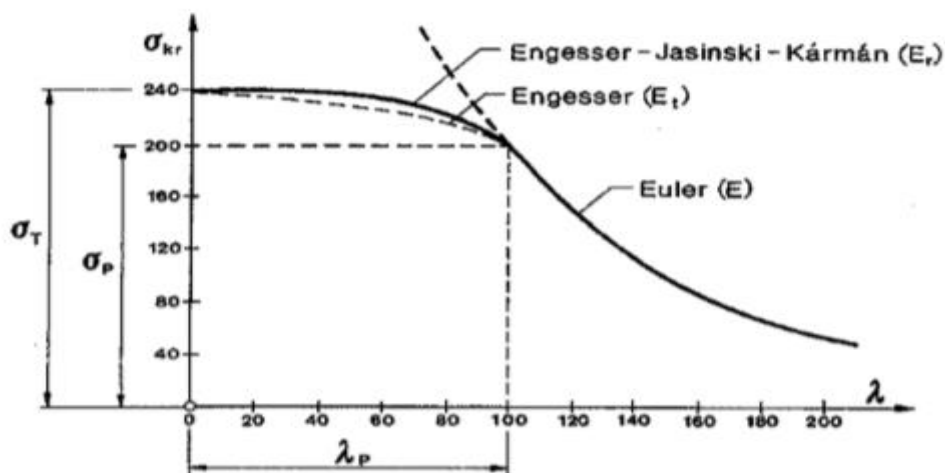
Ova teorija plastičnog izvijanja štapa dobila je naziv Engesser-Jasinski-Karmanova teorija.

Da bi se konstruirala krivulja kritičnih naprezanja potrebno je formule svesti na slijedeći oblik:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{\sigma_{kr}}} \text{ i } \lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E_r}{\sigma_{kr}}} \quad (60)$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda_p.$$

Dijagram kritičnih naprezanja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ za čelik mehaničkih svojstava $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 240 \text{ MPa}$ prikazan je na slijedećem dijagramu:



Slika 17. Dijagram kritičnih naprezanja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ za čelik mehaničkih svojstava

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \sigma_p = 200 \text{ MPa}, \sigma_r = 240 \text{ MPa}, (\text{Šimić, 1995.})$$

Sa slike uočavamo da za štapove čija je vitkost veća od λ_p vrijedi Eulerova hiperbola za određivanje kritičnih naprezanja dok za štapove manje vitkosti vrijede Engesser-Jasinski-Karmanova krivulja. (Šimić, 1995.)

5. EMPIRIJSKI IZRAZI ZA KRITIČNO NAPREZANJE

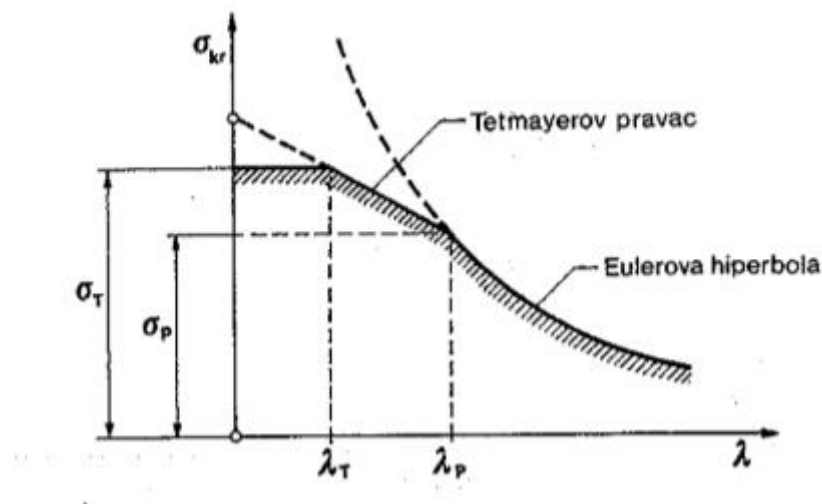
Paralelno s teorijskim istraživanjima problema stabilnosti tlačnih štapova provedena su i eksperimentalna istraživanja. Sva eksperimentalna istraživanja potvrdila su valjanost Eulerova izraza za kritično naprezanje pri izvijanju u elastičnom području, ali za izvijanje u plastičnom području Tetmayer, Jasinski, Rankin, Engesser, Osterifeld, Johnson, Karman, Gordan i drugi, za kritično naprezanje predložili su empirijske izraze koji se zasnivaju na rezultatima eksperimentalnih istraživanja. Tetmayer i Jasinski predložili su linearnu ovisnost između kritičnog naprezanja i vitkosti štapa u plastičnom području:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda, \quad (61)$$

