

# Proračun zidanog polukružnog luka

---

**Milić-Toljušić, Dominika**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:454283>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Dominika Milić-Toljušić  
0114031583**

**Proračun zidanog polukružnog luka**

**Završni rad**

**Rijeka, 2021.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Preddiplomski sveučilišni studij**

**Dominika Milić-Toljušić  
0114031583**

**Proračun zidanog polukružnog luka**

**Završni rad**

**Rijeka, srpanj, 2021.**

Naziv studija: **Sveučilišni preddiplomski studij Građevinarstvo**  
Znanstveno područje: Tehničke znanosti  
Znanstveno polje: Građevinarstvo  
Znanstvena grana: Nosive konstrukcije

Tema završnog rada

**PRORAČUN ZIDANOG POLUKRUŽNOG LUKA**  
**STRUCTURAL ANALYSIS OF A SEMICIRCULAR MASONRY ARCH**

Kandidatkinja: **DOMINIKA MILIĆ-TOLJUŠIĆ**

Kolegij: **UVOD U PROJEKTIRANJE GRAĐEVINSKIH KONSTRUKCIJA**

Završni rad broj: **21-P-40**

**Zadatak:**

Rad treba sadržavati:

- 1) Kratak teorijski uvod u kojem je potrebno opisati osnove proračuna zidanih lukova prema J. Heymanu, koji je primijenio teoriju plastičnosti na zidane konstrukcije. Proračun zidanih lučnih konstrukcija svodi se na problem geometrije, a ne čvrstoće (proračun naprezanja je od sporednog značenja). Slom nastaje formiranjem dovoljnog broja zglobova i pretvaranjem sustava u mehanizam.
- 2) Numerički dio u kojem je potrebno analizirati polukružni luk za slučaj kada na luk djeluje koncentrirana sila: a) u četvrtini raspona, te b) u sredini raspona. Principom virtualnog rada odrediti graničnu vrijednost sile pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti. Nacrtati potporne linije primjenom grafostatičke metode.
- 3) Eksperimentalni dio na drvenom modelu luka i usporedbu rezultata. Priložiti fotografije modela luka u više faza nanošenja opterećenja sve do rušenja luka.

**Tema rada je uručena: 24. veljače 2021.**

Mentor:

doc. dr. sc. Paulo Šćulac  
dipl. ing. građ.

## IZJAVA

Završni rad izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Dominika Milić-Toljušić

U Rijeci, 6. Srpnja 2021.

## IZJAVA

Završni rad izrađen je u sklopu znanstvenog projekta:

**„ASSESSMENT OF MASONRY ARCHES AND VAULTS“**

Voditelj projekta: doc.dr.sc. Paulo Šćulac, dipl.ing.građ.

Šifra projekta: **ZIP-UNIRI-1500-3-20**

Financijer projekta: Sveučilište u Rijeci

Pravna nadležnost: Republika Hrvatska

U Rijeci, 1. srpnja 2021.

Mentor:  
doc. dr. sc. Paulo Šćulac, dipl. ing. građ.

## **Sažetak**

U ovom završnom radu razmatrani su zidani lukovi. U prvom djelu opisane su osnove proračuna zidanih lukova prema J. Heymanu, koji je primijenio teoriju plastičnosti na zidane konstrukcije: ako je moguće pronaći potporna liniju koja se nalazi unutar geometrije luka u ravnoteži s vanjskim opterećenjem tada je luk stabilan. Zatim je analiziran primjer polukružnog luka opterećen koncentriranom silom u četvrtini i u polovici raspona. Principom virtualnog rada dobivena je vrijednost granične sile pri kojoj dolazi do rušenja luka. Grafostatičkim postupkom određene su potporne linije. Treći dio rada prikazuje eksperimentalni model drvenog luka, gdje je nanošenjem opterećenja u koracima dokumentirano formiranje zglobova između blokova.

**Ključne riječi:** zidane konstrukcije, luk, potporna linija, grafostatička metoda, mehanizam sloma, eksperimentalni model

## **Abstract**

This final year project deals with masonry arches. In the first part the basis of design of masonry arches according to J. Heyman are described. He applied the theory of plasticity to masonry structures: if a thrust line can be found in equilibrium with the external loading lying within the arch then the arc is safe. Semicircular arches loaded with a point force at quarter span and at half span were then analysed. Using the principle of virtual work the limit force at which the arch collapses was obtained. Graphic statics was used to draw the thrust lines. The third part of the work describes an experimental model of a timber arch. While the point force was applied in steps the formation of hinges between blocks has been documented.

**Keywords:** masonry structures, arch, thrust line, graphic statics, collapse mechanism, experimental model

## Sadržaj:

1.	UVOD.....	1
1.1.	Općenito o zidanim lučnim konstrukcijama.....	1
1.2.	Primjeri zidanih lukova u Rijeci.....	4
2.	POTPORNA (TLAČNA) LINIJA.....	6
2.1.	Definicija potporne linije .....	6
2.2.	Grafička metoda određivanja potporne linije.....	6
3.	STABILNOST ZIDANIH LUČNIH KONSTRUKCIJA.....	10
3.1.	Svojstva ziđa .....	10
3.2.	Geometrijski faktor sigurnosti.....	13
4.	PRINCIP VIRTUALNOG RADA ZA ODREĐIVANJE GRANIČNOG OPTEREĆENJA 15	
5.	PRIMJER.....	17
5.1.	Uvod.....	17
5.2.	Koncentrirana sila u četvrtini raspona (opterećenje bloka 6).....	22
5.2.1.	Slučaj 1 .....	22
5.2.2.	Slučaj 2 .....	23
5.2.3.	Slučaj 3 .....	24
5.2.4.	Pronalazak potporne linije .....	24
5.3.	Koncentrirana sila u četvrtini raspona (opterećenje bloka 5).....	26
5.3.1.	Slučaj 1 .....	26
5.3.2.	Slučaj 2 .....	27
5.3.3.	Pronalazak potporne linije .....	28
5.4.	Koncentrirana sila na sredini raspona .....	29
5.4.1.	Slučaj 1 .....	29
5.4.2.	Slučaj 2.....	30
5.4.3.	Slučaj 3 .....	31
5.4.4.	Pronalazak potporne linije .....	32
6.	EKSPERIMENTALNI MODEL.....	34
6.1.	Test 1 : smanjenje raspona luka .....	36
6.2.	Test 2: povećavanje raspona luka.....	38
6.3.	Test 3: nanošenje sile u 6. bloku modela luka.....	40



6.4.	Test 4: nanošenje sile u 5. bloku modela luka.....	42
6.5.	Test 5: nanošenje sile na sredini raspona modela luka.....	44
7.	ZAKLJUČAK.....	46
8.	LITERATURA: .....	47

## **POPIS TABLICA:**

Tablica 1. Dijelovi luka i njihovo značenje

## **POPIS SLIKA:**

Slika 1. Svođeni most

Slika 2. Različite vrste lukova

Slika 3. Jednostavni polukružni luk s naglašenim zaglavkom

Slika 4. Polukružni luk odklesanaca peterokutnih lica

Slika 5. Polukružni luk od kvakastih klesanaca

Slika 6. Primjeri lučnih konstrukcija u Rijeci

Slika 7. Model luka napravljen od drva i usporedba s lančanicom neposredno prije sloma

Slika 8. Slom luka

Slika 9. Primjer grafičkog određivanja potporne linije kod trozglobnog luka

Slika 10. Trozglobni statički određen luk

Slika 11. Stup sastavljen od kamenih ploča opterećenim vertikalnim opterećenjem

Slika 12. Polukružni luk opterećen samo vlastitom težinom

Slika 13. Slom polukružnog luka uslijed djelovanja koncentrirane sile

Slika 14. Polukružni luk

Slika 15. Princip virtualnog rada primijenjen na zidanom luku opterećen koncentriranom silom

Slika 16. Dimenzije modela luka

Slika 17. Lančanica unutar konture luka

Slika 18. Omjer najmanje debljine luka  $t$  i radijusa luka  $R$  u ovisnosti o vrijednosti polovice kuta luka

Slika 19. Potporne linije uslijed vlastite težine

Slika 20. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.2.1.

Slika 21. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.2.2.

Slika 22. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.2.3.

Slika 23. Potporna linija pri sili od 11,5 N

Slika 24. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.3.1.

Slika 25. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.3.2.

Slika 26. Potporna linija pri sili od 17 N

Slika 27. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.4.1.

Slika 28. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.4.2.

Slika 29. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.4.3.

Slika 30. Potporna linija uslijed sile od 114,45 N

Slika 31. Potporna linija pri sili od 30 N

Slika 32. Materijali za pripremu modela

Slika 33. Eksperimentalni postav

Slika 34. Test 1 - pretvaranje sustava u mehanizam uslijed smanjenja raspona

Slika 35. Test 2 - Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećavanja raspona

Slika 36. Test 3 - Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećanja opterećenja na blok

Slika 37. Uvećani prikaz otvorenih zglobova pri sili od 16,5 N

Slika 38. Test 4 - Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećanja opterećenja na blok

Slika 39. Uvećani prikaz otvorenih zglobova pri sili od 23 N

Slika 40. Test 5 - Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećanja opterećenja u sredini raspona

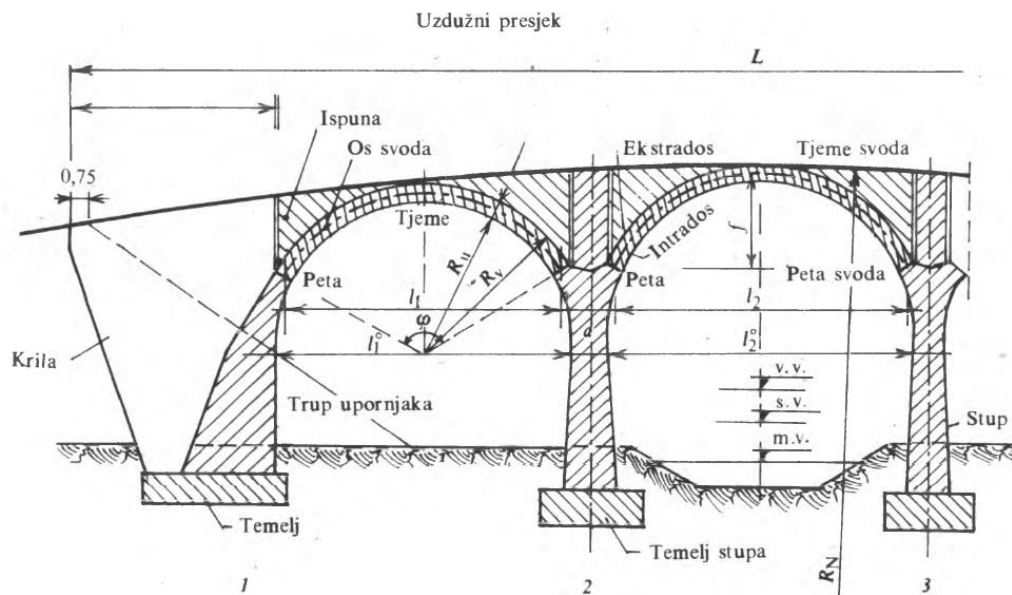
# 1. UVOD

## 1.1. Općenito o zidanim lučnim konstrukcijama

Osnovni nosivi sustav lučnim konstrukcijama je luk ili svod. Luk ima manju, a svod veću širinu. U tablici 1. su objašnjeni sastavni dijelovi luka na primjeru lučnog mosta [1].

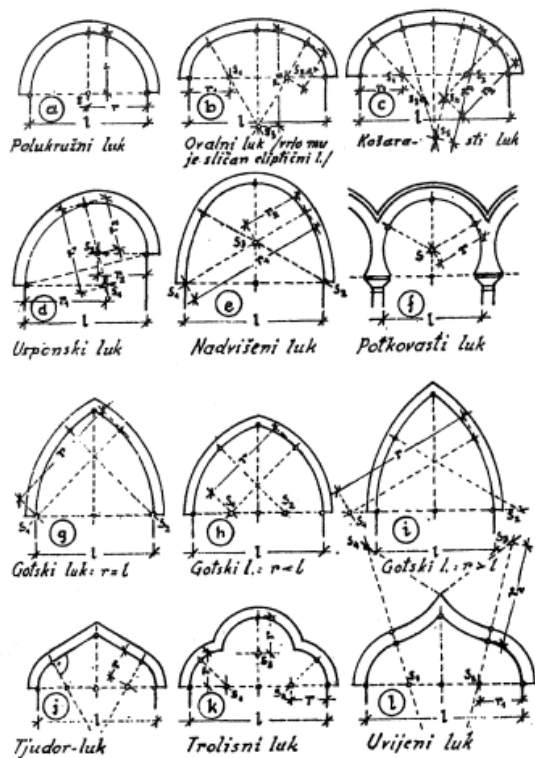
Tablica 2. Dijelovi luka i njihovo značenje

pojam	značenje
Tjeme luka	Najviša točka luka
Peta luka	Najniža točka luka
Strelica luka (f)	Vertikalna udaljenost između tjemena i pete luka
Intrados	Unutarnja linija luka
Ekstrados	Vanjska linija luka
Raspon luka (L)	Horizontalna udaljenost između ležajeva luka
Otvor luka	Horizontalna udaljenost krajnjih točaka intradosa
Spljoštenost (plitkost) luka	Omjer strelice i raspona luka $f/L$



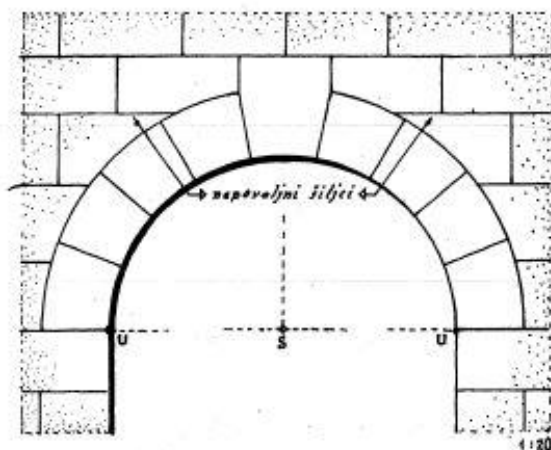
Slika 1. Svođeni most.  $l_1$  krajnji raspon luka,  $l_2$  srednji raspon luka,  $l_1^0$  krajnji otvor,  $l_2^0$  srednji otvor,  $L$  duljina mosta,  $f$  strelica luka,  $f/l$  spljoštenost luka,  $R_v$  polumjer ekstradosa,  $R_u$  polumjer intradosa,  $S_1$  širina luka [1]

Prema obliku lukove dijelimo na polukružne, segmentne, ovalne (eliptične), košaraste, usponske, nadvišene, potkovaste i više vrsta šiljastih lukova [2]. Danas se najčešće rade pri restauriranju povijesnih građevina. Na slici 2. je prikazana podjela lukova prema obliku.

