

# Keplerovi zakoni i veza sa zakonom gravitacije

---

**Miletić, Teo**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:668545>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

TEO MILETIĆ

KEPLEROVI ZAKONI I VEZA SA ZAKONOM GRAVITACIJE

Završni rad

Rijeka, 2021.

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Sveučilišni preddiplomski studij

Fizika

Teo Miletić  
JMBAG: 0114029989

Keplerovi zakoni i veza sa zakonom gravitacije

Završni rad

Rijeka, rujan 2021.

Naziv studija: **Sveučilišni preddiplomski studij Građevinarstvo**

Znanstveno područje: Prirodoslovlje

Znanstveno polje: Fizika

Znanstvena grana: Fizika

Tema završnog rada

**KEPLEROVI ZAKONI I VEZA SA ZAKONOM GRAVITACIJE  
KEPLER'S LAWS AND THEIR LINK WITH THE LAW OF GRAVITATION**

Kandidat: **TEO MILETIĆ**

Kolegij: **FIZIKA**

Završni rad broj: **21-P-65**

**Zadatak:**

Student mora pokazati kako je iz emirijskih podataka koje su prikupili eksperimentalci napose Johannes Kepler došlo do zakona fizike koje je postavio Isac Newton. Posebno se mora pokazati kako su Keplerovi zakoni, oblik za centripetalnu silu kao i zakon o sačuvanju momenta doveli do oblika za gravitacijsku silu.

Tema rada je uručena: 24. veljače 2021.

Mentor:

prof. dr. sc. Boris Podobnik  
dipl. ing. phys.

### ***IZJAVA***

Završni rad sam izradio samostalno, u suradnji s mentorom uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.



---

Teo Miletić

U Rijeci, 7. rujna 2021.



## SAŽETAK

U ovom radu biti će objašnjeni Keplerovi zakoni planetarnog gibanja i njihova veza s Newtonovim zakonom gibanja. U uvodu će se objasniti što je to gravitacija te kako se shvaćala kroz povijest, a u glavnom dijelu rada biti će opisan Keplerovi zakoni i Newtonov zakon gravitacije te prikaz njihove veze kroz matematičke izraze. Do početka 16. stoljeća gravitacija se uopće nije povezivala sa svemirskim objektima. Johannes Kepler je pomoću svojih zakona koji su bili prekretnica u astronomiji otvorio put znanstvenicima da u potpunosti shvate pojam gravitacije i iznesu svoje teorije koje su opstale sve do danas.

Ključne riječi: zakon gravitacije, Keplerovi zakoni, orbita, Sunčev sustav, planet, elipsa

## SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b> .....	<b>8</b>
<b>2. ZAKON GRAVITACIJE</b> .....	<b>9</b>
<b>3. JOHANNES KEPLER</b> .....	<b>11</b>
<b>4. PRVI KEPLEROV ZAKON</b> .....	<b>14</b>
<b>5. DRUGI KEPLEROV ZAKON</b> .....	<b>18</b>
<b>5.1. Drugi Keplerov zakon i očuvanje momenta količine gibanja</b> .....	<b>20</b>
<b>6. TREĆI KEPLEROV ZAKON</b> .....	<b>23</b>
<b>6.1. Veza trećeg Keplerovog zakona i Newtonova zakona gravitacije</b> .....	<b>25</b>
<b>7. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>27</b>
<b>8. LITERATURA</b> .....	<b>28</b>



## 1. Uvod

Gravitacija je sila privlačenja koja postoji između materijalnih tijela. Zemljina gravitacija daje težinu na fizičke objekte, dok Mjesečeva uzrokuje plime oceana. Gravitacija je kroz povijest bila shvaćana na razne načine te postoje brojne teorije. Grčki filozof Aristotel je vjerovao da predmeti teže svojoj točki zbog svoje unutarnje težine te je uočio da nema posljedica ili kretanja bez uzroka. U Aristotelovom sustavu Zemlja ne privlači teška tijela vanjskom silom, ali teže prema središtu svemira zbog unutarnje gravitacije ili težine. Drugi grčki filozof, Vitruvije, je smatrao da predmeti padaju na temelju njihove specifične težine. Indijski matematičar Aryabhata je opisao gravitaciju kako bi objasnio da se objekti ne izvlače dok Zemlja rotira, a Brahmagupta je govorio o gravitaciji kao privlačnoj sili. U 16. stoljeću došlo je do značajnijih otkrića te se počeo odbacivati Ptolomejev geocentrični sustav, a počeo razrađivati Kopernikov heliocentrični sustav u kojem je Sunce u središtu i planeti se kreću oko njega. Kepler je pokazao da se kreću po eliptičnim orbitama, a ne po krugovima. Početkom 17. stoljeća Galileo Galilei otkrio je da svi objekti imaju tendenciju podjednakog ubrzanja pri slobodnom padu. 1632. iznio je osnovni princip relativnosti. Legenda kaže da je Newton otkrio gravitaciju kada je vidio jabuku kako pada sa stable te je pritom počeo razmišljati o silama prirode. Newton je shvatio da neka sila mora djelovati na predmete koji padaju poput jabuka jer se u protivnom ne bi pokrenuli iz mirovanja. Također je shvatio da bi Mjesec odletio sa Zemlje pravocrtno tangetno na njegovu orbitu ako neka sila ne uzrokuje pad prema Zemlji. Mjesec je samo projektil koji kruži oko Zemlje pod privlačenjem gravitacije. Tu silu je Newton nazvao gravitacijom i utvrdio da gravitacijske sile postoje između svih objekata. Koristeći se tim zaključcima, Newton je uspio razraditi Keplerova astronomska opažanja. Znanstveni radovi i opažanja Kopernika, Galilea, Brachea, Keplera i Newtona su dokazali jednom zauvijek da Zemlja nije u središtu Sunčevog sustava već da ona zajedno sa svim planetima kruži oko Sunca. Kasnije je Albert Einstein razvio potpuno novu ideju u kojoj gravitacija proizlazi iz “iskrivljavanja” prostora i vremena.