$\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_P$, gdje su:

a i b – koeficijenti koji ovise o svojstvima materijala, a određuju se eksperimentalno.

Za građevni čelik je $a = 310 \text{ MPa}$, $b = 1.14 \text{ MPa}$. Funkcionalna ovisnost prikazana je Totmayerovim pravcem na slijedećem dijagramu:



Slika 18. Tetmayerov pravac, (Šimić, 1995.)

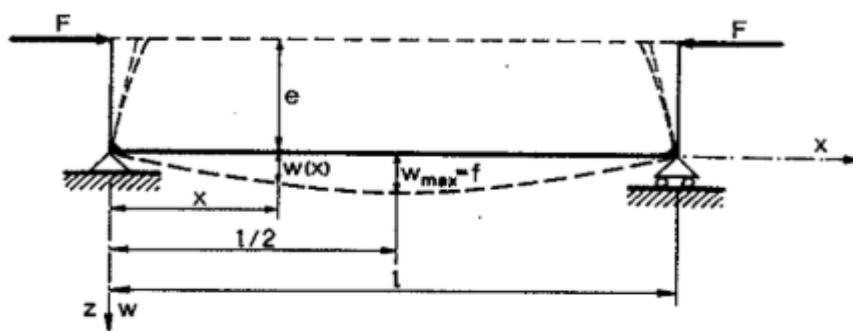
Pri vitkosti λ_P kritično naprezanje odgovara granici proporcionalnosti σ_P , a pri vitkosti λ_T kritično naprezanje dostiže granicu tečenja σ_T kod elastoplastičnih materijala, odnosno granicu čvrstoće σ_M kod krhkih materijala.

Dijagram $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ sastoji se od tri dijela: horizontalnog pravca za $0 < \lambda < \lambda_T$ Tetmayerova pravca za $\lambda_T < \lambda < \lambda_p$ i Eulerove hiperbole za $\lambda > \lambda_p$. S tim u svezi razlikujemo:

- štapove male vitkosti $0 < \lambda < \lambda_T$,
- štapove srednje vitkosti $\lambda_T < \lambda < \lambda_p$,
- štapove velike vitkosti $\lambda > \lambda_p$.

Za štapove male vitkosti kao kritično naprezanje usvaja se naprezanje σ_T na granici tečenja (gnječnja) pa se proračunavaju samo na tlačnu čvrstoću. (Šimić, 1995.)

6. EKSCENTRIČNO OPTEREĆENJE VITKIH ŠTAPOVA



Slika 19. Štap ekscentrično opterećen dvjema tlačnim silama F , (Šimić, 1995.)

Štap je ekscentrično opterećen dvjema tlačnim silama F i pretpostavit ćemo da te sile uzrokuju savijanje štapa u jednoj od glavnih ravnina tromosti. U proizvoljnom presjeku x štapa javlja se moment savijanja:

$$M = F(e + w). \quad (62)$$

Ako u diferencijalnu jednadžbu elastične linije štapa:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F}{EI_y}w = -\frac{F}{EI_y}e \quad (63)$$

uvedemo oznaku:

$$a^2 = \frac{F}{EI_y} \quad (64)$$

dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + a^2w = -a^2e \quad (65)$$