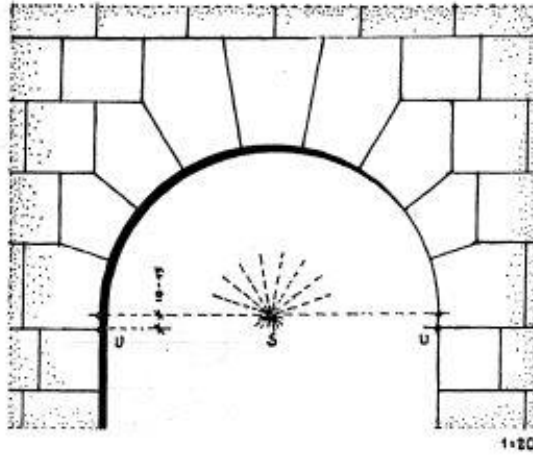


Slika 2. Različite vrste lukova [2]

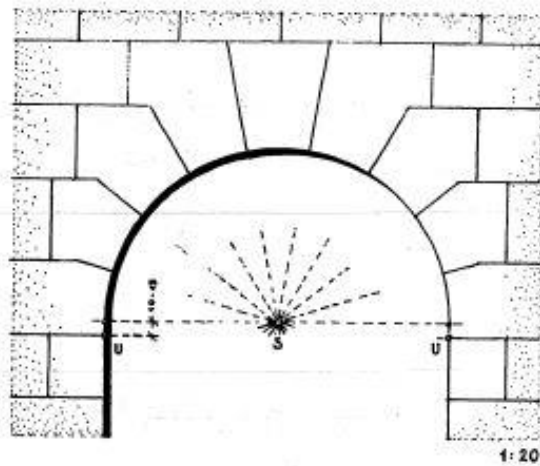
Na slikama u nastavku su prikazani mogući načini oblikovanja kamenih blokova kod polukružnog luka.



Slika 3. Jednostavni polukružni luk s naglašenim zaglavkom [2]



Slika 4. Polukružni luk od klesanaca peterokutnih lica [2]



Slika 5. Polukružni luk od kvakastih klesanaca [2]

## 1.2. Primjeri zidanih lukova u Rijeci



a) Trsatska Gradina



b) Trsatska Gradina



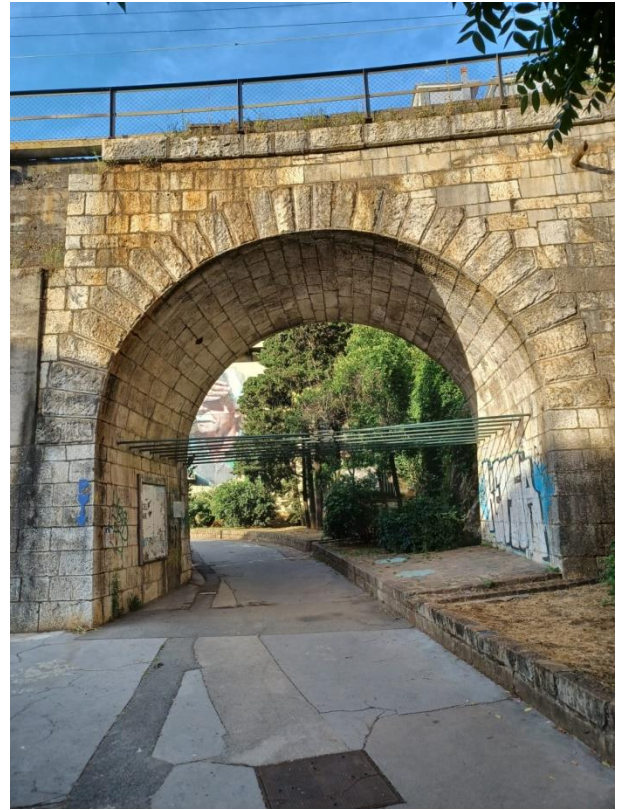
c) Palača Šećerane (Muzej grada Rijeke)



d) Palača Šećerane (Muzej grada Rijeke)



c) Školjić



d) Školjić



e) Školjić

Slika 6. Primjeri lučnih konstrukcija u Rijeci



## 2. POTPORNNA (TLAČNA) LINIJA

### 2.1. Definicija potporne linije

Potporna linija predstavlja rezultantnu krivulju hvatišta tlačne sile u presjecima lukac [5]. Granične vrijednosti tlačnih linija odgovaraju stanju najmanjeg i najvećeg potiska. Kada je opterećenje jednoliko raspodijeljeno, potporna linija ima oblik krivulje, a kada na luk djeluju koncentrirane sile, potporna linija je poligon [5].

### 2.2. Grafička metoda određivanja potporne linije

Robert Hooke je prvi zapazio vezu između luka i ovješnog lanca (lančanice). Lančanica je vlačni element koji je opterećen vlastitom težinom, a luk je tlačni element, također opterećen vlastitom težinom. Dakle, luk je stabilan ako se lančanica, koja je ovješena i obrnuta na rasponu luka, nalazi unutar konture luka. Lančanica zapravo predstavlja potpornu liniju.

Na slici 7. je prikazan model luka napravljen od drvenog materijala te oblik lančanice pri vlastitom opterećenju luka. Lančanica se u ovom slučaju ne nalazi unutar kontura luka, što ukazuje na slom luka kada prestanu djelovati vanjske stabilizirajuće sile (u ovom slučaju ruke), što se može vidjeti na slici 8.



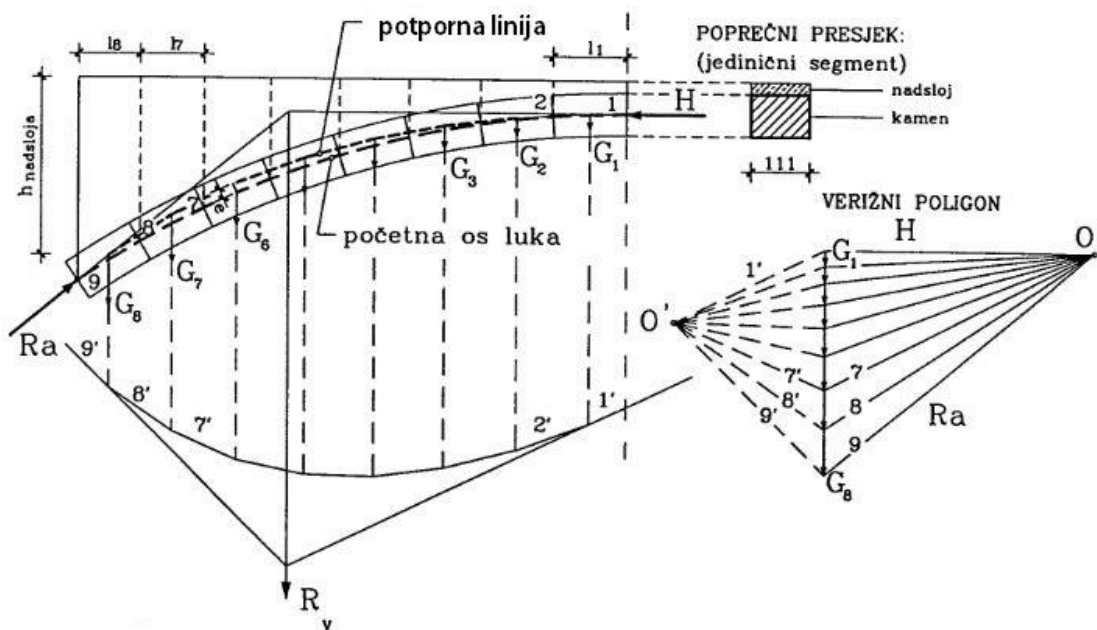
Slika 7. Model luka napravljen od drva i usporedba s lančanicom neposredno prije sloma [7]



Slika 8. Slom luka [7]

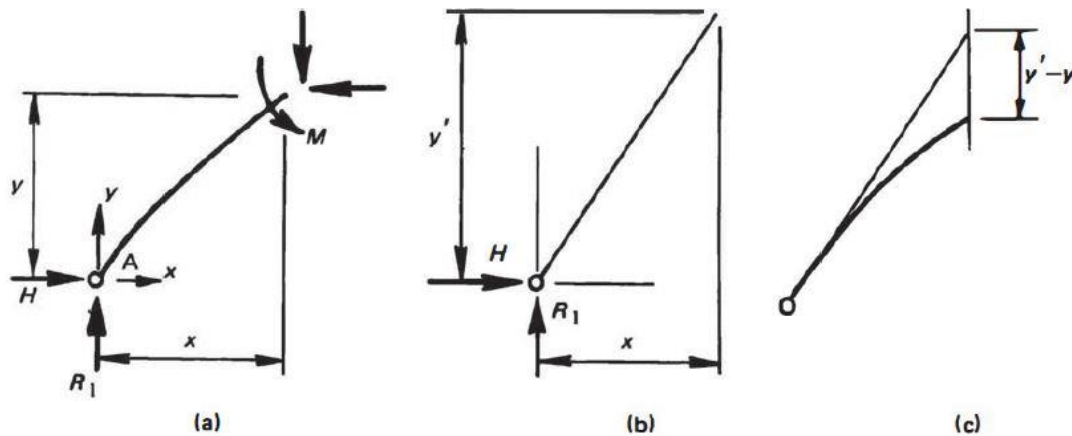
Na slici 9. je prikazano određivanje potporne linije grafičkom metodom primjenom poligona sila [5]. Na početku postupka je potrebno podijeliti luk na blokove uz pretpostavku da je luk opterećen nizom koncentriranih sila u osi. Ovisno o obliku luka, blokovi mogu biti različitog oblika, pa su time i različite težine. Verižni poligon koji je na skici se crta s obzirom na proizvoljno odabran pol  $O'$ . Pravac reakcije  $R_v$  se dobije ucrtavanjem zraka poligona u duljinama odsječaka luka. Horizontalna reakcija u tjemenu  $H$  i kosa reakcija u peti  $R_a$  sijeku se s reakcijom  $R_v$  u istoj točki. Poznatim pravcima  $H$  i  $R_a$  određen je novi pol  $O$ , kao i veličina reakcija  $H$  i  $R_a$ . S novim zrakama 1, 2 do  $n$  crta se odgovarajući poligon.

Pomicanjem točke  $O$  po horizontalnoj liniji se mijenja horizontalni pritisak u osloncima. Kao rezultat toga možemo dobiti različite potporne linije čime dokazujemo da za jedinstveni tlačni luk postoji mnogo potpornih linija [5].



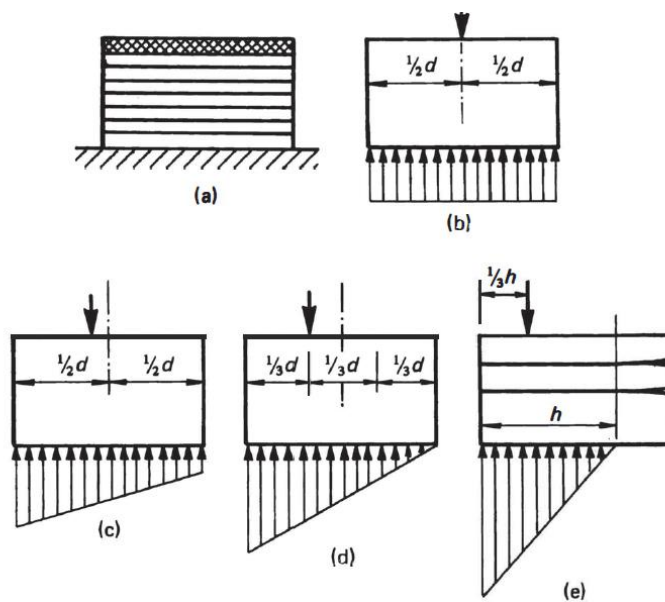
Slika 9. Primjer grafičkog određivanja potporne linije kod trozglobnog luka [5]

Trozglobni luk je statički određen te se reakcije A i B, uslijed opterećenja  $G_1, G_2$  itd., mogu dobiti pomoću jednadžbi ravnoteže. Alternativa pisanju jednadžbi ravnoteže je rješavanje sustava grafički. Odmah će biti očito da tlačna linija u luku, odnosno poligon, mora prolaziti kroz tri zgloba. Na slici 10.a) napravljen je presjek luka na horizontalnoj udaljenosti  $x$  od oslonca A. Zbog održavanja ravnoteže u luku, na presjeku su uvedene horizontalna i vertikalna reakcija, kao i moment savijanja. Slika 10.b) prikazuje odgovarajući dio potporne linije, vrijednost  $R_1 \cdot x/H$  je jednaka ordinati  $y'$  ( $M = R_1 \cdot x - H \cdot y'$ ). Na slici 10.c) se vide os luka i potporna linija luka te slijedi da je moment savijanja jednak umnošku horizontalne komponente ( $H$ ) u osloncu i vertikalne udaljenosti između luka i potporne linije [4].



Slika 10. Trozglobni statički određen luk [4]

Slika 11.a) prikazuje stup sastavljen od jednakih kamenih ploča naslaganih jedna na drugu, bez spajanja mortom. Ploče se oslanjaju na tvrdi podlogu. Na vrhu se nalazi kruta ploča na koju se nanosi vertikalno opterećenje. Ako se koncentrirana sila nanese u središtu kamenih ploča, prema teoriji elastičnosti, sve kamene ploče će biti jednako opterećene (Slika 11.b)). Kada je opterećenje neznatno pomaknuto od središta, raspodjela napreznja je linearna (Slika 11.c)). Kada se opterećenje nalazi na jednoj trećini presjeka (na rubu jezgre presjeka), napreznje na rubu postaje jednako nuli (Slika 11.d)). Nanošenjem opterećenja još dalje od središta, stup još uvijek može prenositi opterećenje kao cjelina (Slika 11.e)). Ali, budući da su ploče naslagane bez morta, neće biti sposobne prenijeti vlačno napreznje te će se pojaviti pukotine.



Slika 11. Stup sastavljen od kamenih ploča opterećenim vertikalnim opterećenjem [4]

### 3. STABILNOST ZIDANIH LUČNIH KONSTRUKCIJA

#### 3.1. Svojstva zida

U nastavku rada je obrađena tematika iz knjige [3].

Pri proučavanju zida, Jacques Heyman u svom poznatom radu „Kameni kostur” postavlja tri temeljne pretpostavke:

- 1) zide nema vlačnu čvrstoću,
- 2) zide ima beskonačnu tlačnu čvrstoću,
- 3) nema klizanja između blokova.

