

# Analitički i eksperimentalni pristup određivanju reznih sila u presjecima greda

---

**Baćac, Mario**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:747227>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Mario Baćac**

**Analitički i eksperimentalni pristup određivanju reznih sila u  
presjecima greda**

**Završni rad**

**Rijeka, 09. 2021.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Sveučilišni preddiplomski studij  
Mehanika I**

**Mario Baćac  
JMBAG: 0114030661**

**Analitički i eksperimentalni pristup određivanju reznih sila u  
presjecima greda**

**Završni rad**

**Rijeka, 09.2021.**

Naziv studija: **Sveučilišni preddiplomski studij Građevinarstvo**

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Temeljne tehničke znanosti

Znanstvena grana: Tehnička mehanika

Tema završnog rada

**ANALITIČKI I EKSPERIMENTALNI PRISTUP ODREĐIVANJU REZNIH SILA U  
PRESJECIMA GREDA  
ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF SHEAR FORCES AND BENDING  
MOMENTS IN BEAMS**

Kandidat: **MARIO BAĆAC**

Kolegij: **MEHANIKA 1**

Završni rad broj: **21-P-54**

**Zadatak:**

Za gredni nosač definiranih dimenzija potrebno je eksperimentalnim putem izmjeriti vrijednost reznih sila (posmične sile i momenti savijanja) u unaprijed definiranom presjeku. Potom je rezultate potrebno usporediti sa teorijski dobivenim veličinama te dati primjerene zaključke.

**Tema rada je uručena:** 24. veljače 2021.

Mentorica:

doc. dr. sc. Edita Papa  
dipl. ing. građ.

## ***IZJAVA***

Završni rad sam izradio samostalno, u suradnji s mentoricom uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Mario Baćac

U Rijeci, 15. rujna 2021.

# IZJAVA

Završni rad nastao je kao rezultat rada u okviru projekta

## **Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci**

Voditelj projekta prof. dr. sc. Nevenka Ožanić  
Šifra projekta RC.2.2.06-0001  
Financijer projekta Europski fond za regionalni razvoj (EFRR)  
Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH  
Pravna nadležnost Republika Hrvatska

U Rijeci, 15.09.2021.

Mentor:

Edita Papa Dukić

## **SAŽETAK**

U ovom radu provesti će se eksperimentalno ispitivanje reznih sila tj. sila smicanja i momenta savijanja na gredi prema unaprijed definiranom presjeku. Testiranje se provodilo na laboratorijskom uređaju P.A.Hilton Ltd HST46. U prvom dijelu eksperimenta cilj nam je shvatiti djelovanje sila smicanja na gredu na definiranom presjeku grede, nakon što smo gredu opteretili utezima od 20N,10N,5N,2N na vješalicama koje imaju točno definirana mjesta na gredi. U drugom dijelu moramo obaviti ispitivanje momenta savijanja na gredu na definiranom presjeku grede, koje se također određuje postavljanjem određenog utega od 20N, 10N, 5N, 2N na vješalice koje imaju točno određena mjesta na gredi. Rezultati mjerenja deformacija za sva ispitivanja očitavaju se na instrumentu HDA200 Interface. Konačni cilj je analitičkom metodom izračunati sile smicanja i momente savijanja, te ih usporediti sa izmjerenim vrijednostima.

## **KLJUČNE RIJEČI**

Sila smicanja, moment savijanja, deformacije, analitička metoda, eksperimentalna analiza

## **SUMMARY**

In this paper, an experimental test of internal forces, ie shear forces and bending moment on a beam, according to a predefined cross section, will be performed. Testing was performed on a laboratory testing machine of P.A.Hilton Ltd HST46. In the first part of the experiment, our goal is to understand the effect of shear on the beam on a defined part of the beam, when the beam is loaded with weights of 20N, 10N, 5N, 2N on hangers that have precisely defined places on the beam. In the second part, we have to test the bending moment on the beam on a defined part of the beam, which is also determined by placing a certain weight of 20N, 10N, 5N, 2N on hangers that have precisely defined places on the beam. The measurement results for strains are read on the HDA200 Interface instrument. The final goal is to calculate the shear forces and bending moments by the analytical method and compare them with the experimental results.

## **KEY WORDS**

Shear force, bending moment, strains, analytical method, experimental analysis



## SADRŽAJ

SAŽETAK .....	6
SUMMARY.....	7
POPIS TABLICA .....	9
POPIS SLIKA.....	10
1. UVOD.....	12
2. OPREMA.....	13
3. OSNOVE O REZNIM SILAMA .....	16
3.1. Ravnotežne jednačbe krutog tijela .....	17
4. EKSPERIMENTI .....	18
4.1. Način funkcioniranja uređaja .....	18
4.1.1. Teorijske osnove na kojima funkcionira uređaj .....	20
4.2. Ispitivanje sila smicanja na gredi .....	23
4.3. Ispitivanje momenta savijanja na gredi .....	27
5. ANALITIČKA METODA .....	32
5.1. Proračun sila smicanja na gredi.....	32
5.1.1. Diagrami sila smicanja na gredi .....	40
5.2. Proračun momenta savijanja na gredi .....	44
5.2.1. Diagrami momenta savijanja na gredi.....	53
6. USPOREDBA ANALITIČKE I EKSP. ANALIZE .....	58
7. ZAKLJUČAK.....	61
8. LITERATURA I IZVORI .....	61

## POPIS TABLICA

Tablica 1-Poprečna sila na gredi nakon nanošenja 10N i 20N na vješalici za utege W3 .....	24
Tablica 2-poprečna sila na gredi kada je opterećena na vješalici za utege W2 sa 10N .....	24
Tablica 3-Poprečna sila na gredi kada je opterećena na vješalici za utege W1 sa 10N .....	25
Tablica 4-Poprečna sila na gredi nakon šta je opterećena na vješalicama W3 sa 12N .....	26
Tablica 5-Poprečna sila na gredi nakon šta je opterećena na W3 sa 10N, .....	26
Tablica 6-Poprečna sila na gredi nakon sta je opterećena na W3 sa 10N, .....	26
Tablica 7- Sila savijanja i moment savijanja za 10N na W1.....	28
Tablica 8-Sila savijanja i moment savijanja za 20N na W1.....	28
Tablica 9-Sila savijanja i moment savijanja za 10N na W2.....	29
Tablica 10-Sila savijanja i moment savijanja za 20N na W2.....	29
Tablica 11-Sila savijanja i moment savijanja za 10N na W3.....	29
Tablica 12-Sila savijanja i moment savijanja za 20N na W3.....	30
Tablica 13-Sila savijanja i moment savijanja za 5N na W1 i 12N na W3. ....	30
Tablica 14-Sila savijanja i moment savijanja za 5N na W1, 10N na W2 i 2N na W3.....	31
Tablica 15-Omjer između $Q_c/Q_x$ kada $W_3=10$ i kada je $W_3=20N$ . ....	58
Tablica 16-Omjer između $Q_c/Q_x$ kada je $W_2=20N$ . ....	58
Tablica 17-Omjer između $Q_c/Q_x$ kada je $W_1=10N$ . ....	58
Tablica 18- Omjer između $Q_c/Q_x$ kada je $W_1=5N$ i $W_3=12N$ . ....	59
Tablica 19-Omjer između $Q_c/Q_x$ kada je $W_1=5N$ , $W_2= 2$ i $W_3=10N$ . ....	59
Tablica 20-Omjer između $Q_c/Q_x$ kada je $W_1=5N$ , $W_2=10N$ i $W_3=10N$ . ....	59
Tablica 21-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_1=10N$ . ....	59
Tablica 22-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_1=20N$ . ....	59
Tablica 23-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_2=10N$ . ....	60
Tablica 24-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_2=20N$ . ....	60
Tablica 25-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_3=10N$ . ....	60
Tablica 26- Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_3=20N$ . ....	60
Tablica 27-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_1=5N$ i $W_3=12N$ . ....	60
Tablica 28-Omjer između $M/Q_s$ kada je $W_1=5N$ , $W_2=10N$ i $W_3=2N$ . ....	61

## POPIS SLIKA

Slika 1- Priručnik za obavljanje ekspreimenta .....	13
Slika 2- Aparatura za izvođenje pokusa .....	14
Slika 3- Uređaj za očitavanje mjerenja HDA200 .....	15
Slika 4-Utezi za nanošenje na vješalice .....	15
Slika 5-skica oslobođenih reznih sila u presjeku. ....	16
Slika 6-opterećena greda i diferencijalni element grede. ....	17
Slika 7- niveliranje grede pomoću libele.....	18
Slika 8- niveliranje grede .....	19
Slika 9-Tenzometar .....	19
Slika 10-skica grede sa vertikalnim i horizontalnim tenzometrima u mm.....	20
Slika 11- kote grede i vješalice za utege .....	23
Slika 12- uteg od 10 N na vješalici za utege W3.....	24
Slika 13-Kote grede i vješalice za utege. ....	25
Slika 14-Greda opterećena sa 10N na vješalici za utege W1. ....	28
Slika 15-uteg od 5N na vješalici W1 i 12N na vješalici W3.....	31
Slika 16-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici W3. ....	32
Slika 17-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	33
Slika 18-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W3. ....	33
Slika 19-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	34
Slika 20-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici W2. ....	35
Slika 21-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	35
Slika 22-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W1. ....	36
Slika 23-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	36
Slika 24-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici W1 .....	37
Slika 25-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	38
Slika 26-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici W1, .....	38
Slika 27-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	39
Slika 28-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici W1, .....	39
Slika 29-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qx.....	40
Slika 30-Dijagram poprečnih sila kada je W3=10N. ....	40
Slika 31-Dijagram poprečnih sila kada je W3=20N. ....	41
Slika 32-Dijagram poprečnih sila kada je W2=10N. ....	41
Slika 33-Dijagram poprečnih sila kada je W1=10N. ....	42
Slika 34-Dijagram poprečnih sila kada je W3=12N, a W1=5N.....	42
Slika 35-Dijagram poprečnih sila kada je W3=10N, W2=2N i W1=5N .....	43
Slika 36-Dijagram poprečnih sila kada je W3=10N, W2=10N i W1=5N. ....	43
Slika 37-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici W1. ....	44
Slika 38—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qs.....	45
Slika 39-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W1. ....	46
Slika 40—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qs.....	46
Slika 41-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici W2. ....	47
Slika 42—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qs.....	47
Slika 43-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W2. ....	48
Slika 44—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila Qs.....	48
Slika 45-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici W3. ....	49

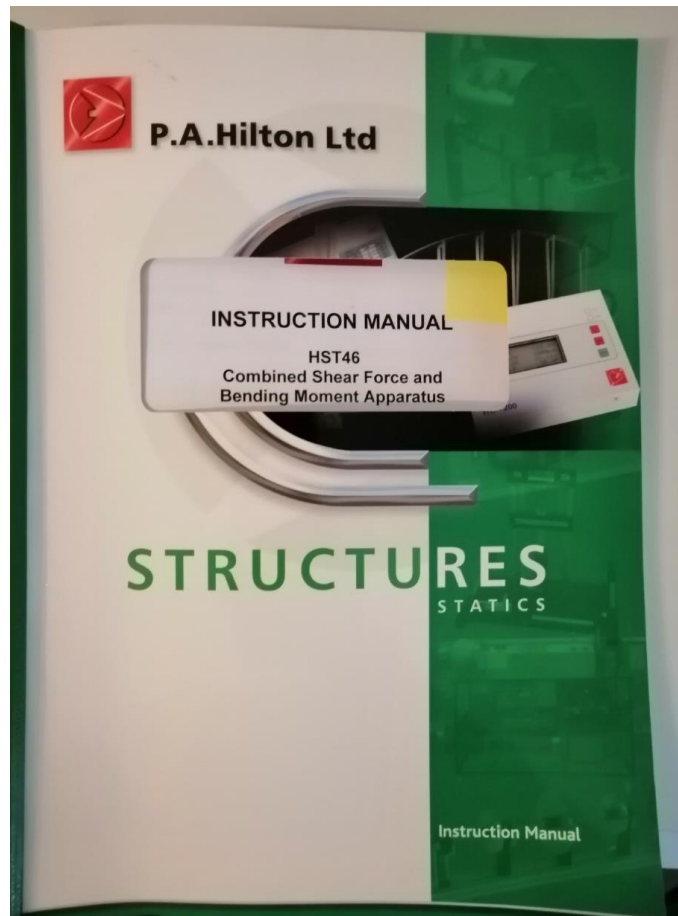
Slika 46—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila $Q_s$ .....	49
Slika 47-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W3. ....	50
Slika 48—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila $Q_s$ .....	50
Slika 49-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici W1 .....	51
Slika 50—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila $Q_s$ .....	52
Slika 51-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici W1, .....	52
Slika 52—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila $Q_s$ .....	53
Slika 53-metodom „iz kosti u meso“ crtanje dijagrama momenta savijanja.....	53
Slika 54-dijagram momenta savijanja kada je $W_1=10N$ .....	54
Slika 55-dijagram momenta savijanja kada je $W_1=20N$ .....	54
Slika 56-dijagram momenta savijanja kada je $W_2=10N$ .....	55
Slika 57-dijagram momenta savijanja kada je $W_2=20N$ .....	55
Slika 58-dijagram momenta savijanja kada je $W_3=10N$ .....	56
Slika 59-dijagram momenta savijanja kada je $W_3=20N$ .....	56
Slika 60-dijagram momenta savijanja kada je $W_1=5N$ , a $W_3=10N$ .....	57
Slika 61-dijagram momenta savijanja kada je $W_1=5N$ , $W_2=10$ i $W_3=2N$ .....	57

