Primjena statističkih modela i teorije vjerojatnosti u građevinarstvu

Kralj, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:157:639878

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij Građevinarstva
Matematička analiza II

Josip Kralj
JMBAG:
0114029076

Primjena statističkih modela i teorije vjerojatnosti u građevinarstvu

Završni rad

Rijeka, rujan 2020.

IZJAVA

Završni rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Josip Kralj

U Rijeci, rujan 2020.

SAŽETAK

Manifestacija nepredviđenih situacija te različita odstupanja od očekivanih vrijednosti najčešće je produkt nepotpunosti baze podataka i same esencije prirodnih procesa odnosno fenomena. Teorija vjerojatnosti nam omogućava da predvidimo te slučajnosti, odnsno daje nam čvrstu podlogu za donošenje odluka istovremeno minimalizirajući rizike nepoželjnih ishoda, također vjerojatnost nam omogućuje interpretaciju statističkih interferencija. U građevinskoj struci spomunte polje matematike se primjenjuje u svim disciplinama. Usprkos činjenici da se teorija vjerojatnosti ne koristi za rješavanje svih problema inženjerske struke, predstavlja bitan faktor u procjeni rizika, analiza pouzdanosti, obrade podataka i određivanja isplativosti. Osvrt na primjenu je izveden kroz upotrebu normalne distribucije kod određivanja čvrstoće betona, prevdiđanje maksimalnih protoka slivova u hidrologiji i modela zatajenja konstrukcije odnosno određivanje sigurnosnog faktora. Ostatak rada posvećen je osnovnim modelima i aksiomima vjerojatnosti i statistike.

SADRŽAJ

1. UVOD

Idealizirane pretpostavke i pojednostavljenja prirodnih procesa ignoriraju odstupanja i prihvaćaju determinističke pristupe. Međutim, takve pretpostavke često nisu dovoljne u većini inženjerskih analiza i problema. Do odstupanja i nesigrunosti najčešće dolazi iz dva razloga: nepotpunosti baze podataka i svojstva slučajnosti prirodnih procesa te fenomena. Bez obzira na slučajnost, moramo donositi odluke nastojeći minimalizirati rizik nepoželjnih ishoda. Teorija vjerojatnosti nam pruža temelj pri donošenju odluka i rješenja u navedenim okolnostima, također primjena različitih koncepta teorije vjerojatnosti omogućuje nam interpretaciju statističkih interferencija. Na temelju statističkih metoda i elemenata vjerojatnosti vučemo zaključke o budućim ishodima nekog elementarnog prostora definiranog slučajnim događajima (pokusima). Cilj ovog rada je obuhvatiti samo neke od važnih koncepta ovih međusobno komplementarnih matematičkih disciplina i predstaviti njihovu primjenu u polju graditeljstva. Odabrana tematika je preopširna i prekompleksna da bi se sažela u ovakvom radu, stoga će autor nastojati predočiti neke od mnogobrojnih primjena, sukladno dosadašnjoj količini stečenog znanja koje ograničava njegov objektivan pristup. Rad započinje poviješću razvitka navedenih polja matematike, sljedeće poglavlje posvećeno je osnovnim aksiomima i svojstvima, te su navedene neke od metoda koje će se koristiti u poglavljima gdje se objašnjava primjena istih poput distribucije vjerojatnosti pri definiranju čvrstoće betona, analize podataka hidrološki izučenih profila i vjerojatnosti zatajenja konstrukcija.

2. POVIJEST RAZVITKA VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

Nasumičnost i vjerojatnost su relativno novi koncepti u matematici. Uzrok tome vjerojatno leži u praznovjernosti naših predaka gdje se sve prepisivalo višim entitetima popt boga. Dokaz su brojni matematičari i znanstvenici koji su ubijani i proganjani zbog svojih tvrdnji. Sredinom sedamnaestog stoljeća Blaise Pascal i Pierre de Femant pružaju prve zabilježene uvide u teoriju vjerojatnosti. Tijekom 18. stoljeća Jacob Bernoulli i Abraham De Moivre, postavljaju matematičku podlogu vjerojatnosti, demonstrirajući kako izračunati različiti spektar kompleksnih problema. Bernoulli dokazuje verziju fundamentalnih zakona velikih brojeva koja tvrdi da kod velikog broja ponavljanja, prosječan ishod će biti najvjerojatnije jako blizu očekivane vrijednosti. Veliki pridonos ostvaruje i Gauss u 19. stoljeću, razvivši teoriju pogrešaka temeljnoj na pretpostavki normalne distribucije. 1812. godine Laplace izdaje svoju "Theorie analytique des probabilites" , konsolidirajući matematičku disciplinu s metodama poput testiranja hipoteza, definiranjem momenta generirajuće funkcije itd.. Važno je spomenuti L.Boltzmann-a i J.W. Gibbs-a koji su zadužni za otkrivanje statističke mehanike. Vjerojatnost i statistika postali su usko povezani zbog rada na testiranju hipoteza R.A. Fisher-a i J. Neyman-a koji su omogućili današnju široku primjenu u područjima biologije, psihologije, ekonomije i ostalih znanstvenih disciplina.

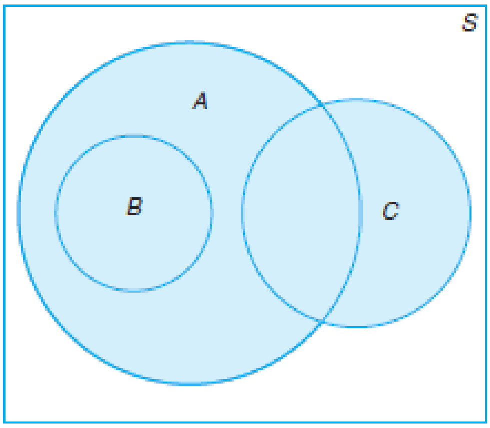
1933. godine Andrey Kolmogorov (slika 1), izdaje knjigu pod nazivom: " Temelji teorije vjerojatnosti". Vodeći se činjenicom da teorija vjerojatnosti kao matematička disciplina može i mora biti izvedena iz aksioma na isti način kao geometrija i algebra, uspijeva definirati fundamentalne aksiomatske sustave koristeći se teorijom mjere.

Slika 1, Andrey Nikolayevich Kolmogorov
(www.enacademic.com)

3. UVOD U VJEROJATNOST I STATISTIKU

3.1 Slučajan eksperiment i prostor elementarnih događaja

Eksperiment je svaka realizacija definiranog skupa uvjeta. Pokuse dijelimo u dvije osnovne skupine: determinističke i slučajne pokuse. Pokuse čiji je ishod jednoznačno određen uvjetima u kojima se pokus odvija nazivamo determinističkima uzevši na primjer bacanje simetričnog novčića. Pokus čiji ishod nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se odvija nazivamo slučajnim [1]. Kada se slučajni pokus dovede do potrebnog broja ponavljanja, tada skup ishoda podvrgavamo određenim zakonitostima. Teorija vjerojatnosti proučava te zakonitosti odnosno njihove matematičke modele. Zadaća vjerojatnosti je formiranje i proučavanje matematičkog modela slučajnog pokusa. Kada proučavamo pojedini slučajni pokus, unaprijed se dogovaramo skup uvjeta i moguće ishode tog pokusa. Tada su ti dogovorno ustanovljeni mogući ishodi jedini objekti koji služe strukciji matematičkog modela tog slučajnog pokusa [1]. Prostor elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa je skup S sa svojstvom da svakom ishodu pokusa odgovara točno jedan element tog skupa S i obrnuto. Elemente prostora elementarnih događaja nazivamo elementarnim događajima, dok podskupove skupa S nazivamo događajima oznake A, B, C (dijagram 1). Događaj A dogodit će se u danom izvođenju pokusa ako i samo ako ishod pokusa reprezentira jedan od elemenata skupa A.