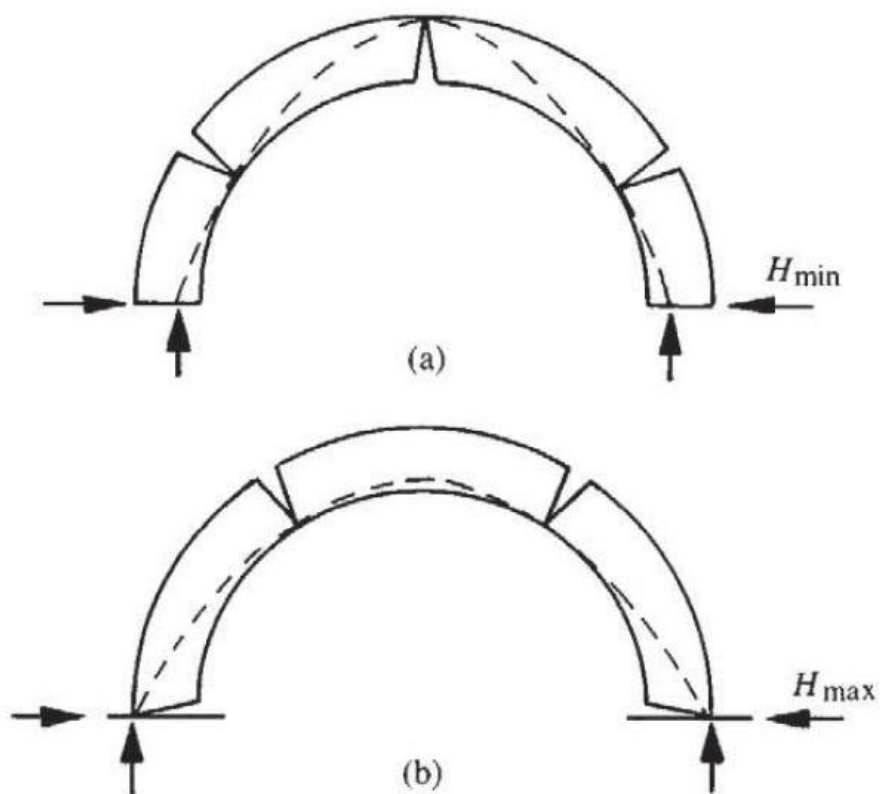
S prvom hipotezom pretpostavlja da nema prijenosa vlačnih sila u zidu. Iako, kamen i opeka imaju određenu vlačnu čvrstoću, sljubnice mogu biti bez morta ili ispunjene mortom male čvrstoće ili pak mort može degradirati s vremenom.

Druga pretpostavka podrazumijeva kako su naprezanja u zidu mala, tako da ne postoji problem drobljenja materijala, što je istina ako razmatramo srednju vrijednost tlačnih naprezanja. Naime, kao što Heyman ističe, koncentracije naprezanja su ipak moguće. Takva pojava je samo lokalnog karaktera te obično ne dovodi do rušenja zgrade.

Treća pretpostavka podrazumijeva kako između elemenata luka djeluje trenje, tako da klizanje uzduž sljubnica nije moguće. Čak i ako dođe do iskliznuća pojedinog kamena, zidane konstrukcije izvrsno održavaju svoj oblik. Vrlo malo tlačno naprezanje je dovoljno kako bi se izbjeglo klizanje i gubitak trenja.

U skladu s ovim pretpostavkama zide se ponaša kao sklop krutih tijela koje na okupu drže tlačne sile na kontaktu. Time jedini mogući mehanizam sloma postaje stvaranje zglobova i pretvaranjem sustava u mehanizam bez otkazivanja materijala. Zglobovi se javljaju uslijed opterećenja ili uslijed pomaka (npr. slijeganje oslonaca).

Zglobovi se otvaraju kada se potporna linija približi intradosu ili ekstradosu luka.

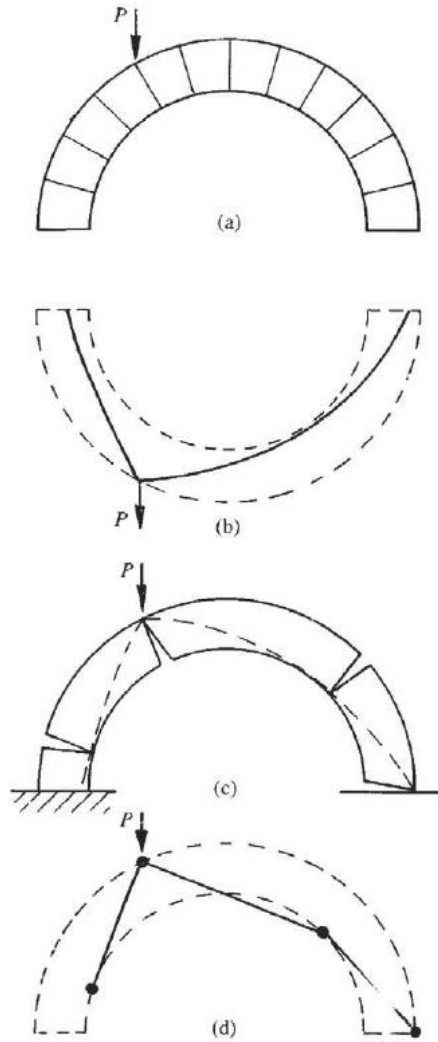


Slika 12. Polukružni luk opterećen samo vlastitom težinom [3]

a) najmanji potisak uslijed povećanja raspona luka

b) najveći potisak uslijed smanjenja raspona luka

Jacques Heyman je time problem otkazivanja lukova (zidanih konstrukcija) povezo s teorijom plastičnosti. Formiranjem dovoljnog broja plastičnih zglobova dolazi do pretvaranja konstrukcije u kinematički labilan mehanizam tj. do sloma konstrukcije. Kako bi došlo do pojave mehanizma potrebna je formacija  $n+1$  plastičnog zgloba, gdje  $n$  predstavlja stupanj statičke neodređenosti konstrukcije, npr. za upeti luk koji je 3x statički neodređen potrebna su 4 zgloba za pretvaranje u mehanizam. Na slici 12. a) i b) su prikazani polukružni lukovi kod kojih je došlo do pomaka oslonaca. Povećanje ili smanjenje raspona luka dovodi do raspodjele naprezanja. Lukovi se prilagođavaju novom stanju pomaka otvaranjem pukotina (zglobova).



Slika 13. Slom polukružnog luka uslijed djelovanja koncentrirane sile [3]

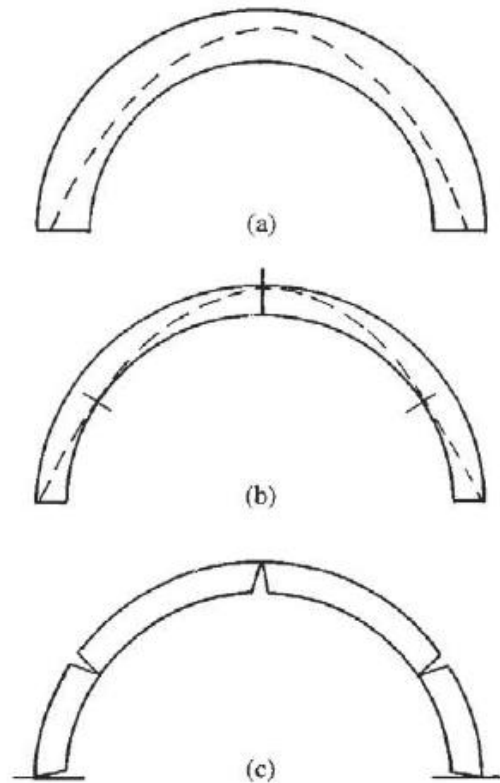
- a) geometrija luka
- b) analogija s lančanicom
- c) nakon formiranja 4 zgloba luk se pretvara u mehanizam
- d) potporna linija izvan geometrije luka

Na slici 13 je prikazan polukružni luk opterećen vlastitom težinom i koncentriranom silom  $P$  koja djeluje u proizvoljnoj točki ekstradosa. Prema teoriji plastičnosti koncentrirana sila na mjestu djelovanja uzrokuje otvaranje plastičnog zgloba. Posljedica toga je deformiranje tlačne linije i oblikovanje kao što je prikazano na slici 13.b). Povećavanjem vrijednosti koncentrirane sile, oblik potporne linije se mijenja, sve manje pristaje unutar luka (slika 13.c)). Na slici 13.d) se vidi da

tlačna linija dodiruje luk te se formiraju četiri zgloba koji stabilnu konstrukciju pretvaraju u mehanizam.

### 3.2. Geometrijski faktor sigurnosti

Lukovi su stabilni ako se potporna linija nalazi unutar geometrije luka. J. Heyman predlaže uporabu geometrijskog faktora sigurnosti gdje uspoređuje geometriju stvarnog luka i luka takve debljine kod kojeg dolazi do formiranja mehanizma. Na slici 14.a) je prikazan jedan od beskonačno mnogo položaja potporne linije. U slučaju vlastite težine koja je jednoliko raspodijeljena po luku, potporna se linija može opisati matematičkom funkcijom lančanice. Na slici 14.b) je prikazana najmanja debljina luka unutar koje može biti sadržana takva potporna linija. Geometrijski faktor sigurnosti se može definirati kao omjer debljine stvarnog luka i debljine luka kod kojeg dolazi do formiranja mehanizma. Primjerice, ako je geometrijski faktor sigurnosti 2, tada je debljina graničnog luka dvostruko manja od debljine projektiranog luka [3].



Slika 14. Polukružni luk a) stabilan luk b) najmanja debljina luka unutar koje se može smjestiti potporna linija (potporna linija dodiruje luk u pet točaka), c) mehanizam sloma formiranjem 5 zglobova [3]

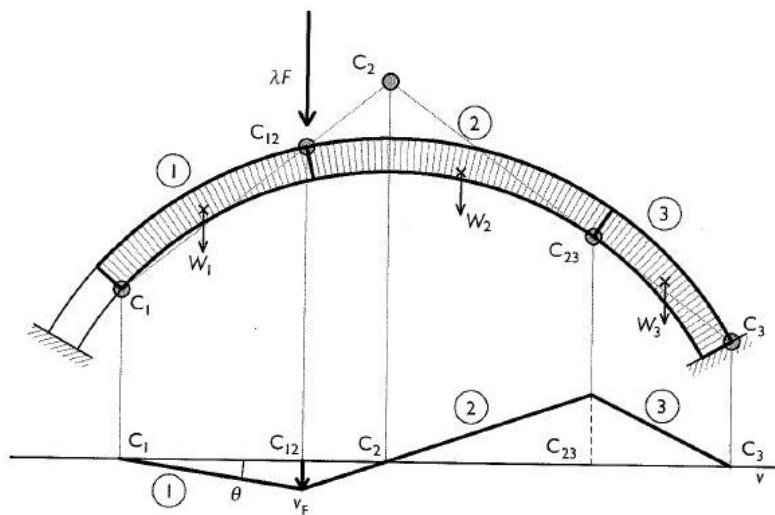


Budući da je i geometrija i opterećenje (vlastita težina) simetrično, u ovom slučaju je potrebno 5 zglobova za pretvaranje sustava u mehanizam (umjesto 4).

#### 4. PRINCIP VIRTUALNOG RADA ZA ODREĐIVANJE GRANIČNOG OPTEREĆENJA

Tematika ovog poglavlja je obrađena iz knjige [6], te opisuje kinematički postupak za određivanje graničnog opterećenja.

U nastavku je objašnjen princip virtualnog rada primijenjen na zidanom luku koji je prikazan na slici 15. Postupak se sastoji od sljedećeg: na početku, konstrukciju treba preoblikovati u kinematički dopustivi mehanizam uvođenjem dovoljnog broja plastičnih zglobova. Zglobove je potrebno rasporediti tako da novo stanje bude kinematički dopustivo. U slučaju upetog luka to znači postaviti 4 zgloba naizmjenično između intradosa i ekstradosa. U slučaju simetrične geometrije i simetričnog opterećenja potrebno je naime postaviti pet zglobova. Pretpostavlja se kako se luk nakon umetanja zglobova sastoji od tri kruta tijela, gdje pritom dolazi do rotacije samo u zglobovima uslijed vanjskog opterećenja ili pomaka. Zatim se zadaje virtualni pomak tako da se dio konstrukcije zarotira za jedinični kut  $\Theta$  i crta virtualni plan pomaka. Može se definirati jednadžba virtualnog rada, gdje zbroj virtualnih radova vanjskih sila na virtualnim pomacima treba biti jednak virtualnom radu unutarnjih sila na virtualnim deformacijama. Budući da se u ovom slučaju razmatraju kruta tijela time virtualni rad unutarnjih sila iščezava, te ostaje samo rad vlastite težine luka i vanjske koncentrirane sile  $\lambda F$ .



Slika 15. Princip virtualnog rada primijenjen na zidanom luku opterećen koncentriranom silom [6]

Vlastita težina luka može se prikazati kao koncentrirana sila  $W_i$  koja djeluje u težištu pojedinog krutog bloka  $i$ . ( $i=1,2,3$ )

Poznavajući sile i virtualne pomake moguće je definirati jednadžbu virtualnog rada:

$$L_w + L_F = 0 \quad (1)$$

gdje je  $L_w$  virtualni rad uslijed vlastite težine pojedinog bloka  $i$  na virtualnom pomaku  $v_i$ ,

$$L_w = \sum_{i=1}^3 W_i \cdot v_i \quad (2)$$

a  $L_F$  virtualni rad vertikalne sile  $\lambda F$  na virtualnom pomaku  $v_F$

$$L_F = \lambda \cdot F v_F \quad (3)$$

Time je moguće odrediti faktor opterećenja  $\lambda$  kao:

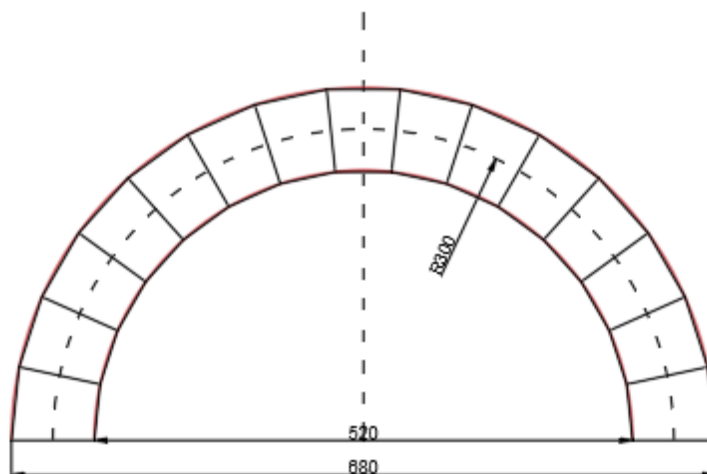
$$\lambda = - \frac{\sum W_i v_i}{F v_F} \quad (4)$$

Prema kinematičkom teoremu teorije plastičnosti dobivena vrijednost predstavlja gornju granicu stvarnog graničnog opterećenja, pa je potrebno odabrati minimalnu vrijednost koja proizlazi iz svih prihvatljivih mehanizama.