## 2. ZAKON GRAVITACIJE

Newton je otkrio vezu između pokreta Mjeseca i kretanja tijela koje slobodno pada na Zemlju. Svojim dinamičkim i gravitacijskim teorijama objasnio je Keplerove zakone i uspostavio suvremenu kvantitativnu znanosti gravitacije. Pretpostavio je postojanje privlačne sile između svih masivnih tijela, onih koji ne zahtijevaju tjelesni kontakt i koji djeluju na daljinu. Pozivajući se na njegov zakon inercije (tijela na koja sila ne djeluje pomiču se konstantnom brzinom u ravnoj liniji), Newton je zaključio da je sila koju Zemlja vrši na Mjesecu potrebna da bi se zadržala u kružnom kretanju oko Zemlje, a ne da se kreće pravocrtno. Newtonov zakon univerzalne gravitacije obično navodi kao da svaka čestica privlači svaku drugu česticu u svemiru silom koja je izravno proporcionalna umnošku njihovih masa i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između njihovih središta što je opisano u sljedećoj formuli i slici.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Jednadža 1.

gdje je:

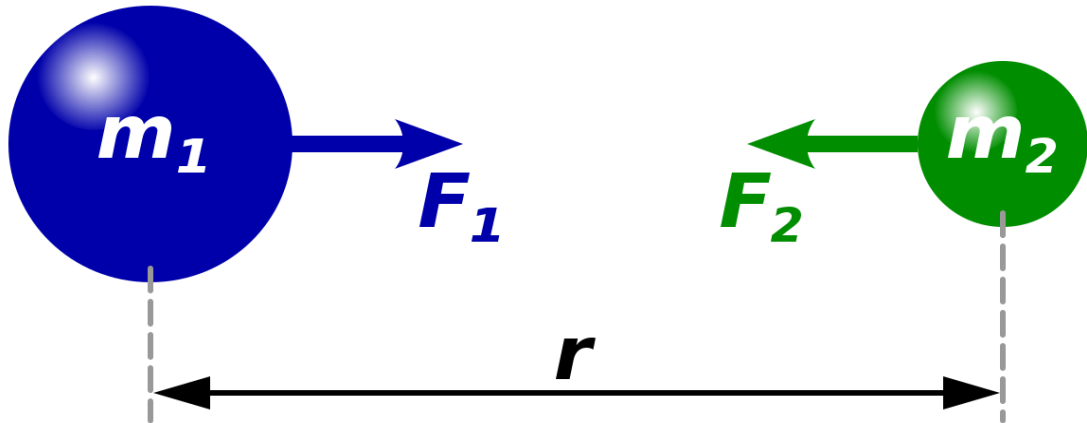
$F$  – sila privlačenja između dva tijela (N)

$G$  – univerzalna gravitacijska konstanta ( $6,67428 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>)

$m_1$  - masa prvog tijela (kg)

$m_2$  – masa drugog tijela (kg)

$r$  – međusobna udaljenost između središta dva tijela (m)