Dijagram 1: Prostor S elemntarnih događaja A, B, C [3]

3.2 Relativna frekvencija

Rezultat slučajnog pokusa se ne može predvidjeti sa sigurnošću, sukladno tome, ponavljanja rezultiraju različitim ishodima. Kad ponavljamo slučajni pokus N puta i jednu od njegovih realizacija A (mogući rezultat) za taj proces vežemo niz pojmova. Frekvencija događaja A, označava se s n_A, je broj pojavljivanja realizacija A u n ponavljanja odgovarajućeg slučajnog pokusa.

Relativna frekvencija događaja A je izražena kao omjer kvocijenta frekvencije i broja ponavljanja slučajnog pokusa (N) te vrijedi izraz (1)

$$0 \leq \frac{n_A}{N} \leq 1 \tag{1}$$

Ako slučajni pokus zadovoljava uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada se vjerojatnost a priori proizvoljnog događaja A definira kao realan broj P(A) (2)

$$P(A) = \frac{n_a}{N} \tag{2}$$

3..3 Aksiomi vjerojatnosti

Vjerojatnost događaja A u elementarnom prostoru S zadovoljava određene uvjete odnosno aksiome vjerojatnosti. Postoje tri aksioma.

Prvi aksiom (3): Vjerojatnost je realan broj u intervalu od 0 do 1, uključujući 0 i 1

$$0 < P(A) < 1 \tag{3}$$

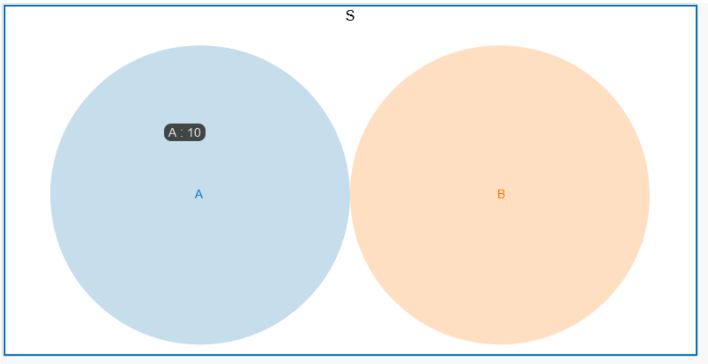
Drugi aksiom (4): Elementarnom prostoru S kao cjelini dodjeljuje se vjerojatnost 1. Zato što S sadrži sve moguće ishode i jedan se svakako mora dogoditi.

$$P(S) = 1 \tag{4}$$

Treći aksiom (5): Ako su događaji A i B međusobno disjunktni (dijagram 2) u elementarnom prostoru S, tada vrijedi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

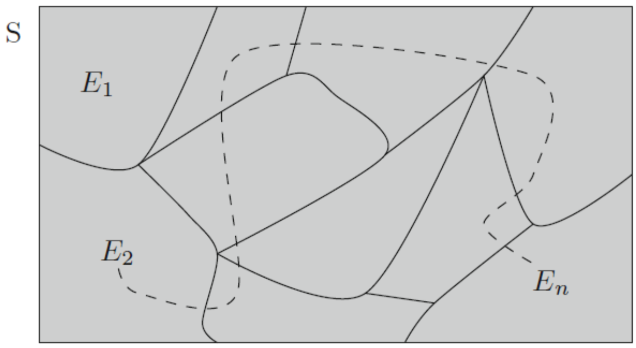
Izraz nam govori kako funkcije vjerojatnosti zadovoljavaju uvjet aditivnosti. Vjerojatnost unije je suma vjerojatnosti događaja A i B kada ta dva događaju nemaju istih ishoda.



Dijagram 2: Disjunktni skupovi A i B u elementarnom prostoru S

3.4 Međusobno disjunktni i kolektivno sveobuhvatni događaji

Kada je cijeli elementarni prostor podijeljen na N različitih događaja na takav način da presjek bilo koja dva daje nul set i da unija svih tih događaja formira elementarni prostor tada su događaji međusobno disjunktni i kolektivno sveobuhvatni (dijagram 3).



Dijagram 3: Međusobno disjunktni i kolektivno sveobuhvatni događaji [2]

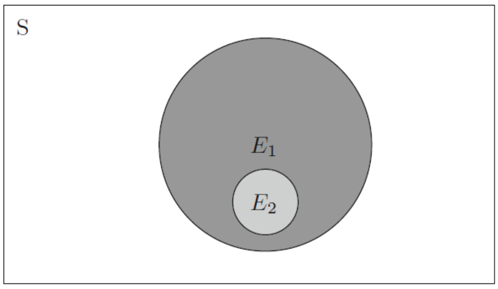
3.5 Elementarna svojstva vjerojatnosti

Svojstvo 1: Ako su $E_1, E_2, \ldots, E_n$ međusobno disjunktni događaji, onda je vjerojatnost unije svih tih događaja jednaka zbroju vjerojatnosti individualnog događaja (6). Također, ako je događaj E unija elemenata $E_1, E_2, \ldots, E_n$ vrijedi svojstvo konačne adicije (6).

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) \tag{6}$$

Svojstvo 2: Ako događaj E_2 pripada drugom događaju E_1, tada će vjerojatnost P (E_2) biti manja ili jednaka P (E_1). Ako vrijedi da je E_2 element E_1, vjerojatnost razlike između ta dva događaja, P ($E_1 - E_2$), bit će jednaka razlici P (E_1) i P (E_2) (7). Elementarni prostor je vizualiziran Vennovim dijagramom (dijagram 4)

$$P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_2) \tag{7}$$



Dijagram 3:Odnos skupova E_1, E_2 u S [3]

Svojstvo 3: Ako je događaj E_1 komplement drugom događaju E_2, tada se vjerojatnost E_1 može odrediti koristeći **prvi aksiom**. Ako je $E_1 = E_2^c$ tada vrijedi (8).

$$P(E_1) = 1 - P(E_2) \tag{8}$$

Svojstvo 4: Za svaka dva događaja, E_1 i E_2 koja pripadaju elementarnom prostoru S, vjerojatnost događaja P (E_1) se može odrediti sumom vjerojatnosti presjeka E_1 i E_2 i vjerojatnosti presjeka skupa E_1 s komplementom E_2^c (9).