## 1. UVOD

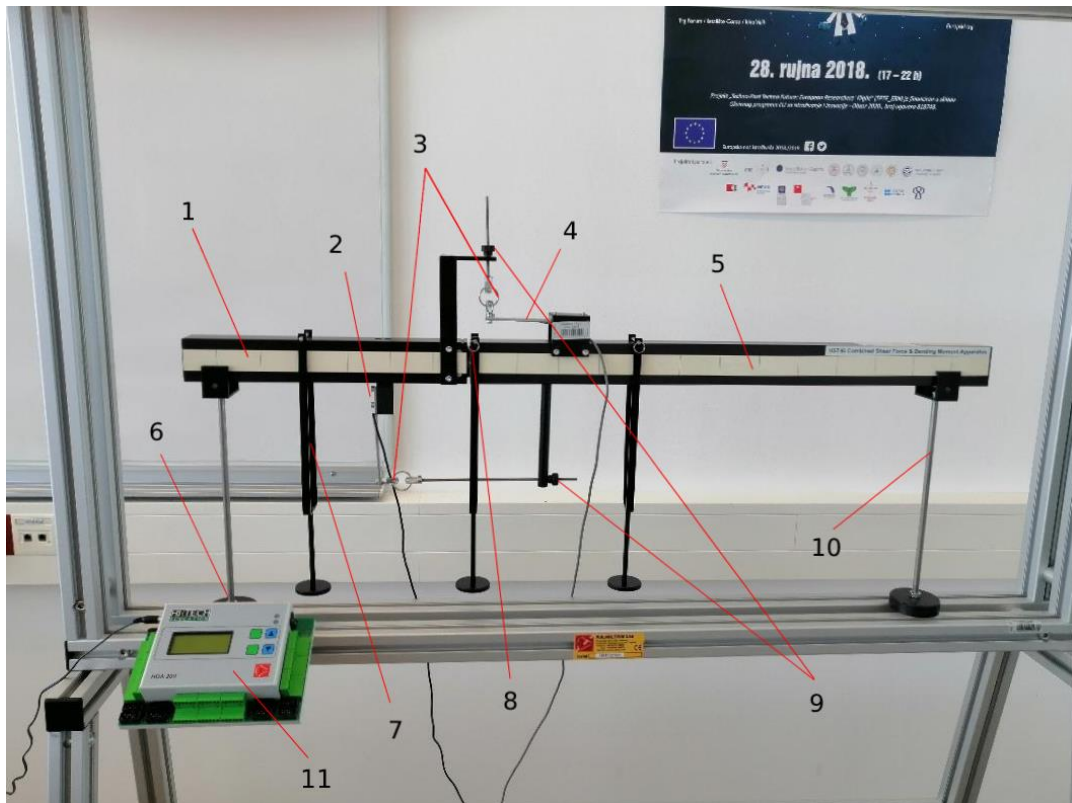
Ocem moderne mehanike možemo slobodno reći da je Robert Hooke, koji je postavio temelje za odnos naprezanja i deformacija davne 1660. Hooke-ov zakon objavljen je 1678. gdje je prikazao kakav je odnos sile i produljenja nekog elementa . Unutarnje sile u gredi dijelimo na poprečne sile, uzdužne sile i momente savijanja. U ovom radu aluminijsku gredu duljine 100 cm postaviti ćemo na dva oslonca. Greda ćemo rastaviti na kraću gredu od 35 cm i duđu gredu od 65 cm. Na mjestu gdje smo presjekli gredu pojaviti će nam se unutarnje rezne sile tj. poprečne sile i momenti savijanja. Postavljanjem uređaja HDA200 za mjerenje horizontalnih i vertikalnih deformacija očitavati ćemo deformacije za različita opterećenja na gredi, koja su postavljena na točno određenim mjestima na gredi. Dana opterećenja su 10N, 20N, 5N, 2N. Za poprečne sile očitavamo rezultate od horizontalnog tenzometra, dok za moment savijanja koristimo vertikalni tenzometar. Nakon provedenih eksperimentalnih pokusa na gredi, prelazimo na analitički dio zadatka. Cilj nam je da usporedimo eksperimentalna mjerenja i analitička rješenja te uočimo moguće razlike između dva načina dobivanja unutarnjih reznih sila na mjestu presjeka grede.

## 2. OPREMA

Za obavljanje eksperimentalnog dijela koristili smo priručnik tvrtke P.A.Hilton ltd HST46 „ Combined Shear Force and Bending Moment Apparatus“. [1]



*Slika 1- Priručnik za obavljanje ekspreimenta*



Slika 2- Aparatura za izvođenje pokusa

Aparatura potrebna za izvođenje pokusa :

1. Kraća greda
2. Vertikalni mjerač deformacija
3. Regulatori zatezanja
4. Horizontalni mjerač deformacija
5. Duža greda
6. Lijevi oslonac
7. Vješalica za utege
8. Mjesto presjeka grede
9. Vijci za zatezanje
10. Desni oslonac
11. Uređaj za očitavanje mjerenja HDA200

Uređaj za očitavanje mjerenja HDA200 je detaljnije prikazan na (slici 3).



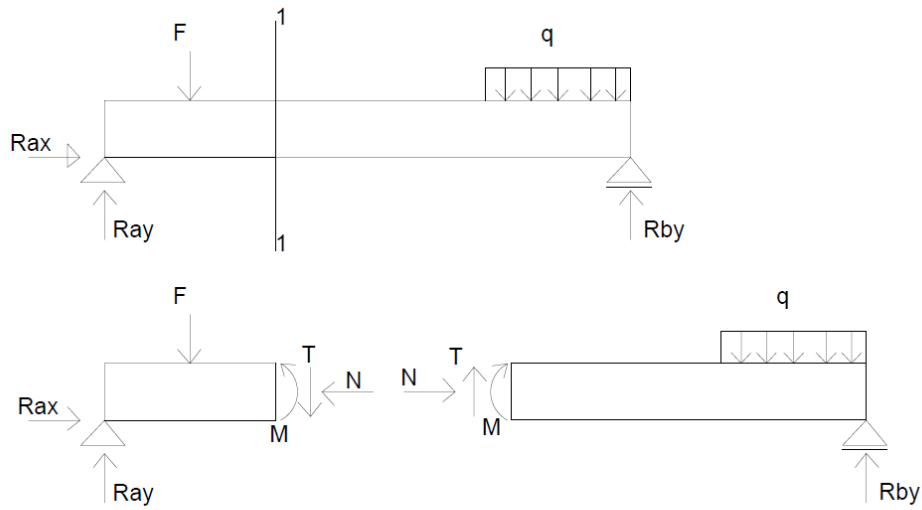
*Slika 3- Uređaj za očitavanje mjerenja HDA200*



*Slika 4-Utezi za nanošenje na vješalice*



### 3. OSNOVE O REZNIM SILAMA



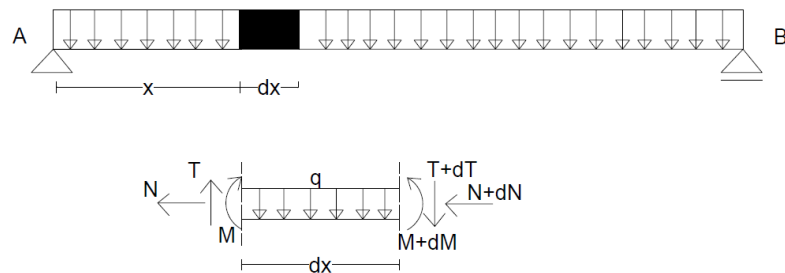
Slika 5-skica oslobođenih reznih sila u presjeku.

Smicanje još zovemo poprečna sila. Poprečna sila u presjeku je pozitivna ako desni dio grede djeluje prema gore, a na lijevom dijelu djeluje prema dolje, ako je suprotno onda je negativna. Poprečna sila potrebna nam je za crtanje statičkog dijagrama grede. Način za određivanja poprečnih sila je ravnotežna jednačina vertikalnih sila.

Formula u vektorskom obliku za računanje momenta savijanja je  $\vec{M} = \vec{F} * \vec{r}$ . Skalarna formula se češće koristi kod rješavanja ravninskih problema  $M = F * k$ .

Moment savijanja služi nam za crtanje momentnog dijagrama. Način za određivanje momenta savijanja je množenje sile sa krakom koji je udaljen od mjesta gdje djeluje moment. Moment savijanja je pozitivan ako rezultantom svih sila koje djeluju na mjesto gdje se traži moment savijanja u smjeru kazaljke na satu, u suprotnom je negativan.

### 3.1. Ravnotežne jednačbe krutog tijela



Slika 6-opterećena greda i diferencijalni element grede.

U gredi na mjestu presjeka oslobađaju se unutarnje sile koje su poprečna sila, uzdužna sila i moment savijanja. Ravnotežne jednačbe su  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M = 0$ .

Odnos između unutrašnjih sila i opterećenja u presjeku provest će se analizom diferencijalnog elementa grede  $dx$  koji je na udaljenosti  $x$  od ležaja A. Na početku presjeka koji je na udaljenosti  $x$  djeluje unutrašnje sile  $N$ ,  $T$ ,  $M$ , a na kraju presjeka koji je udaljen  $x+dx$  nalaze se unutrašnje sile  $N+dN$ ,  $T+dT$  i  $M+dM$ , kao šta je prikazano na slici (6).

Duljina diferencijalnog elementa  $dx$  je vrlo malena.

Korištenjem diferencijalnih veza između opterećenja i unutrašnjih sila može se pojednostaviti određivanje dijagrama, gdje na gredu djeluje velik broj različitih opterećenja.

Veza između poprečne sile i raspodijeljenog opterećenja  $q$  je dana izrazom:

$$-q = \frac{dT}{dx}$$

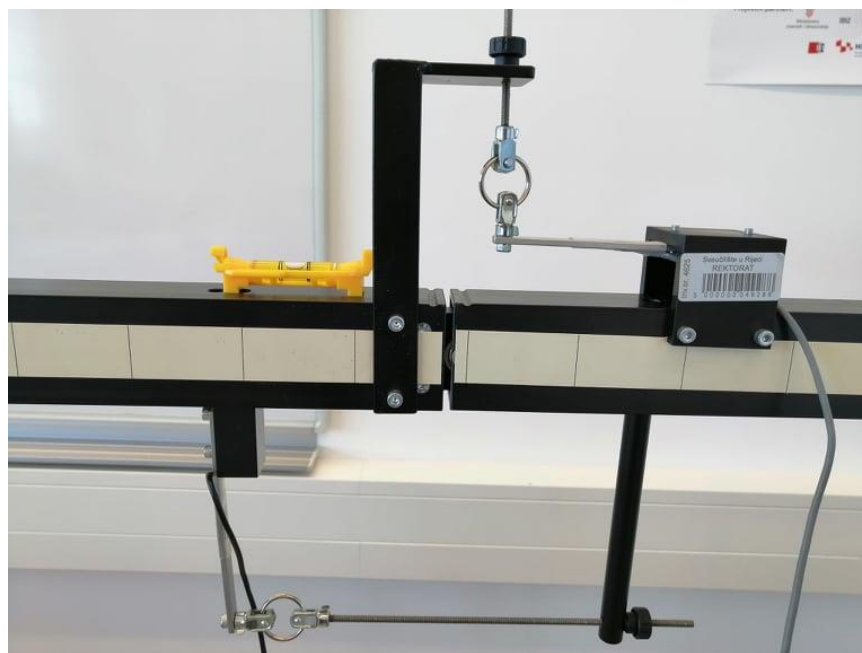
Veza između momenata savijanja i poprečnih sila definirana je na način:

$$T = \frac{dM}{dx}$$

## 4. EKSPERIMENTI

### 4.1. Način funkcioniranja uređaja

Uređaj funkcionira na principu mjerenja deformacija koje potom preračunavamo u rezne sile. Za mjerenje deformacija na uređaju su tvornički postavljeni tenzometri. Na samom početku moramo nivelirati kraću gredu, pomoću libele (Slika 4). Libelu se postavlja na kraću gredu i pomoću vijka za zatezanje na vertikalnom mjerачu za deformacije, postavlja se u horizontalnu ravninu. Postupak niveliranja ponavljamo sada za dužu gredu. Libelu postavljamo da jednim dijelom bude na kraćoj gredi i drugim dijelom na dužoj gredi iznad mjesta presjeka grede. Da bi nivelirali dužu gredu koristimo vijak za zatezanje na horizontalnom mjerачu za deformacije. Prije svakog mjerenja deformacija ponavljamo postupak postavljanja grede u horizontalni položaj.



*Slika 7- niveliranje grede pomoću libele*

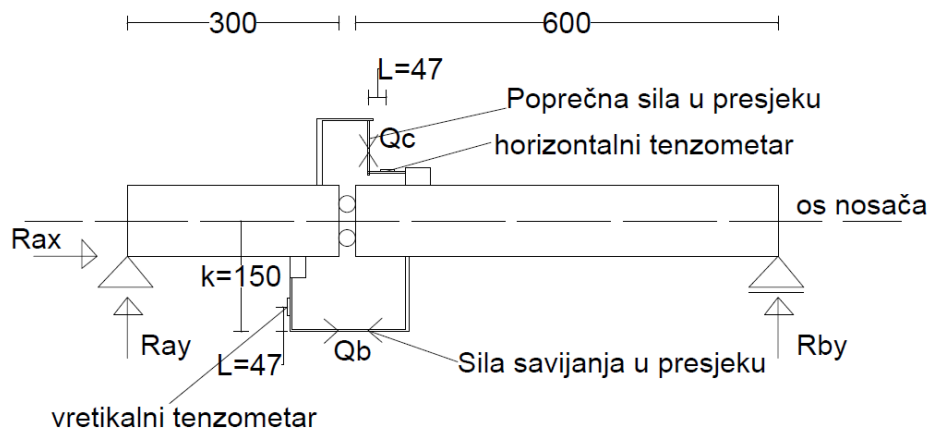


*Slika 8- niveliranje grede*



*Slika 9-Tenzometar*

#### 4.1.1. Teorijske osnove na kojima funkcioniра uređaj



Slika 10-skica grede sa vertikalnim i horizontalnim tenzometrima u mm.

#### Poprečna sila

Horizontalni tenzometar služi nam da očitamo deformacije na gredi, pomoću uređaja HDA 200 Interface. Nakon svakog postavljanja utega na vješalice, očitavamo deformacije, koje kasnije koristimo za izračun poprečne sile ( $Q_c$ ).

Osnovna formula za izračun poprečne sile  $Q_c$  glasi :

$$Q_c = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot I_y}{L \cdot y} \quad (1)$$

E- Young-ov modul elastičnosti  $70,000 \text{ N/mm}^2$

$\varepsilon$ - očitana deformacija, pomnožena sa  $10^{-6}$

$I_y$ - Moment tromosti  $\frac{b \cdot d^3}{12}$

b - Širina konzole 9,5 mm

d - Visina konzole 3,10 mm

L - Udaljenost između osi horizontalnog tenzora i mjesta gdje djeluje poprečna sila iznosi 47mm

y – Udaljenost neutralne osi grede  $d/2 = 1,55$ mm

U nastavku slijedi objašnjenje zašto za proračun poprečne sile koristimo izraz (1) :

Iz Hooke-ov zakona znamo da je naprezanje jednako modulu elastičnosti množeno sa deformacijom:

$$\sigma_1 = E * \varepsilon \quad (2)$$

Ako je moment  $M_1$  na mjestu na kojem mjerimo deformaciju jednak:

$$M_1 = Q_c * L \quad (3)$$

Formula koja određuje naprezanja u gredi uslijed djelovanja čistog savijanja je :

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I_y} * y \quad (4)$$

Iz izraza (2) i (3) slijedi:

$$E * \varepsilon = \frac{M_1}{I_y} * y ; \quad (5)$$

$$E * \varepsilon = \frac{Q_c * L}{I_y} * y ; \quad (6)$$

$$Q_c = \frac{E * \varepsilon * I_y}{L * y} \quad (7)$$

### **Moment savijanja**

Vertikalni tenzometar služi nam da očitamo deformacije na gredi, pomoću uređaju HDA 200 Interface. Nakon svakog postavljanja utega na vješalice, očitavamo deformacije, koje kasnije koristimo za izračun momenta savijanja ( $M$ ).