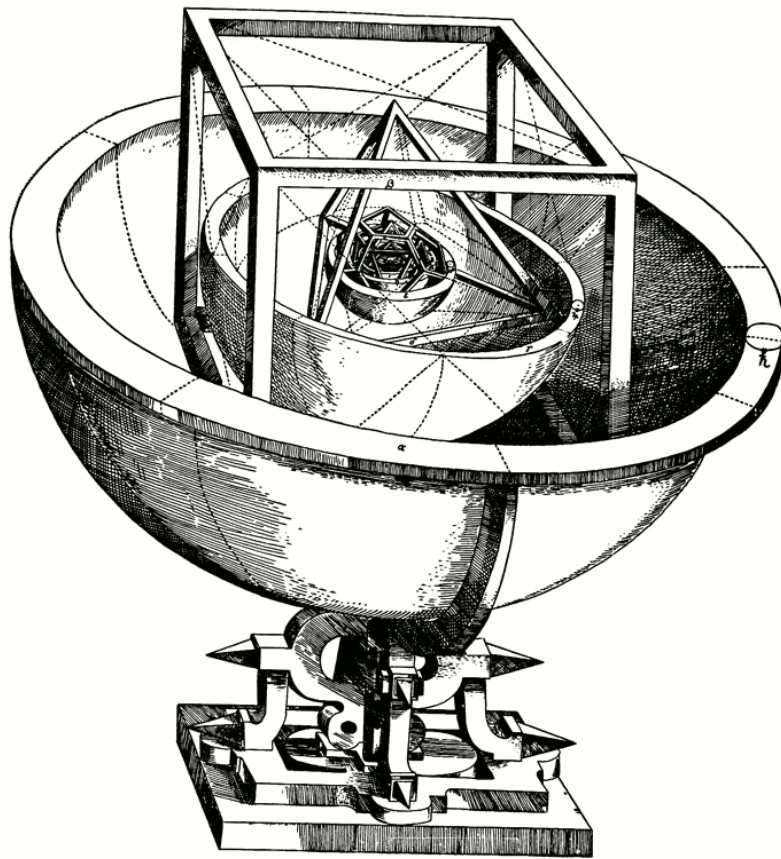
Slika 1. Opći zakon gravitacije

Sila je privlačna, centralna i uzajmna. Centralna je zbog toga što je usmjerena od jedne mase prema drugoj, a uzajmna zato što tijelo mase  $m_1$  privlači silu mase  $m_2$  i obrnuto. Sila privlačenja je jednaka za oba slučaja. Povećanjem sila razmak tijela se smanjuje razmjerno s kvadratom udaljenosti. Udvostručenjem razmaka tijela, sila se smanji četiri puta, a utrostručenjem devet puta. Keplerovi zakoni su opisivali na koji način se gibaju planeti, dok je Newtonov zakon gravitacije rastumačio zašto se ti isti planeti gibaju tako kako se gibaju. Zakon je izveden na temelju teorijskih razmatranja tadašnje astronomije i fizike te na temelju iskustva.

### 3. JOHANNES KEPLER

Johannes Kepler (Weil der Stadt, 27.prosinca 1571. – Regensburg, 15.studenog 1630.) bio je njemački matematičar i astronom koji je otkrio da planet Zemlja i planeti putuju oko Sunca u eliptičnim orbitama. Smatra se jednim od najvećih znanstvenika ikada zbog svojih otkrića i teorija. Veliki utjecaj na njegov život je imao horoskop kojeg je sam pisao i koji će mu u budućnosti osigurati sredstva za znanstvena otkrića. Od malena je razvio ljubav prema astronomiji s kojom je imao prvi susret već sa 6 godina kada je proučavao „Veliki komet“. Dolazio je iz siromašne obitelji te se nakon teškog odrastanja odlučio posvetiti crkvenoj karijeri. Sjemenište u Adelsbergu ga je prihvatilo 1584. godine te nakon 5 godina boravka upisuje Sveučilište u Tübingenu. Sveučilištu je pristupio kako bi studirao teologiju te kasnije postao svećenik. Ubrzo upoznaje profesora Michaela Mästlina koji mu je približio Kopernikovu teoriju heliocentričnog modela svemira (u kojemu je Sunce postavljeno u njegovo središte, a ne Zemlja) koja je opisana u djelu „De revolutionibus orbium coelestium“. Proučavajući to djelo Kepler se odlučio posvetiti astronomiji te razraditi Kopernikovu ideju do kraja, što je rezultiralo objavom Keplerovih zakona gibanja. Godine 1596. izdaje svoje prvo veliko djelo „Mysterium Cosmographicum“ u kojemu brani Kopernikov sustav. Predlaže da se udaljenosti između šest planeta pojase pomoću pet polideara. Oni se nalaze u kugli koja prikazuje putanju Saturna (Slika 2). Gotovo 25 godina kasnije objavljuje nadopunjenu verziju „Mysterium Cosmographicum“ s ispravcima i poboljšanjima koje je uočio tijekom svojih istraživanja. Njegovu predanost istraživanju prepoznao je Tycho Brahe (danski znanstvenik i astronom) kojemu je Kepler postao pomoćnik u Pragu. Tycho mu je ustupio knjige s mjerenjima kako bi se mogao posvetiti proučavanju putanje Zemlje. Kako je Tycho imao problema s određivanjem putanje Marsa, posao je dodijelio Kepleru. Nakon 6 godina proučavanja, dolazi do otkrića pravilnih planetskih gibanja. Nakon Braheove smrti, Kepler sa svega 30 godina postaje imenovan Carskim matematičarom od strane cara Rudolfa II. Godine 1603. izbacuje svoje drugo veliko djelo „Astronomiae Pars Optica“ u kojem opisuje refleksije sfernih i ravnih zrcala te intenzitet svjetlosti. „Astronomiae Pars Optica“ se smatra temeljem moderne optike. Uslijedilo je izdavanje njegovog najvećeg djela „Astronomia nova“

(slika 3) u kojem je postavio dva osnovna principa moderne astronomije: zakon eliptičnog gibanja i zakon ploha. U tom djelu objavljuje i značajna otkrića iz područja teorije gravitacije, objašnjavajući pojavu plime i oseke Mjesečevim privlačenjem. Tijekom života je napisao još dva velika djela „Tabuli Rudolphinae“ koje je započeo T. Brahe i „De Stella nova in pede Serpentarii“ u kojem opisuje sjajnu zvijezdu koja se nalazila u zviježđu Zmijonosac .



Slika 2. Keplerov model sunčanog sustava

ASTRONOMIA NOVA  
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,

SEV

PHYSICA COELESTIS,

tradita commentariis

DE MOTIBVS STELLÆ

MARTIS,

Ex observationibus G. V.

TYCHONIS BRAHE:

Jussu & sumptibus

RVDOLPHI II.