čije opće rješenje glasi:

$$w = A \sin ax + B \cos ax - e. \quad (66)$$

Iz rubnih uvjeta: $w(0) = w(l) = 0$ dobivamo:

$$B = e, A = e \cdot \operatorname{tg} \frac{al}{2} \quad (67)$$

pa je:

$$w = e \left[\operatorname{tg} \frac{al}{2} \cdot \sin ax + \cos ax - 1 \right]. \quad (68)$$

Maksimalni progib u sredini raspona ($x = \frac{1}{2}$) iznosi:

$$f = e \left(\frac{1}{\cos \frac{al}{2}} - 1 \right), \quad (69)$$

Uzimajući u obzir izraz: $a^2 = \frac{F}{EI_y}$ možemo pisati:

$$f = e \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}} \right)} - 1 \right], \quad (70)$$

$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$ – Eulerova kritična sila.

Za $F = 0, f = 0$, za $F = F_{kr} f = \infty$ Kad se veličina tlačne sile približava vrijednosti Eulerove kritične sile F_{kr} , progib f raste vrlo brzo.

Maksimalno naprezanje u štapu iznosi:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_y}. \quad (71)$$

Ako je:

$$M_{max} = F(f + e) = F \frac{e}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}} \right)} \quad (72)$$

dobit ćemo:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{A}{W_y} \cdot \frac{e}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}} \right)} \right]. \quad (73)$$

Ako $\sigma_{max} = \sigma_T$ i granično opterećenje $F = F_T$ uvrstimo u prethodni izraz dobit ćemo:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} \left[1 + \frac{A}{W_y} \cdot \frac{e}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F_T}{F_{kr}}} \right)} \right]. \quad (74)$$

Ako se zada σ_T, e, E i dimenzije štapa, prethodnu jednadžbu može se riješiti po F_T metodom postupnog približavanja.

Dopušteno opterećenje je:

$$F_{dop} = \frac{F_T}{k}. \quad (\text{Šimić, 1995.}) \quad (75)$$

7. EKSPERIMENTALNO ISPITIVANE ŠIPKI NA IZVIJANJE

7.1 Izgled ispitnog uređaja



Slika 20. Testno postolje WP 120

Ispitni uređaj uglavnom se sastoji od osnovnog okvira, vodilica i prečke za opterećenje. Osnovni okvir sadrži donji nosač uzorka štapa, koji se sastoji od uređaja za mjerenje sile i utore koji mogu osigurati različite načine oslanjanja štapa.

Visina prečke za opterećivanje može se podesiti duž vodilica i može se učvrstiti u fiksnom položaju. To omogućava ispitivanje štapova različitih duljina.

Prečka za opterećenje ima vreteno za opterećenje za stvaranje ispitne sile. Zavrtnjem matice, ispitna sila nanosi se na uzorak štapa pomoću vođenih potisnih dijelova. Osno postavljanje između matice za opterećenje i potisnog dijela sprečava da se na uzorak šipke primijene torzijska naprezanja. Dostupna su dva različita potisna dijela za različite uvjete oslanjanja. Uređaj se može koristiti vertikalno i horizontalno. Uređaj je opremljen baznim postoljem na jednoj od vodilica za horizontalno postavljanje. Instrument za prikaz izmjerene sile može se okrenuti za 90 ° radi lakšeg očitavanja.

Ispitna sila mjeri se hidrauličkim uređajem za mjerenje sile. Ovdje ispitna sila stvara pritisak u prstenastom cilindru preko diferencijalnog klipa. Taj se tlak mjeri pomoću tlakomjera koji djeluje kao instrument prikazivanja. Mjerni put vrlo je mali zbog hidrauličkog prijenosa (max. 0,3 mm).

Za donji nosač uzorka dostupne su dvije različite mogućnosti ugradnje:

- za zglobno postavljanje - Potisni komad s V zarezom za postavljanje na rub noža
- za upeto postavljanje - Potisni komad koji je čvrsto povezan s uzorkom šipke.

