

# Statička analiza geometrijski točnim 3D grednim elementom

---

**Tomec, Jan; Jelenić, Gordan**

*Source / Izvornik:* **Zbornik radova desetog susreta Hrvatskog društva za mehaniku, 2020, 271 - 276**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:157:551292>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



# Statička analiza geometrijski točnim 3D grednim elementom

Tomec, J.<sup>1</sup> i Jelenić, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

U radu je ukratko predstavljena nelinearna geometrijski točna teorija greda. Izveden i implementiran je konačni element na temelju te teorije. Također je opisana Newton-Raphsonova iteracijska metoda, koja uključuje ažuriranje vrijednosti s posebnim naglaskom na neograničeno velike 3D rotacije. Ovaj algoritam je bitan za samo programiranje metode konačnih elemenata. Na kraju je element testiran preko standardnih numeričkih primjera iz literature.

**Ključne riječi:** Statička analiza, nelinearna teorija greda, metoda konačnih elemenata, neograničeno velike 3D rotacije

---

<sup>1</sup> **Jan Tomec, doktorand**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: jan.tomec@uniri.hr

<sup>2</sup> **Prof.dr.sc. Gordan Jelenić, redoviti profesor u trajnom zvanju**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

## 1 Uvod

Teorija geometrijski točnih greda je matematička formulacija, koju koristimo za opis vrlo fleksibilnih konstrukcija, koje mogu biti izložene proizvoljno velikim rotacijama. Primjene uključuju mehaničku analizu lopatica helikoptera, antene na satelitima, vjetroelektrane, čelično uže žičara itd. U ovom radu prikazati ćemo konačni element temeljen na ovoj teoriji, kojega su prvotno razvili Simo i Vu-Quoc [5]. U poglavlju 2 predstavljamo bitne jednadžbe problema te postupak ažuriranja. U poglavlju 3 prikazujemo rezultate našeg koda, testiranog na dva odabrana numerička primjera.

## 2 Metodologija

### 2.1 Teorija

Neka bude  $\{\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3\}$  baza koordinatnog sustava, u kojem se nalazi greda. Baza u materijalnim koordinatama je označena  $\{\mathbf{E}_1 \ \mathbf{E}_2 \ \mathbf{E}_3\}$ . Geometriju grede može se opisati preko težišnice i poprečnog presjeka. Neka položaj težišnice označava vektor  $\mathbf{x}$ , koji ovisi od krivocrtne koordinate  $s$ . Ravnotežne jednadžbe problema glase [4]

$$\mathbf{n}' + \mathbf{n}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \mathbf{m}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{f} + \mathbf{m}^{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

gdje  $()'$  označava derivaciju duž težišnice  $()' = \partial()/\partial s$ ,  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{m}$  su rezultatna presječna sila i moment, a  $\mathbf{n}^{\text{ext}}$  i  $\mathbf{m}^{\text{ext}}$  su opterećenja silom i momentom na jedinicu duljine nosača. Resultantna presječna sila i moment izračunavaju se preko konstitutivne matrice  $\mathbf{c}$  i odgovarajućih deformacijskih mjera.

$$\{\mathbf{n} \ \mathbf{m}\}^T = \mathbf{c} \{\boldsymbol{\gamma} \ \boldsymbol{\omega}\}^T, \quad (2)$$

gdje je  $\boldsymbol{\gamma}$  vektor osne i tangencijalnih deformacija ( $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{x}' - \mathbf{t}_3$ ) dok je  $\mathbf{t}_3 = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}_3$  jedinični vektor okomit na poprečni presjek, a  $\boldsymbol{\omega}$  vektor ukrivljenosti. Koordinate prostora i materijala možemo povezati preko rotacijske matrice  $\boldsymbol{\Lambda}$  u  $SO(3)$ . Kako je sustav nelinearan zbog prisutnosti specijalne ortogonalne grupe  $SO(3)$  u definiciji matrice  $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda}^T$ , rješavamo ga nelinearnom metodom konačnih elemenata. Matrica  $\mathbf{C}$  je dijagonalna materijalna konstitutivna matrica koja sadrži odgovarajuće krutosti poprečnog presjeka ( $\mathbf{C} = \text{diag}(GA_1, GA_2, EA, EI_1, EI_2, GI_t)$ ), gdje su  $E$  i  $G$  moduli elastičnosti i smicanja materijala,  $A$  je površina poprečnog presjeka,  $A_1$  i  $A_2$  su smične površine presjeka duž glavnih osi presjeka,  $I_1$  i  $I_2$  su osni momenti površine drugog reda obzirom na odgovarajuće glavne osi presjeka, a  $I_t$  je torzijska konstanta presjeka. Počnemo s varijacijskim računom

