

Čisto savijanje u ortotropnoj mikropolarnoj elastičnosti

Jurković, Damjan

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:167999>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

Damjan Jurković

Čisto savijanje u ortotropnoj mikropolarnoj elastičnosti

Diplomski rad

Rijeka, 2022.

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Sveučilišni diplomski studij
Konstrukcije
Teorija elastičnosti**

**Damjan Jurković
JMBAG: 0114029770**

Čisto savijanje u ortotropnoj mikropolarnoj elastičnosti

Diplomski rad

Rijeka, 19. rujna 2022.

IZJAVA

Završni/Diplomski rad izradio/izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom/mentoricom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Damjan Jurković

U Rijeci, 19. rujna 2022.

IZJAVA

Diplomski rad izrađen je u sklopu znanstvenog projekta
Fixed-pole concept in numerical modelling of Cosserats' continuum

Šifra projekta HRZZ IP-2018-01-1732

Financijer projekta Hrvatska zaklada za znanost

U Rijeci, 15. rujna 2022.

Mentor:

Sažetak

Ovaj rad razmatra problem čistoga savijanja ortotropnog mikropolarnog kontinuuma. Njegov cilj je dobivanje vrijednosti inženjerskih parametara potrebnih za opis ovakvog kontinuuma, s naglaskom na karakterističnu duljinu za savijanje l_b . Postojeći Gauthierovi analitički izrazi za naprezanja, deformacije i pomake izotropnog mikropolarnog kontinuuma prošireni su za analizu ortotropnog kontinuuma. Kao simulacija ortotropnog mikropolarnog materijala korišteni su aluminijski nosači oslabljeni predefiniranim rasterom perforacija. Virtualnim eksperimentima aksijalnog opterećenja metodom konačnih elemenata na reprezentativnoj jediničnoj ćeliji mikrostrukture nosača dobivena je vrijednost četiri Poissonova koeficijenta, a iz omjera površine jedinične ćelije s i bez šupljine dobiven je jedan modul elastičnosti. Pomoć virtualnih eksperimenata čistog savijanja na homogeniziranim nosačima metodom konačnih elemenata dobivena je vrijednost ostala dva Poissonova koeficijenta, dva modula elastičnosti te karakteristične duljine na savijanje. U analizi rezultata virtualnih four point bending eksperimenata prikazna je size-effect pojava.

Ključne riječi: Ortotropni mikropolarni kontinuum, Čisto savijanje, Virtualni eksperimenti, Inženjerski parametri mikropolarnog kontinuuma, Karakteristična duljina za savijanje, Homogenizacija

Sadržaj

1	UVOD	1
2	OSNOVNE POSTAVKE MIKROPOLARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI	3
3	ANALIZA GAUTHIEROVOG RJEŠENJA PROBLEMA CILINDRIČNOG ČISTOG SAVIJANJA PLOŠNOG NOSAČA	7
3.1	Analiza problema klasičnom teorijom elastičnosti	7
3.2	Analiza problema mikropolarnom teorijom elastičnosti	8
4	PROBLEM CILINDRIČNOG SAVIJANJA PLOČASTOG NOSAČA U ORTOTROPNOM KONTINUUMU PREMA MIKROPOLARNOJ TEORIJI	14
4.1	Postavke ortotropnog klasičnog kontinuuma	14
4.2	Postavke ortotropnog mikropolarnog kontinuuma	15
4.3	Analitičko rješenje čistog savijanja ortotropnog mikropolarnog kontinuuma	16
5	DOBIVANJE INŽENJERSKIH PARAMETARA MATERIJALA SIMULIRANE MIKROPOLARNOSTI	20
5.1	Rezultati eksperimenata	23
6	VIRTUALNI EKSPERIMENTI OPTEREĆENJEM NA ČISTO SAVIJANJE	26
6.1	Rezultati eksperimenata	28
6.2	Analiza rezultata	37
7	ZAKLJUČAK	39
8	DODATCI	40
8.1	Dodatak 1: Odnos izotropnih mikropolarnih inženjerskih i materijalnih konstanti	40
8.2	Dodatak 2: Transformacija iz ortotropnog u izotropni kontinuum	41
8.3	Dodatak 3: Prvobitni pokušaji dobivanja vrijednosti inženjerskih parametara	43
9	LITERATURA	46