ROMANORVM

IMPERATORIS &c:



Plurium annorum pertinaci studio  
elaborata Pragæ,

*A S. C. M. S. Mathematico*

JOANNE KĒPLERO,

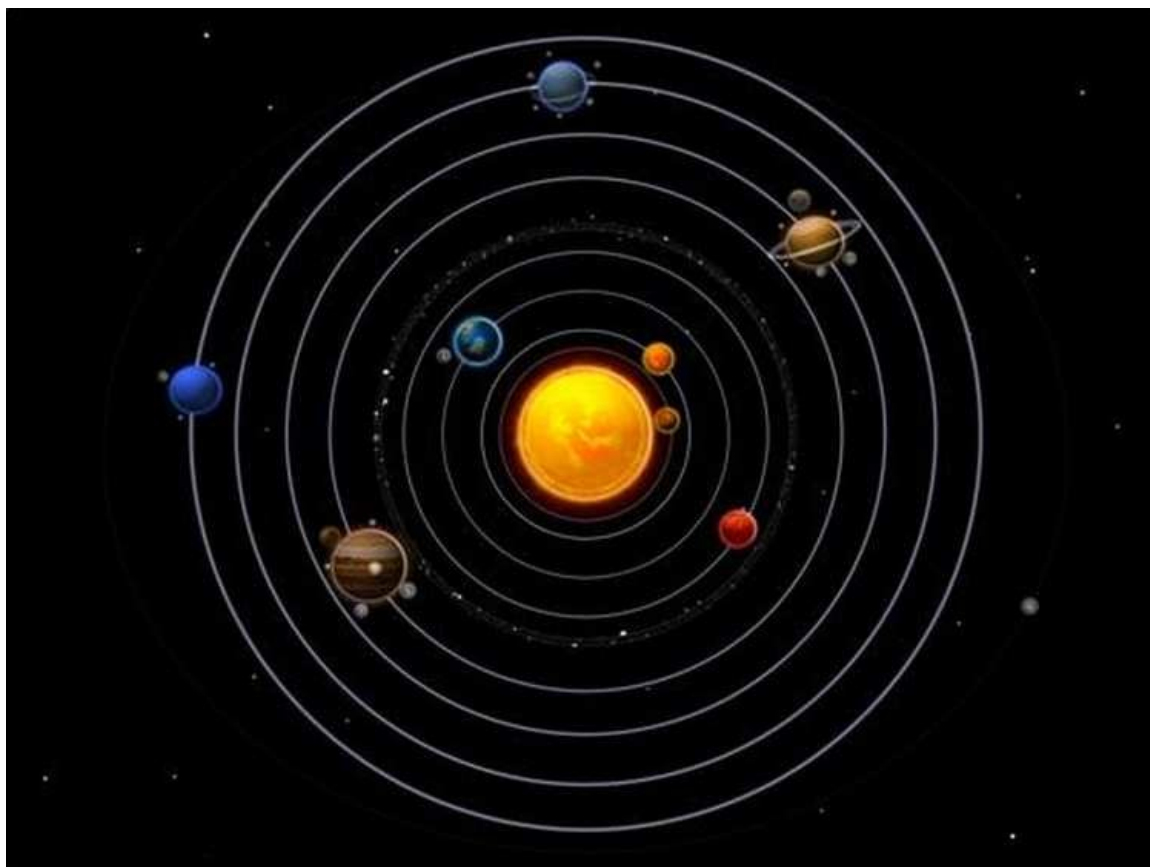
*Cum ejusdem C. M. S. privilegio speciali*

ANNO æræ Dionysianæ cō 10 c 1x.

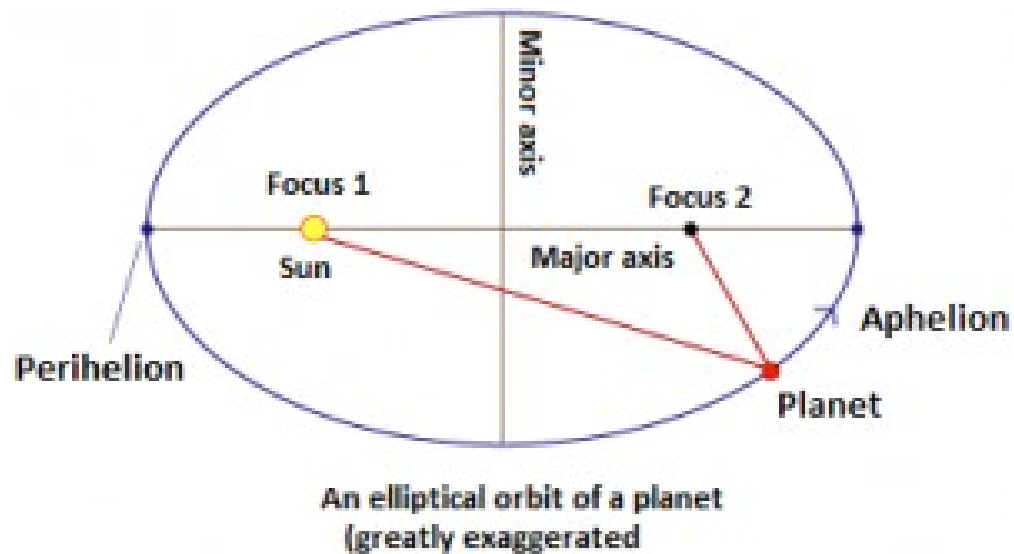
Slika 3. „Astronomia nova“

#### 4. PRVI KEPLEROV ZAKON

Sve do 16. stoljeća gibanje planeta se vodilo po Ptolomejevom geocentričnom sustavu u kojem je u sredini Zemlja i sva nebeska tijela se vrte oko nje po kružnicama jednom dnevno. Nikola Kopernik je početkom 16. stoljeća zaključio da se Sunce nalazi u sredini, a planeti gibaju oko njega po zamišljenim kružnicama što je bilo djelomično točno (slika 4). Proučavajući Kopernikovu teoriju Kepler je došao do zaključka da se svi planeti gibaju po elipsama kojima je jedno od žarišta Sunce (slika 5). Upravo ta njegova pretpostavka se naziva Prvim Keplerovim zakonom i smatra se jednim od najvećih otkrića u povijesti čovječanstva.