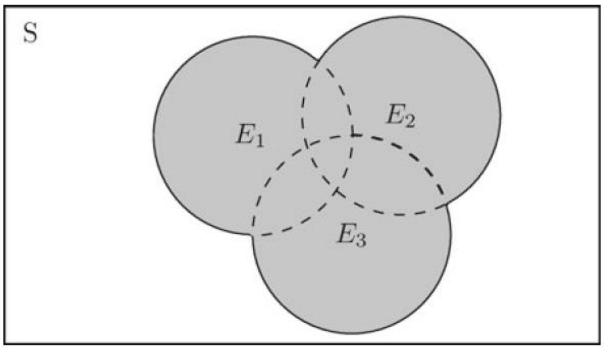
$$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2^c) \tag{9}$$

Svojstvo 5: Ako su E_1 i E_2 elementi prostora S, onda se vjerojatnost unije E_1 i E_2 određuje oduzimanjem vjerojatnosti presjeka skupova E_1 i E_2 od sume njihovih individualnih vjerojatnosti (10).

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{10}$$

Ovo svojstvo, također vrijedi i za više događaja. Dan je izraz za 3 događaja (11). Vizualno prikazani (dijagram 5).

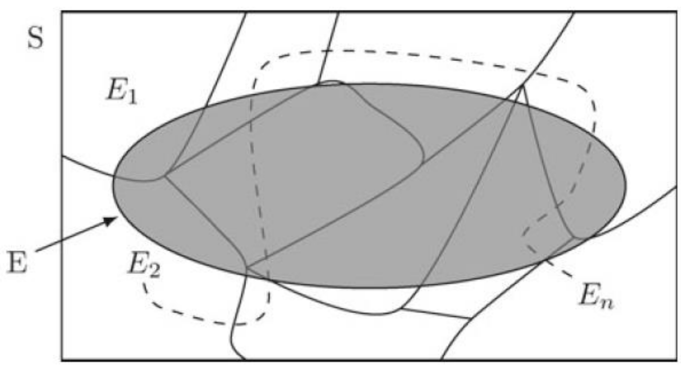
$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_3 \cap E_1) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \tag{11}$$



Dijagram 5: Vennnov dijagram svojstva 5 [3]

Svojstvo 6: Za međusobno disjunktne i kolektivno sveobuhvatne događaje $E_1, E_2, \ldots, E_n$ u elementarnom prostoru S, vjerojatnost nekog drugog događaja E je jednaka sumi vjerojatnosti presjeka između Ei $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (12). Vizualno prikazani (dijagram 6).

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + \ldots + P(E \cap E_n) \tag{12}$$



Dijagram 6: Vennnov dijagram svojstva 6 [3]

3.6 Uvjetna vjerojatnost

Vjerojatnost da se događaj B dogodi ako se zna da se neki događaj A dogodio zovemo uvjetnom vjerojatnošću P (A|B) i jednaka je omjeru vjerojatnosti presjeka A i B te vjerojatnosti događaja B uz uvjet da je P(B) različito od nule. Izraz (13)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{13}$$

3.6.1 Nezavisnost događaja

Kada vrijedi izraz (14), kaže se da su događaji A i B nezavisni

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{ili} \quad P(A|B) = P(A) \tag{14}$$

3.6.2 Pravilo množenja

Ako se u slučajnom pokusu događaji A i B mogu oboje dogoditi vjerojatnost događaja definirana je kao vjerojatnost presjeka skupova A i B odnosno P (A∩B) i jednaka je (15).

Ako su događaji A i B nezavisni i oboje se mogu dogoditi onda vrijedi (16).

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B) \tag{15}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{16}$$

3.7 Potpuna vjerojatnost i Bayesovo pravilo

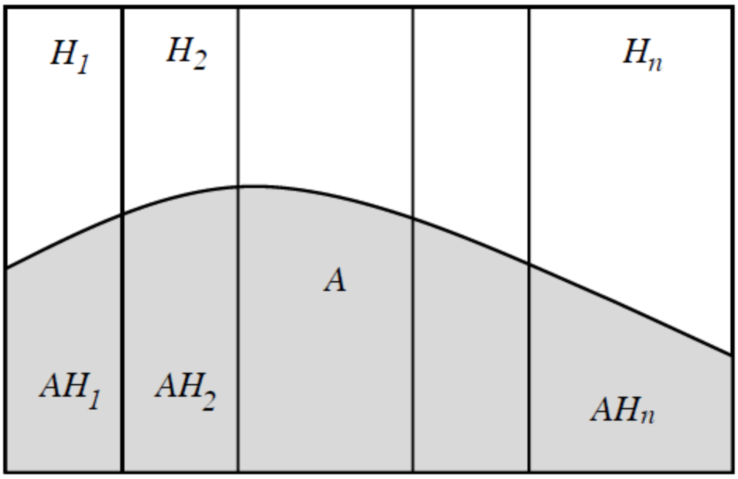
3.7.1 Formula potpune vjerojatnosti

Pri izračunu vjerojatnosti ponekad dijelimo sve moguće ishode u različite klase. Pretpostavimo da elementarni prostor S možemo rastaviti na n međusobno disjunktnih događaja, pri čemu su događaji H_i, H_j disjunktni za $i \neq j$ i vrijedi $P(H_i) > 0$ za svaki i.

Ovakav rastav nazivamo particijom elementarnog prostora gdje $H_1, \ldots, H_n$ odnosno hipoteze, čine potpun sustav događaja [4] (dijagram 7).

Skup S rastavljen je na međusobno disjunktne skupe. Time je i događaj A rastavljen na međusobno disjunktne događaje (17). Potpuna vjerojatnost izražena je formulom (18).

$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup \cdots \cup AH_n \tag{17}$$



Dijagram 7: Particije elementarnog prostora S [4]

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) \tag{18}$$

3.7.2 Bayesovo pravilo

Prilikom računanja aposteriornih (naknadnih) vjerojatnosti $P(H_1 \mid A)$ pojedinih hipoteza koristimo Bayesovu formulu (19).

Prije nego što pokus počne svaka hipoteza ima pripadajuću vjerojatnost realizacije $P(H_i)$. Ako pretpostavimo, nakon što se pokus dogodi da ne znamo koji se elementarni događaj ostvario, već umjesto toga znamo da se ostvario događaj A.

U tom slučaju ne znam točno koja je hipoteza nastupila, ali informacija o realizaciji događaja A mijenja apriorne vjerojatnosti pojedinih hipoteza.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)} \tag{19}$$

3.8 Slučajne varijable

Slučajna varijabla je funkcija koja povezuje realan broj sa svakim elementom u elementarnom prostoru S. Dijele se na: diskretne i kontinuirane (neprekinute). Podjela je uvjetovana matematičkim aparatom koji se koristi za njihovo proučavanje. Uz diskretne slučajne varijable vežemo prirodne nizove, matrice i redove realnih brojeva, dok se za kontinuirane slučajne varijable matematički aparat proučavanja zasniva na diferencijalnom i integralnom računu.

3.8.1 Diskretne slučajne varijable

Diskretne slučajne varijable svakom elementarnom događaju pridružuju neku vrijednost iz prebrojivog podskupa $M = (x_1, x_2, \ldots)$ skupa prirodnih ili cijelih brojeva.