Popis tablica

1	Pomaci i deformacije ćelija	24
2	Geometrija uzoraka i opterećenja	26
3	Koordinate promatranih čvorova	27
4	Broj čvorova i elemenata mreže konačnih elemenata	28
5	Vrijednosti deformacija u smjeru x za uzorke B1 i B3	31
6	Vrijednosti deformacija u smjeru x za uzorke B2 i B4	32
7	Homogenizirani momenti otpora homogenih uzoraka	33
8	Homogenizirani modul elastičnosti uzoraka	33

Popis slika

1	Kinematika mikropolarnog kontinuuma	4
2	Ploča u x, y ravnini opterećena čistim savijanjem	7
3	Rubni uvjeti prema klasičnoj teoriji	8
4	Rubni uvjeti prema mikropolarnoj teoriji	8
5	Geometrija strukture uzoraka	20
6	Geometrija jedinične ćelije	22
7	Eksperimenti na jediničnoj ćeliji	22
8	Rezultati eksperimenta 1	23
9	Rezultati eksperimenta 2	24
10	Geometrija uzoraka i opterećenja	26
11	Pozicije promatranih presjeka na uzorcima	28
12	Deformacije u smjeru osi x	29
13	Raspodjela naprezanja na uzorku B3	30
14	Odnos uprosječenog modula elastičnosti E_x^* o visini presjeka	33
15	Funkcija $f(E_x)$	36
16	Rasap vrijednosti $n_{xy,loc}$	44

1 UVOD

Mikropolarna (Cosseratova) teorija kontinuuma, za razliku od klasične (Cauchyjeve) teorije kontinuuma prilikom razmatranja kontinuuma u obzir uzima i njegovu mikrostrukturu. Naime, klasična teorija vrlo dobro opisuje materijale s vrlo malo izraženom heterogenošću, kao što su metali, koje zapravo možemo promatrati kao homogen materijal. No mikropolarna teorija obećava mogućnost točnijeg opisivanja materijala s izraženijom heterogenošću, kao što su drvo, kost ili razni oblici kompozitnih materijala. Također, mikropolarna teorija omogućava analizu pojave zvane size-effect, gdje se kod tanjih uzoraka s izraženom mikrostrukturom koji su opterećeni torzijom ili savijanju manifestira veća krutost od uzoraka veće debljine, što nije objašnjivo klasičnom teorijom [1]. Razlog toj mogućnosti leži u dodatna tri stupnja slobode [2]. Dok klasična teorija razmatra samo mogućnost translatornog pomaka točke u smjeru tri osi Kartezijevog koordinatnog sustava, mikropolarna teorija razmatra i rotaciju točke oko tih osi. Ta rotacija nazvana je mikrorotacijom i nezavisna je od pomaka točke, odnosno makrorotacije.

Promatranje materijala kao mikropolarnih prvi je predložio W. Voigt 1887. godine, te uspostavio jednadžbe ravnoteže takvog kontinuuma, kao i tenzore naprezanja i momentnog naprezanja za koji je zaključio kako je asimetričan. 1909. braća E. i F. Cosserat proširili su Voightovu teoriju, te je kasnije mikropolarna teorija elastičnosti nazvana prema njima. Daljnji razvoj teorije dogodio se u šezdesetim godinama dvadesetog stoljeća od strane W. Günthera, C. Truesdella i R. A. Toupin. Za kasniji značajan doprinos mikropolarnoj teoriji zaslužni su H. Schäfer i A. C. Eringen [3].