$$\int_L (\mathbf{n}' + \mathbf{n}^{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{m}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{f} + \mathbf{m}^{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds = 0, \quad (3)$$

gdje je varijacija pomaka označena s  $\boldsymbol{\eta}$ , a varijacija rotacija sa  $\boldsymbol{\psi}$ . Ovo možemo zapisati u matricnom obliku

$$\int_L \left( \boldsymbol{\Xi}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} \right) \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}) - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^{\text{ext}} \\ \mathbf{m}^{\text{ext}} \end{Bmatrix} ds = 0, \quad (4a)$$

gdje su

$$\boldsymbol{\Xi}^T = \begin{bmatrix} O' \mathbf{I} & [\mathbf{x}' \times] \\ \mathbf{0} & O' \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix}. \quad (4b-d)$$

U nastavku je potrebno izraz (4a) linearizirati za rješavanje Newton-Raphsonovom metodom. Detalji su prikazani u [5].

## 2.2 Element

Pretpostavimo, da imamo element s brojem čvorova  $n$ . Neka  $\mathbf{X}_i$  i  $\check{\mathbf{x}}$  označavaju položaje čvorova i njihovu interpolaciju,  $\mathbf{U}_i$  i  $\check{\mathbf{u}}$  iterativne priraste čvornih pomaka i njihovu interpolaciju te  $\boldsymbol{\Theta}_i$  i  $\check{\boldsymbol{\Theta}}$  iterativne priraste čvornih rotacija i njihovu interpolaciju. Neka  $\boldsymbol{\Lambda}(s)$  označava interpolirane konačne rotacije. Približno rješenje dobiva se interpoliranjem čvornih vrijednosti funkcijama oblika  $N_i(s)$ , za koje u ovom radu uzimamo Lagrangeve polinome reda  $n - 1$ .

$$\check{\mathbf{x}}(s) = \sum_{i=1}^n N_i(s) \mathbf{X}_i, \quad \check{\mathbf{u}}(s) = \sum_{i=1}^n N_i(s) \mathbf{U}_i \quad i \quad \check{\boldsymbol{\Theta}}(s) = \sum_{i=1}^n N_i(s) \boldsymbol{\Theta}_i. \quad (5a-c)$$

Kada umetnemo interpolacije (5) u lineariziran izraz (4a), dobijemo sljedeći sustav linearnih jednačbi [1]

$$(\mathbf{K}_{i,j}^{(1)} + \mathbf{K}_{i,j}^{(2)}) \mathbf{r} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}, \quad (6a)$$

gdje su

$$\mathbf{F}_i^{\text{int}} = \int_0^L \boldsymbol{\Xi}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix} ds, \quad \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \int_0^L \boldsymbol{\Xi}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^{\text{ext}} \\ \mathbf{m}^{\text{ext}} \end{Bmatrix} ds, \quad \mathbf{K}_{i,j}^{(1)} = \int_0^L \boldsymbol{\Xi}_i \mathbf{c} \boldsymbol{\Xi}_j^T ds \quad (6b-d)$$

$$\mathbf{K}_{i,j}^{(2)} = \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -[\mathbf{n} \times] N_i' N_j \\ [\mathbf{n} \times] N_i N_j' & -[\mathbf{m} \times] N_i' N_j + [\mathbf{x}' \times][\mathbf{n} \times] N_i' N_j \end{bmatrix} ds. \quad (6e)$$

$\boldsymbol{\Xi}_k$  sada označava diskretni oblik diferencijalnog operatora

$$\boldsymbol{\Xi}_i(s) = \begin{bmatrix} N_i' \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -N_i [\mathbf{x}' \times] & N_i' \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Globalna ravnoteža problema za odabranu mrežu konačnih elemenata uspostavlja se na standardan način [6], kao i unošenje uvjeta oslanjanja. Rješavanjem dobivene jednačbe u svakoj iteraciji Newton-Raphsonovog postupka dobivaju se iterativni prirasti pomaka i rotacija u svim čvorovima mreže. Vrijednosti koje je potrebno ažurirati su

$$\mathbf{X}_i := \mathbf{X}_i + \mathbf{U}_i \quad i \quad \Lambda(\mathbf{s}) := \exp(\boldsymbol{\vartheta}(s)) \Lambda(\mathbf{s}), \quad (8a,b)$$

gdje je

$$\exp(\boldsymbol{\vartheta}(s)) = \mathbf{I} + \frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta} [\boldsymbol{\vartheta} \times] + \frac{1 - \cos(\vartheta)}{\vartheta^2} [\boldsymbol{\vartheta} \times]^2 \quad (9)$$