Sve vjerojatnosti slučajne varijable X predstavljene su formulom. Ta formula je funkcija vrijednosti x_n koja se označava s f (x), g (x) (20). Set uređenih parova (x, f (x)) (21) zove se distribucija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable X za svaki x.

$$\sum_{x} f(x) = 1 \tag{20}$$

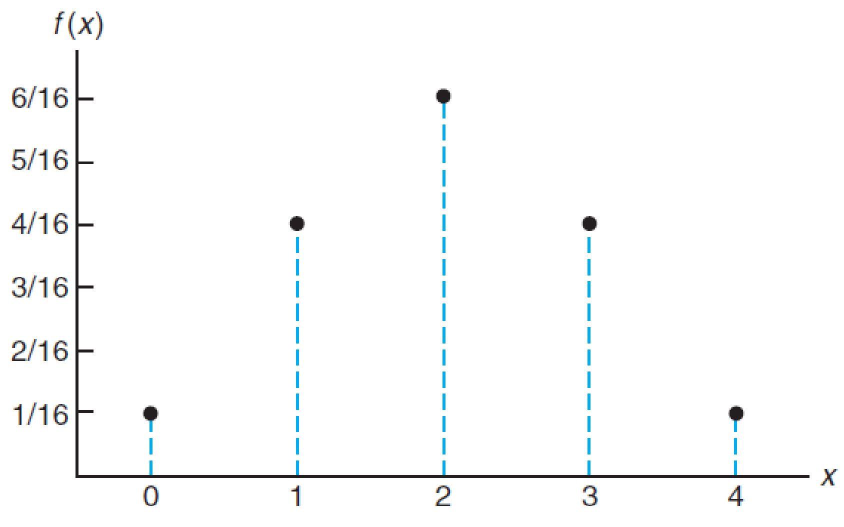
$$P(X = x) = f(x) \tag{21}$$

Postoji mnogo problema u kojima želimo izračunati vjerojatnost takvu da je vrijednost slučajne varijable X manja ili jednaka nekom realnom broju x.

Izrazom (22), definiramo F(x) kao kumulativnu funkciju distribucije slučajne varijable X.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t<x} f(t), \quad \text{za} \ -\infty < x < \infty$$

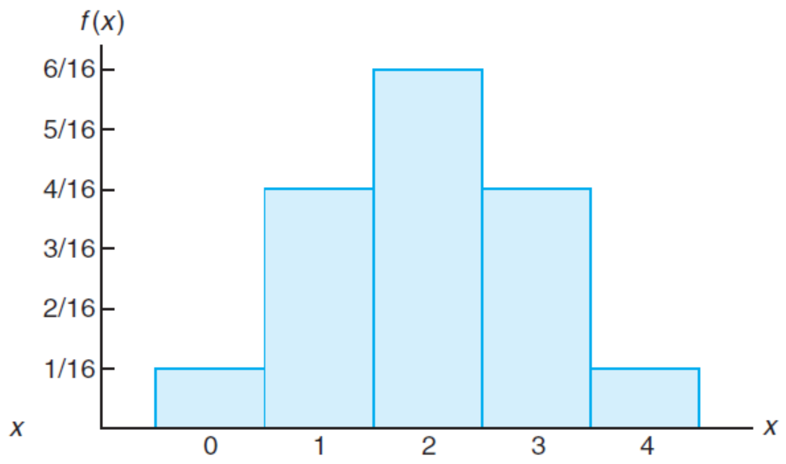
Distribucije vjerojatnosti najčešće se prikazuju u grafičkom obliku kako bi lakše prepoznali koje vrijednosti X-a će se najvjerojatnije dogoditi. Točke na dijagramu su uređeni parovi (x, f (x)) (dijagram 8).



Dijagram 8: prikaz distribucije vjerojatnosti [3]

Umjesto da koristimo točke, češće koristimo pravokutnike. Pravokutnici su konstruirani tako da su im baze, jednake širine, centrirane na svaku vrijednost x i visine koja odgovara vjerojatnosti danoj f (x).

Takav prikaz zovemo histogramom vjerojatnosti (dijagram 9). Uzevši u obzir da svaka baza ima svoju širinu, P (X = x) je jednaka površini pravokutnika.



Dijagram 9: Histogram vjerojatnosti [3]

3.8.2 Kontinuirane slučajne varijable

Skup vrijednosti kontinuiranih slučajnih varijabla je interval u skupu realnih brojeva gdje mogu poprimiti svaku vrijednost unutar tog intervala.

Mogućih vrijednosti ima beskonačno, stoga vjerojatnost realizacije svake od njih bit će jednaka nuli. Nizove brojeva zamjenjujemo realnom funkcijom, a umjesto suma se koristi integralni i diferencijalni račun.

Slučajna varijabla X je kontinuirana (neprekinuta) ako postoji nenegativna funkcija takva da vrijedi (22) :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{22}$$

Kada računamo vjerojatnost za različite intervale kontinuiranih slučajnih varijabli uzevši za primjer P (a <X< b) vrijedi (23):

$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b) \tag{23}$$

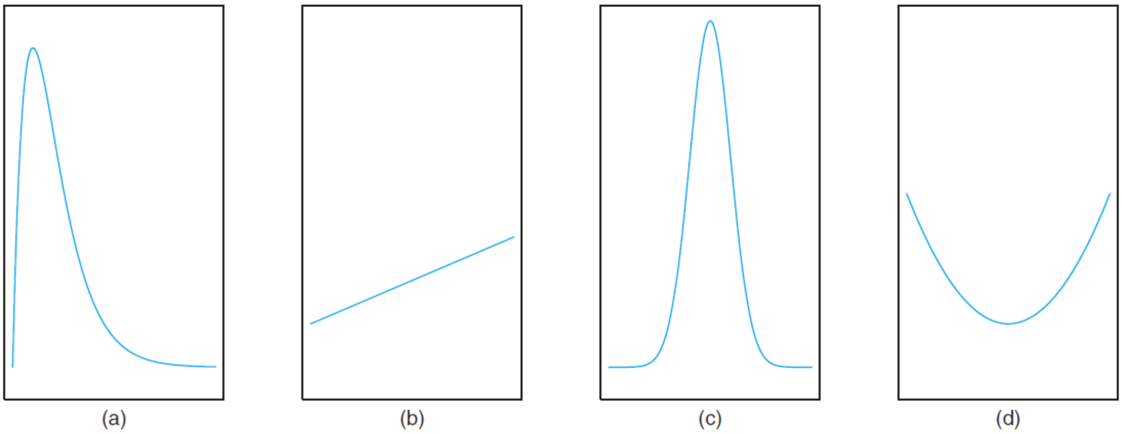
Iako se distribucija vjerojatnosti kontinuiranih varijabli ne može prikazati tablično, može se definirati formulom. Takva formula je funkcija f(x) vrijednosti kontinuirane slučajne varijable X.

Funkciju f (x) nazivamo gustoćom razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X, gdje u točkama neprekinutosti od f vrijedi (24) :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{24}$$

Funkcije gustoće razdiobe vjerojatnosti koje imaju praktičnu primjenu u analizi statističkih podataka najčešće su kontinuirane i njihovi grafovi mogu zauzeti različite forme (dijagram 10).