Osnovna formula za proračun sile savijanja  $Q_b$  glasi :

$$Q_b = \frac{E * \varepsilon * I_y}{L * y} \quad (8)$$

E- Young-ov modul elastičnosti  $70,000 \text{ N/mm}^2$

$\varepsilon$ - očitana deformacija, pomnožena sa  $10^{-6}$

$I_y$ - Moment tromosti  $\frac{b * d^3}{12}$

b - Širina konzole 9,5 mm

d - Visina konzole 3,10 mm

L - Udaljenost između osi vertikalnog tenzora i mjesta gdje djeluje sila savijanja  $Q_b$  iznosi 47mm

y – Udaljenost neutralne osi grede  $d/2 = 1,55\text{mm}$

U nastavku slijedi objašnjenje zašto pomoću izraza (8) proračunavamo silu  $Q_b$  koja nam je potrebna za određivanje momenta savijanja u presjeku  $M_2$  :

Iz Hooke-ovog zakona znamo da je naprezanje jednako modulu elastičnosti množeno sa deformacijom:

$$\sigma_2 = E * \varepsilon \quad (9)$$

Ako je moment  $M_2$  na mjestu na kojem mjerimo deformaciju jednak

$$M_2 = Q_b * L \quad (10)$$

Formula koja određuje naprezanja u gredi uslijed djelovanja čistog savijanja je :

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{I_y} * y \quad (11)$$

Iz izraza (9) i (10) slijedi:

$$E * \varepsilon = \frac{M_2}{I_y} * y ; \quad (12)$$

$$E * \varepsilon = \frac{Q_b * L}{I_y} * y ; \quad (13)$$

$$Q_b = \frac{E * \varepsilon * I_y}{L * y} \quad (14)$$

Za proračun momenta savijanja potrebna nam je sila savijanja koja je množena sa krakom k.

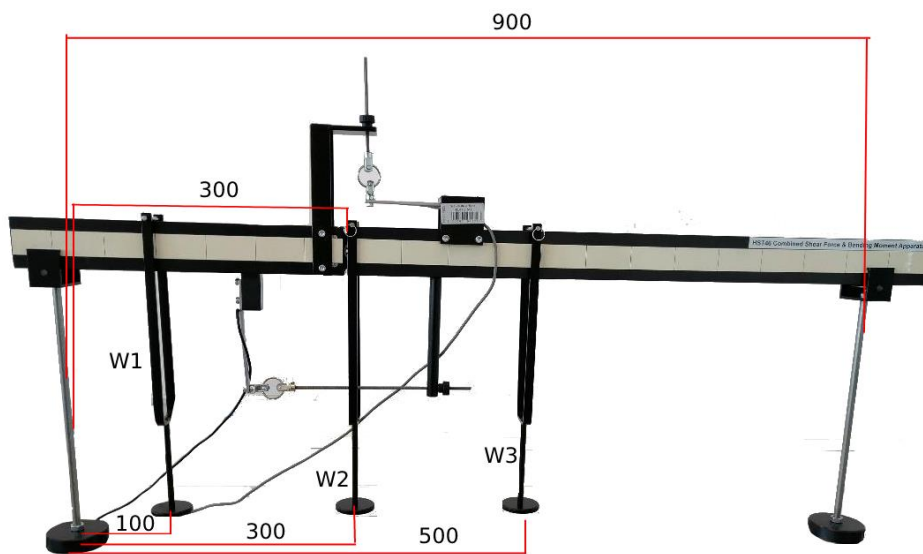
$$M = Q_b * k \quad (15)$$

k – udaljenost od osi grede do mjesta djelovanja sile savijanja  $Q_b$

$Q_b$  – Sila savijanja

## 4.2. Ispitivanje sila smicanja na gredi

U prvom dijelu ispitivanja poprečnih sila na gredi, postavljamo vješalicu za utege  $W_1$  na udaljenost 100 mm od lijevog oslonca, vješalicu  $W_2$  postavljamo na udaljenosti 300 mm od lijevog oslonca i vješalicu  $W_3$  na udaljenosti od 500 mm od lijevog oslonca (slika 11). Razmak između dva oslonca je 900 mm, a udaljenost od lijevog oslonca do mjesta gdje je presječena greda 300 mm. Greda se bez opterećenja postavlja u horizontalni položaj pomoću libele i vijaka za zatezanje.



Slika 11- kote grede i vješalice za utege

Postavljamo 10 N na vješalicu za utege  $W_3$  i pomoću libele postavljamo gredu u horizontalni položaj. Očitavamo horizontalnu deformaciju na uređaju HDA200.

Potom ponavljamo postupak sa 20 N na vješalici za utege  $W_3$ .

Ukoliko u izraz(1) uvrstimo očitavanu deformaciju i sve poznate parametre, dobivamo:

$$Q_c = \frac{\frac{70000N}{mm} * 197 * 10^{-6} * \frac{9,5 * 3,1^3}{12} mm^4}{47 mm * 1,55mm}$$

$$Q_c = 4,46 N$$



Tablica 1-Poprečna sila na gredi nakon nanošenja 10N i 20N na vješalici za utege W3

Opterećenje na W3 vješalici (N)	10	20
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	197	357
Qc (N)	4,46	8,09



Slika 12- uteg od 10 N na vješalici za utege W3

Postavljamo 10 N na vješalicu za utege  $W_2$  (slika 12) i pomoću libele postavljamo gredu u horizontalni položaj. Očitavamo horizontalnu deformaciju na uređaju HDA200 te dobivamo vrijednosti u tablici 2.

Tablica 2-poprečna sila na gredi kada je opterećena na vješalici za utege W2 sa 10N

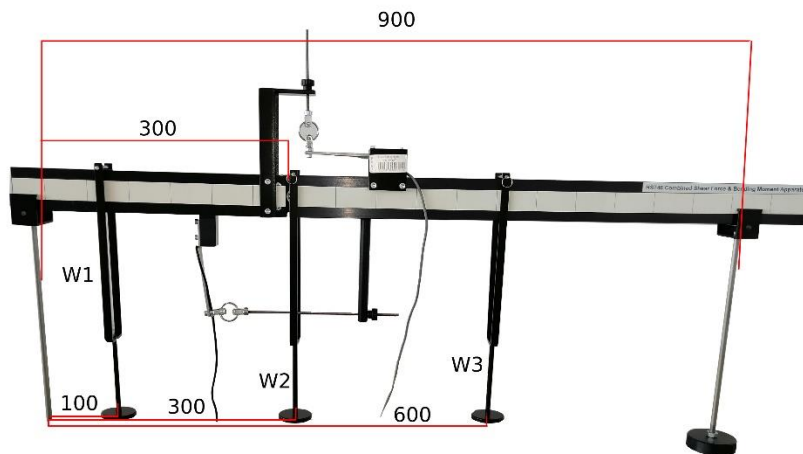
Opterećenje na W2 vješalici (N)	10
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	272
Qc (N)	6,16

Postavljamo 10 N na vješalicu za utege  $W_1$  i pomoću libele postavljamo gredu u horizontalni položaj. Očitavamo horizontalnu deformaciju na uređaju HDA200 te dobivamo vrijednosti u tablici 3.

Tablica 3-Poprečna sila na gredi kada je opterećena na vješalici za utege  $W_1$  sa 10N

Opterećenje na $W_1$ vješalici (N)	10
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	-45
$Q_c$ (N)	-1,02

U drugom dijelu ispitivanja poprečnih sila na gredi, vješalicu za utege  $W_3$  postavljamo na udaljenosti od 600 mm od lijevog oslonca (slika 13), dok vješalice za utege  $W_1$  i  $W_2$  ostaju na istim razmacima kao i u prvom dijelu ispitivanja grede na poprečne sile.



Slika 13-Kote grede i vješalica za utege.

Postavljamo 5 N na vješalicu za utege  $W_1$ , i dodajemo još 12 N na vješalicu za utege  $W_3$ . Dok na vješalici za utege  $W_2$  ne postavljamo nikakvo opterećenje. Pomoću libele postavljamo gredu u horizontalni položaj. Očitavamo horizontalnu deformaciju na uređaju HDA200.

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 4.

Tablica 4-Poprečna sila na gredi nakon šta je opterećena na vješalicama W3 sa 12N

i W1 sa 5N

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	Qc (N)
W1	W2	W3		
5	0	12	136	3,08

Premjestimo 2 N sa vješalice za utege  $W_3$  na vješalicu za utege  $W_2$  i pomoću libele postavljamo gredu u horizontalni položaj. Očitavamo horizontalnu deformaciju na uređaju HDA200.

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 5.

Tablica 5-Poprečna sila na gredi nakon šta je opterećena na W3 sa 10N,

W1 sa 5N i W2 sa 2N.

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	Qc (N)
W1	W2	W3		
5	2	10	174	3,94

Zadnje ispitivanje provodimo tako što 2 N na vješalici za utege  $W_2$ , zamijenimo utegom od 10 N dok ostala opterećenja ostaju ista kao i u prethodnom mjerenju. Pomoću libele postavljamo gredu u horizontalni položaj. Očitavamo horizontalnu deformaciju na uređaju HDA200.

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 6.

Tablica 6-Poprečna sila na gredi nakon šta je opterećena na W3 sa 10N,

W1 sa 5N i W2 sa 10N.

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	Qc (N)
W1	W2	W3		
5	10	10	390	8,84

### 4.3. Ispitivanje momenta savijanja na gredi

U prvom dijelu ispitivanja momenta savijanja grede, moramo postaviti vješalice za utege na odgovarajuće mjesto na gredi. Vješalicu za utege  $W_1$  postavljamo na udaljenosti od 100 mm od lijevog oslonca. Vješalicu za utege  $W_2$  postavljamo na udaljenosti od 300 mm od lijevog oslonca i zadnju vješalicu za utege  $W_3$  postavljamo na udaljenosti od 600 mm od lijevog oslonca kao što je prikazano na slici(12) . Razmak između dva oslonca ostaje 900 mm, dok mjesto presjeka grede također ostaje na 300 mm od lijevog oslonca. Greda se postavlja u horizontalni položaj, pomoću libele i vijaka za zatezanje horizontalnog mjerača deformacije i vertikalnog mjerača deformacije.

Pokus počinjemo tako što na vješalicu za utege  $W_1$  dodajemo uteg od 10 N. Postavljamo gredu u horizontalni položaj pomoću libele. Očitavamo vertikalne deformacije na uređaju HDA200.

Postupak ponavljamo i za opterećenje od 20 N na vješalici za utege  $W_1$ .

Ukoliko u izraz(8) uvrstimo očitane deformacije i sve poznate parametre, dobivamo:

$$Q_b = \frac{\frac{70000N}{mm} * 185 * 10^{-6} * \frac{9,5 * 3,1^3}{12} mm^4}{47 mm * 1,55mm}$$

$$Q_b = 4,19 N$$

Iz čega slijedi:

Moment savijanja dobivamo iz izraza (15) nakon šta silu savijanja  $Q_b$  pomnožimo sa krakom od 150 mm.

$$M = 4,19 N * 150 mm ;$$

$$M = 629 Nmm$$

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 7 i 8.

Tablica 7- Sila savijanja i moment savijanja za 10N na W1.

Opterećenje na W1 vješalici (N)	10
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	185
Qb(N)	4,19
M(Nmm)	629

Tablica 8-Sila savijanja i moment savijanja za 20N na W1.

Opterećenje na W1 vješalici (N)	20
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	420
Qb(N)	9,52
M(Nmm)	1428



Slika 14-Greda opterećena sa 10N na vješalici za utege W1.

Zatim mičemo 10 N sa vješalice za utege  $W_1$  i postavljamo na vješalicu za utege  $W_2$ . Postavljamo gredu u horizontalni položaj pomoću libele. Očitavamo vertikalne deformacije na uređaju HDA200.

Postupak ponavljamo i za opterećenje od 20 N na vješalici za utege  $W_2$ .

Rezultati ispitivanja prikazani su u tablici 9 i 10.

*Tablica 9-Sila savijanja i moment savijanja za 10N na W2*

Opterećenje na W2 vješalici (N)	10
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	635
Qb(N)	14,4
M(Nmm)	2160

*Tablica 10-Sila savijanja i moment savijanja za 20N na W2.*

Opterećenje na W2 vješalici (N)	20
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	1186
Qb(N)	26,88
M(Nmm)	4032

Zadnji korak u prvom dijelu pokusa je maknuti uteg od 10 N sa vješalice za utege  $W_2$  i postaviti ga na vješalicu za utege  $W_3$ . Postavljamo gredu u horizontalni položaj pomoću libele. Očitavamo vertikalne deformacije na uređaju HDA200.

Postupak ponavljamo i za opterećenje od 20 N na vješalici za utege  $W_3$ .

Rezultati ispitivanja prikazani su u tablici 11 i 12.

*Tablica 11-Sila savijanja i moment savijanja za 10N na W3.*

Opterećenje na W3 vješalici (N)	10
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	318
Qb(N)	7,2
M(Nmm)	1080

Tablica 12-Sila savijanja i moment savijanja za 20N na W3.

Opterećenje na W3 vješalici (N)	20
Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	615
Qb(N)	13,94
M(Nmm)	2091

U drugom dijelu ispitivanja momenta savijanja grede, moramo postaviti vješalice za utege na odgovarajuće mjesto na gredi. Vješalicu za utege  $W_1$  postavljamo na udaljenosti od 100 mm od lijevog oslonca. Vješalicu za utege  $W_2$  postavljamo na udaljenosti od 300 mm od lijevog oslonca i zadnju vješalicu za utege  $W_3$  postavljamo na udaljenosti od 500 mm od lijevog oslonca kao što je prikazano na slici(10) . Razmak između dva oslonca ostaje 900 mm, dok mjesto presjeka grede također ostaje na 300 mm od lijevog oslonca. Greda se postavlja u horizontalni položaj, pomoću libele i vijaka za zatezanje horizontalnog mjerača deformacije i vertikalnog mjerača deformacije.

U drugom dijelu opteretit ćemo vješalicu za utege  $W_1$  sa 5 N i vješalicu za utege  $W_3$  sa 12 N(slika 15). Postavljamo gredu u horizontalni položaj pomoću libele. Očitavamo vertikalne deformacije na uređaju HDA200.

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 13.

Tablica 13-Sila savijanja i moment savijanja za 5N na W1 i 12N na W3.

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	Qb (N)	M(Nmm)
W1	W2	W3			
5	0	12	640	14,5	2175



Slika 15-uteg od 5N na vješalici W1 i 12N na vješalici W3

U zadnjem pokusu postaviti ćemo na vješalicu za utege  $W_1$  uteg od 5 N, na vješalicu za utege  $W_2$  postaviti ćemo uteg od 10 N i na vješalicu za utege  $W_3$  postavljamo uteg od 2 N. . Postavljamo gredu u horizontalni položaj pomoću libele. Očitavamo vertikalne deformacije na uređaju HDA200.

Rezultati ispitivanja su dani u tablici 14.

Tablica 14-Sila savijanja i moment savijanja za 5N na W1, 10N na W2 i 2N na W3.