## 5. PRIMJER

### 5.1. Uvod

U ovom poglavlju prikazan je proračun dobivanja granične sile metodom virtualnog rada te određivanje potporne linije grafostatičkom metodom na primjeru polukružnog luka. Dimenzije luka u primjeru su odabrane kako bi se mogle provjeriti na drvenom modelu.

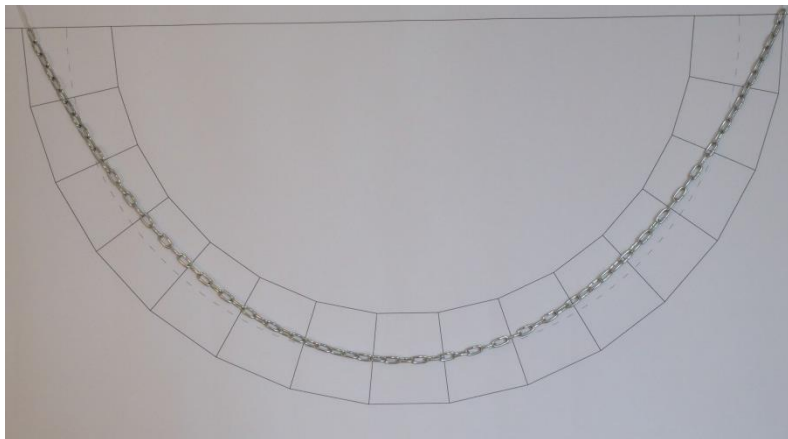
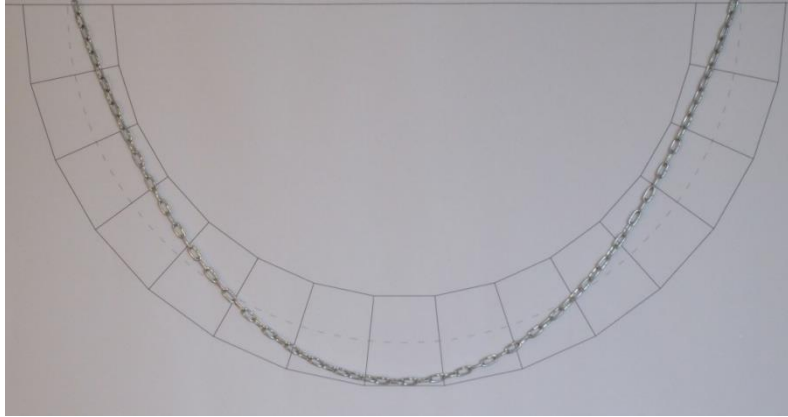


Slika 16. Dimenzije modela luka

Dimenzije luka iznose: debljina luka ( $t$ ) je 8 cm, radijus luka ( $R$ ) je 30 cm, širina luka 8 cm. Luk je podijeljen na 15 blokova u obliku trapeza. Masa jednog bloka iznosi 188 g (srednja vrijednost bloka izvagana na drvenom modelu).

U primjeru su obrađeni slučajevi s kinematičkom silom u četvrtini raspona te koncentriranom silom u sredini raspona luka. Zbog usporedbe s eksperimentom sila u četvrtini raspona je modelirana kao opterećenje u težištu bloka 6 ili težištu bloka 5. Ti se blokovi nalaze oko četvrtine raspona.

Za provjeru da li je luk stabilan uslijed vlastite težine isprobana je metoda s lančanicom, za što je upotrijebljen čelični lanac (slika 16). Lanac se nalazi unutar kontura luka, što znači da je ovaj luk stabilan uslijed vlastite težine (lančanica=potporna linija).



Slika 17. Lančanica unutar konture luka

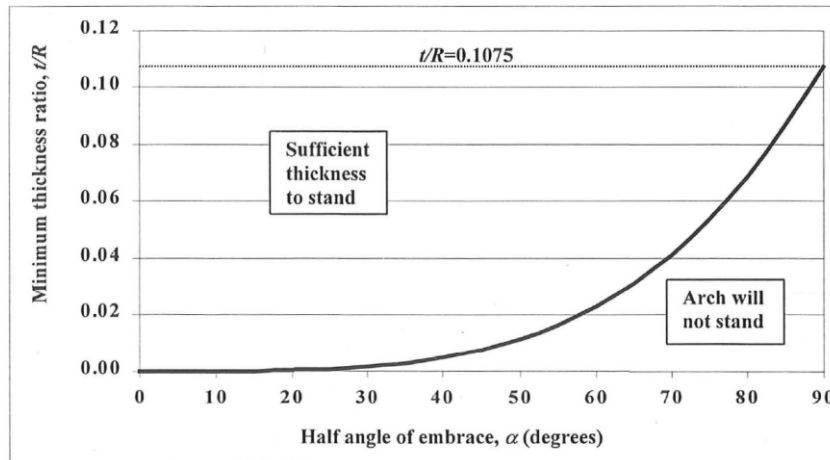
Izračun geometrijskog faktora sigurnosti:

Prema grafu sa slike 17, najmanja debljina  $t$  polukružnog luka ( $\alpha=90^\circ$ ) za koji je luk stabilan iznosi:

$$t_{\min} = 0,1075 \cdot R = 0,1075 \cdot 30 = 3,25 \text{ cm}$$

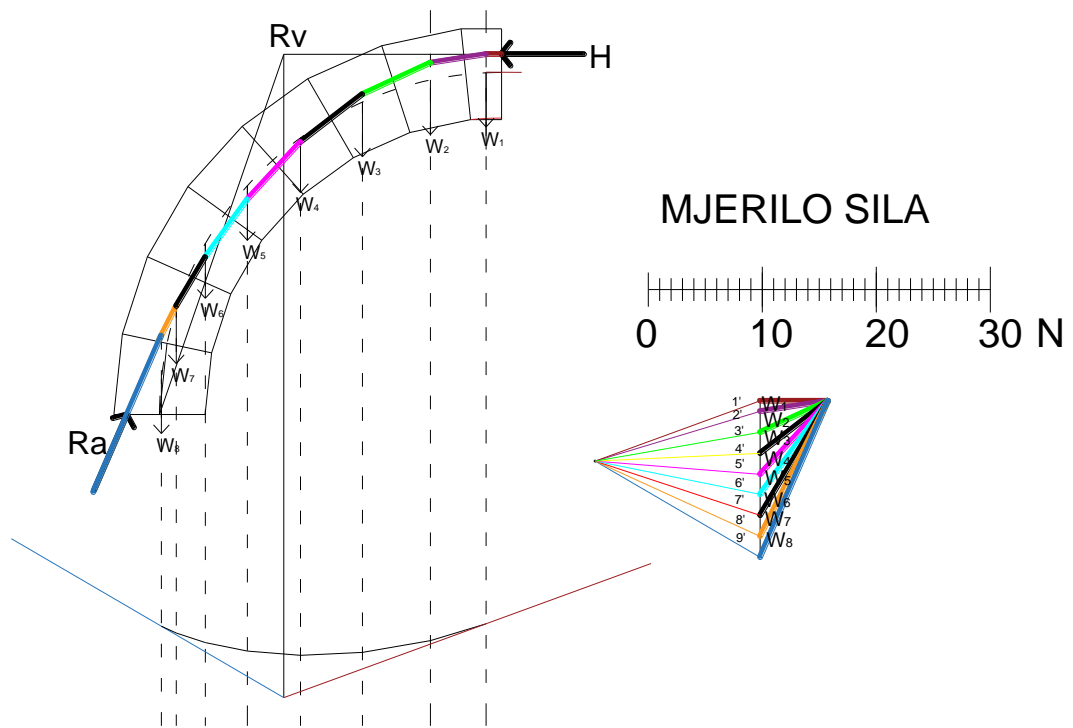
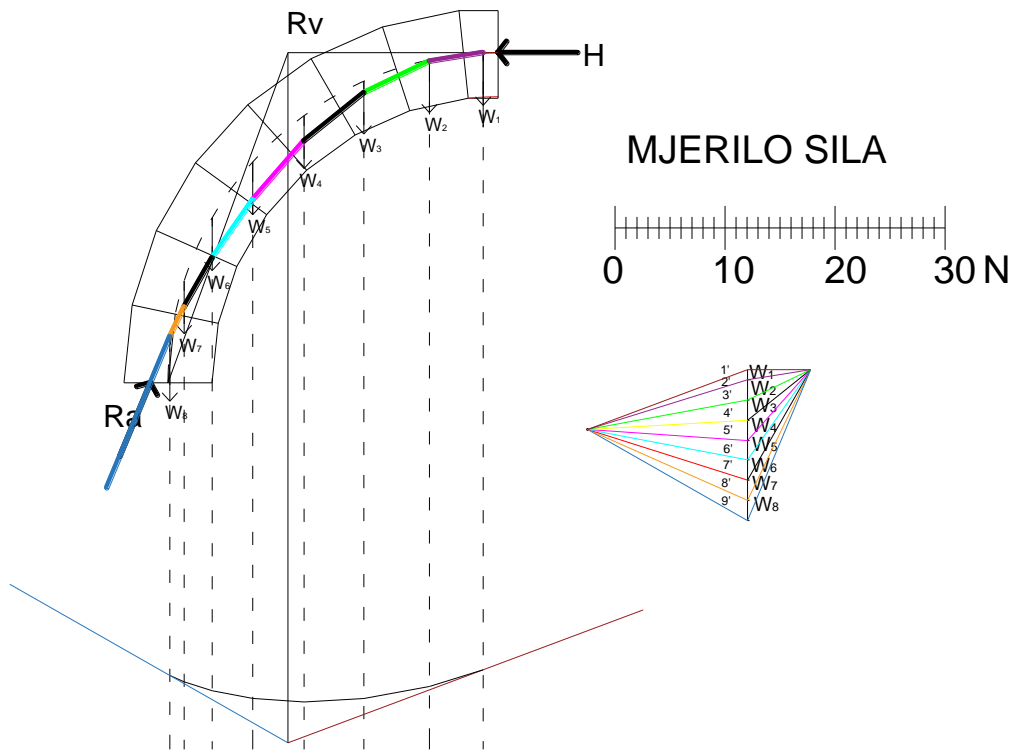
Geometrijski faktor sigurnosti:

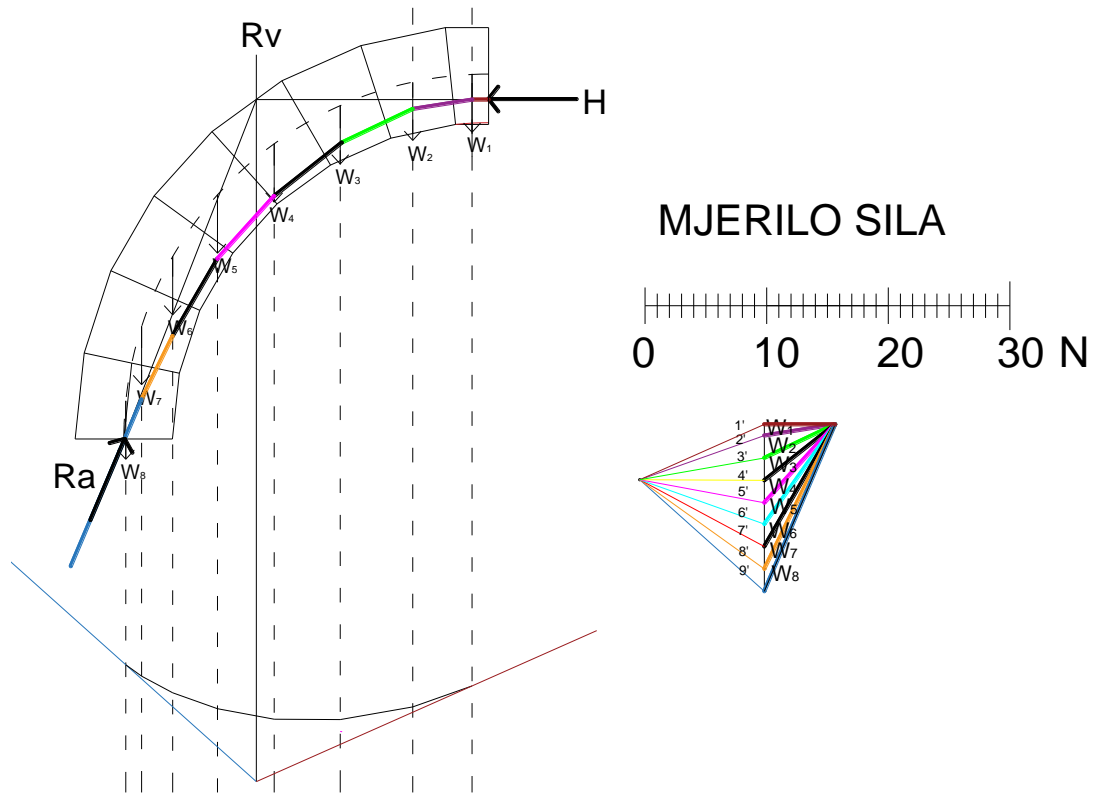
$$8/3,25 = 2,46$$



Slika 18. Omjer najmanje debljine luka  $t$  i radijusa luka  $R$  u ovisnosti o vrijednosti polovice kuta luka  $\alpha$  [8]

U nastavku su prikazane potporne linije uslijed vlastite težine luka.



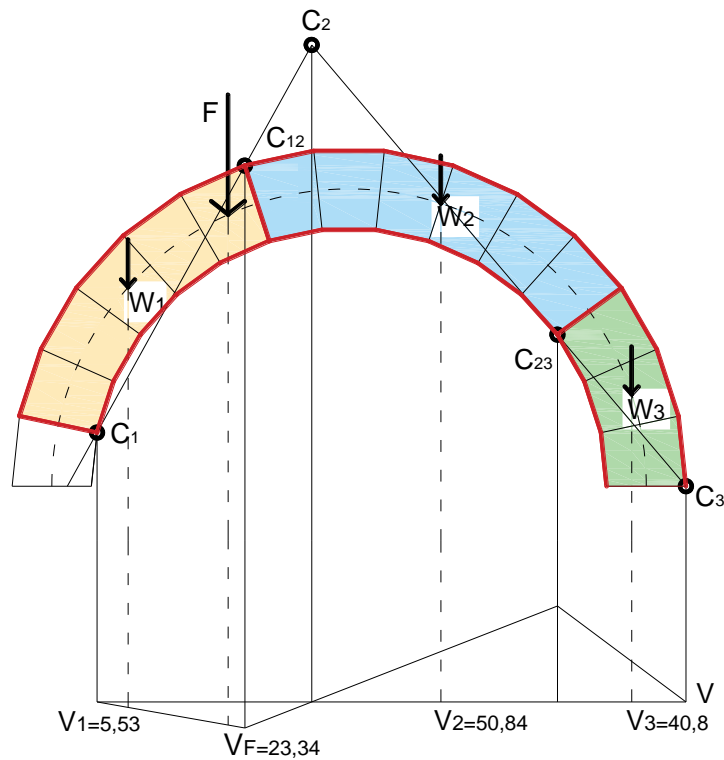


Slika 19. Potporne linije uslijed vlastite težine



## 5.2. Koncentrirana sila u četvrtini raspona (opterećenje bloka 6)

### 5.2.1. Slučaj 1



Slika 20. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.2.1.