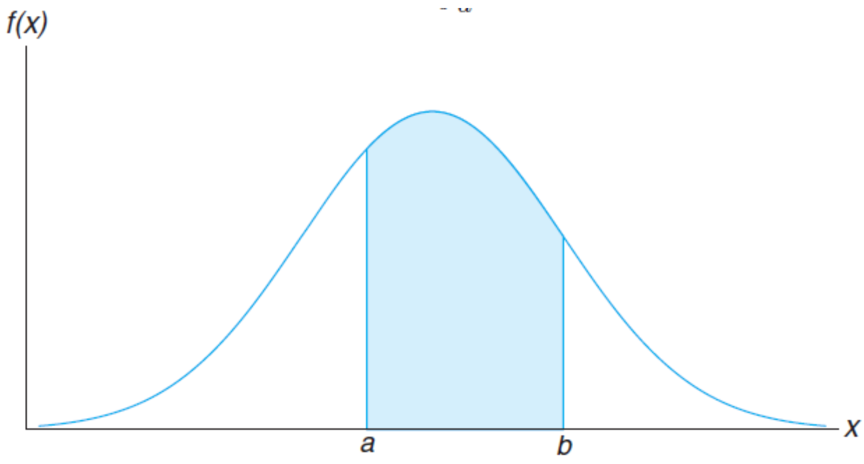
Funkcija gustoće mora se nalaziti kompletno iznad x- osi jer će se za prikaz vjerojatnosti koja je uvijek pozitivna koristiti površina.



Dijagram 10: Različite forme funkcije gustoće vjerojatnosti [3]

Dijagram 11 prikazuje vjerojatnost koju kontinuirana slučajna varijabla X pretpostavlja za vrijednost između granica a i b, odnosno osjenčano područje ispod funkcije gustoće između ordinata na x = a i x = b . Površina se određuje pomoću integralnog računa (25).

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \tag{25}$$



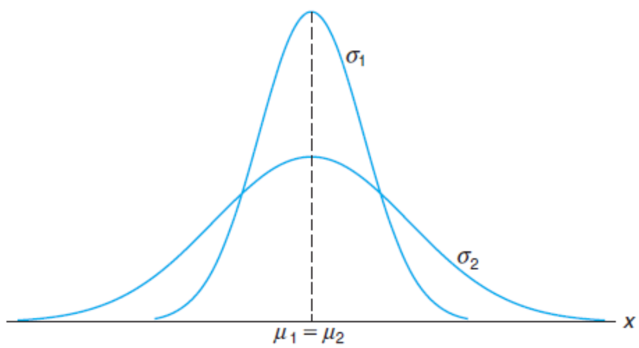
Dijagram 11: P (a < X < b) [3]

3.9 Normalna (Gaussova) distribucija

Najvažnija distribucija kontinuirane vjerojatnosti za polje statistike je normalna (Gaussova) distribucija. Normalna krivulja aproksimativno opisuje mnogo fenomena s kojima se susrećemo u prirodi, industriji i istraživanjima. Matematička formula za distribuciju normalne varijable ovisi o dva parametra: srednjoj vrijednosti μ i disperziji σ^2. Korijen disperzije je σ i naziva se standardnom devijacijom. Vrijednost gustoće X-a označavamo s $n(x; \mu, \sigma)$ (26), gdje je $e = 2.71828...$ i $\pi = 3.14159....$

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{26}$$

Dijagram 12 prikazuje 2 normalne krivulje s istom srednjom vrijednosti ($\mu_1 = \mu_2$), ali različitim vrijednostima standardne devijacije ($\sigma_1 < \sigma_2$).



Dijagram 12: normalne krivulje [3]

Primjećujemo da im centar leži u istoj točci, međutim krivulja s većom standardnom devijacijom rasprostire se nad širim područjem. Dakako, površina ispod svake krivulje uvijek je jednaka 1, stoga set s velikom varijabilnošću rezultirat će nižom i široj krivulji.

Točka na horizontalnoj osi gdje funkcija postiže svoj maksimum je tamo gdje je x = μ.

Krivulja je uvijek simetrična po svojoj vertikalnoj osi koja prolazi točkom x = μ.

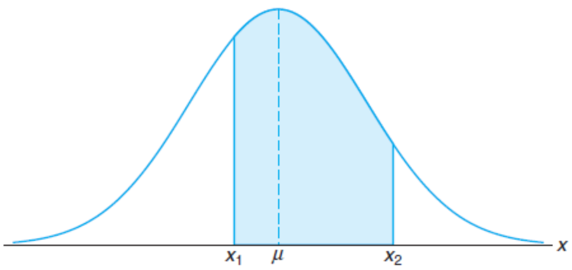
Krivulja ima točku infleksije je x = μ ± σ i konkavna je prema dolje ako vrijedi (27).

$$\mu - \sigma < X < \mu + \sigma \tag{27}$$

3.9.1 Površina ispod Gaussove krivulje

Vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost unutar intervala s granicama x_1 i x_2 jednaka je površini ispod krivulje n (x; μ, σ) omeđenoj s vertikalama iz točki x_1 i x_2 (28), što je prikazano na dijagramu 13 kao osjenčana površina.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx \tag{28}$$



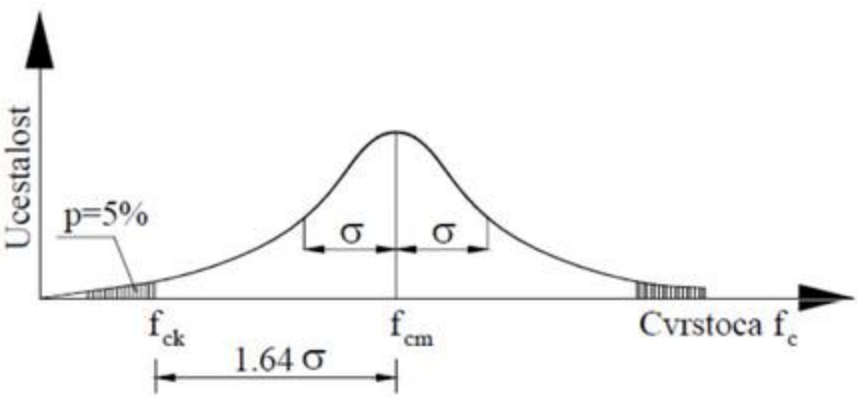
Dijagram 13: Vjerojatnost poprimanja vrijednosti [3]

6. ČVRSTOĆA BETONA

Zbog krivog projektiranja građevina od armiranog i prednapregnutog betona, postoji velik broj onih koje je potrebno potpuno ili djelomično sanirati. Kako bi izašli u susret s tim, provode se kontrole kvalitete koje osiguravaju kakvoću i preventivno štite od budućih pogrešaka. Uzevši beton kao najčešće korišten materijal za izgradnju provode se unutrašnje kontrole odnosno one koje provodi proizvođač betona i vanjske kontrole odnosno kontrole suglasnosti s uvjetima projekta koje provodi nezavisna institucija. Zbog stohastičke prirode svojstava betona, pri definiranju čvrstoće primjenjujemo račun metoda iz polja vjerojatnosti i statistike. Nekada se koristila deterministička metoda uzevši za primjer određivanje tlačne čvrstoće iz srednje vrijednosti nakon 3 rezultata ispitivanja. Danas se to smatra nepouzdanim i neadekvatnim. Pretpostavljamo da će distribucija rezultata ispitivanja tlačne čvrstoće betona, ako se beton proizvodi prema važećim standardima, slijediti normalnu krivulju (dijagram 14).

Uzorci ispitivanja (slika 2) su u obliku valjka dimenzija 150/300 mm, normirane starosti 28 dana, čuvanih na temperaturi od 20 ± 3 stupnjeva Celzijusovih i vlažnosti od barem 95% .