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija ( $\mu\epsilon$ )	Qb(N)	M(Nmm)
W1	W2	W3			
5	10	2	900	20,39	3058



## 5. ANALITIČKA METODA

### 5.1. Proračun sila smicanja na gredi

U analitičkom dijelu proračuna sila smicanja na gredi bit će potrebno najprije odrediti reakcije u osloncima. Nakon toga možemo tražiti silu smicanja u definiranom presjeku na gredi ( $Q_x$ ).

Poprečnu silu smo postavili u presječenom dijelu grede, tako da za lijevu kraću gredu ona djeluje prema dolje, dok za dužu desnu gredu sila smicanja djeluje prema gore.

- Ravnotežna jednačina:

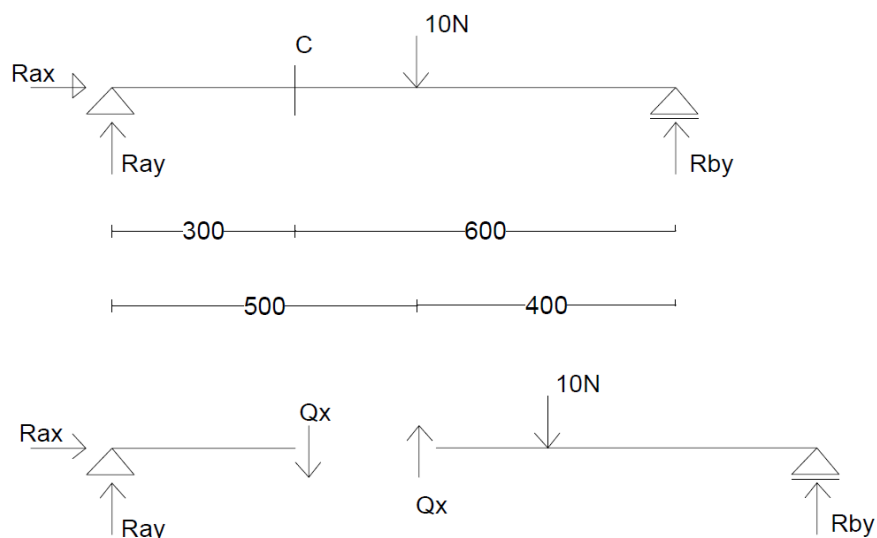
Za određivanje reakcija u osloncu B, radit ćemo  $\sum M_A = 0$ . Dok za određivanje reakcije u osloncu A, raditi će se  $\sum F_y = 0$ .

Ako promatramo samo lijevi dio grede, uzimamo u obzir reakciju koja je u osloncu i opterećenje na lijevom dijelu grede, isto vrijedi i za desni dio grede.

Rezultat poprečne sile trebao bi biti isti ako gledamo samo lijevu kraću stranu grede ili dužu desnu stranu grede.

Prvi dio proračuna grede analitički:

- Kada je vješalica za utege  $W_3=10\text{N}$



Slika 16-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici  $W_3$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 500 = 0$$

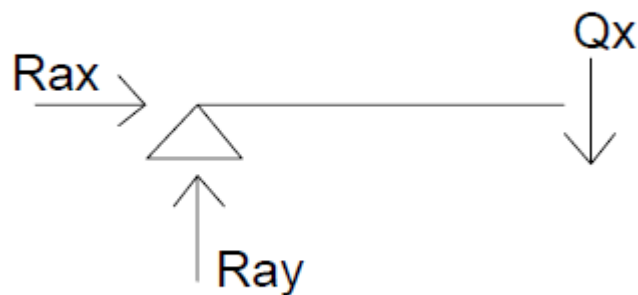
$$R_{by} = \frac{5000}{900} = 5,55N$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{ay} - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 10 - 5,55 = 4,45N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



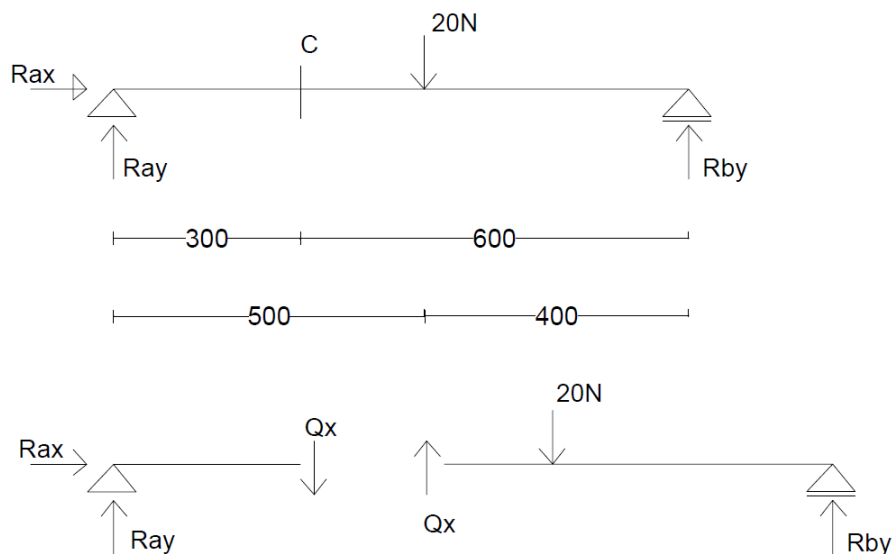
Slika 17-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{ay} - Q_x = 0$$

$$Q_x = R_{ay} = 4,45N$$

- Kada je vješalica za utege  $W_3=20N$



Slika 18-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici  $W_3$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 20 * 500 = 0$$

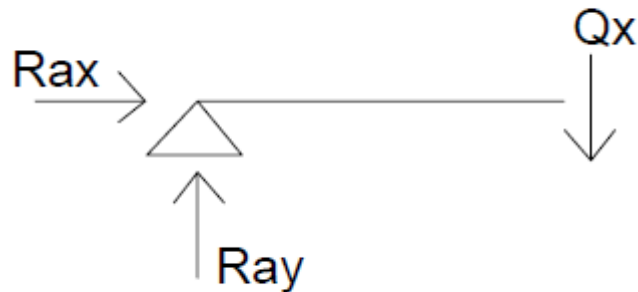
$$R_{by} = \frac{10000}{900} = 11,11N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 20 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 20 - 11,11 = 8,89N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



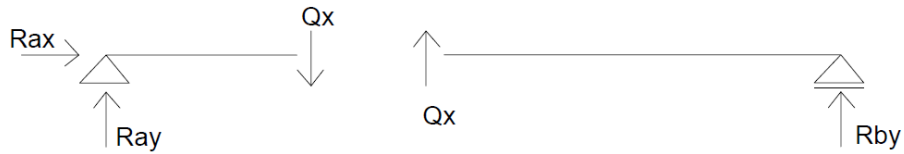
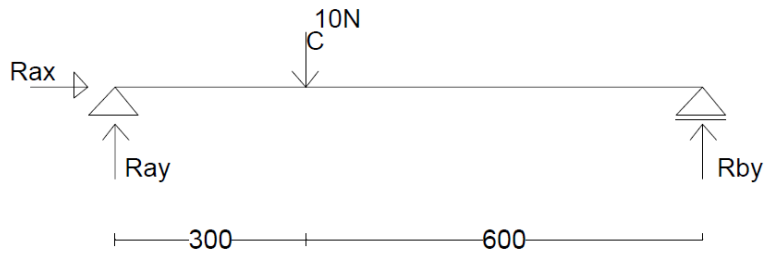
Slika 19-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - Q_x = 0$$

$$Q_x = R_{ay} = 8,89N$$

- Kada je vješalica za utege  $W_2=10N$ .



Slika 20-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici  $W_2$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 300 = 0$$

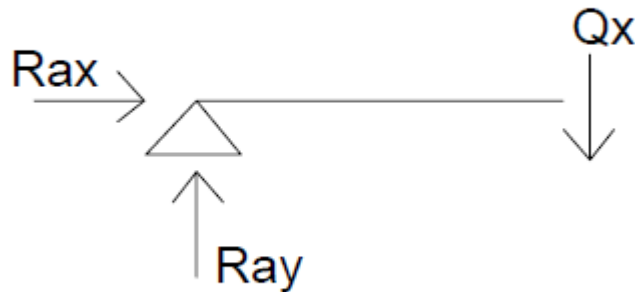
$$R_{by} = \frac{3000}{900} = 3,33N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 10 - 3,33 = 6,67N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



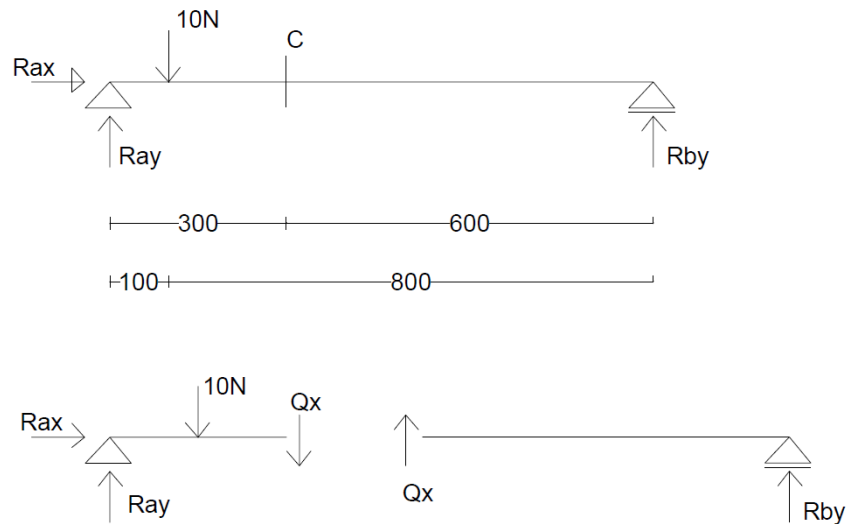
Slika 21-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - Q_x = 0$$

$$Q_x = R_{ay} = 6,67N$$

- Kada je vješalica za utege  $W1=10N$ .



Slika 22-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W1.

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 100 = 0$$

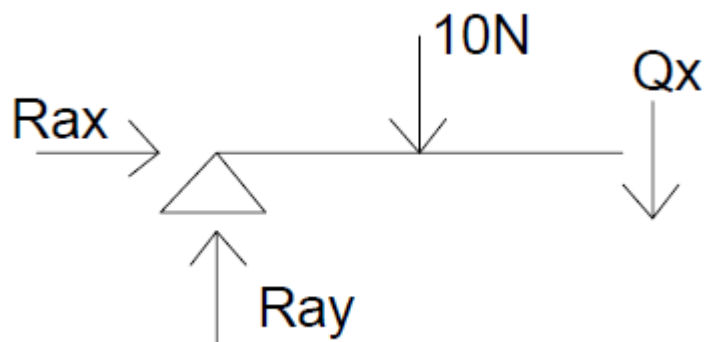
$$R_{by} = \frac{1000}{900} = 1,11N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 10 - 1,11 = 8,89N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



Slika 23-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

$$\sum F_y = 0$$

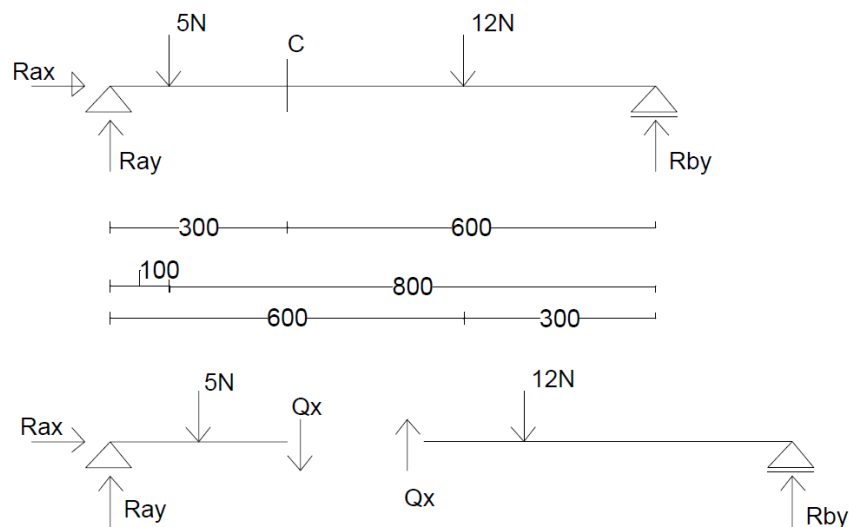
$$R_{ay} - Q_x - 10 = 0$$

$$Q_x = 8,89 - 10 = -1,11N$$

U ovom slučaju krivo smo pretpostavili djelovanje poprečne sile  $Q_x$  i ona na lijevom dijelu grede djeluje prema gore, dok na desnom dijelu prema dolje.

Drugi dio analitičkog proračuna poprečnih sila.

- Kada je vješalica za utege  $W1=5N$  i vješalica za utege  $W3=12N$ .



Slika 24-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici  $W1$   
i 12N na vješalici  $W3$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 12 * 600 - 5 * 100 = 0$$

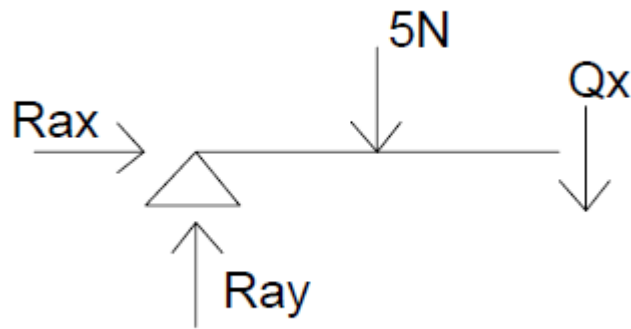
$$R_{by} = \frac{12 * 600 + 5 * 100}{900} = 8,56N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 5 - 12 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 5 + 12 - 8,56 = 8,44N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



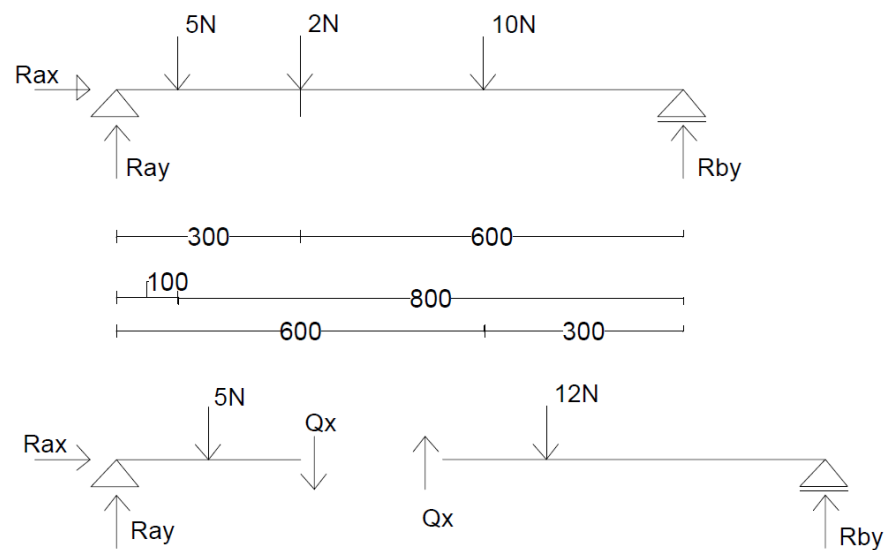
Slika 25-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - Q_x - 5 = 0$$

$$Q_x = 8,44 - 5 = 3,44N$$

- Kada je vješalica za utege  $W_1=5N$ , vješalica za utege  $W_2=2N$  i vješalica za utege  $W_3=10N$ .