Za razliku od klasične teorije koja izotropni kontinuum opisuje pomoću dva inženjerska parametra (Youngova modula elastičnosti E i Poissonova koeficijenta ν), mikropolarna teorija za isto koristi šest različitih inženjerskih parametara. Četiri dodatna inženjerska parametra su mjera povezanosti makrorotacije i mikrorotacije N (u vrijednosti od 0 do 1), polarni omjer ψ (u vrijednosti od 0 do $3/2$), karakteristična duljina za torziju l_t i karakteristična duljina za savijanje l_b . Ovih šest inženjerskih parametara objedinjeni su u šest materijalnih parametara kao što je prikazano u dodatku 8.1 ovoga rada. U ovome trenutku nije utvrđena metodologija za njihovo određivanje što ograničava njenu praktičnu primjenu [4]. Razvoju metodologije za utvrđivanje inženjerskih parametara pridonijeli su R. D. Gauthier i W. E. Jahsman [2] te na temelju njihova rezultata R. S. Lakes [5].

Prilikom razmatranja problema čistoga savijanja ploče izotropnog materijala prema mi-

kropolarnoj teoriji potrebni inženjerski parametri su E , n i l_b . Gauthier je u svom doktorskom radu [6] definirao analitičke izraze za dobivanje vrijednosti naprezanja, deformacija i pomaka u ovom problemu čiji je izvod opisan u 3. poglavlju ovoga rada. U 4. poglavlju ta analitička rješenja su proširena za slučaj ortotropnog mikropolarnog kontinuuma pomoću konstitutivnih jednažbi prema G. Jeleniću [7] i F Passarelli [8]. Prilikom analize takvog problema potrebno je poznavati deset inženjerskih parametara ortotropnog mikropolarnog kontinuuma (tri modula elastičnosti E , šest Poissonovih koeficijenta n i karakteristična duljina za savijanje l_b). U svrhu njihova utvrđivanja razmatrano je čisto savijanje aluminijskih nosača umjetno stvorene mikrostrukture koja simulira ortotropan mikropolarni materijal. Dio inženjerskih parametara utvrđen je virtualnim eksperimentima jednoosnog vlaka na reprezentativnoj jediničnoj ćeliji te strukture u poglavlju 5. Dobiveni parametri uvedeni su u analizu čistog savijanja navedenih nosača putem virtualnih eksperimenata u poglavlju 6. Uzorci su homogenizirani te su pomoću njih dobiveni preostali potrebni inženjerski parametri, prema modifikaciji protokola iz istraživanja od Beveridgea [9] i Dukić [10].

2 OSNOVNE POSTAVKE MIKROPOLARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI

Kako je spomenuto u uvodu, za razliku od klasične teorije, mikropolarna teorija ima šest stupnjeva slobode s obzirom na tri osi koordinatnog sustava; tri translatorna i tri rotacijska. Rotacija točke nazvana je mikrorotacijom kako bi se otklonila mogućnost zamjene s makrorotacijom, koja proizlazi iz derivacija komponenti pomaka po prostornim koordinatama.

Promatranjem tijela na koje djeluju kontinuirana volumna opterećenja \mathbf{p}_v i \mathbf{m}_v i kontinuirana površinska opterećenja \mathbf{p}_s i \mathbf{m}_s možemo vidjeti kako postoje dva nezavisna polja pomaka; polje translatornih pomaka \mathbf{u} te polje mikrorotacija $\boldsymbol{\varphi}$. Temeljem toga ne pojavljuje se jedan, već dva tenzora naprezanja. Prvi je Cauchyjev tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$, jednak onome prema klasičnoj teoriji, a drugi je tenzor momentnih naprezanja $\boldsymbol{\mu}$ koji opisuje naprezanja kao posljedicu mikrorotacija $\boldsymbol{\varphi}$.