Potisni komad je umetnut u utor i čvrsto stegnuta vijkom.

Za gornji nosač uzorka dostupne su dvije različite mogućnosti ugradnje:

- za zglobno postavljanje – Dugi potisni komad s V zarezom za ugradnju na rub noža
- za upeto postavljanje - Kratki adapter i potisni komad čvrsto pričvršćen na uzorak šipke.

Potisni dijelovi su umetnuti u vodilicu na prečki za opterećivanje

Mjerač za mjerenje bočne deformacije uzorka pričvršćen je na vodeći stupa.

7.2 Ispitivanja provedena na uređaju

7.2.1 Uvodno ispitivanje

Šipka koja je na oba kraja zašiljena postavlja se u utore V oblika. Na taj način se postiže slobodno oslanjanje na oba kraja. Postupno se izlaže aksijalnoj tlačnoj ili i iznad određenog

opterećenja bočno će se izviti. U ovom slučaju deformaciju izvijanjem mjerimo na sredini šipke i bilježio u tablici zajedno sa odgovarajućom silom. Pomoću tih podataka izrađujemo graf sila/deformacija. Rezultate testa uspoređujemo sa vrijednostima koje dobivamo pomoću teorije izvijanja.

Uzorak šipke izrađen je od ravnog čelika poprečnog presjeka 2mm * 4mm duljine 500mm. Ima zašiljena oba kraja koji sjedaju u V utore na ispitnom uređaju tako da za stvaranje idealnog slobodnog oslanjanja.

Potrebno je izračunati očekivanu silu izvijanja prije nego li se test provede. Sila izvijanja izračunava se prema Eulerovoj formuli:

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_k^2}$$

Modul elastičnosti čelika je 210 000N/mm. Aksijalni moment tromosti I_y se izračunava za pravokutni poprečni presjek prema formuli:

$$I_y = \frac{b * h^3}{12} = \frac{20 * 4^3}{12} = 106.6mm^4$$

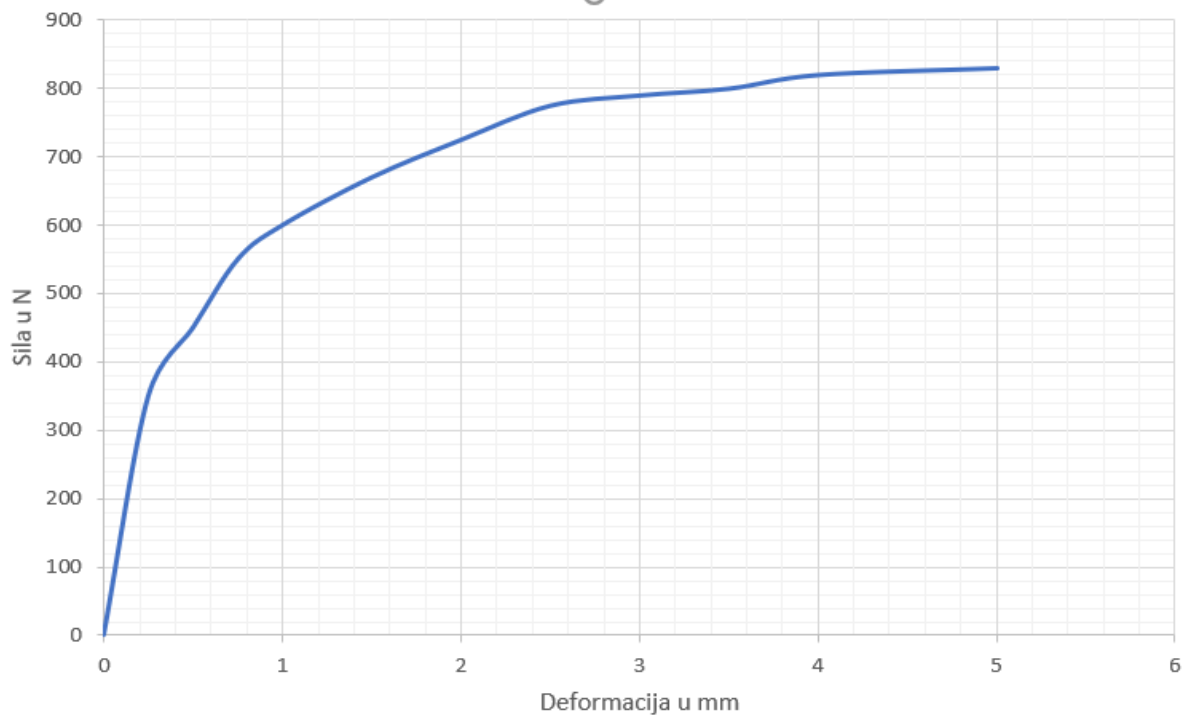
Duljina šipke 500mm uzima se kao duljina izvijanja l_k za slučaj slobodno oslonjene šipke.