Težine blokova:

$$W_1 = 5 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 9,22 \text{ N}$$

$$W_2 = 6 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 11,07 \text{ N}$$

$$W_3 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_w = 9,22 \cdot 5,53 - 11,07 \cdot 50,84 - 5,53 \cdot 40,8 = -737,44 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot 23,34$$

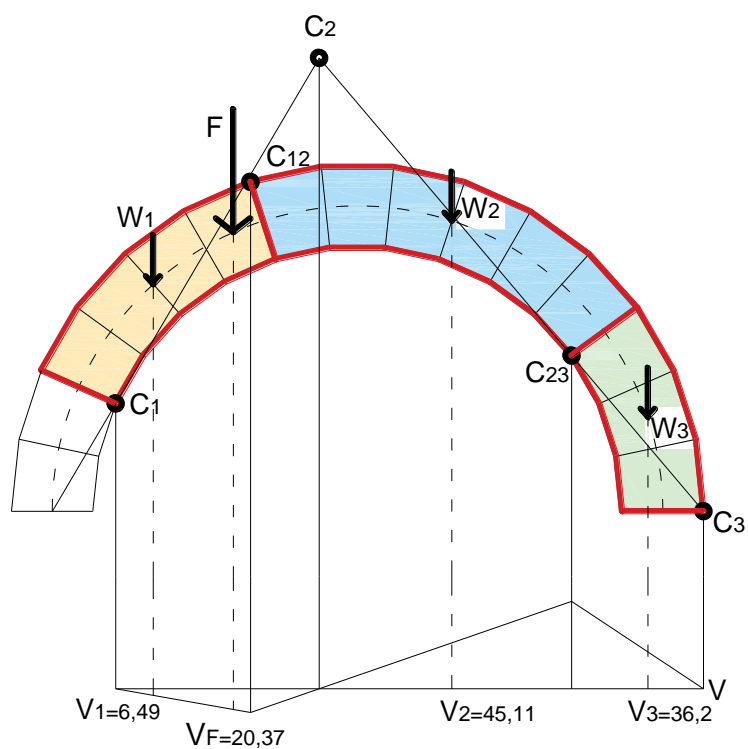
Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

$$L_w + L_F = 0$$

$$-2,64 + F \cdot 23,34 = 0$$

$$F = 737,44 / 23,34 = 31,6 \text{ N}$$

## 5.2.2. Slučaj 2



Slika 21. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.2.2.

Težine blokova:

$$W_1 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

$$W_2 = 6 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 11,07 \text{ N}$$

$$W_3 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_w = 7,38 \cdot 6,49 - 11,07 \cdot 45,11 - 5,53 \cdot 36,2 = -6,52 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot 20,37$$

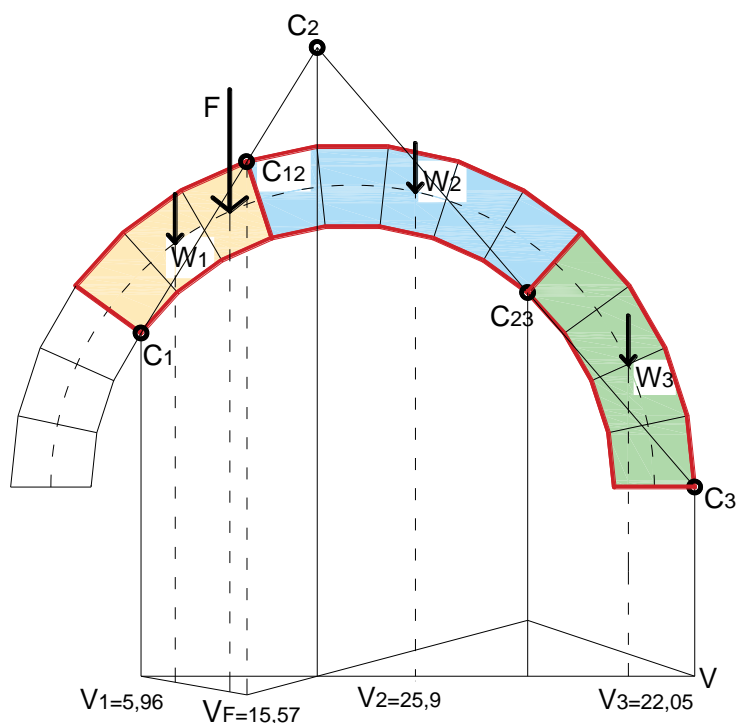
Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

$$L_w + L_F = 0$$

$$-6,52 + F \cdot 20,37 = 0$$

$$F = 6,52 / 0,20 = 31,99 \text{ N}$$

### 5.2.3. Slučaj 3



Slika 22. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.2.3.

Težine blokova:

$$W_1 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

$$W_2 = 5 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 9,22 \text{ N}$$

$$W_3 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_w = 5,53 \cdot 5,96 - 9,22 \cdot 25,9 - 7,38 \cdot 22,05 = -368,57 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot 15,57$$

Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

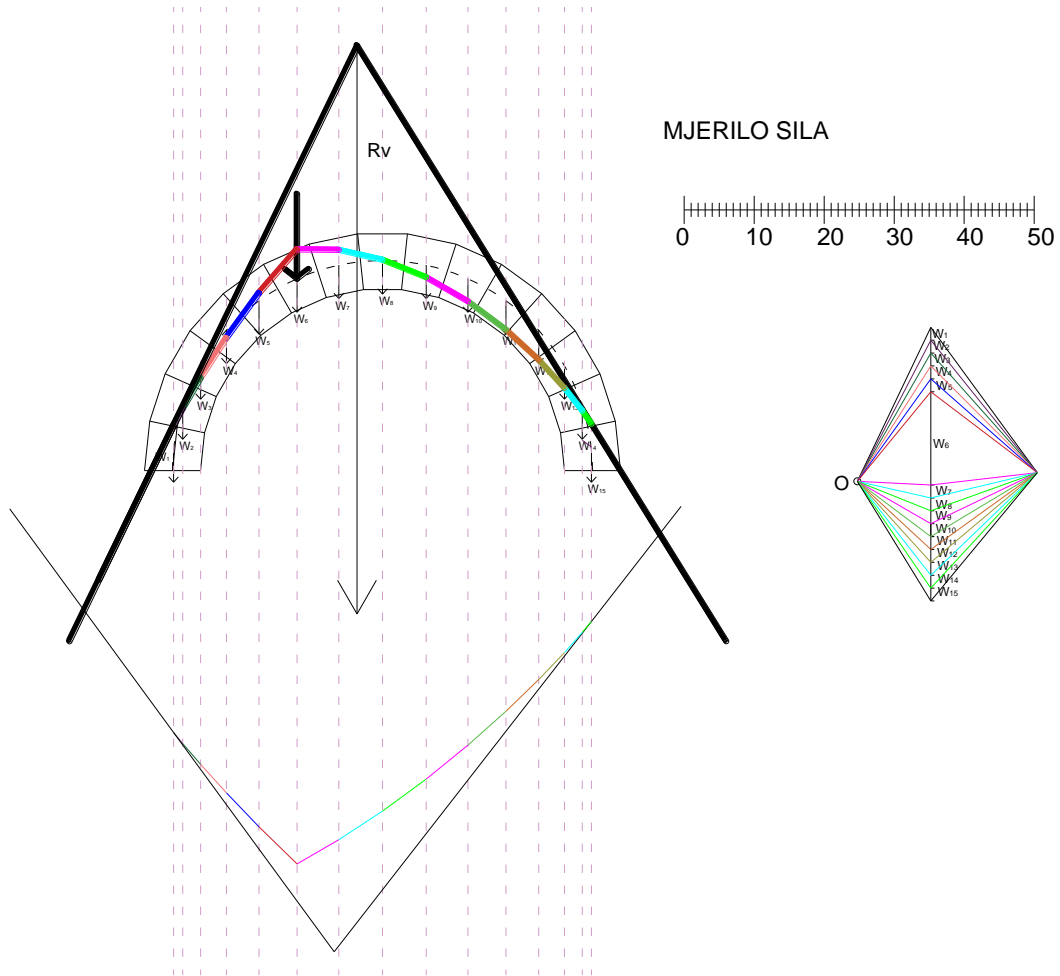
$$L_w + L_F = 0$$

$$-368,57 + F \cdot 15,57 = 0$$

$$F = 368,57 / 15,57 = 23,67 \text{ N}$$

### 5.2.4. Pronalazak potporne linije

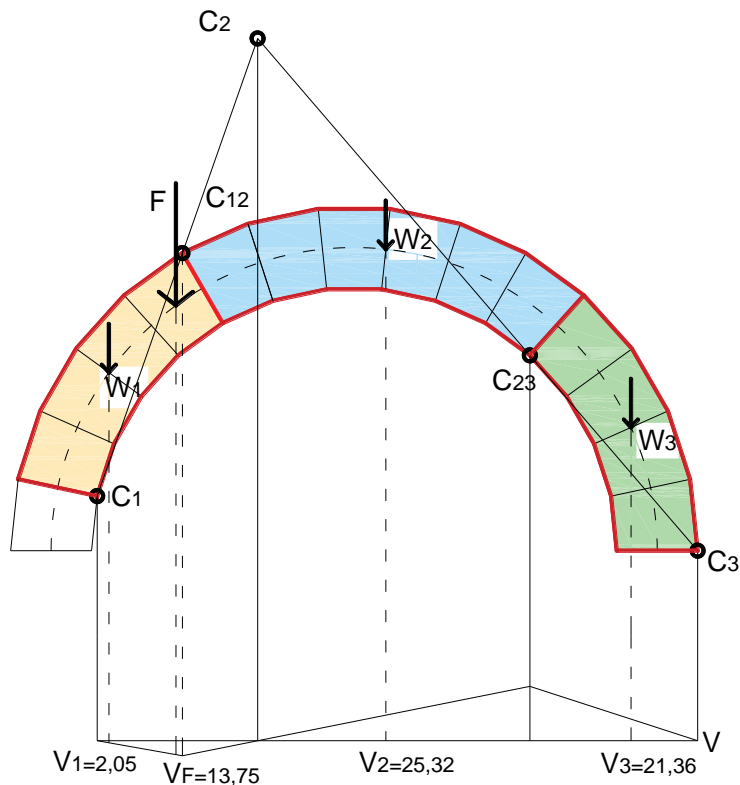
Nije moguće pronaći potporna liniju za vrijednost od 23,67 N. Najveća vrijednost za koju je potporna linija prošla kroz konturu luka je 11,5 N.



Slika 23. Potporna linija pri sili od 11,5 N

### 5.3. Koncentrirana sila u četvrtini raspona (opterećenje bloka 5)

#### 5.3.1. Slučaj 1



Slika 24. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.3.1.

Težine blokova:

$$W_1 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

$$W_2 = 6 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 11,07 \text{ N}$$

$$W_3 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_W = 7,38 \cdot 2,05 - 11,07 \cdot 25,32 - 7,38 \cdot 21,36 = -422,80 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot 13,75$$

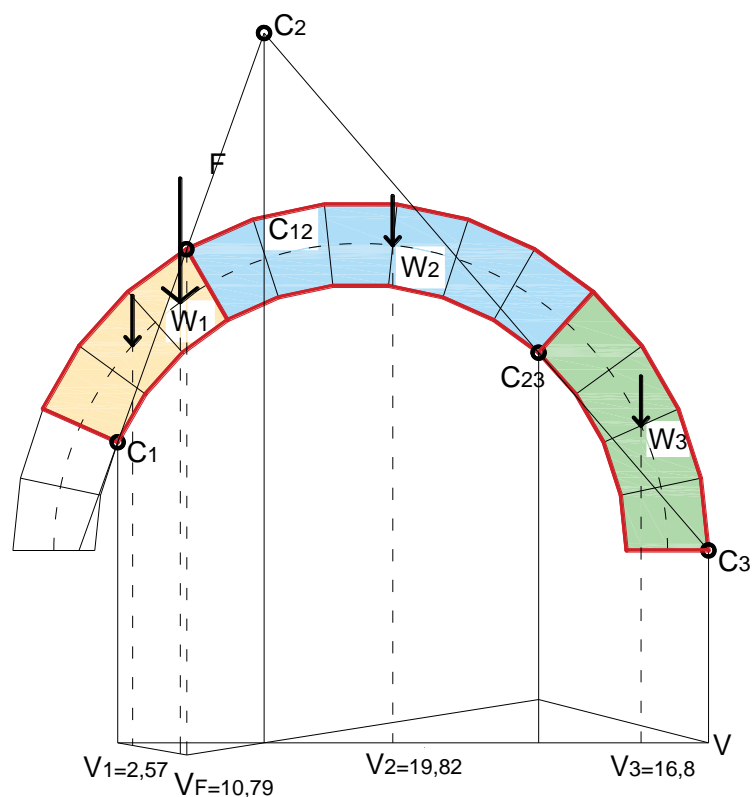
Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

$$L_W + L_F = 0$$

$$-422,08 + F \cdot 13,75 = 0$$

$$F = 422,08 / 13,75 = 30,7 \text{ N}$$

### 5.3.2. Slučaj 2



Slika 25. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.3.2.

$$W_1 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

$$W_2 = 6 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 11,07 \text{ N}$$

$$W_3 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_w = 5,53 \cdot 2,57 - 11,07 \cdot 19,82 - 7,38 \cdot 16,8 = -324,68 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot 10,79$$

Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

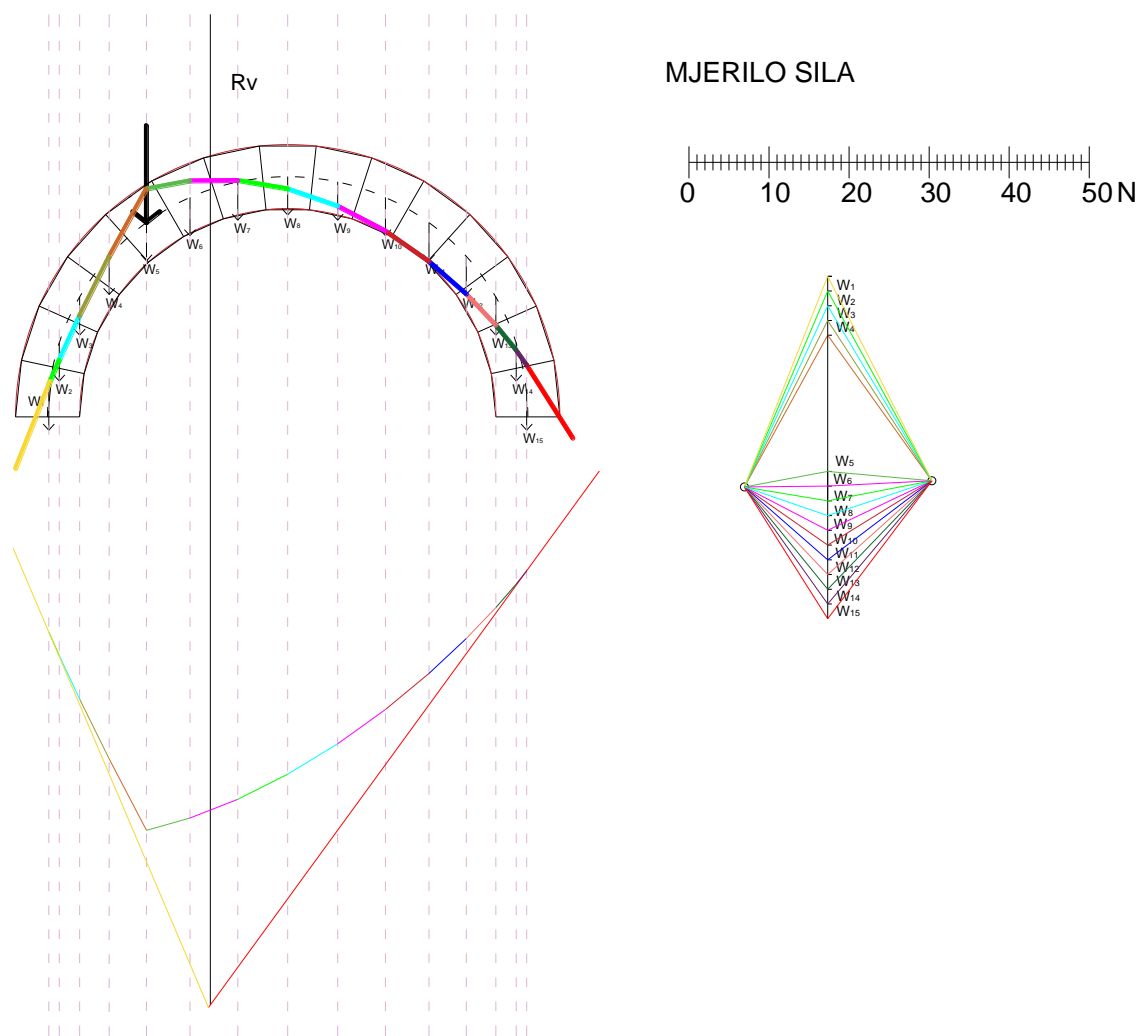
$$L_w + L_F = 0$$

$$-324,68 + F \cdot 10,79 = 0$$

$$F = 324,68 / 10,79 = 30,1 \text{ N}$$

### 5.3.3. Pronalazak potporne linije

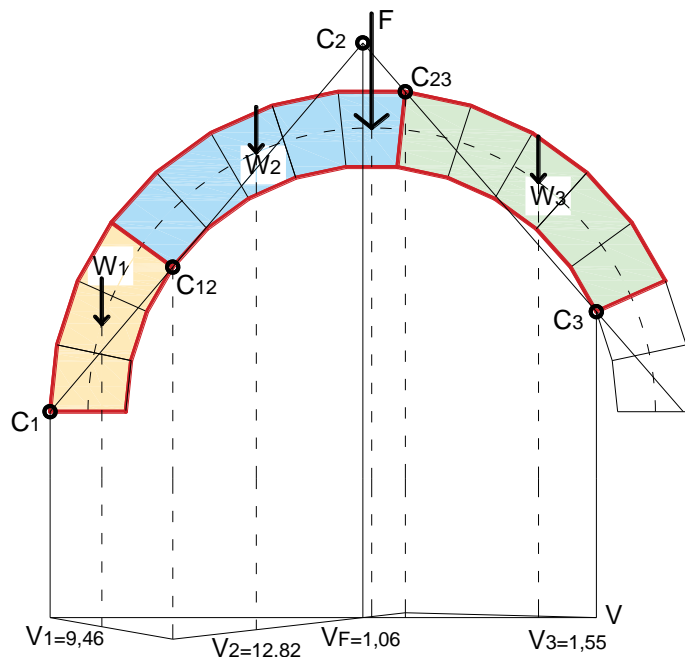
Nije moguće pronaći potpornu liniju za vrijednost od 30,7 N. Najveća vrijednost za koju je potporna linija prošla kroz konturu luka je 17 N.



Slika 26. Potporna linija pri sili od 17 N

## 5.4. Koncentrirana sila na sredini raspona

### 5.4.1. Slučaj 1



Slika 27. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.4.1.

Težine blokova:

$$W_1 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

$$W_2 = 5 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 9,22 \text{ N}$$

$$W_3 = 5 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 9,22 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_w = 5,53 \cdot 9,46 + 9,22 \cdot 12,82 - 9,22 \cdot 1,55 = 156,22 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot (-1,06)$$

Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

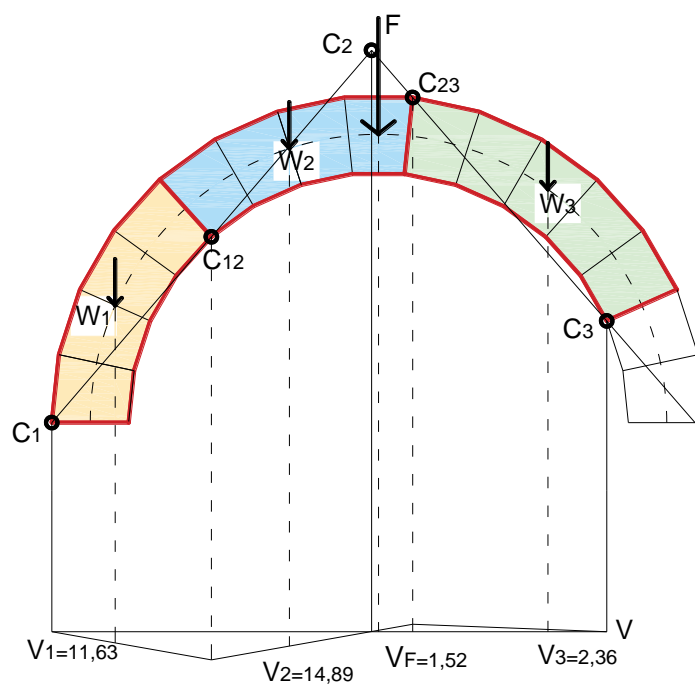
$$L_w + L_F = 0$$

$$156,22 - F \cdot 1,06 = 0$$

$$F = 156,22 / 1,06 = 147,38 \text{ N}$$



## 5.4.2. Slučaj 2



Slika 28. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.4.2.

Težine blokova:

$$W_1 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

$$W_2 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

$$W_3 = 5 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 9,22 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_W = 7,38 \cdot 11,63 + 7,38 \cdot 14,89 - 9,22 \cdot 2,36 = 173,96 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot (-1,52)$$

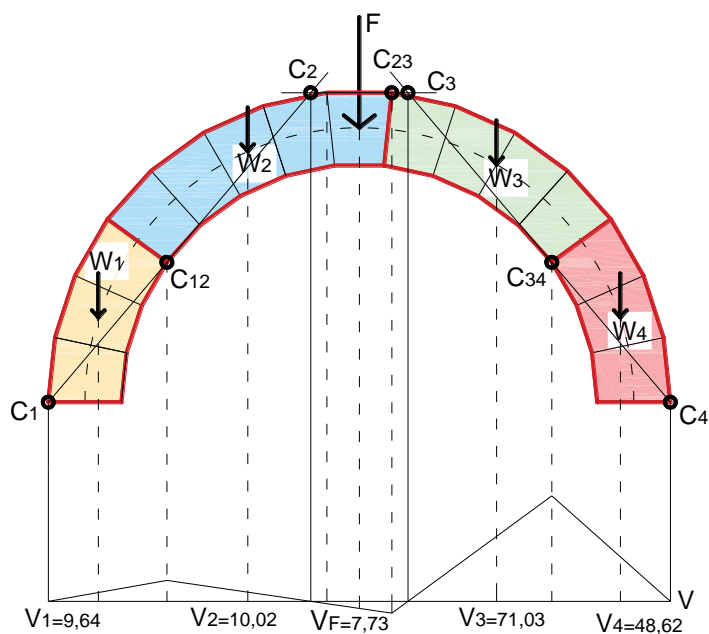
Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

$$L_W + L_F = 0$$

$$173,96 - F \cdot 1,52 = 0$$

$$F = 173,96 / 1,52 = 114,45 \text{ N}$$

### 5.4.3. Slučaj 3



Slika 29. Kinematički dopustivi mehanizam i plan virtualnog pomak za slučaj 5.4.3.

Težine blokova:

$$W_1 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

$$W_2 = 5 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 9,22 \text{ N}$$

$$W_3 = 4 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 7,38 \text{ N}$$

$$W_4 = 3 \cdot 0,188 \cdot 9,81 = 5,53 \text{ N}$$

Virtualni rad vlastite težine luka:

$$L_w = -5,53 \cdot 9,64 - 9,22 \cdot 10,02 - 7,38 \cdot 71,03 - 5,53 \cdot 48,62 = -938,76 \text{ N}$$

Virtualni rad vanjske koncentrirane sile F:

$$L_F = F \cdot V_F = F \cdot 7,73$$

Iz jednadžbe virtualnog rada dobiva se vrijednost sile F:

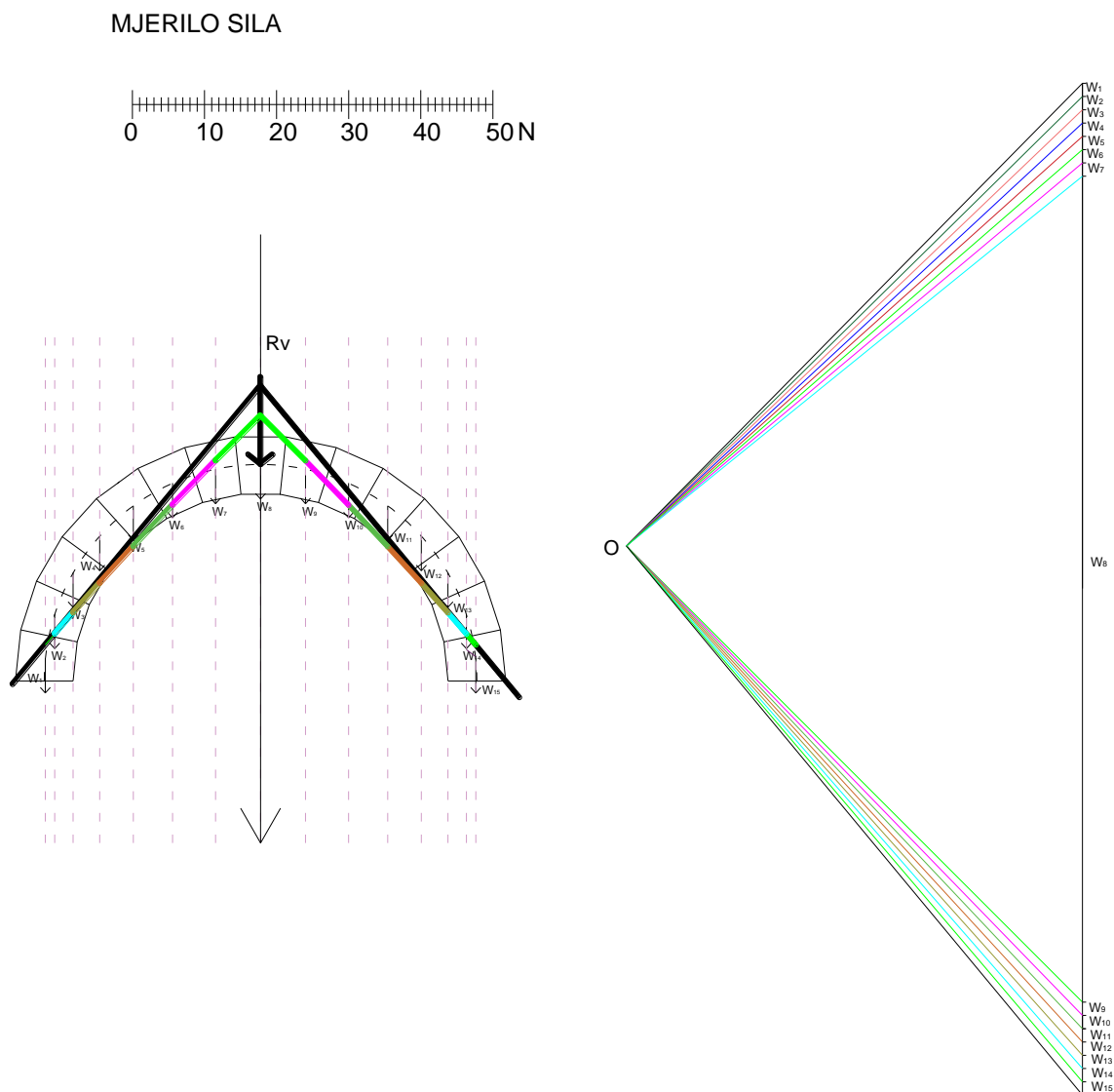
$$L_w + L_F = 0$$

$$-938,76 + F \cdot 7,73 = 0$$

$$F = -938,76 / 7,73 = 121,44 \text{ N}$$

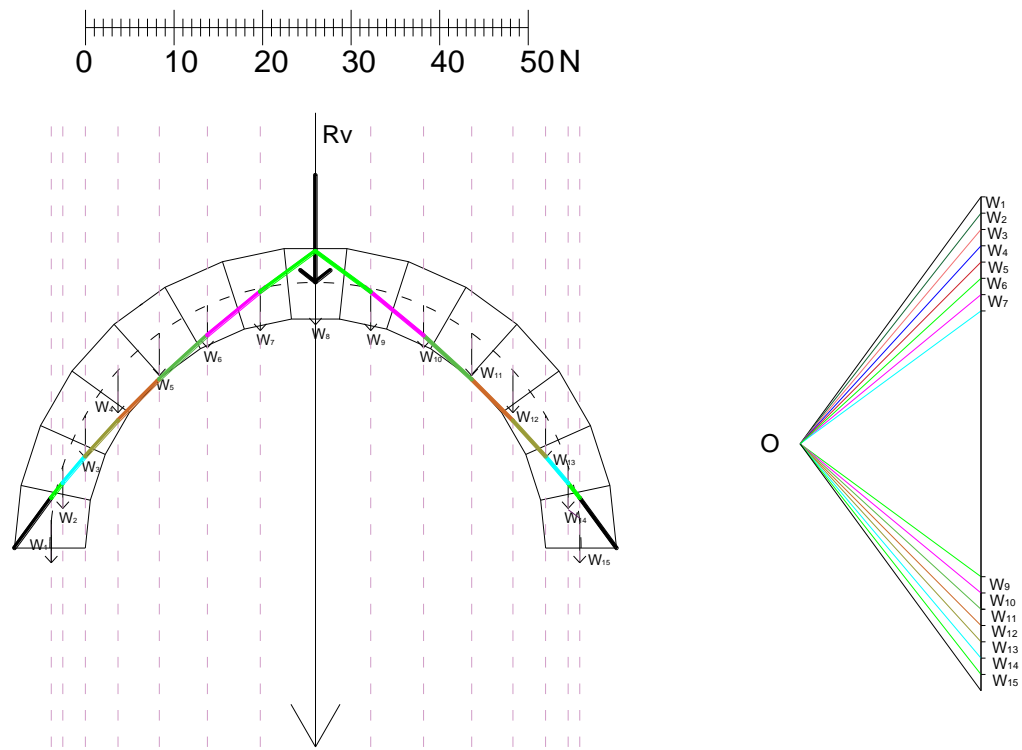
#### 5.4.4. Pronalazak potporne linije

Nije moguće pronaći potpurnu liniju za vrijednost od 114,45 N. Najveća vrijednost za koju je potporna linija prošla konturu luka je 30 N.