Slika 2, Ispitivanje betonskog uzroka valjka na tlak [8]



Dijagram 14: Normala krivulja rezultata ispitivanja tlačne čvrstoće betona [7]

Prema toj raspodjeli učestalost rezultata definirana je parametrima standardne devijacije i srednje čvrstoće betona. Primjenom vjerojatnosti i statistike uvedena je karakteristična vrijednost dobivenih rezultata. Za karakterističnu tlačnu čvrstoću betona govorimo da je to granica ispod koje očekujemo najviše p% (fraktil) svih rezultata ispitivanog betona. Definiramo ju izrazom (29) gdje je f_{cm} srednja tlačna čvrstoća betona, λ koeficijent vjerojatnosti i σ standardna devijacija.

$$f_{ck} = f_{cm} - \lambda\sigma \tag{29}$$

Zahtjeva se da je minimalno 95% rezultata ispitivanja jednako propisanoj klasi betona.

Kriteriji prihvaćanja kvalitete betona različiti su s obzirom na pojedine zemlje. Ovdje će se razmotriti oni koji su dani Eurocodeom 2

Kriterij prihvaćanja tlačne čvrstoće betona definiran je izrazom (30):

$$\overline{X}_n \geq f_{ck} + \lambda \cdot \sigma \tag{30}$$

gdje je X_n srednja tlačna čvrstoća betona statističkog uzorka s n ponavljanja. Uz pretpostavku normalne distribucije rezultata, definirane srednje čvrstoće i standardne devijacije ovaj izraz slijedi iz nejednadžbe (29) i prilagođen je proizvođaču betona

Kriterij (31) prihvaćanja tlačne čvrstoće koji osigurava da u statističkom uzorku od n rezultata ispitivanja niti jedan nema manju vrijednost od MB – k, što je u interesu vlasnika građevine je

$$X_{\min} \geq f_{ck} - k \tag{31}$$

gdje je: X_{min} najmanja vrijednost tlačne čvrstoće, f_{ck} karakteristična tlačna čvrstoća betona i k unaprijed određena vrijednost koja se bira ovisno o broju kontrolnih uzoraka (tablica 1)

Broj rezultata n	Koeficijenti	
	λ	k
6	1.87	3
7	1.77	3
8	1.72	3
9	1.67	3
10	1.62	4
11	1.57	4
12	1.55	4
13	1.52	4
14	1.50	4
15	1.48	4

Tablica 1: zavisnost koeficijenata o broju kontrolnih uzoraka [7]

Statistički uzorak betona (partija) u proizvodnji jest količina od 2000 m^3 ili količina proizvedena u jednom mjesecu, odnosno količina betona za koju je provedeno ispitivanje s minimalno 30 uzoraka. Također, partija je količina betona iste klase koja se priprema i ugrađuje pod jednakim okolnostima. Njezina veličina ovisi o ukupnoj količini iste vrste betona.

Prema Eurocodeu 2, dokazivanje klase betona po partijama provodi se po jednom od dva kriterija:

Prvi kriterij (31) se koristi kada postoji 6 ili više uzastopnih rezultata ispitivanja, gdje s_n označava procijenjenu standardnu devijaciju za ispitani statistički uzorak

$$\begin{aligned} \overline{X}_0 &\geq f_{ck} + \lambda \cdot s_n \\ X_{\text{inin}} &\geq f_{ck} - k \end{aligned} \tag{31}$$

Drugi kriterij (32) se primjenjuje kada su tri rezultata ispitivanja uzastopno odaberu, gdje X_3 označava srednju vrijednost za tri rezultata ispitivanja tlačne čvrstoće

$$\begin{aligned} \overline{X}_3 &\geq f_{ck} + 5 \\ X_{\text{min}} &\geq fck - 1 \end{aligned} \tag{32}$$

Dokazivanje marke betona prema partijama, prema PBAB, odvija se prema dolje navedenim kriterijem.

Prvi kriterij (33) se upotrebljava za n < 15 rezultata ispitivanja i partije su formirane po 3 rezultata

$$\begin{aligned} \overline{X}_3 &\geq f_{ck,cube} + k_1 \\ X_{\min} &\geq f_{ck,cube} - k_2 \end{aligned} \tag{33}$$

gdje je $k_1 = k_2 = 3$ N/mm^2 za uhodanu proizvodnju, $f_{ck,cube}$ karakteristična tlačna čvrstoća dobivena ispitivanjem kocki

Drugi kriterij (34) se primjenjuje za $10 \leq n \leq 30$ i kad je poznata standardna devijacija za $n \geq 30$.

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &\geq f_{ck,cube} + 1.2\sigma \\ X_{min} &\geq f_{ck,cube} - 4 \end{aligned} \tag{34}$$

Treći kriterij (35) primjenjuje se za $15 \leq n \leq 30$, a kad standardna devijacija nije poznata, nego se koristi procijenjena standardna devijacija s_n određena prema broju rezultata (36)

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &\geq f_{ck,cube} + 1.3s_n \\ X_{\min} &\geq f_{\text{ck cube}} - 4.0 \end{aligned} \tag{35}$$

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum(\overline{X}_n - X_i)^2}{n-1}} \tag{36}$$

Završnu ocjenu kvalitete betona u konstrukciji određujemo prije tehničkog prijema i dozvole za uporabu građevine. Obuhvaća vizualni pregled, analizu vođene dokumentacije kvalitete betona, te primjedbu i ocjenu kvalitete izvođenja radova.

5. PRIMJENA U HIDROLOGIJI

5.1 Općenito

Hidrologija je znanost koja uključuje studije povezane s pojavom i kretanjem vode (u svim agregatnim stanjima) u kombiniranom sistemu površine, podzemlja i atmosfere. Hidrološki ciklus, poznatiji kao ciklus vode je osnova hidrološke znanosti. Hidrologija i klimatski sistemi, te njihova kombinacija sastoje se od više međusobno povezanih procesa. Ti procesi nisu podložni determinističkoj analizi. U većini slučajeva, varijable koje se koriste su slučajne. Neki od primjera su: protok, godišnje maksimalne količine padalina. Statističke metode ovise o parametaraskim pretpostavkama skupova podataka i unaprijed definiranoj korelaciji. Metode uključuju procjenu i kvantifikaciju rizika, izradu zaključaka na temelju dostupnih podataka, analize učestalosti, istraživanje međusobnih odnosa između ulaznih podataka i klimatskih varijabli.

Meteorološke i hidrološke podloge za statističku obradu čine podaci dobiveni motrenjem ili mjerenjem. Od njih se sastavlja skup podataka čiji članovi niza moraju biti slučajne veličine, međusobno neovisni, stacionarni, homogeni. Također, niz mora biti dovoljno dug kako bi analiza bila što točnija. Duljinu niza provjeravamo na osnovi veličine pogreške koeficjenta varijacije “σ_{CV}“ pomoću izraza (36) gdje “C_v“ označava koeficjent varijacije, a “n“ broj članova niza. Ako je pogreška manja ili jednaka 0.1, niz se može smatrati dovoljno dugim za korištenje. Hidrotehnički objekti dimenzioniraju se s ciljem osiguranja nizvodnog područja, stoga se određivanjem spomenutih parametara omogućuje pravilno projektiranje koje garantira njihovu efikasnost i funkcionalnost.