U nastavku je dan rezultat kritične sile izvijanja.

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_k^2} = \frac{\pi^2 * 210000 * 106.6}{500^2} = 883N$$

Tablica 1. Odnosa deformacije i sile za uvodno ispitivanje

Uzorak šipke: čelik												
Duljina: 500mm												
Geometrijski moment tromosti 106.6mm ⁴												
Modul elastičnosti: 210000 N/mm ²												
Deformacija u mm	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0
Sila u N	0	350	450	550	600	670	725	765	800	830	850	850



Slika 22. Dijagram odnosa sile i deformacije

Kritična sila može biti jasno prepoznata . Nema povećanja sile a deformacija raste. Kritično opterećenje je jednako maksimalnoj sili $F_k=850$ N. usporedba s teoretskom vrijednosti od 883 N pokazuje dobru korelaciju što se tiče preciznosti mjerenja (devijacija samo 3.7%).

7.2.2 Test utjecaja uvjeta oslanjanja

Ovaj test pokazuje razlike pri izvijanju 3 jednaka uzorka štapa duljine 650mm koja su oslonjeni na 3 različita načina. Prvi uzorak je slobodno oslonjen, drugi je upet na oba kraja a treći je na jednom kraju upet a na drugom slobodno oslonjen. ,



Slika 23. Uzorci za ispitivanje različitih uvjeta oslanjanja

Slobodno oslonjen uzorak (slučaj 1)

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

Uzorak upet na oba kraja (slučaj 2)

$$F_{krit} = \frac{4 \pi^2 EI_y}{l^2}$$

Uzorak na jednom kraju upet a na drugom slobodno oslonjen (slučaj 3)

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{(0.7 l)^2}$$

Modul elastičnosti čelika je 210 000N/mm. Aksijalni moment tromosti I_y se izračunava za pravokutni poprečni presjek prema formuli:

$$I_y = \frac{b * h^3}{12} = \frac{20 * 4^3}{12} = 106.6mm^4$$

U nastavku su dani teoretski rezultati kritične sile izvijanja

Slobodno oslonjen uzorak (slučaj 1)

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \frac{\pi^2 * 210000 * 106.6}{650^2} = 523N$$

Uzorak upet na oba kraja (slučaj 2)

$$F_{krit} = \frac{4 \pi^2 EI_y}{l^2} = \frac{4 * \pi^2 * 210000 * 106.6}{650^2} = 2091N$$