Slika 30. Potporna linija uslijed sile od 114,45 N

# MJERILO SILA

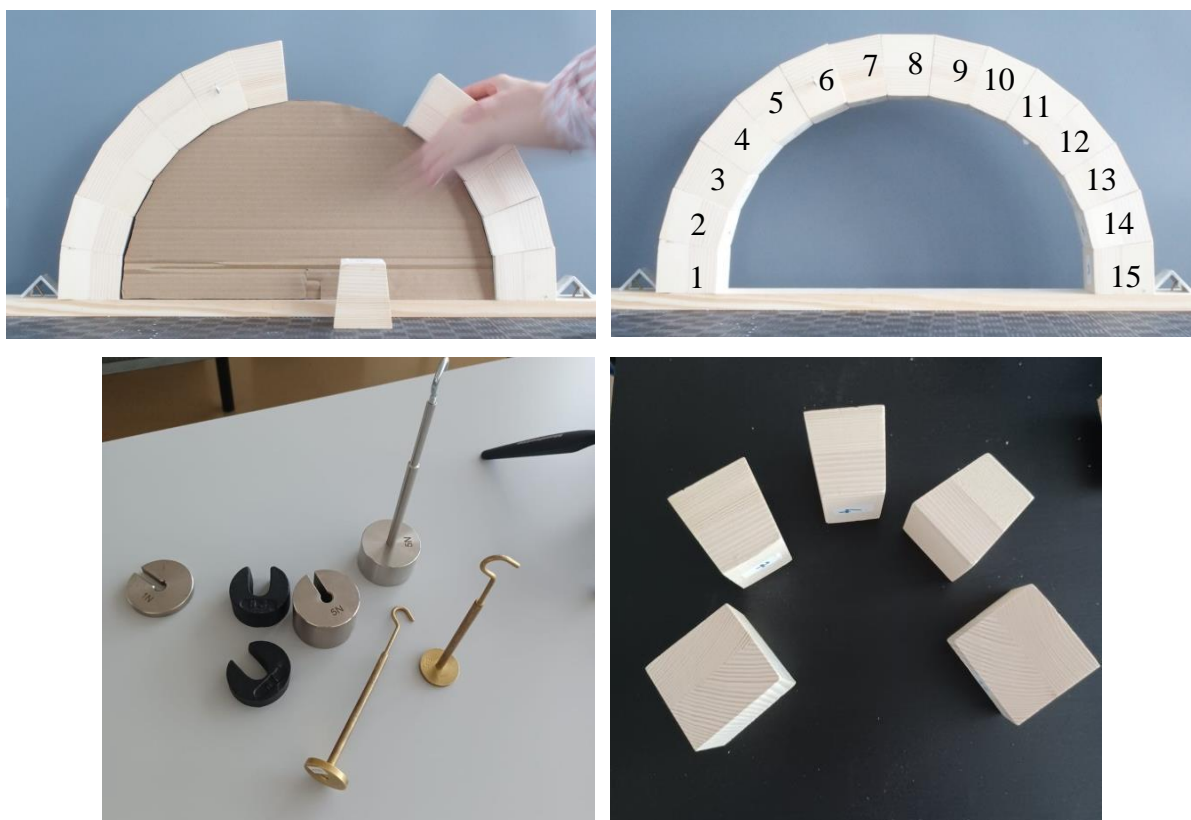


Slika 31. Potporna linija pri sili od 30 N

## 6. EKSPERIMENTALNI MODEL

U nastavku je dokumentiran eksperiment koji se sastojao od jednostavnog modela luka u situacijama koje su prikazane u proračunu u prethodnom poglavlju. Model luka se sastoji od 15 drvenih blokova.

Za slaganje luka korištena je oplata od kartona, kojoj se donji rub mogao presaviti tako da se oplata može spustiti i izvaditi. Kao opterećenje su korišteni utezi vrijednosti 0,5 N, 1 N, 2 N i 5 N koji su na model ovješeni pomoću kuka. Oslonci modela su napravljeni tako da preuzimaju horizontalnu reakciju, a istovremeno omogućavaju rotaciju blokova. Koristila se drvena podloga kako bi trenje bilo isto kao između blokova (važno u slučaju testova s pomakom oslonca).



Slika 32. Materijali za pripremu modela



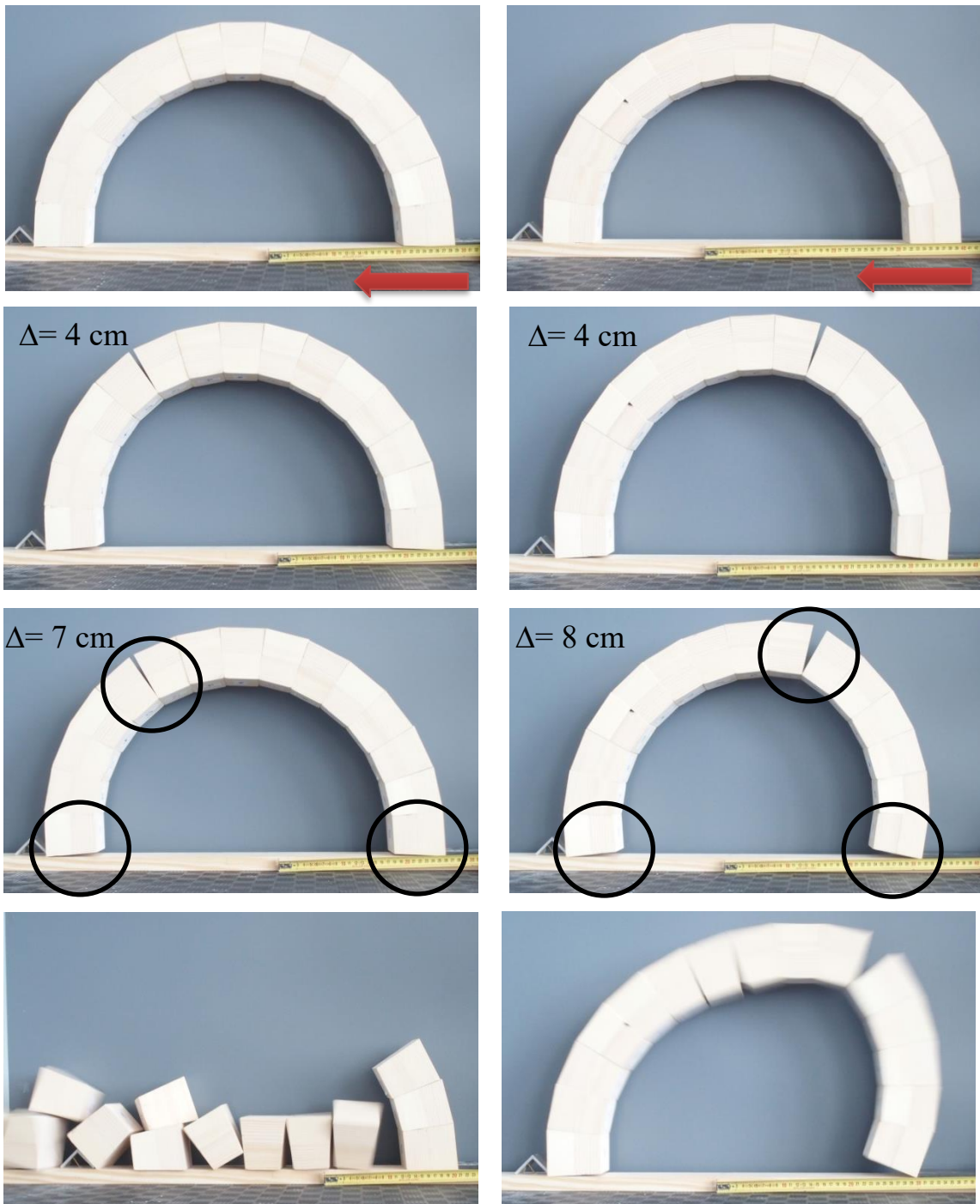
Slika 33. Eksperimentalni postav

U nastavku su prikazani provedeni testovi, pri čemu je opterećenje ili pomak nanošeno u koracima, te je svaki korak fotografiran. U nekim je testovima zabilježen trenutak neposredno prije rušenja.

## 6.1. Test 1 : smanjenje raspona luka

a)

b)



Slika 34. Test 1- pretvaranje sustava u mehanizam uslijed smanjenja raspona

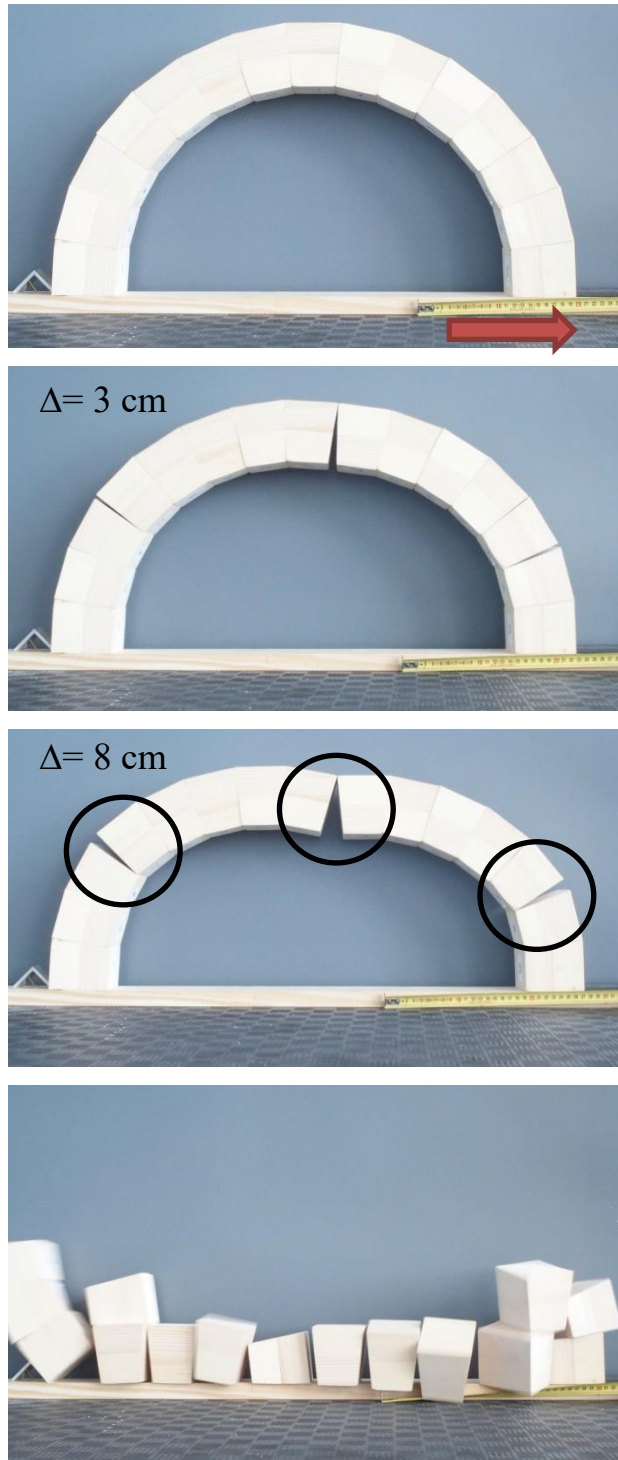
- a) zglob se u polju formirao samo lijevo
- b) zglob se u polju formirao samo desno

U prvom testu je promatrano ponašanje modela luka uslijed promjene raspona. Smanjenje raspona provedeno je uklanjanjem desnog oslonca i ručnim pomicanjem u lijevo donjeg bloka u koracima. Na slici 22 prikazan je proces pretvaranja sustava u mehanizam. Prema slici 12 očekivani broj zglobova bio bi 4, za svaki slučaj kada se pomiču oba oslonca. Kako je u ovom slučaju pomak nanošen samo na desnom osloncu, tu su se otvorila samo 3 zgloba. Na slici 22 su prikazana 2 testa. U slučaju a) zglob se otvorio lijevo između 5. i 6. bloka te na osloncima, dok se u slučaju b) zglob se otvorio desno između 9. i 10. bloka te na osloncima.



## 6.2. Test 2: povećavanje raspona luka

U drugom testu analizirano je ponašanje luka uslijed povećanja raspona. I ovdje je desni oslonac uklonjen, a pomak je nanošen ručno pomicanjem u desno najdonjeg bloka u koracima.