Slika 26-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici  $W_1$ ,  
2N na vješalici  $W_2$  i 10N na vješalici  $W_1$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 600 - 2 * 300 - 5 * 100 = 0$$

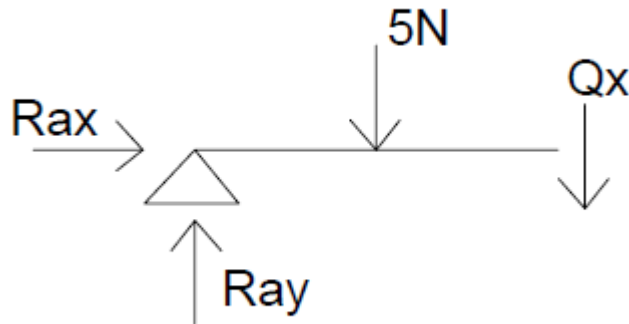
$$R_{by} = \frac{10 * 600 + 2 * 300 + 5 * 100}{900} = 7,89N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 5 - 10 - 2 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 5 + 10 + 2 - 7,89 = 9,11N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



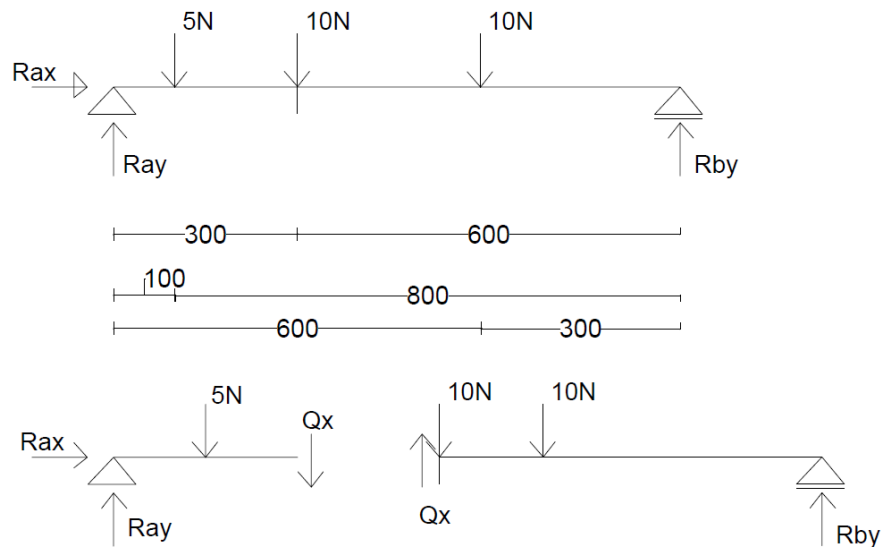
Slika 27-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - Q_x - 5 = 0$$

$$Q_x = 9,11 - 5 = 4,11N$$

- Kada je vješalica za utege  $W_1=5N$ , vješalica za utege  $W_2=10N$  i vješalica za utege  $W_3=10N$



Slika 28-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici  $W_1$ ,

10N na vješalici  $W_2$  i 10N na vješalici  $W_1$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 600 - 10 * 300 - 5 * 100 = 0$$

$$R_{by} = \frac{10 * 600 + 10 * 300 + 5 * 100}{900} = 10,56N$$

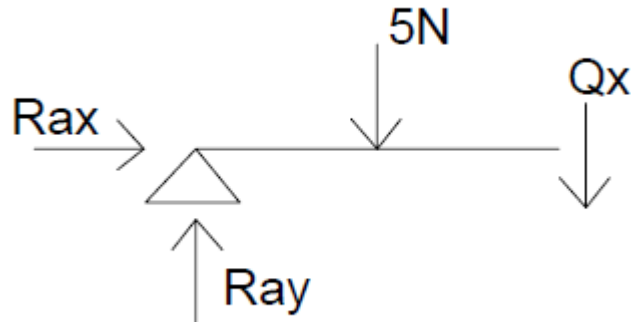
$$\sum F_y = 0$$



$$R_{ay} - 5 - 10 - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 5 + 10 + 10 - 10,56 = 14,44N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



Slika 29-mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_x$ .

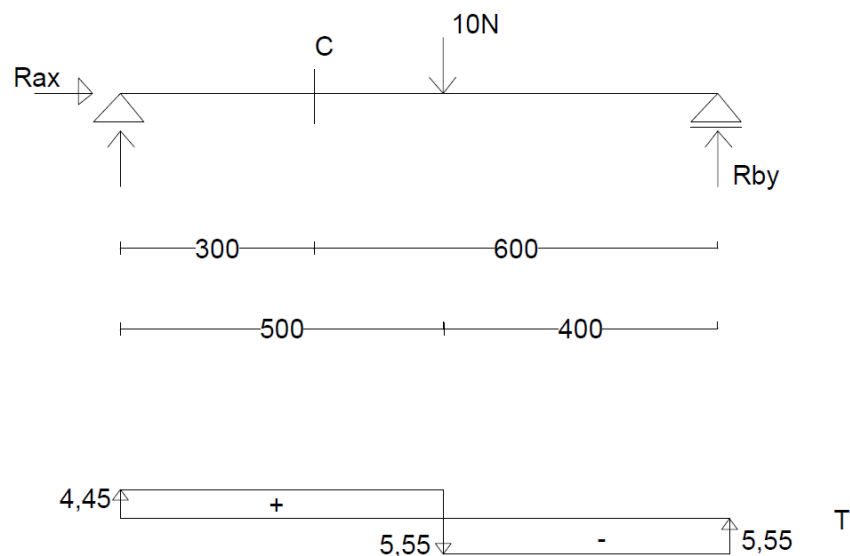
$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - Q_x - 5 = 0$$

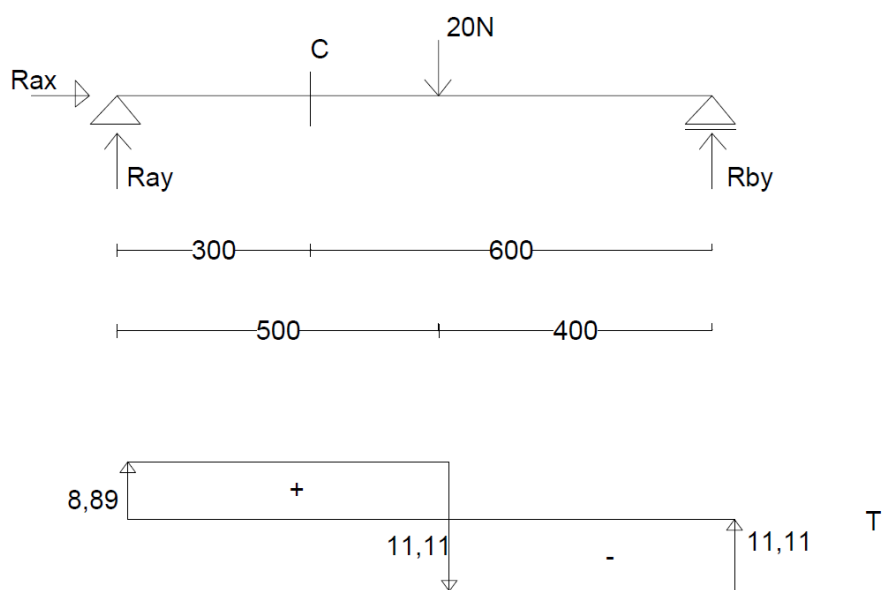
$$Q_x = 14,44 - 5 = 9,44N$$

### 5.1.1 Dijagrami sila smicanja na gredi

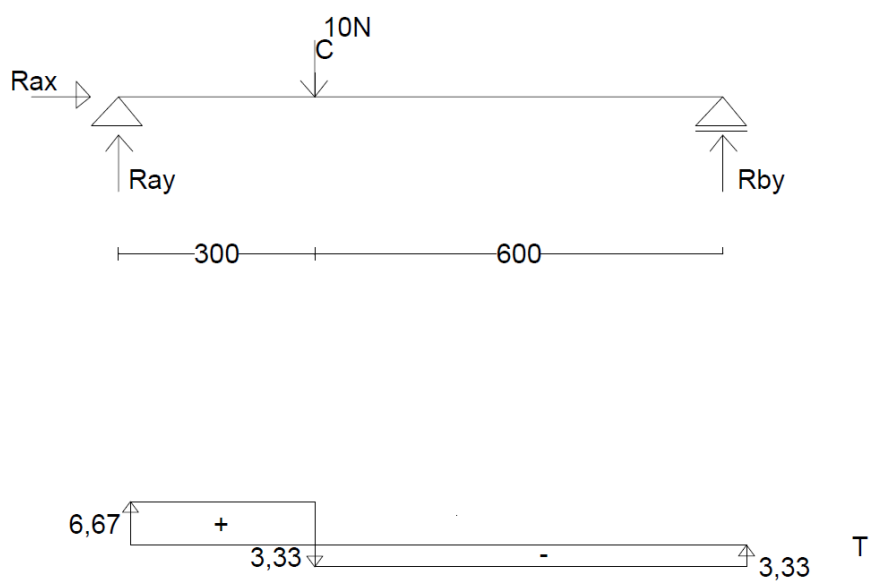
Diagrami poprečnih sila crtaju se kako djeluje sila ili reakcija u osloncu, šta znači ako reakcija djeluje prema gore crta se prema gore, a ako djeluje prema dolje crta se za dolje. Tamo gdje je poprečna sila u nuli, znači da u Momentnom dijagramu ima ekstrem.



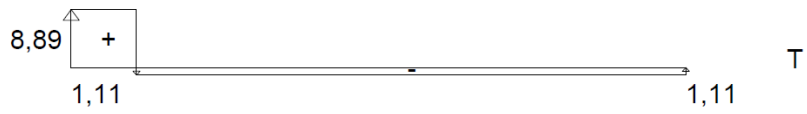
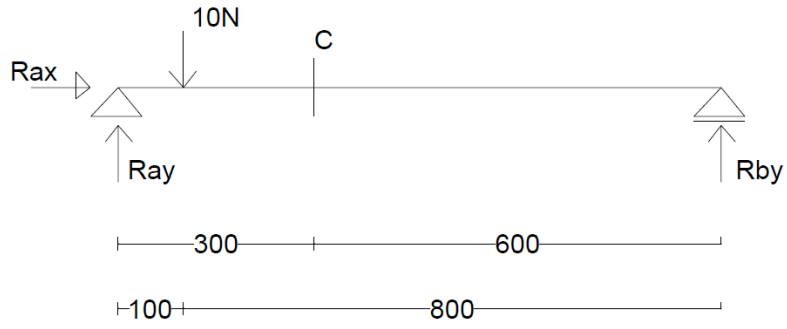
Slika 30-Dijagram poprečnih sila kada je  $W_3=10N$ .



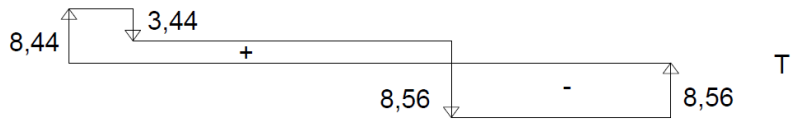
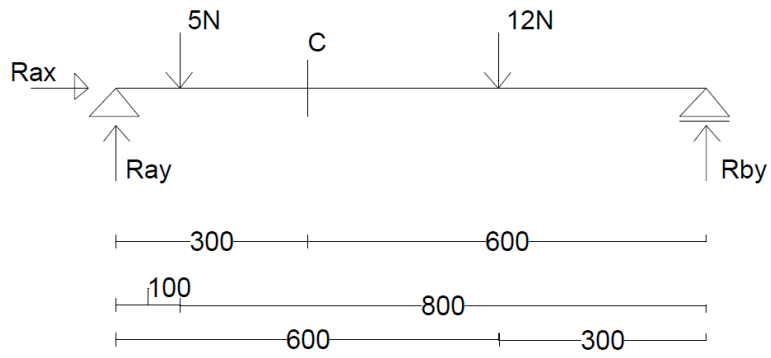
Slika 31-Dijagram poprečnih sila kada je  $W_3=20N$ .



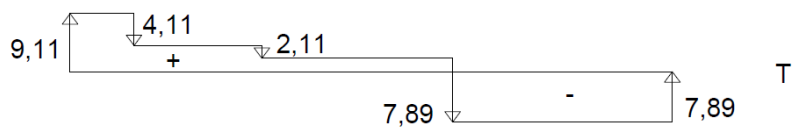
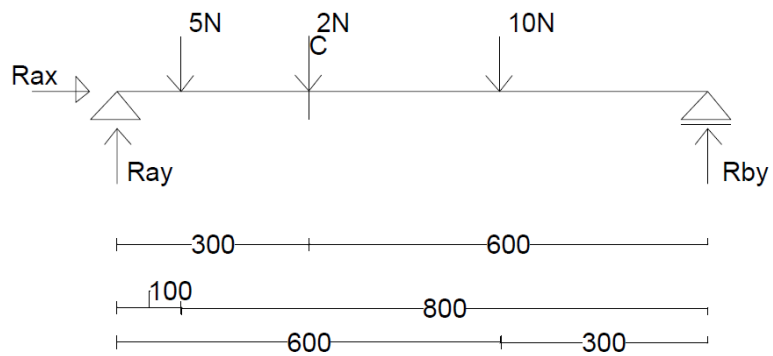
Slika 32-Dijagram poprečnih sila kada je  $W_2=10N$ .



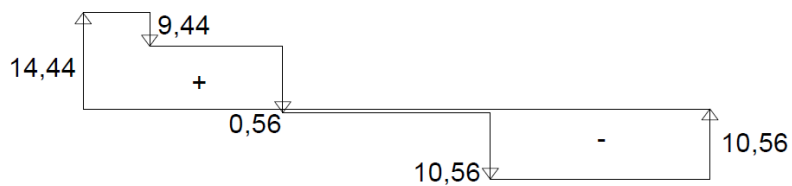
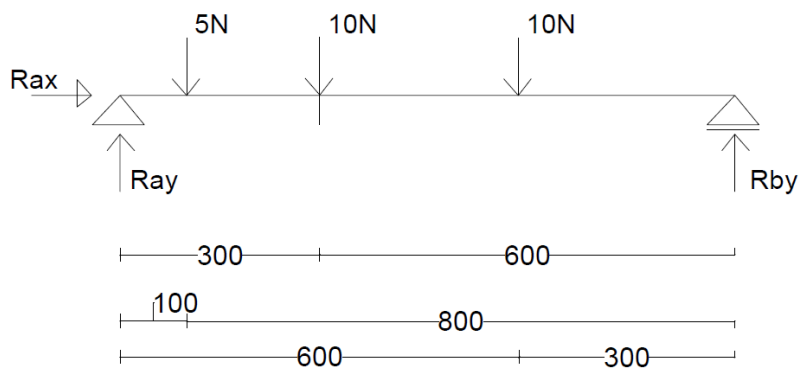
Slika 33-Dijagram poprečnih sila kada je  $W1=10N$ .