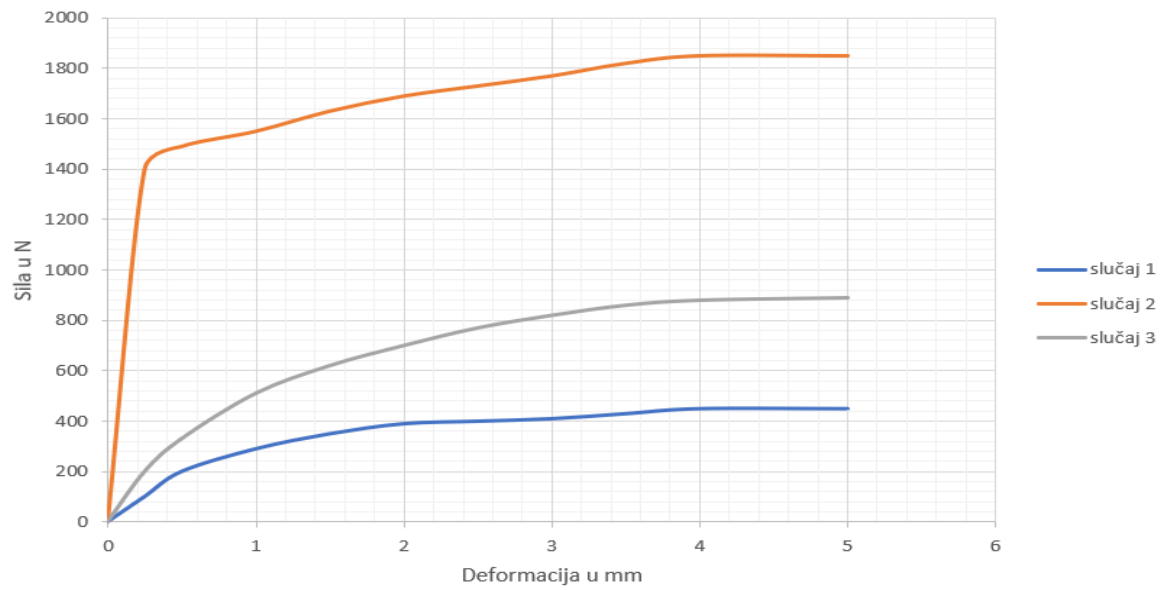
Uzorak na jednom kraju upet a na drugom slobodno oslonjen (slučaj 3)

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{(0.7 l)^2} = \frac{\pi^2 * 210000 * 106.6}{(0.7 * 650)^2} = 1067N$$

Sile izvijanja moraju biti u odnosu 1 : 4 : 2 .

Tablica 1. Odnosa deformacije i sile za test utjecaja oslanjanja

Uzorak šipke: čelik											
Duljina: 650mm											
Geometrijski moment tromosti 106.6mm ⁴											
Modul elastičnosti: 210000 N/mm ²											
Deformacija u mm	0	0.25	0.5	1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0
Sila u N (slučaj 1)	0	100	200	290	350	390	400	410	430	450	450
Sila u N (slučaj 2)	0	1400	1490	1550	1630	1690	1730	1770	1820	1850	1850
Sila u N (slučaj 2)	0	200	330	510	620	700	770	820	860	880	890



Slika 24. Dijagram odnosa sile i deformacije na tri različito oslonjena uzorka

Kritične sile izvijanja su u odnosu 1 : 4.11 : 1.98. Maksimalna relativna devijacija od teoretskog omjera je 3%.

8. ZAKLJUČAK

U ovom radu obrađen je problem izvijanja ravnih grednih nosača centričnom i ekscentričnom tlačnom silom. Ključni zadatak kada se bavimo problemom izvijanja je određivanje kritične sile F_{kr} pri kojoj vitki element gubi stabilnost te mu deformacija raste bez povećanja naprezanja. Veličina kritične sile ovisi o nekoliko faktor kao što su: uvjeti oslanjanja elemente, o materijalu od kojeg je element izrađen, dimenzijama i geometriji poprečnog presjeka te o duljini elementa. Također je jasno vidljivo da će se ekscentrično opterećeni element izviti pod djelovanjem manje kritične sile zbog doprinosa momenta savijanja.

Kada usporedimo rezultate kritične sile za slučaj centričnog opterećenja dobivene analitičkim putem i one dobivene laboratorijskim ispitivanjem vidimo dovoljno dobru podudarnost tih dviju vrijednosti stoga možemo zaključiti da se analitički izrazi mogu slobodno koristiti pri proračunu stvarnih konstrukcijskih elemenata.