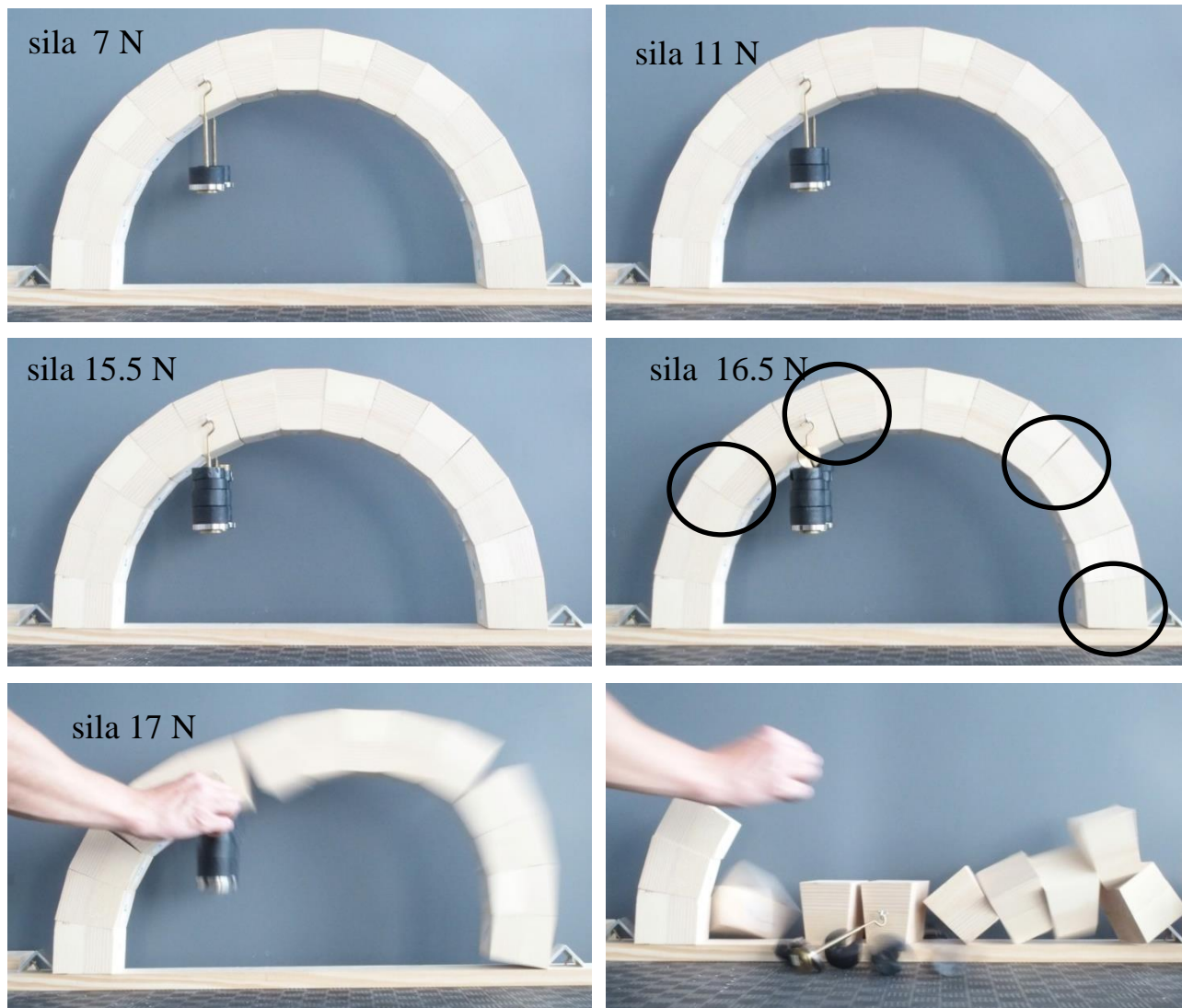


Slika 35. Test 2- Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećavanja raspona

Slika 23 pokazuje proces povećavanja raspona sve do rušenja luka. Formirala su se 3 zgloba: između 3. i 4., 8. i 9., te između 13. i 14. bloka, što je usporedivo sa slikom 12. Kako je model sastavljen od neparnog broja blokova, nije moguć simetričan raspored zglobova na modelu.

### 6.3. Test 3: nanošenje sile u 6. bloku modela luka

Ovaj test prikazuje luk opterećen silom u težištu 6. bloka. Vrijednost sile koja je uzrokovala rušenje iznosi 17 N. Formirala su se 4 zgloba naizmjenično na intradosu i ekstradosu: između 3. i 4., 6. i 7., 11. i 12. bloka te na desnom osloncu. Na pretposljednjoj slici se jasno može uočiti formiranje 4 kruta bloka i njihova rotacija oko zglobova.



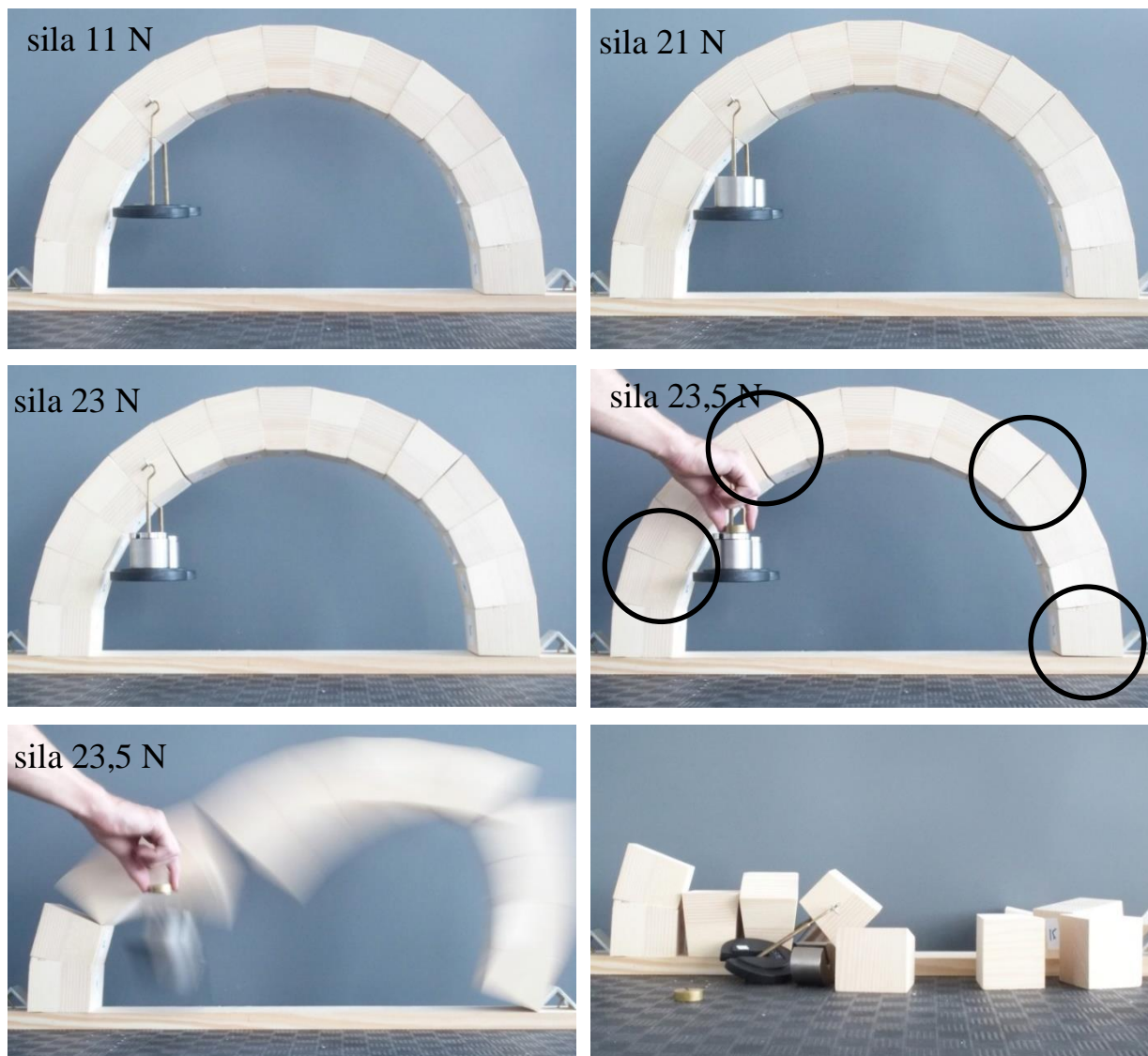
Slika 36. Test 3- Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećanja opterećenja na blok 6. Na slici u nastavku dan je uvećani prikaz zglobova pri sili od 16,5 N.



Slika 37. Uvećani prikaz otvorenih zglobova pri sili od 16,5 N

#### 6.4. Test 4: nanošenje sile u 5. bloku modela luka

Test 4. prikazuje proces rušenja luka uslijed nanošenja sile u težištu bloka 5. Vrijednost sile koja je uzrokovala rušenje iznosi 23,5 N. Uslijed opterećenja došlo je formiranja 4 zgloba te pretvaranja sustava u mehanizam. Zglobovi su se otvorili između 2. i 3., 5. i 6., 11. i 12. bloka te na desnom osloncu.



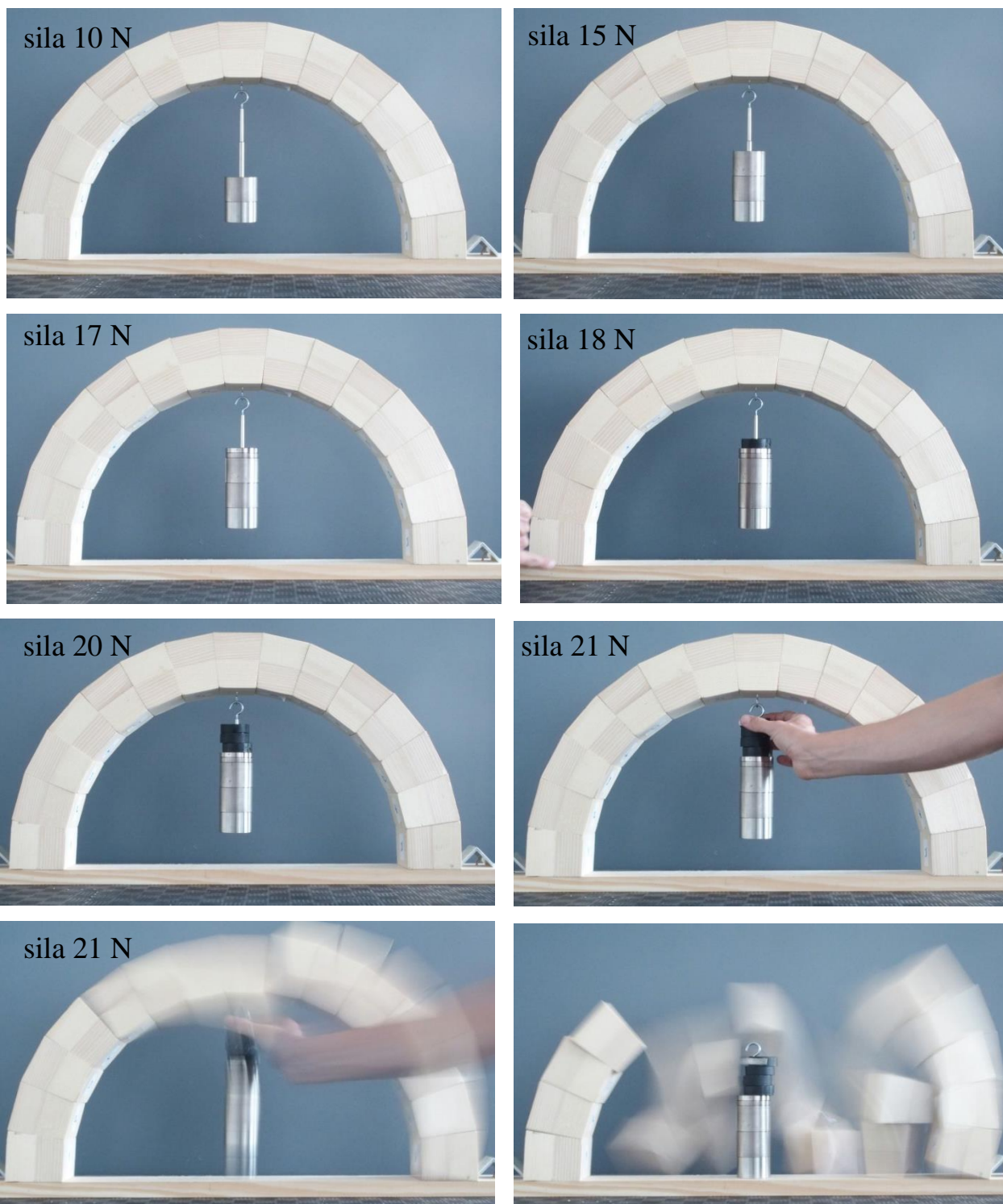
Slika 38. Test 4 - Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećanja opterećenja na blok 5



Slika 39. Uvećani prikaz otvorenih zglobova pri sili od 23 N

### 6.5. Test 5: nanošenje sile na sredini raspona modela luka

Na slici 28. je prikazan model luka opterećen silom na sredini raspona.



Slika 40. Test 5 - Proces pretvaranja sustava u mehanizam uslijed povećanja opterećenja u sredini raspona

Sila koja je uzrokovala rušenje iznosi 21 N. Sila je puno manja nego što je dobivena numerički te se zglobovi nisu dovoljno otvorili. Razlog tome je nesavršenost drvenog modela.



## 7. ZAKLJUČAK

U radu je obrađena tematika lučnih konstrukcija. Nakon kratkog teoretskog uvoda napravljen je proračun dobivanja granične sile kinematičkom metodom te pronalazak potporne linije grafostatičkom metodom. Ako se potporna linija nalazi unutar kontura luka to znači da je luk stabilan. U radu su prikazani slučajevi s koncentriranom silom u četvrtini raspona, opterećenje u 5. i opterećenje u 6. bloku, te koncentriranom silom u sredini raspona. Dobivene vrijednosti sila su isprobane na drvenom modelu. Vrijednosti dobivene u proračunu i eksperimentalnom modelu se ne poklapaju. U prvom testu je promatrano smanjenje raspona luka. Prema teoretskom dijelu očekivani broj zglobova je 4, zbog nanošenja sile samo na jednom osloncu, otvorila su se 3 zgloba. Pri analizi testa 2, povećanju raspona, otvorila su se 3 zgloba kao što je i očekivano. Test 3 prikazuje model luka opterećen silom u težištu 6. bloka. Vrijednost sile koja je uzrokovala rušenje u modelu (17 N) i granične sile dobivene u proračunu (23,67 N) se ne poklapaju. Formirala su se 4 zgloba. U testu 4 je također napravljena usporedba sile dobivene u proračunu koja iznosi 30,7 N dok smo u eksperimentalnom modelu dobili manju silu od 23,5 N. Na kraju, najveća razlika dobivenih vrijednosti je prikazana u testu 5. Sila dobivena u proračunu iznosi 114,5 N dok u modelu drvenog luka sila koja uzrokuje rušenje iznosi 21 N. Manje vrijednosti dobivenih sila na drvenom modelu u usporedbi s proračunanim vrijednostima su posljedica izvedbe drvenog modela tj. njegove nesavršenosti.

## 8. LITERATURA:

- [1] Tehnička enciklopedija, svezak 8, natuknica Mostovi Masivni, str 687, Leksikografski zavod, 1982.
- [2] Peulić, Đ., Konstruktivni elementi zgrada, Croatia knjiga, Zagreb, 2002.
- [3] Heyman, J. „The stone skeleton- Structural engineering of masonry architecture”, Cambridge University Press, 1995.
- [4] Heyman, J. „The masonry arch, Ellis Horwood limited, 1982.
- [5] <https://nastava.tvz.hr/gukov/pdf/5-luk.pdf> pristup 7.6.2021.
- [6] P. Roca, P.B. Laurenco, A. Gaetani, Historic construction and conservation: materials, systems and damage, CRC Press, 2019.
- [7] <https://www.youtube.com/watch?v=JIL6ZHChhQE> pristup 8.6.2021.
- [8] Ochsendorf, J.A., Collapse of masonry structures, doktorska disertacija, University of Cambridge, 2002.