Slika 34-Dijagram poprečnih sila kada je  $W3=12N$ , a  $W1=5N$ .



Slika 35-Dijagram poprečnih sila kada je  $W_3=10N$ ,  $W_2=2N$  i  $W_1=5N$



Slika 36-Dijagram poprečnih sila kada je  $W_3=10N$ ,  $W_2=10N$  i  $W_1=5N$ .

## 5.2. Proračun momenta savijanja na gredi

Kao i kod proračuna sila smicanja, najprije moramo odrediti reakcije u osloncima. Koje na služe za određivanja momenta savijanja ( $Q_s$ ) u presječenom dijelu grede.

Moment savijanja javlja se u dijelu grede gdje je presječeno. Za lijevu kraću stranu grede postaviti ćemo da moment savijanja djeluje u kontra smjeru od kazaljke na satu, dok za desni duži dio grede postavljamo smjer djelovanja momenta savijanja u smjeru kazaljke na satu.

- Ravnotežne jednačbe:

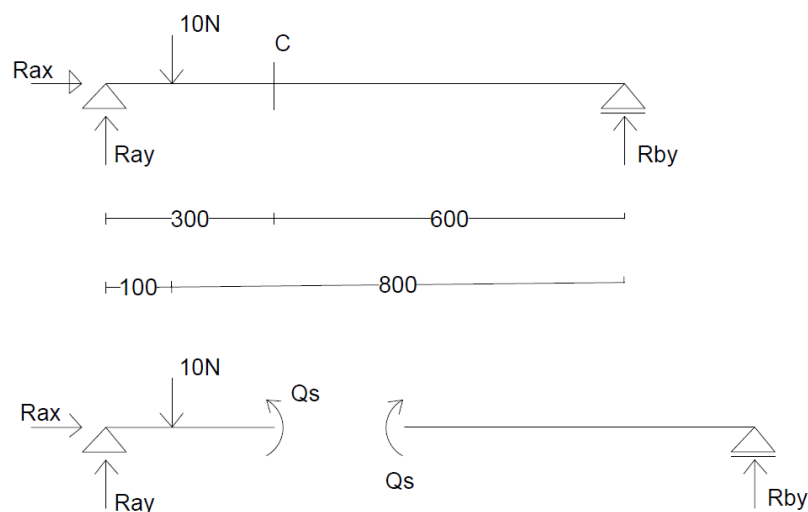
Za određivanje reakcija u osloncu B, raditi ćemo  $\sum M_A = 0$ . Dok za određivanje reakcije u osloncu A, raditi će se  $\sum F_y = 0$ .

Ako promatramo samo lijevi dio grede, uzimamo u obzir reakciju koja je u osloncu množenu sa krakom i opterećenje na lijevom dijelu grede također množeno krakom, isto vrijedi i za desni dio grede.

Rezultat momenta savijanja trebao bi bit isti ako gledamo samo lijevu kraću stranu grede ili dužu desnu stranu grede.

Prvi dio analitičkog proračuna momenta savijanja:

- Kada je vješalica za utege  $W_1=10N$ .



Slika 37-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici  $W_1$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 100 = 0$$

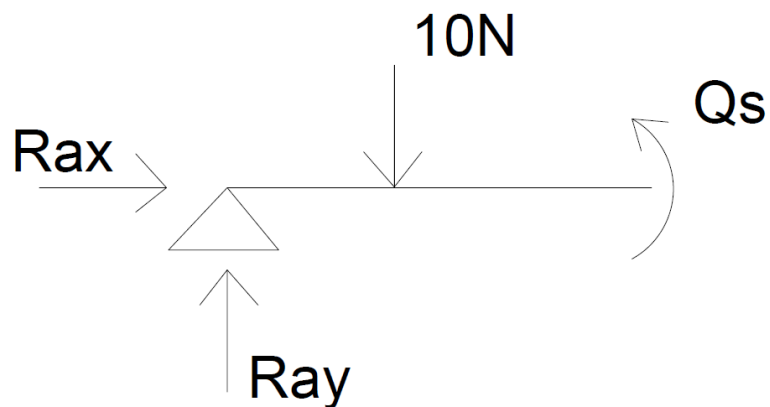
$$R_{by} = \frac{10 * 100}{900} = 1,11N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 10 - 1,11 = 8,89N$$

Promtramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



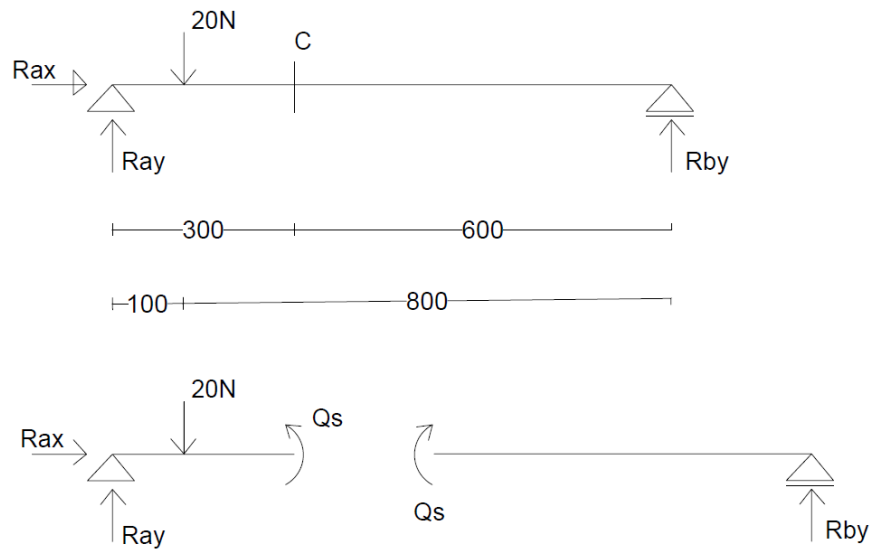
Slika 38—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 + 10 * 200 = 0$$

$$Q_s = 8,89 * 300 - 10 * 200 = 667Nmm$$

- Kada je vješalica za utege  $W_1=20N$ .



Slika 39-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W1.

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 20 * 100 = 0$$

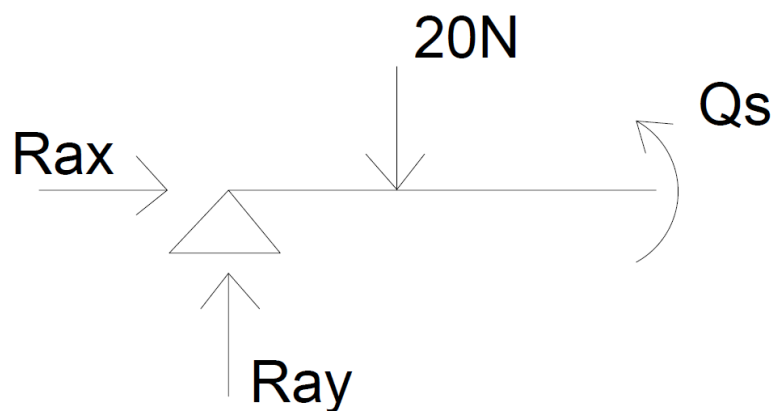
$$R_{by} = \frac{20 * 100}{900} = 2,22N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 20 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 20 - 2,22 = 17,78N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



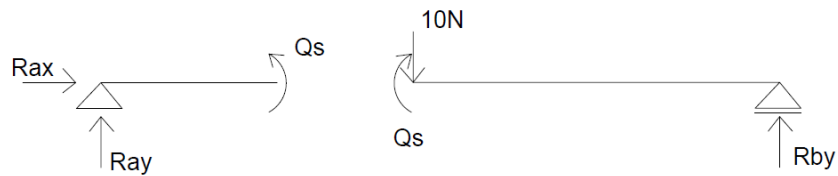
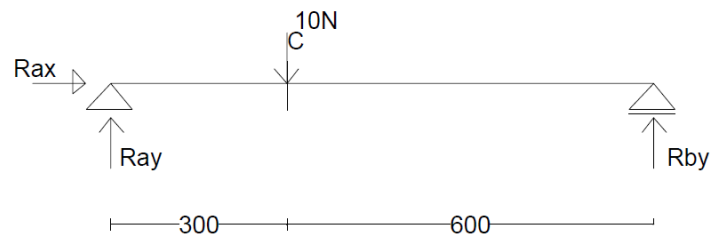
Slika 40—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 + 20 * 200 = 0$$

$$Q_s = 17,78 * 300 - 20 * 200 = 1336Nmm$$

- Kada je vješalica za utege  $W_2=10N$ .



Slika 41-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici  $W_2$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 300 = 0$$

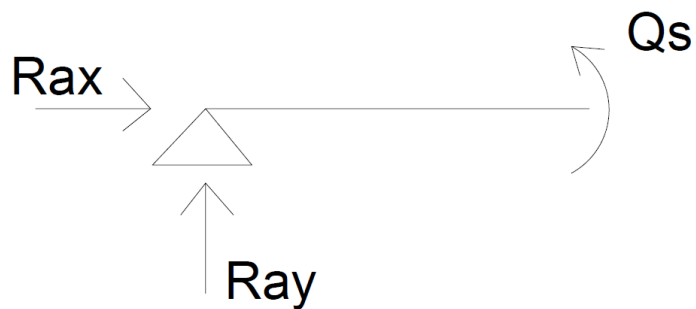
$$R_{by} = \frac{10 * 300}{900} = 3,33N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 10 - 3,33 = 6,67N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



Slika 42—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

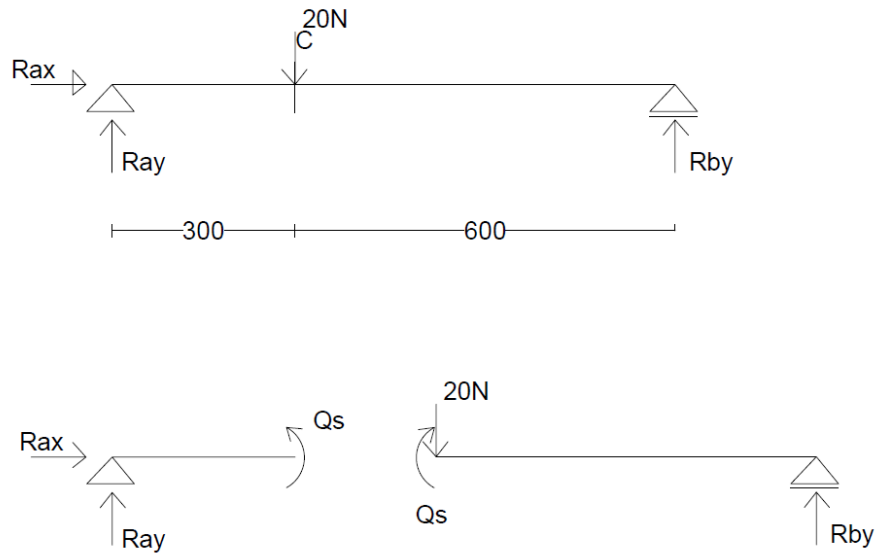
$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 = 0$$

$$Q_s = 6,67 * 300 = 2001Nmm$$



- Kada je vješalica za utege  $W_2=20N$ .



Slika 43-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici  $W_2$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 20 * 300 = 0$$

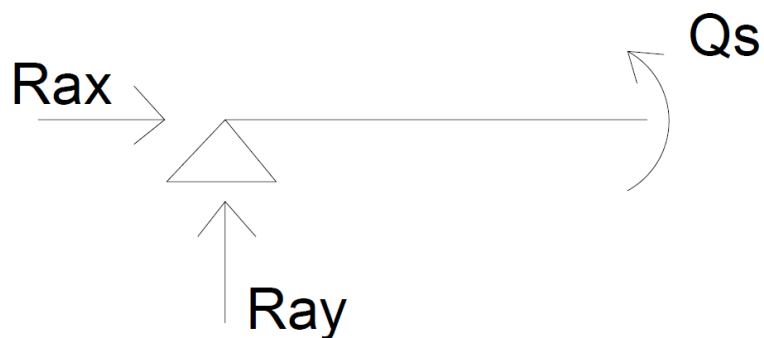
$$R_{by} = \frac{20 * 300}{900} = 6,67N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 20 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 20 - 6,67 = 13,33N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



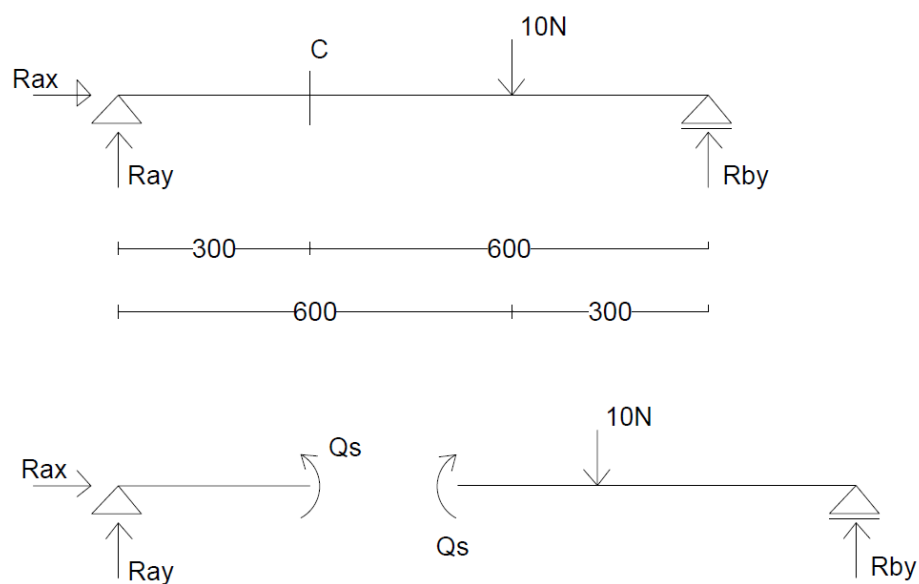
Slika 44—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 = 0$$

$$Q_s = 13,33 * 300 = 3999Nmm$$

- Kada je vješalica za utege  $W_3=10N$ .



Slika 45-prikaz grede i opterećenja na gredi od 10N na vješalici W3.