Slika 4. Heliocentrični sustav



Slika 5. Prvi Keplerov zakon

Na slici 5. je prikazano kako se planet Zemlja giba u smjeru suprotnom od kazaljke na satu i kako se njena udaljenost od Sunca stalno mijenja. Kada se Zemlja nalazi najbliže Suncu, ta točka se naziva perihel. Zemlja svake godine prolazi kroz perihel početkom siječnja i njena udaljenost od Sunca tada iznosi 147 098 291 kilometara. Gledajući sliku 5. dalo bi se zaključiti da je na Zemlji najveća temperatura kada se nalazi u perihelu, međutim upravo je obratno (na sjevernoj polutki), što je dokaz da godišnja doba ne karakterizira blizina Suncu nego nagnutost Zemljine osi prema Suncu. Afel predstavlja točku u kojoj je Zemlja najudaljenija od Sunca i ta udaljenost iznosi 152 098 233 kilometara. Zemlja kroz afel prolazi svake godine početkom srpnja. Vrijeme potrebno da sunčeve zrake u perihelu stignu do Zemlje iznosi 8 minuta i 17 sekundi, odnosno za afel 8 minuta i 27 sekundi (tablica 1.). Kepler je pomoću velike i male poluosi elipse, kao i dva žarišta, izveo matematičke izraze koji se i danas koriste. Radi lakšeg snalaženja kroz formule (a) predstavlja veliku poluos, a (b) malu poluos.



Tablica 1. Perihel i Afel

Godina	Perihel		Afel	
	nadnevak	vrijeme	nadnevak	vrijeme
2007.	3. siječnja	20:00	7. srpnja	00:00
2008.	3. siječnja	00:00	4. srpnja	08:00
2009.	4. siječnja	15:00	4. srpnja	02:00
2010.	3. siječnja	00:00	6. srpnja	11:00
2011.	3. siječnja	19:00	4. srpnja	15:00
2012.	5. siječnja	00:00	5. srpnja	03:00
2013.	2. siječnja	05:00	5. srpnja	15:00
2014.	4. siječnja	12:00	4. srpnja	00:00
2015.	4. siječnja	07:00	6. srpnja	19:00
2016.	2. siječnja	23:00	4. srpnja	16:00
2017.	4. siječnja	14:00	3. srpnja	20:00
2018.	3. siječnja	06:00	6. srpnja	17:00
2019.	3. siječnja	05:00	4. srpnja	22:00
2020.	5. siječnja	08:00	4. srpnja	12:00

Ekscentricitet se definira bezdimenzijskim jedinicama i služi za opisivanje putanje planeta. Za linearni ekscentricitet je rekao da je udaljenost od središta elipse do jednog i drugog žarišta jednaka što je opisano kroz sljedeći izraz.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Jednadžba 2.

Numerički ekscentricitet je veći što je elipsa više izduženija, ali uvijek iznosi manje od 1. Definiran je kao omjer linearnog ekscentriciteta  $e$  i velike poluosi  $a$ . Najveći ekscentricitet ima Merkur jer njegova staza najviše odstupa od odgovarajuće kružne staze dok najmanju izduženu stazu ima Venera.

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Jednadžba 3.

iz toga dobivamo:

$$\frac{b^2}{a} = p = a * (1 - \varepsilon^2)$$

Jednadžba 4.

$p$  nazivamo parametrom elipse

Iz izraza  $r + r_l = 2a$  i kosinusovog poučka te supstitucijom parametara elipse slijedi izraz:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon * \cos v}$$

Jednadžba 5.

Ova jednadžba predstavlja putanju planeta tj. prvi Keplerov zakon. Iz jednadžbe se može vidjeti kako udaljenost planeta od Sunca ovisi o kutu  $v$  koji se zove prava anomalija planeta. Perihel i Afel se također mogu definirati izrazima gdje je:

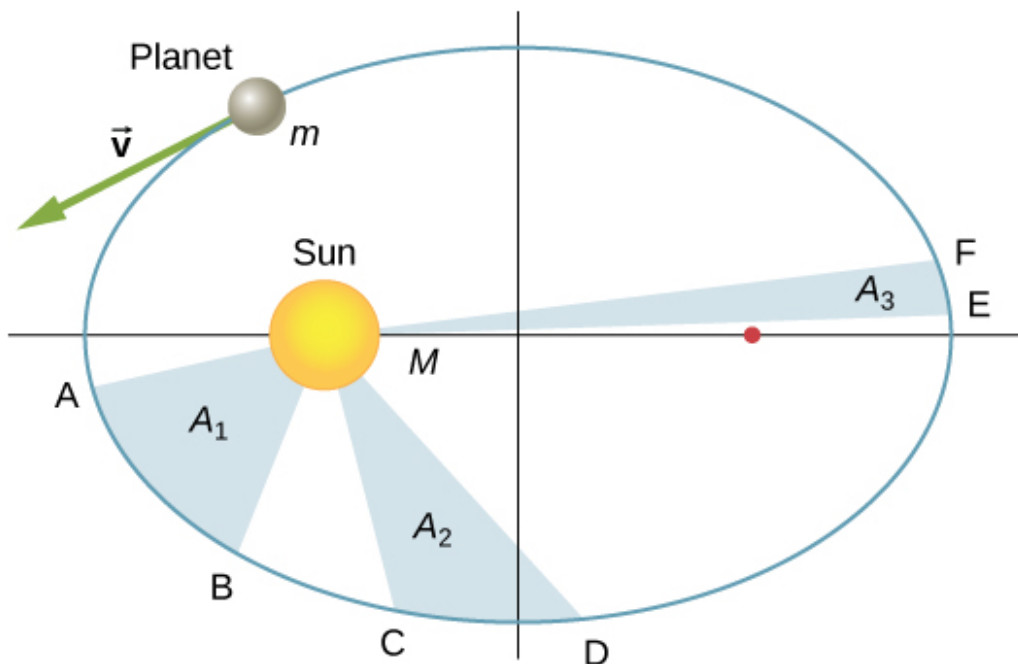
$$A = a * (1 + \varepsilon)$$

$$P = a * (1 - \varepsilon)$$

Jednadžba 6.

## 5. DRUGI KEPLEROV ZAKON

Drugi Keplerov zakon kaže da planet u jednakom vremenskom razdoblju opisuje jednake površine na relaciji planet – Sunce (slika 6).



Slika 6. Drugi Keplerov zakon

Vrijeme potrebno da se planet pomakne iz točke A do točke B je jednako vremenu pomicanja od točke C do točke D, odnosno od E do F. U ovom slučaju pomaci u jednakom vremenskom intervalu stvaraju površine  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  koje su jednake. Uspoređujući površine sa slike i udaljenosti koja je pređena duž elipse, možemo vidjeti da bi te iste površine bile jednake Zemlja se mora kretati brže što je bliže Suncu, a usporavati kako se udaljava od njega. Kada je planet u blizini perihela, mora povećati svoju tangencijalnu brzinu kako bi sačuvao kutni moment, a slično, kada je blizu afela gdje je njihovo razdvajanje veće, tangencijalna brzina mora se smanjiti tako da ukupni kutni moment orbite bude isti kao u perihelu. To ponašanje je dokazano jednadžbom očuvanja energije u kojoj je jedina promjena stavljanje novog izraza potencijalne energije.

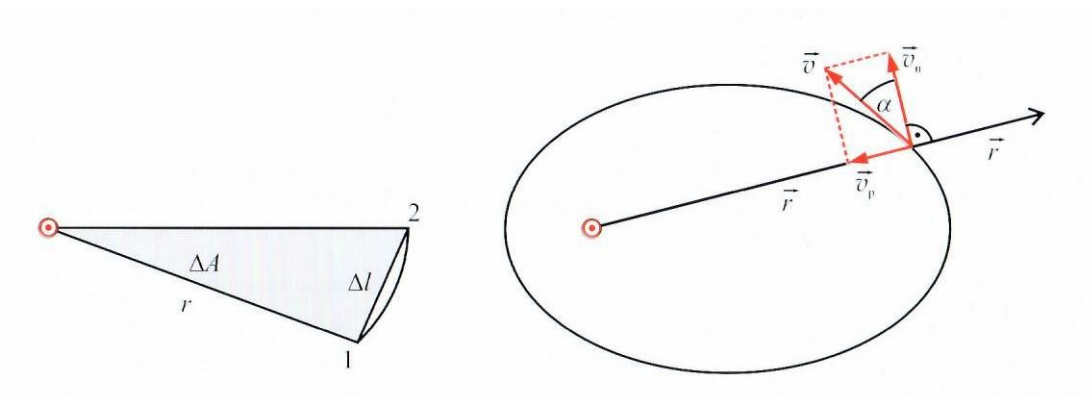
$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{G * M * m}{r_1} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{G * M * m}{r_2}$$

Jednadžba 7.

Drugi Keplerov zakon je zapravo posljedica očuvanja kutnog momenta koji vrijedi za svaki sustav samo s radijalnim silama. Ako se tijelo  $A_1$  kreće u odnosu na tijelo  $A_2$  u ravnoj liniji s jednakom brzinom, ono ima stalan kutni moment u odnosu na  $A_2$ , a linija koja spaja  $A_1$  s  $A_2$  briše jednaka područja u jednakim koracima vremena. Nikakva sila privlačenja (ili odbijanja) između dva tijela ne može promijeniti njihov kutni moment jedna o drugoj. Drugi zakon tako izražava odnos koji vrijedi za sve.

## 5.1. Drugi Keplerov zakon i očuvanje momenta količine gibanja

Promatramo li mali vremenski interval pri pomaku planeta iz položaja 1 u položaj 2, luk između točaka 1 i 2 može se zamijeniti malom duljinom  $\Delta l$ , a prijedenu površinu trokutom površine  $\Delta A$  (slika 7).