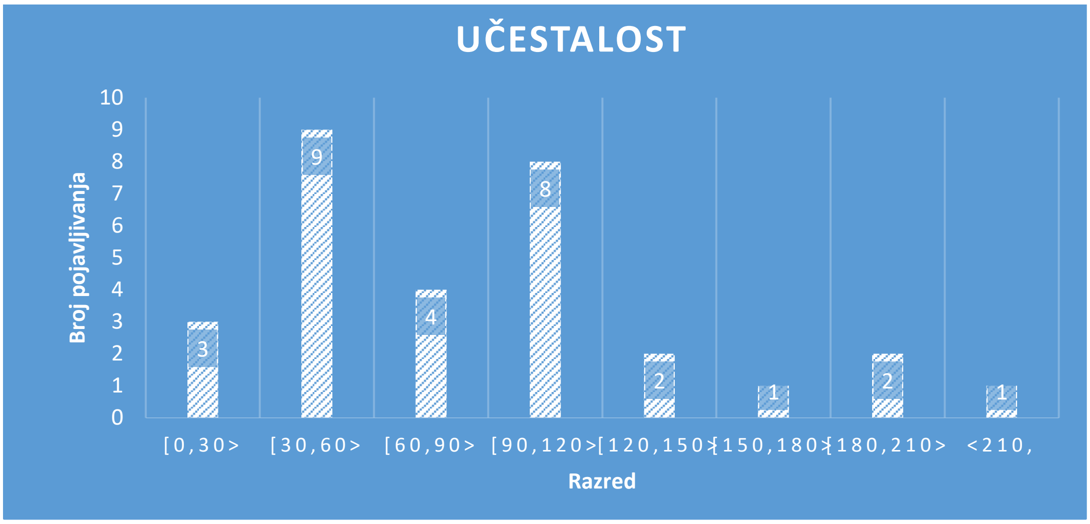
$$\sigma_{cv} = c_v \sqrt{\frac{1 + 2c_v^2}{2n}} \tag{36}$$

5.2 Učestalost i trajanje

Učestalost je definirana kao broj pojavljivanja vrijednosti u određenom intervalu promatranja. Učestalost najčešće prikazujemo histogramom i aproksimiramo ju kontinuiranom krivuljom učestalosti. Suma učestalosti neke vrijednosti predstavlja trajnost i prikazuje se krivuljom trajanja koja nam pokazuje postotak vremena tijekom kojeg je veličina, npr. protok jednak danim količinama ili veći od njih. Dijagram 15 prikazuje histogram učestalosti količine oborina u siječnju mjesecu za interval od 30 godina, klasificiran u razrede prikazane u tablici 2.

Razred	Učestalost								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[0,30>	18	2	25						
[30,60>	51	51	31	41	56	43	51	43	50
[60,90>	75	83	61	70					
[90,120>	101	115	97	103	93	91	111	102	
[120,150>	137	143							
[150,180>	150								
[180,210>	183	189							
[210,	214								

Tablica 2: Količine oborina klasificiran u razrede



Dijagram 15: Histogram učestalosti oborina

5.3 Proračun maksimalnih protoka

5.3.1 Općenito

Pojam maksimalnih protoka podrazumijeva jedno od karakterističnih stanja vodnog režima koje je posljedica naglog dizanja razina vode, odnosno javljanje tzv. poplavnih vodnih valova na vodotocima.

Prema UNESCO-u i WMO-u Međunarodnome rječniku hidroloških pojmova (1992.), velika voda je ekstremna pojava koja je definirana vodostajem, sekundarnim protokom ili volumenom u određenom vremenskom intervalu opažanja ili je utvrđena kao vjerojatnost pojavljivanja u određenim vremenskim intervalima.

Metode za proračun mjerodavne velike vode s obzirom na raspoloživost podataka mogu se podijeliti na: metode proračuna velike vode na hidrološki izučenim profilima, hidrološki nedovoljno neizučenim profilima i hidrološki neizučenim profilima

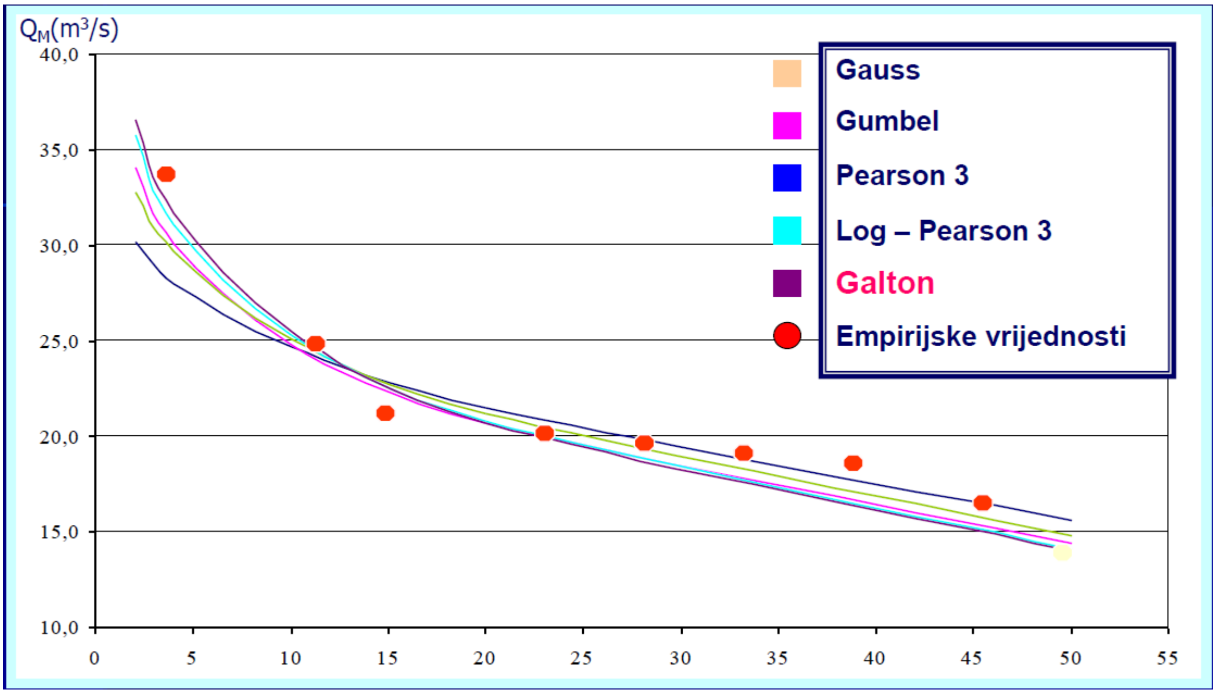
5.3.2 Proračun na hidrološki izučenim profilima

Analize podataka potrebnih za gore navedeni proračun temelje se na praktičnoj primjeni statistike i teorije vjerojatnosti. Pojam hidrološki izučen profil podrazumijeva profil vodotoka za kojeg postoje dovoljno duge serija pouzdanih mjerenja vodostaja i protoka [9]. Potrebno je ispitati statističku strukturu serija tako da idetificiramo razdoblja pojavljivanja većih i manjih velikih voda.

Reprezentativna serija usvaja ono razdoblje koje obuhvaća dva ili više puna ciklusa.

Ako je serija formirana tako da se koristio samo jedan ulazni parametar u godini (npr. max. god. protok), povratni period izražava se u godinama. Povratni period je prosječni interval unutar kojeg se s P (x), ocjenjuje da će varijabla X biti jednom veća od x.