Kao građevinari moramo naročito paziti pri projektiranju vitkih konstrukcijskih elemenata jer su podložni izvijanju. Izvijanje takvih elemenata može prouzročiti slom elementa i havariju cijele konstrukcije te izazvati veliku materijalnu štetu i ljudske žrtve.

9. LITERATURA

Knjige:

Šimić, V., *Otpornost materijala 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Androić, B., Dujmović, D., Ivica Džeba, I. ; *Metalne konstrukcije I*, Institut građevinarstva Hrvatske, Zagreb 1994.

Internetski izvori:

Ravnoteža (mehanika) [https://hr.wikipedia.org/wiki/Ravnote%C5%BEa_\(mehanika\)](https://hr.wikipedia.org/wiki/Ravnote%C5%BEa_(mehanika)), pristup 26.08.2019.

Statička stabilnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Stabilnost>, pristup 04.09.2019.

Izvijanje, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Izvijanje>, pristup 04.09.2019.

Elastičnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Elasti%C4%8Dnost>, pristup 04.09.2019.

Plastičnost, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Plastičnost>, pristup 05.09.2019.

10. POPIS SLIKA

Slika 1. Vrste ravnoteže, (Šimić, 1995.).....	2
Slika 2. Ekscentrični unos sile, (Amdroić i dr., 1994.).....	6
Slika 3. Lokalna početna deformacija, (Amdroić i dr., 1994.).....	6
Slika 4. Početni deformirani položaj, (Amdroić i dr., 1994.).....	7
Slika 5. Slučajevi pridržavanja: 1) zglobno učvršćen na oba kraja, 2) obostrano upet, 3) na jednoj strani upet, a na drugoj zglobno oslonjen, 4) konzola (Izvijanje, https://hr.wikipedia.org/wiki/Izvijanje , pristup 26.08.2019.).....	9
Slika 6. Izvijanje štapa zglobno učvršćenog u oba kraja, (Šimić, 1995.).....	10
Slika 7. Vrijednosti kritične sile i odgovarajući oblici elastične linije štapa za $n = 1, 2$ i 3 , (Šimić, 1995.).....	12
Slika 8. Izvijanje štapa na jednom kraju upetog, a na drugom slobodan, (Šimić, 1995.) ...	13
Slika 9. Izvijanje štapa na jednom kraju upetog, a na drugome slobodno oslonjen, (Šimić, 1995.).....	15
Slika 10. Izvijanje štapa upetog na oba kraja, (Šimić, 1995.).....	17
Slika 11. Duljine izvijanja štapova ovisno o oslanjanju, (Šimić, 1995.).....	20
Slika 13. $\sigma - \varepsilon$ dijagram, okoliš točke C, (Šimić, 1995.).....	24
Slika 14. Izvijeni, slobodno oslonjeni štap i prikaz stanja naprezanja u presjeku x, (Šimić, 1995.).....	25
Slika 15. Dijagram $\sigma - \varepsilon$ s linijom rasterećenja CC1 paralelnom s pravcem OP, (Šimić, 1995.).....	27
Slika 16. Izvijeni, slobodno oslonjeni štap i prikaz raspodjele naprezanja i deformacija, (Šimić, 1995.).....	28
Slika 17. Dijagram kritičnih naprezanja $\sigma_{kr} = f\lambda$ za čelik mehaničkih svojstava.....	30
$E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_p = 200$ MPa, $\sigma_r = 240$ MPa, (Šimić, 1995.).....	31
Slika 18. Tetmayerov pravac, (Šimić, 1995.).....	32
Slika 19. Štap ekscentrično opterećen dvjema tlačnim silama F, (Šimić, 1995.).....	34
Slika 20. Testno postolje WP 120.....	36
Slika 22. Dijagram odnosa sile i deformacije.....	39
Slika 23. Uzorci za ispitivanje različitih uvjeta oslanjanja.....	40
Slika 24. Dijagram odnosa sile i deformacije na tri različito oslonjena uzorka.....	42