Slika 7. Pomak planeta iz položaja 1 u 2 i okomitost  $v_n$  na  $r$

Površina trokuta jednaka je:

$$\Delta A = \frac{r\Delta l}{2}$$

Jednadžba 8.

Dok pripadajuća površinska brzina proizlazi iz:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r\Delta l}{2\Delta t} = \frac{rv_n}{2}$$

Jednadžba 9.

$v_n$  je komponenta brzine koja je okomita na radijusvektor  $r$ . Kako je prema drugom Keplerovom zakonu površinska brzina konstantna, proizlazi da je:

$$rv_n = konst.$$

Jednadžba 10.

Pomnoži li se gornja jednadžba s masom planeta ( $m$ ), slijedi:

$$mrv_n = konst.$$

Jednadžba 11.

Moment količine gibanja  $\vec{L}$  jednak je vektorskom produktu radijusvektora i količine gibanja (impulsa):

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

Jednadžba 12.

Iznos vektorskog produkta jednak je umnošku iznosa dvaju vektora i sinusa kuta među njima. Na slici 7. Radijusvektor je translantiran tako da mu se početak podudara s početkom vektora brzine. Tada je lako vidljivo da je iznos vektora momenta količine gibanja planeta jednak:

$$L = mvr \sin(90^\circ + \alpha) = mvr \cos \alpha$$

Jednadžba 13.

Kako je  $v_n = v \cos \alpha$ , nalazimo da je:

$$L = mv_n r$$

Jednadžba 14.

Očigledno je da jednačina 11. iskazuje zakon očuvanja momenta količine gibanja. Dakle, drugi Keplerov zakon ekvivalentan je zakonu očuvanju momenta količine gibanja. Iz toga se može zaključiti da se planeti gibaju pod utjecajem sile koja djeluje u smjeru Sunca (središnja ili centralna sila). Kako iznos te sile ovisi o udaljenosti, možemo utvrditi iz trećeg Keplerovog zakona. Najjednostavnije je to pokazati u slučaju kružnog gibanja.

## 6. TREĆI KEPLEROV ZAKON

Treći zakon koji se ponekad naziva i zakon Harmonija objavljen je 1619. godine u knjizi „Harmonices mundi”. Zakon kaže da su kvadrati orbitalnog razdoblja planeta izravno proporcionalni s kubovima velikih poluosi njihovih orbita. Za razliku od prvog i drugog Keplerovog zakona koji opisuju karakteristike gibanja jednog planeta, treći zakon čini usporedbu karakteristika kretanja različitih planeta. Treći Keplerov zakon podrazumijeva da se razdoblje za planet koji kruži oko Sunca brzo povećava s radijusom orbite. Merkuru koji je najbliže Suncu treba samo 88 dana da ga obiđe, dok je Saturnu potrebno 10 759 dana. Prema trećem Keplerovom zakonu vrijedi:

$$\frac{r^3}{T^2} = K$$

Jednadžba 15.

$T$  predstavlja ophodno vrijeme planeta, a  $r$  polumjer odnosno veliku poluos elipse.  $K$  ima istu vrijednost za sve planete koji kruže oko sunca (Tablica 2).

Tablica 2. Omjer  $T^2/R^3$  za planete oko Sunca

Planeta	Razdoblje (god.)	Prosječna udaljenost (au)	$T^2/R^3$ (god <sup>2</sup> /au <sup>3</sup> )
Merkur	0,241	0,39	0,98
Venera	.615	0,72	1,01
Zemlja	1,00	1,00	1,00
Mars	1,88	1,52	1,01
Jupiter	11,8	5,20	0,99
Saturn	29,5	9,54	1,00
Uran	84,0	19,18	1,00
Neptun	165	30,06	1,00
Pluton	248	39,44	1,00



Prosječna vrijednost udaljenosti navedena je u astronomskim jedinicama gdje je 1 au predstavlja udaljenost od Zemlje do Sunca koja iznosi  $1,4957 \cdot 10^{11}$  m. Orbitalno razdoblje dano je u jedinicama zemaljskih godina gdje je 1 zemaljska godina vrijeme potrebno da Zemlja obiđe Sunce tj.  $3,156 \cdot 10^7$  sekundi.

### 6.1. *Veza trećeg Keplerovog zakona i Newtonova zakona gravitacije*

Sila koja djeluje između Sunca i planeta opada s povećanjem njihovih uzajamnih udaljenosti. Oko Sunca se giba planet koji s periodom  $T$  i na udaljenosti  $r$  ima centripetalnu akceleraciju:

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Jednadžba 16.

Centripetalna sila na planet iznosi:

$$F = ma = \frac{4\pi^2 r m}{T^2}$$

Jednadžba 17.

gdje  $m$  predstavlja masu planeta. Supstitucijom perioda  $T$  po trećem Keplerovom zakonu slijedi:

$$F = ma = \frac{4\pi^2 K_s r m}{r^2}$$

Jednadžba 18.

Iz gornje jednadžbe se može zaključiti da je sila na planet obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti od Sunca. Konstanta  $4\pi^2 K_s$  karakterizira sunčev sustav, dok npr.  $4\pi^2 K_z$  predstavlja sustav Zemlja – Mjesec. Privlačna sila između Mjeseca i Zemlje iznosi:

$$F = ma = \frac{4\pi^2 K_z r m}{r^2}$$

Jednadžba 19.