Zakrivljenost se može izračunati jednadžbom koju su izveli Jelenić i Saje u [3]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(s) := & \left(1 - \frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta}\right) \frac{\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta}'}{\vartheta^2} \boldsymbol{\vartheta} + \frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta} \boldsymbol{\vartheta}' + \frac{1 - \cos(\vartheta)}{\vartheta^2} \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\vartheta}' \\ & + \cos(\vartheta) \boldsymbol{\omega} + \frac{1 - \cos(\vartheta)}{\vartheta} \frac{\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} + \frac{\sin(\vartheta)}{\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (10)$$

Deformacije i zakrivljenosti u koordinatama materijala sada se računaju kao  $\boldsymbol{\kappa}(s) = \Lambda^T \boldsymbol{\omega}$  i  $\Gamma(\mathbf{s}) = \Lambda^T \mathbf{x}' - \mathbf{E}_3$ . Na temelju ažuriranih pomaka, rotacija, deformacije i zakrivljenosti sada možemo ažurirati presječne sile i momente pomoću (2) te ponoviti postupak (6)-(10) do dosegnute željene točnosti.

### 2.3 Algoritam

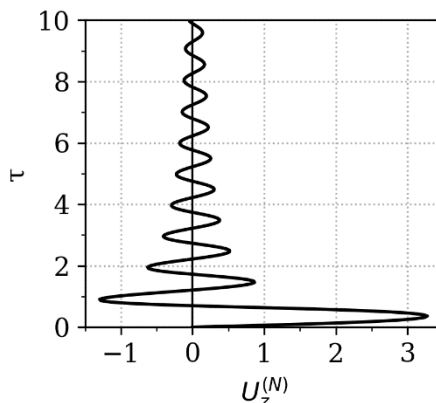
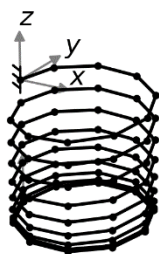
Analiza polazi od poznatog početnog stanja. Njegov potpuni opis uključuje položaje čvorova, povezanost među čvorovima, stupnjeve slobode i rubne uvjete, koji se dijele na kinematičke (pomaci i rotacije) i statičke (sile i momenti) rubne uvjete. Reducirana integracija se koristi, da bi se izbjeglo pojavi shear-lockinga [5]. Budući da imamo posla s pojavom u trima dimenzijama, trebamo ispravno ažurirati vrijednosti rotacija. Pomaci su linearni i se mogu zbrojiti, međutim rotacije nisu. Za ažuriranje rotacije moramo pomnožiti eksponencijalnu mapu iteracijskih prirasti rotacija s postojećom rotacijskom matricom (8). Ažuriranje rotacije se mora provesti u Gaussovima integracijskim točkama. Zakrivljenost se ažurira uz pomoć jednadžbe (10).

## 3 Rezultati

Odabrali smo dva poznata numerička primjera iz literature kako bismo potvrdili ispravnost koda. Oba primjera su trodimenzionalna. Ovi testovi su čisto akademski i nemaju stvarnog fizičkog značenja. Njihova jedina svrha jest testirati numeričku metodu do krajnjih granica. Točnost postupka je vidljiva iz usporedbe s rezultatima drugih autora, koji dobivaju iste rezultate s različitim tehnikama rješenja. Prvi primjer je savijanje grede u spiralu [2]. Drugi primjer je test izvijanja pravokutnog okvira [5].

### 3.1 Spiralni test

U slobodnome kraju konzolnog nosača postepeno nanosimo moment oko vertikale i vertikalnu silu te tako savijamo konzolu u spiralu. Za dobivanje numeričkih rezultata koristili smo podatke iz [2]; greda duljine  $L = 10$ , aksijalna i posmična krutost  $EA = GAs = 10^4$ , fleksijska i

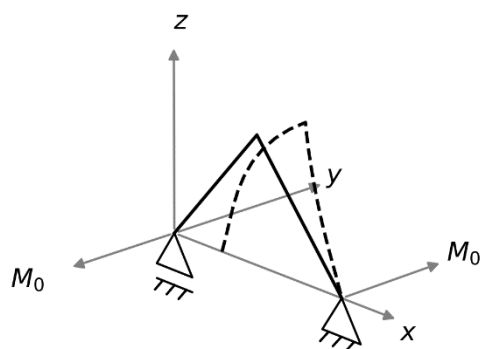


Slika 1. Spirala: rubni uvjeti i deformiran oblik      Slika 2. Spirala: pomak krajnje točke