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 10 * 600 = 0$$

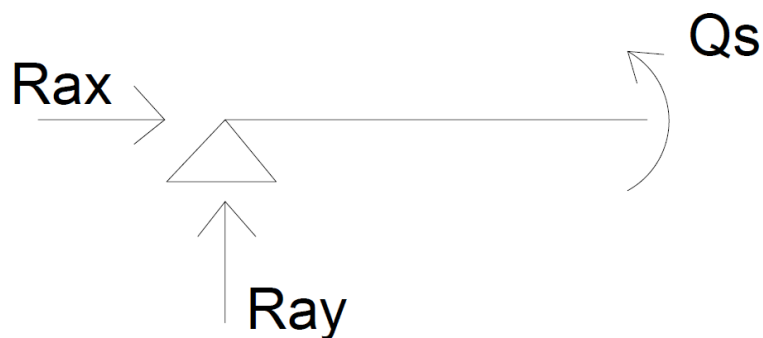
$$R_{by} = \frac{10 * 600}{900} = 6,67N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 10 - 6,67 = 3,33N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



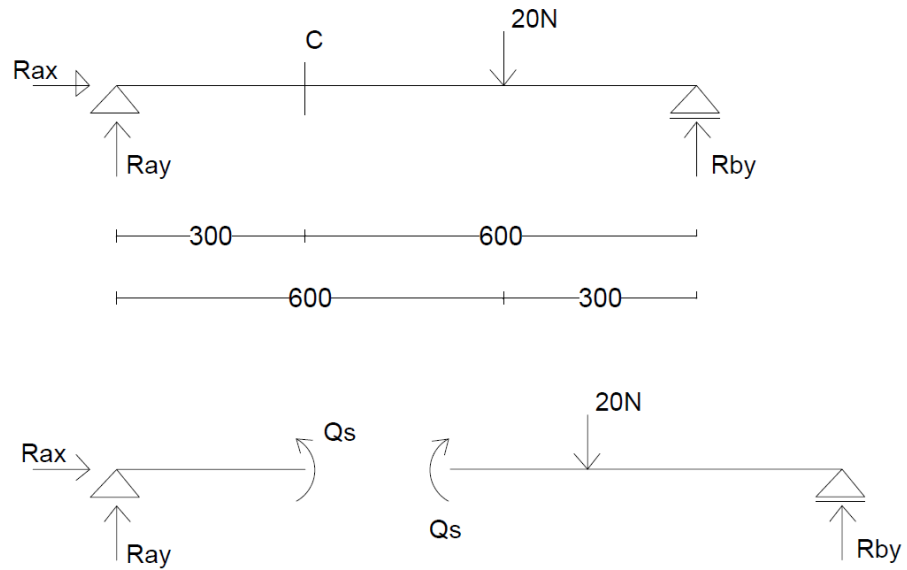
Slika 46—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 = 0$$

$$Q_s = 3,33 * 300 = 999Nmm$$

- Kada je vješalica za utege  $W_3=20N$ .



Slika 47-prikaz grede i opterećenja na gredi od 20N na vješalici W3.

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 20 * 600 = 0$$

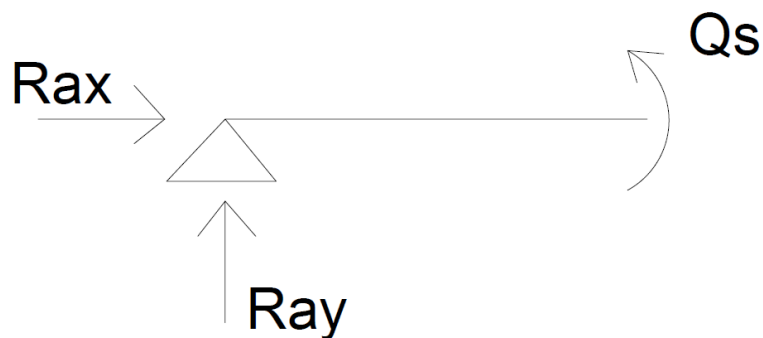
$$R_{by} = \frac{20 * 600}{900} = 13,33N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 20 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 20 - 13,33 = 6,67N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



Slika 48—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

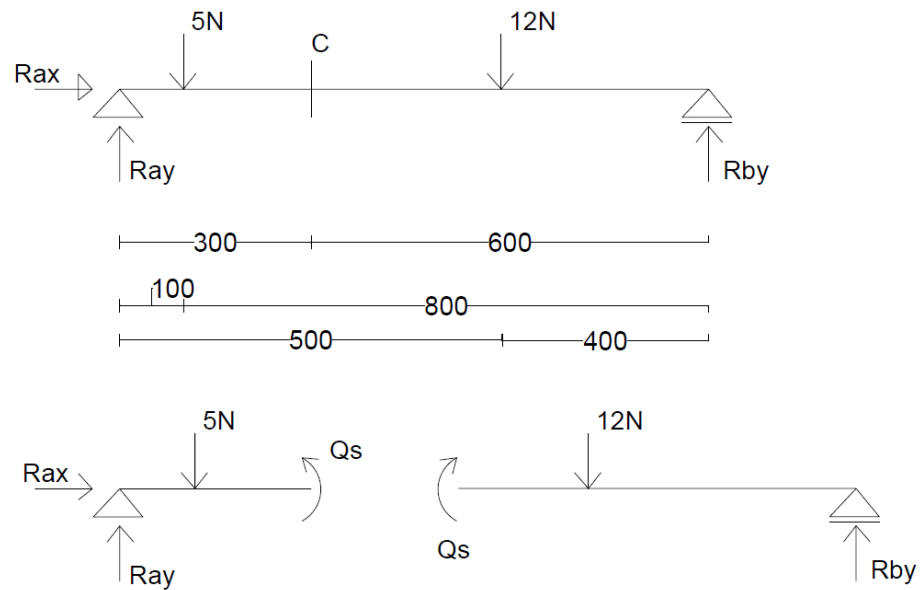
$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 = 0$$

$$Q_s = 6,67 * 300 = 2001Nmm$$

Drugi dio proračuna momenta savijanja:

- Kada je vješalica za utege  $W_1=5N$  i  $W_3=12N$ .



Slika 49-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici  $W_1$   
i 12N na vješalici  $W_3$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 5 * 100 - 12 * 500 = 0$$

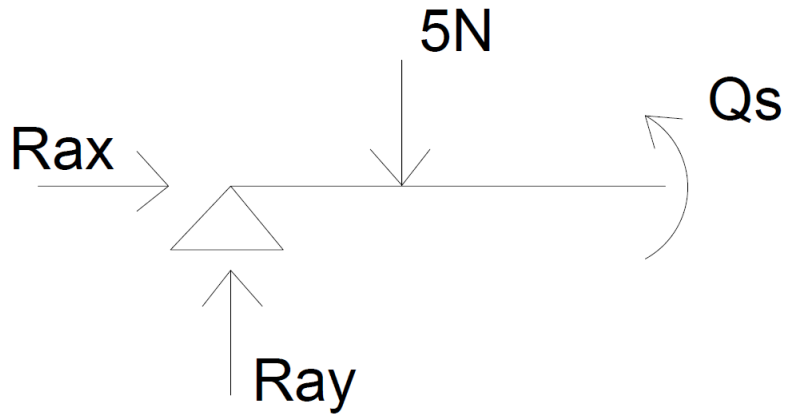
$$R_{by} = \frac{5 * 100 + 12 * 500}{900} = 7,22N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 5 - 12 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 5 + 12 - 7,22 = 9,78N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



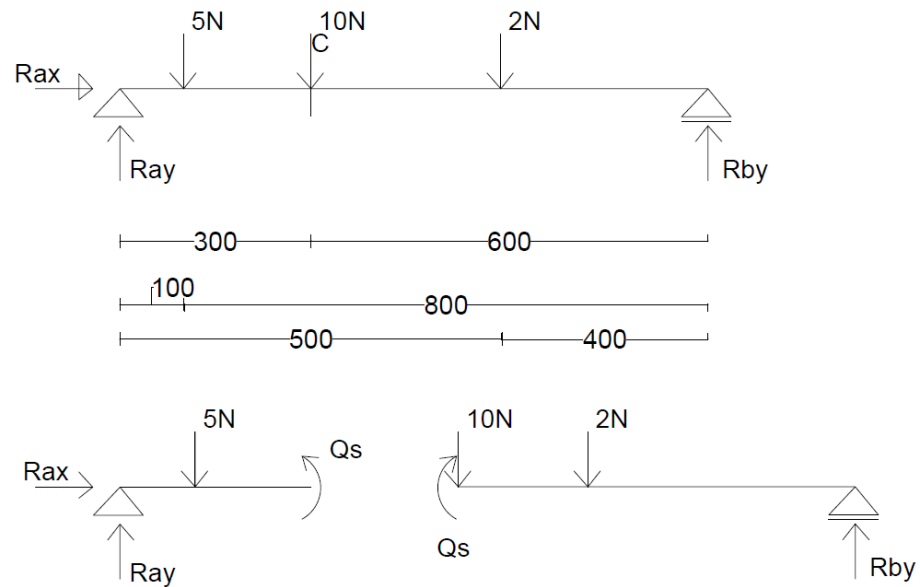
Slika 50—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 + 5 * 200 = 0$$

$$Q_s = 9,78 * 300 - 5 * 200 = 1934 \text{ Nmm}$$

- Kada je vješalica za utege  $W_1=5\text{N}$ ,  $W_2=10\text{N}$  i  $W_3=2\text{N}$ .



Slika 51-prikaz grede i opterećenja na gredi od 5N na vješalici  $W_1$ ,

10N na vješalici  $W_2$  i 2N na vješalici  $W_3$ .

$$\sum M_a = 0$$

$$R_{by} * 900 - 5 * 100 - 2 * 500 - 10 * 300 = 0$$

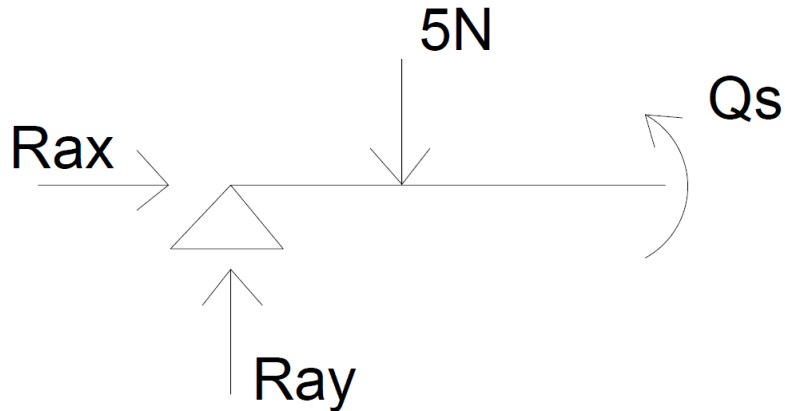
$$R_{by} = \frac{5 * 100 + 2 * 500 + 10 * 300}{900} = 5 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{ay} - 5 - 2 - 10 + R_{by} = 0$$

$$R_{ay} = 5 + 2 + 10 - 5 = 12N$$

Promatramo lijevi dio grede, iz kojeg slijedi:



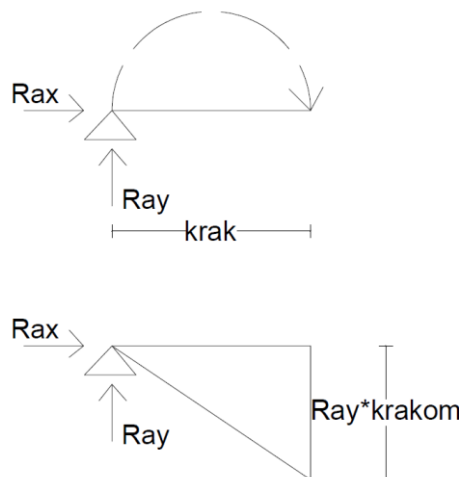
Slika 52—mjesto presjeka i oslobođena poprečna sila  $Q_s$ .

$$\sum M_s = 0$$

$$Q_s - R_{ay} * 300 + 5 * 200 = 0$$

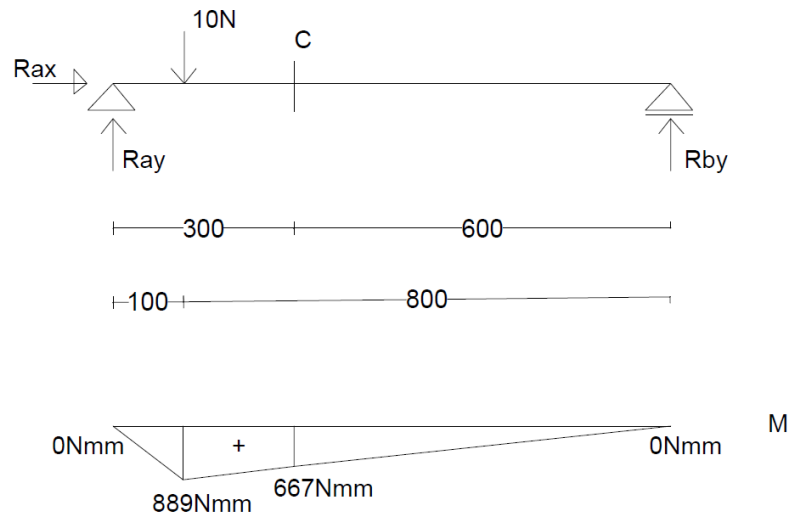
$$Q_s = 12 * 300 - 5 * 200 = 2600Nmm$$

### 5.2.1. Dijagrami momenta savijanja na gredi

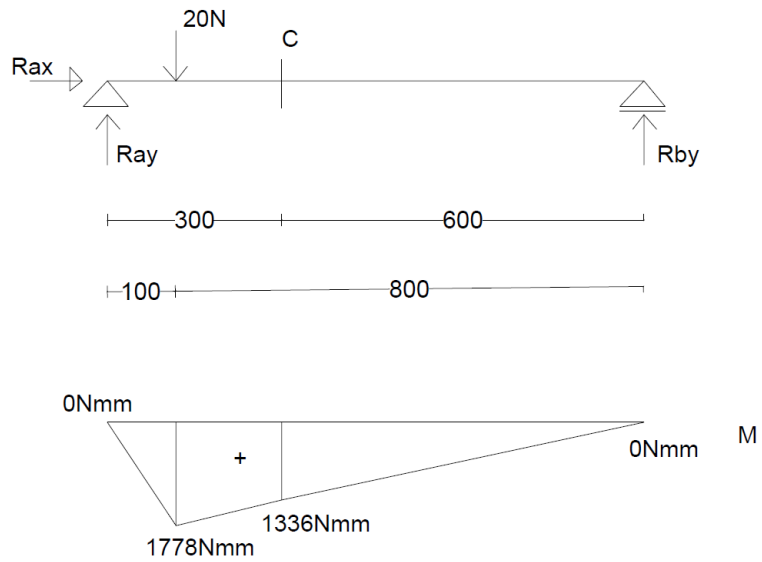


Slika 53-metodom „iz kosti u meso“ crtanje dijagrama momenta savijanja.