Ovaj se izraz može upotrijebiti za bilo koja dva tijela (gravitacijsko privlačenje karakterizira sva tijela) iz kojeg se može zaključiti da konstanta ovisi o masi tijela tj. da je razmjerna s masom:

$$4\pi^2 K_z = G m_z \text{ za Zemlju}$$

$$4\pi^2 K_s = G m_s \text{ za Sunce}$$

Jednadžba 20.

$G$  predstavlja konstantu razmjernosti. Gravitacijska sila, kojom se dvije mase međusobno privlače iznosi:

$$F = \frac{4\pi^2 K_1 m_2}{r^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Jednadžba 21.

Po zakonu akcije i reakcije masa  $m_2$  privlači masu  $m_1$  silom jednakog iznosa:

$$F = \frac{4\pi^2 K_2 m_1}{r^2} = G \frac{m_2 m_1}{r^2}$$

Jednadžba 22.

koja karakterizira Newtonov zakon opće gravitacije. Konstanta  $G$  je gravitacijska konstanta koju je prvi odredio Henry Cavendish, više od stoljeća nakon šta je Newton postavio svoj zakon gravitacije. Ovime je pokazano kako iz trećeg Keplerovog zakona slijedi Newtonov zakon gravitacije.

## 7. ZAKLJUČAK

U ovom radu cilj je bio pokazati kako se gravitacija shvaćala na razne načine sve do 16. stoljeća kada je Kepler postavio svoja tri zakona koja su zauvijek promijenila shvaćanje Sunčevog sustava i putanja po kojima se planeti gibaju. Odbačen je geocentrični sustav, a Sunce je stavljeno u sredinu oko kojeg se planeti gibaju po elipsama. Od samih početaka ljudi su primjetili da kada nešto bacimo u zrak ili držimo na dlanu neka sila to tijelo vuče prema dolje, ali je nisu uspjeli objasniti. S razvojem civilizacije i odgovarajuće opreme, razni znanstvenici poput Arhimeda, Aristotela, Vitruvija, Ptolomeja, Galilea su davali svoja mišljenja, no tek je Isaac Newton vođen Keplerovim zakonima opisao dinamiku gibanja planeta. Tvrdio je da se pomoću gravitacijske sile sva tijela međusobno privlače, bez obzira na njihov oblik, sastav i veličinu. Vođen Kopernikovom teorijom, Kepler u svom prvom zakonu objavljuje da se planeti gibaju po elipsama, a da se u jednom od žarišta nalazi Sunce. U drugom zakonu objavljuje da radijvektor na relaciji planet – Sunce u jednakom vremenskom razdoblju opiše jednake površine bez obzira na udaljenost od Sunca. Treći zakon kaže da je kvadrat vremena potrebnog da planet napravi krug oko Sunca proporcionalan kubu srednje udaljenosti od Sunca. Tek je Albert Einstein 1916. godine uspio do kraja razraditi Keplerove zakone i Newtonov zakon gravitacije svojom teorijom relativnosti u kojoj objašnjava zakon gravitacije i njezin odnos prema drugim silama.

## 8. LITERATURA

1. Roša D., Osnove sferne astronomije i nebeske mehanike, Zvezdarnica Zagreb, Zagreb, 2011
2. Koestler A., Mjesečarenja, Eneagram, Zagreb, 2017
3. Hoyle F., Astronomija, Marjan Tisak, Split, 2005
4. Enciklopedija leksikografskog zavoda, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 1967
5. Tehnička enciklopedija, Jugoslavenski leksikografski zavod. Zagreb, 1979
6. Milardović, Lucija, Gravitacija i Keplerovi zakoni, Završni rad, Sveučilište u Rijeci, 2019
7. Westman, R., Johannes Kepler German Astronomer  
<https://www.britannica.com/biography/Johannes-Kepler>, pristup 28.7.2021.
8. Rudež, A., Suton, M.: Seminarski rad iz kolegija Životopisi matematičara,  
<https://www.scribd.com/doc/295911024/%C5%BDivotopis-Johannes-Kepler>, pristup 29.7.2021.
9. [https://hr.wikipedia.org/wiki/Johannes\\_Kepler](https://hr.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler), pristup 28.7.2021.
10. Leksikografski zavod Miroslav Krleža: Johannes Kepler,  
<https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=31225#top>, pristup 29.7.2021.
11. The Physics Classroom, Kepler's Three Laws,  
<https://www.physicsclassroom.com/class/circles/Lesson-4/Kepler-s-Three-Laws>, pristup 5.8.2021.
12. Boundless Physics, Kepler's Laws, <https://courses.lumenlearning.com/boundless-physics/chapter/keplers-laws/>, pristup 5.8.2021.
13. Duncan, J., The Mathematical Relationship Between Kepler's Laws and Newton's laws, <https://www.jstor.org/stable/2324215>, pristup 9.8.2021.
14. NASA, Orbits and Kepler's Laws,  
<https://solarsystem.nasa.gov/resources/310/orbits-and-keplers-laws/>, pristup 15.8.2021.

15. The Editors of Encyclopaedia Britannica, Newton's laws of motion,  
<https://www.britannica.com/science/Newtons-law-of-gravitation>, pristup  
18.8.2021.
16. [https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s\\_laws\\_of\\_planetary\\_motion](https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion), pristup  
18.8.2021.