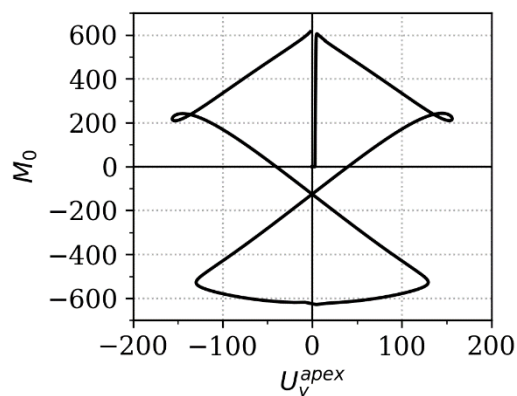
torzijska krutost  $EI = GI_t = 10^2$ . Na slobodnom kraju djeluje moment  $M_0 = 200\pi$  i sila  $F_0 = 50$ . Domenu diskretiziramo sa 100 linearnih elemenata s reduciranom integracijom. Nanesena sila i moment se dodaju istovremeno u 219 koraka. Analitički, čisto savijanje rezultira u krivulji s polumjerom  $\rho = EI/M$  [5]. Međutim dodajemo silu izvan ravnine kako bismo formirali spiralu (slika 1). Kao što je izvijestio Ibrahimbegovic [2], rješenje nije trivijalno jer se izmjenjuju pozitivni i negativni pomaci (slika 2). Analiza je vrlo osjetljiva na broj korištenih koraka. Rezultati se podudaraju s [2].

### 3.2 Izvijanje pravokutnog okvira

Pravokutni okvir je pridržan na oba kraja osloncima, koji omogućuju rotaciju u ravnini okvira, slika 3. Oba kraka okvira su duljine  $L = 1$ . Aksijalna krutost je  $EA = 1282320$ , posmična krutost  $GA_s = 587322$ , fleksijska krutost  $EI_{zz} = 38469,6$ ,  $EI_{yy} = 96174000$  i torzijska krutost  $GI_t = 58732,2$ . Okvir je opterećen suprotno orijentiranim momentima vrijednosti  $M_0 = 650$  u krajnjim točkama. Svaki krak podijeljen je u 5 kvadratnih elemenata sa reduciranom integracijom. Analiza je podijeljena u nekoliko faza. U prvoj fazi dodajemo perturbacijsku silu  $F_p = 0,1$  u smjeru  $y$  u 10 koraka metodom Newton-Raphson. U drugoj fazi koristimo cilindričnu arc-length metodu za dodavanje momenta  $M_0$  u oba oslonca istovremeno. Na početku koristimo luk duljine  $\Delta S = 0,1$ , ali također smo implementirali algoritam dijeljenja koraka za automatsko smanjenje  $\Delta S$  [6]. Kad dosegne kritični moment, zaustavljamo arc-length metodu. U tom trenutku idemo na treću fazu i uklanjamo perturbacijsku silu  $F_p$ . I to radimo u 10 koraka Newton-Raphsonovom metodom. Nakon uklanjanja perturbacije, nastavljamo s posljednjim, četvrtom fazom. Ovdje nastavljamo s prethodno prekinutom arc-length metodom dok ne postignemo konačni moment  $M_0$ . Ovo je ekstremni primjer, gdje razmatramo savijanje, izvijanje, velike rotacije i velike pomake. Dobivene krivulje na slici 4 točno odgovaraju rezultatima Sima i Vu-Quoca [5].



Slika 3. Pravokutni okvir: rubni uvjeti i opće deformirano stanje



Slika 4. Pravokutni okvir: poprečni pomak vrha

## 4 Zaključak

Isprogramirali smo konačne elemente koje su razvili Simo i Vu-Quoc u [5] i provjerili rezultate preko numeričkih primjera. Metodu smo testirali na spiralni test kojeg je predložio Ibrahimbegovic i test izvijanja pravokutnog okvira, kojeg su predložili Simo i Vu-Quoc. Rezultati se potpuno podudaraju što svjedoči o tome, da je naša implementacija dobra platforma za daljnji razvoj.

## Zahvale

Ovaj rad financiran je iz EU programa Horizon 2020 (ugovor br. 860124 – THREAD).

## Literatura

- [1] Crisfield, M. A.; Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials; John Wiley & Sons; 1993; London.
- [2] Ibrahimbegovic, A.; On the choice of finite rotation parameters; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1997; 149; 49-71.
- [3] Jelenić, G. i Saje, M.; A kinematically exact space finite strain beam model - finite element formulation by generalized virtual work principle; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1995; 32; 131-161.
- [4] Simo, J. C.; A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I; 1986; 58; 79-116.
- [5] Simo, J. C. i Vu-Quoc, L.; A three-dimensional finite-strain rod model. part II: Computational aspects; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1986; 58; 79-116.
- [6] Wriggers, P.; Nonlinear Finite Element Methods; Springer; 2008; Berlin.