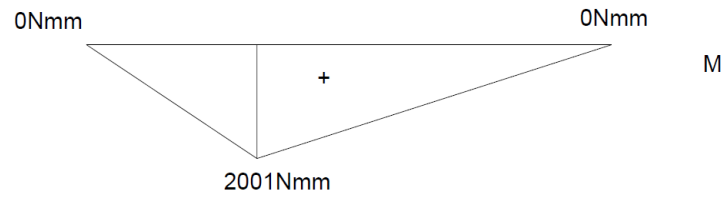
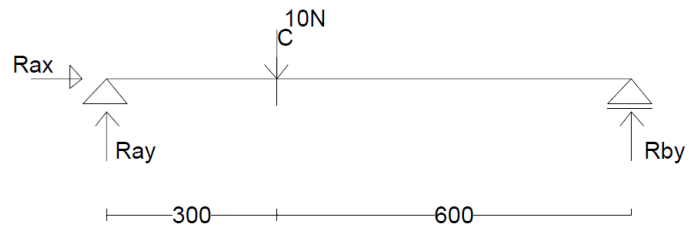
Momentni dijagrami se crtaju pomoću dijagrama poprečnih sila ili možemo koristiti metodu „iz kosti u meso“ šta bi značilo da sila pomnožena sa krakom prolazi kroz gredu i na tom mjestu nastaje moment savijanja. Momentni dijagram je dolje pozitivan, dok kada se crta za gore je negativan.



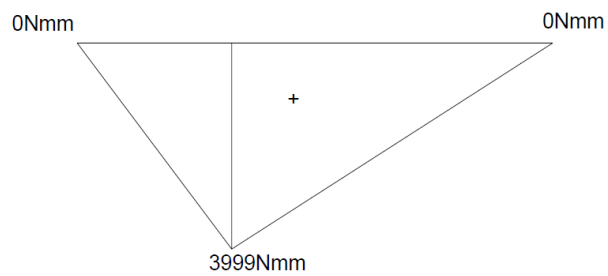
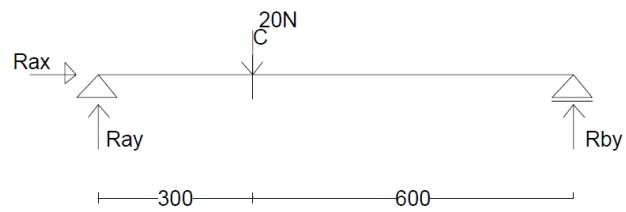
Slika 54-dijagram momenta savijanja kada je  $W1=10N$ .



Slika 55-dijagram momenta savijanja kada je  $W1=20N$ .

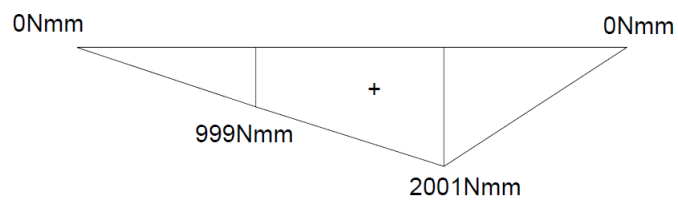
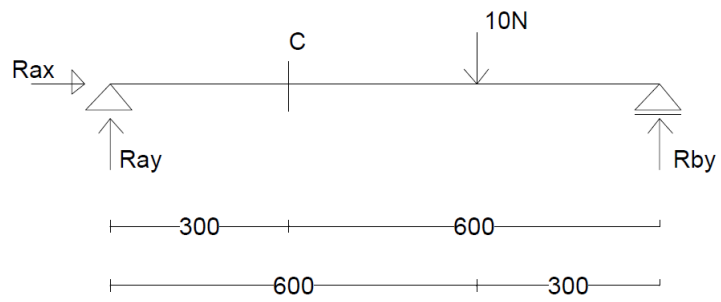


Slika 56-dijagram momenta savijanja kada je  $W_2=10N$ .

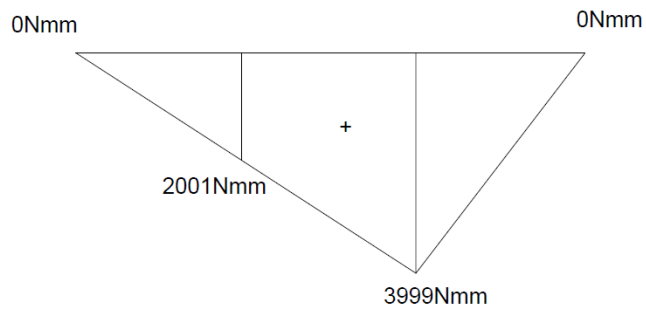
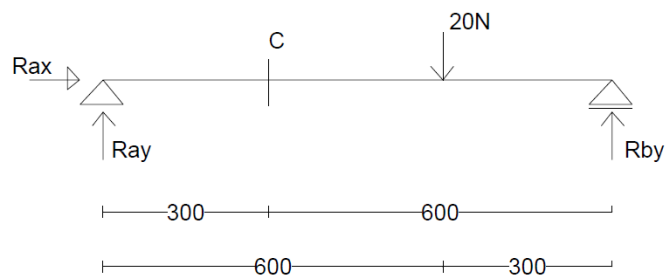


Slika 57-dijagram momenta savijanja kada je  $W_2=20N$ .

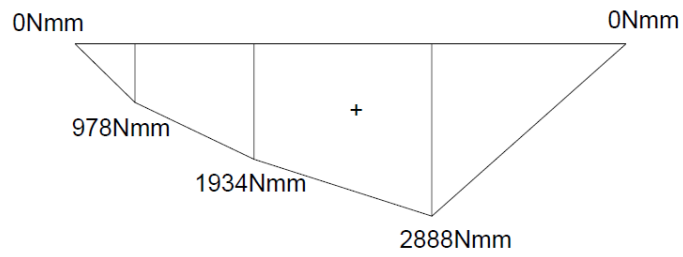
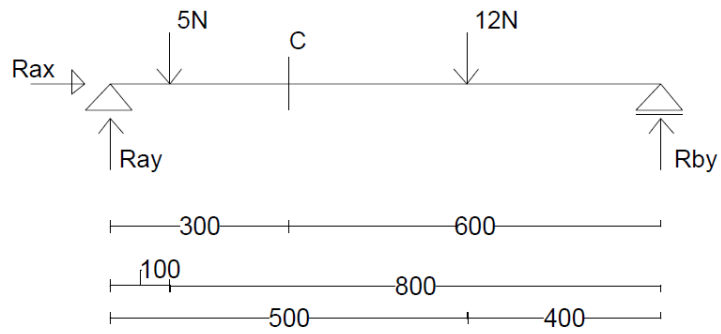




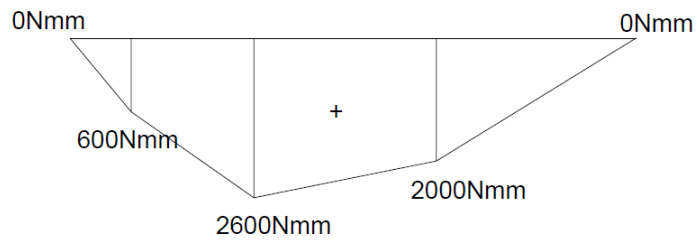
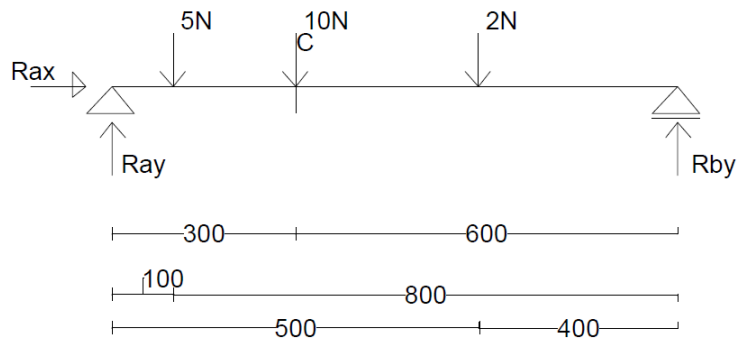
Slika 58-dijagram momenta savijanja kada je  $W3=10N$ .



Slika 59-dijagram momenta savijanja kada je  $W3=20N$ .



Slika 60-dijagram momenta savijanja kada je  $W1=5\text{N}$ , a  $W3=10\text{N}$ .



Slika 61-dijagram momenta savijanja kada je  $W1=5\text{N}$ ,  $W2=10$  i  $W3=2\text{N}$ .

## 6. USPOREDBA ANALITIČKE I EKSPERIMENTALNE ANALIZE

U tablicama koje ćemo postaviti u ovom poglavlju želimo vidjeti kolike su razlike u omjeru između izmjerenih reznih sila u eksperimentalnom djelu i proračunatih reznih sila pomoću analitičke analize.

Za eksperimentalnu analizu poprečnih sila koristimo oznaku:  $Q_{expc} = Q_c$

Za analitičku analizu poprečnih sila koristimo oznaku:  $Q_{ac} = Q_x$

Za eksperimentalnu analizu momenta savijanja koristimo oznaku:  $Q_{expb} = M$

Za analitičku analizu momenta savijanja koristimo oznaku:  $Q_{ab} = Q_s$

Tablica 15-Omjer između  $Q_c/Q_x$  kada  $W3=10$  i kada je  $W3=20N$ .

Opterećenje na W3 vješalici (N)	10	20
$Q_{expc}(N)$	4,46	8,09
$Q_{ac}(N)$	4,45	8,89
Omjer( $Q_{expc}/Q_{ac}$ )	1	0,91

Tablica 16-Omjer između  $Q_c/Q_x$  kada je  $W2=20N$ .

Opterećenje na W2 vješalici (N)	10
$Q_{expc}(N)$	6,16
$Q_{ac}(N)$	6,67
Omjer( $Q_{expc}/Q_{ac}$ )	0,92

Tablica 17-Omjer između  $Q_c/Q_x$  kada je  $W1=10N$ .

Opterećenje na W1 vješalici (N)	10
$Q_{expc}(N)$	-1,02
$Q_{ac}(N)$	-1,11
Omjer( $Q_{expc}/Q_{ac}$ )	0,91

Tablica 18- Omjer između  $Q_c/Q_x$  kada je  $W1=5N$  i  $W3=12N$ .

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija (ue)	Qac(N)	Omjer( $Q_{expc}/Q_{ac}$ )
W1	W2	W3			
5	0	12	136	3,44	0,89

Tablica 19-Omjer između  $Q_c/Q_x$  kada je  $W1=5N$ ,  $W2= 2$  i  $W3=10N$ .

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija (ue)	Qac(N)	Omjer( $Q_{expc}/Q_{ac}$ )
W1	W2	W3			
5	2	10	174	4,11	0,95

Tablica 20-Omjer između  $Q_c/Q_x$  kada je  $W1=5N$ ,  $W2=10N$  i  $W3=10N$ .

Opterećenje (N) na poziciji			Izmjerena deformacija (ue)	Qac(N)	Omjer( $Q_{expc}/Q_{ac}$ )
W1	W2	W3			
5	10	10	390	9,44	0,94

Tablica 21-Omjer između  $M/Q_s$  kada je  $W1=10N$ .

Opterećenje na W1 vješalici (N)	10
$Q_{expb}(Nmm)$	629
$Q_{ab}(Nmm)$	667
Omjer( $Q_{expb}/Q_{ab}$ )	0,94

Tablica 22-Omjer između  $M/Q_s$  kada je  $W1=20N$ .

Opterećenje na W1 vješalici (N)	20
$Q_{expb}(Nmm)$	1428
$Q_{ab}(Nmm)$	1336
Omjer( $Q_{expb}/Q_{ab}$ )	1,06

Tablica 23-Omjer između M/Qs kada je  $W2=10N$ .

Opterećenje na W2 vješalici (N)	10
Qexpb(Nmm)	2160
Qab(Nmm)	2001
Omjer(Qexpb/Qab)	1,07

Tablica 24-Omjer između M/Qs kada je  $W2=20N$ .

Opterećenje na W2 vješalici (N)	20
Qexpb(Nmm)	4032
Qab(Nmm)	3999
Omjer(Qexpb/Qab)	1,008

Tablica 25-Omjer između M/Qs kada je  $W3=10N$ .

Opterećenje na W3 vješalici (N)	10
Qexpb(Nmm)	1080
Qab(Nmm)	999
Omjer(Qexpb/Qab)	1,08

Tablica 26- Omjer između M/Qs kada je  $W3=20N$ .

Opterećenje na W3 vješalici (N)	20
Qexpb(Nmm)	2091
Qab(Nmm)	2001
Omjer(Qexpb/Qab)	1,04

Tablica 27-Omjer između M/Qs kada je  $W1=5N$  i  $W3=12N$ .

Opterećenje (N) na poziciji			Qexpb(Nmm)	Qab(Nmm)	Omjer(Qexpb/Qab)
W1	W2	W3			
5	0	12	2175	1934	1,12

Tablica 28-Omjer između  $M/Q_s$  kada je  $W_1=5N$ ,  $W_2=10N$  i  $W_3=2N$ .

Opterećenje (N) na poziciji			$Q_{expb}$ (N mm)	$Q_{ab}$ (Nm m)	Omjer( $Q_{expb}/Q_{ab}$ )
W1	W2	W3			
5	10	2	3058	2600	1,17

## 7. ZAKLJUČAK

U ovom radu proveli smo dva načina ispitivanja reznih sila na gredi. Prvi način odnosi se na eksperimentalno ispitivanje poprečnih sila i momenta savijanja koje je obavljeno u laboratoriju pomoću uređaja P.A.Hilton Ltd HST46. Dok se drugi način određivanja poprečnih sila i momenta savijanja proveo analitičkom analizom. Cilj ovog istraživanja bio je usporediti izmjerene rezne sile sa proračunatim reznim silama i utvrditi njihova odstupanja. Nakon što smo proveli eksperimentalnu analizu i proračunali analitički rezne sile, jasno je vidljivo da su odstupanja između njih u granici od 10% do 15%, što je prihvatljivo. To nam pokazuje da je mjerenje deformacija tenzometrima dovoljno precizno te da su rezultati eksperimentalno dobivenih reznih sila dovoljno točni u usporedbi sa proračunatim vrijednostima.

## 8. LITERATURA I IZVORI

1. P.A.Hilton Ltd HST46 „ Combined Shear Force and Bending Moment Apparatus“.
2. J. Brnić, Statika, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2004
3. V. Damić, Statika, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 1999
4. Ž. Nikolić, Mehanika I, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Split, 2009
5. F. Matejiček, D. Semenski, Z. Vnućec, Uvod u statiku sa zbirom zadataka, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2005
6. V. Andrejev, Mehanika – 1. dio: Statika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1968
7. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr, Vector Mechanics for Engineers – Statics, McGraw-Hill, Singapore, 1990
8. A. Pytel, J. Kiusalaas, Engineering Mechanics – Statics, Harper Collins, New York, 1996
9. Stanek, M.; Turk, G.: Statika I, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1996