Pri određivanju teorijskih vrijednosti max. god. protoka oznake Q_M s određenom vjerojatnošću pojavljivanja u praksi se vrši pomoću različitih prilagođenih distribucija vjerojatnosti poput : Gumbelove, normalne, Log-normalne, Pearsonove. Dijagram 16 prikazuje vrijednosti Q_M (ordinata) i njihovu vjerojatnost pojavljivanja (apscisa).



Dijagram 13: Prikaz različitih prilagođenih funkcija raspodjele [9]

6. MODEL VJEROJATNOSTI ZATAJENJA KONSTRUKCIJE

Osnova dimenzioniranja konstrukcije je zasnovana na usporedbi sposobnosti konstrukcije (varijabla R) da prihvati na sebe opterećenja odnosno sile (varijabla S). Zatajenje se događa kad je naprezanja prekorače dopuštene vrijednosti koje su uvjetovane otpornosti konstrukcije kao cjeline.

Opterećenja i sposobnost konstrukcije da im se odupre su često varijabilne, stoga S i R ne podliježu determinističkom pristupu. Odluke moraju biti bazirane na maksimalnim vjerojatnostima zatajenja.

Vjerojatnost zatajenja (37) označena s P_f, opisuje slučaj kada varijabla R poprima manju vrijednost od varijable S. Dakako, P_f mora biti manja od P_{total} odnosno ciljanoj vjerojatnosti zatajenja.

$$P_f = p(R - S < 0) \leq P_{total} \tag{37}$$

Koristimo funkciju graničnog stanja Z (38), kako bi definirali varijable R i S kao distribucijske parametre s pripadajućim srednjim vrijednostima μ i standardnom devijacijom σ.

$$Z = R - S \tag{28}$$

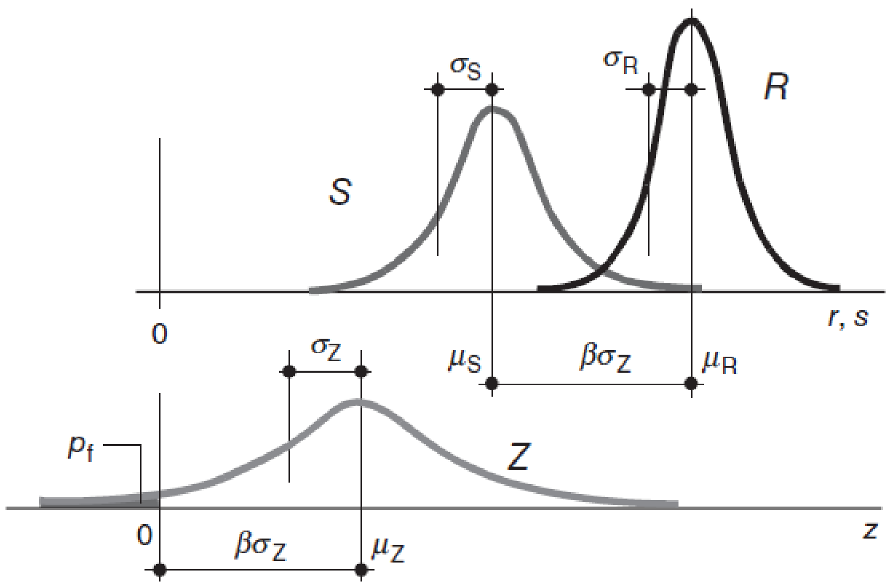
Negativne vrijednosti Z definiraju pouzdanost konstrukcije.

Ako pretpostavimo da su varijable S i R normalno distribuirane, Z je također normalno distribuiran. Negativne vrijednosti definiraju vjerojatnost zatajenja P_f.

Indeks pouzdanosti β opisuje udaljenost srednje vrijednosti varijable Z od apscise u relaciji s pripadajućom standardnom devijacijom.

Koncept sigurnosti dan je izrazom (39) i dijagramom 14, gdje f_s označava gustoću funkcije vjerojatnosti varijable S, F_R kumulativnu frekvenciju varijable R, Φ() normalnu distribuciju, μ_i i σ_i pripadajuću srednju vrijednost i standardnu devijaciju

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S F_R dx = \Phi(-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}) = \Phi(\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}) = \Phi(-\beta) \tag{29}$$



Dijagram 14: Normalne distribucije varijabli S, R, Z [10]

7. ZAKLJUČAK

Široka implementacija teorije vjerojatnosti i statistike u gotovo svim poljima znanosti i svakodnevnog života, dokazuje nam njezinu važnost. Prijmjena metoda ovog polja matematike gotovo je neizostavana u svim područjima gdje postoji rizik i gdje se nepredviđene situacije događaju na očekivanoj bazi. Nakon provedbe izračuna vjerojatnosti i analize ulaznih podataka različitim statističkim metodoma dobivamo čvrstu i relevantnu bazu za donošenje odluka, te predviđanju ishoda i rezultata. Dakako, bitno je napomenuti da metode iz spomenutog područja nisu uvijek prikladne za riješavanje problema s kojima se inženjeri susreću. Usprkos toj činjenici, vjerojatnost i statistika je bitan faktor u graditeljskoj stuci. Kotistimo je za procjenu rizika, analize pouzdanosti, obrade podataka i određivanje isplativosti. Često koristimo alate poput histograma, određivanja srednje vrijednosti, varijance, standardne devijacije, različite funkcije distribucije vjerojatnosti u svim disciplinama od područja geotehnike do planiranja i menađmenta izgradnje. Ovaj rad predstavlja neke od primjena i pokušava predočiti osnovne postulate obrađene grane matematike.

8. LITERATURA

[1] Jankov Maširević D., skripta za kolegij Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2013.

[2] Maity R., Statistical Methods in Hydrology and Hydroclimatology, Springer Singapore, 2018.

[3] Walpole R., Myers R., Myers S., Ye K., Probability & Statistics for Engineers & Scientists, Pearson Education, 2012.

[4] Elezović N, Vjerojatnost i statistika-Diskretna vjerojatnost, Element, 2008.

[5] Elezović N, Vjerojatnost i statistika-Slučajne varijable, Element, 2008.

[6] Elezović N, Vjerojatnost i statistika-Statistika i procesi, Element, 2008.

[7] Tomičić I., Betonske konstrukcije, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, 1996.

[8] Bede N., prezentacija za kolegij Inženjerski materijali, Građevisnki fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2020.

[9] Ožanić N., skripta za kolegij Hidrologija, Građevisnki fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2018.

[10] Maierhofer, Reinhardt, Dobmann, Non-destructive evaluation of reinforced concrete structures, vol. 1, Woodhead Publishing Limited, 2010.

[11] Tang W., Ang A., Probability Concept in Engineering Planning and Design, John Wiley & Sons, 1984

[12] Krizmanić D., skripta za kolegij Uvod u vjerojatnost i matematička statistika, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2018.

[13] Sandrić N., Vondraček Z., skripta za kolegij Vjerojatnost i statistika, Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2019

[14] Montgomery, D. C., Design and Analysis of Experiments, 7th ed. New York: John Wiley & Sons, 2008.

[15] https://www.britannica.com

[16] http://www.economics.soton.ac.uk