Jednadžbe ravnoteže s obzirom na Cauchyjeva naprezanja istovjetne su onima po klasičnoj teoriji elastičnosti

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + p_{v,x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + p_{v,y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + p_{v,z} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

odnosno u matricnoj formi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_{v,x} \\ p_{v,y} \\ p_{v,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

pri čemu su $p_{v,i}$ komponente nanesenog volumnog opterećenja s obzirom na osi x , y i z koordinatnog sustava. No mikropolarna teorija zahtjeva još jedan set jednadžbi ravnoteže koji će osigurati ravnotežu prema preostala tri stupnja slobode

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{xz}}{\partial z} + \sigma_{zy} - \sigma_{yz} + m_{v,x} &= 0 \\ \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{yz}}{\partial z} + \sigma_{xz} - \sigma_{zx} + m_{v,y} &= 0 \\ \frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{zz}}{\partial z} + \sigma_{yx} - \sigma_{xy} + m_{v,z} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

odnosno u matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{zy} - \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} - \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} - \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_{v,x} \\ m_{v,y} \\ m_{v,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

pri čemu su $m_{v,i}$ komponente nanesenog volumnog opterećenja. Ovdje se pojavljuje i vektor

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \sigma_{zy} - \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} - \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} - \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

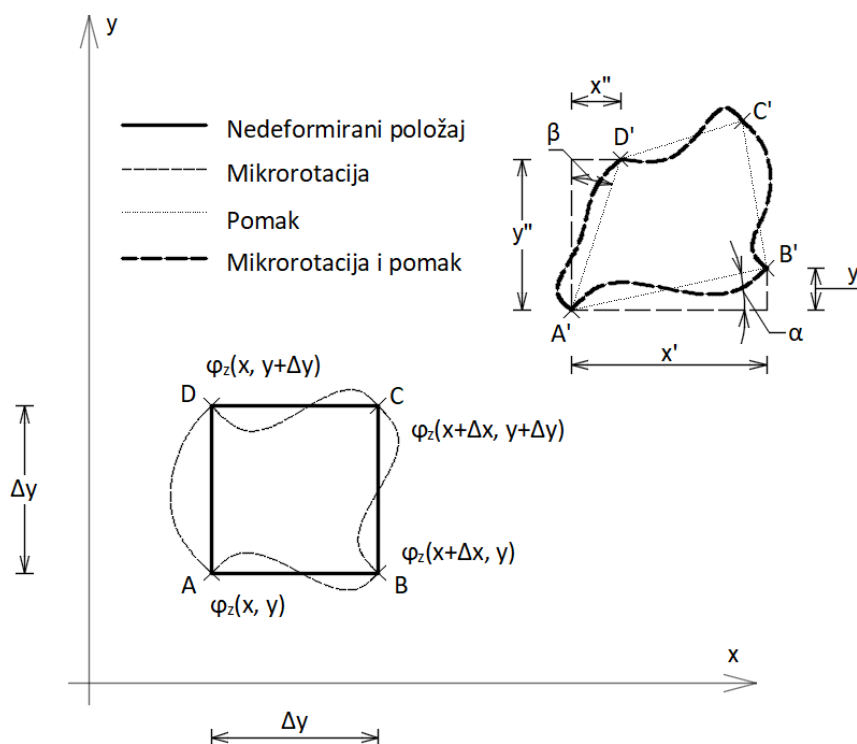
nazvan aksijalnim vektorom dvostrukog anti-simetričnog dijela tenzora naprežanja [3].

Promatrajući deformaciju tijela u dvodimenzionalnom kontinuumu (slika 1) izvedene su kinematičke jednadžbe, pri kojima se, za razliku od klasične teorije, pojavljuje i utjecaj mikrorotacija φ . Kinematičke jednadžbe mikropolarnog kontinuumu u matricnoj formi za stanje ravninskih deformacija glase [3]

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \varphi_z \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \varphi_z & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

te ih za trodimenzionalni kontinuum možemo razviti u formu

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \varphi_z & \frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \varphi_z & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \varphi_y & \frac{\partial u_z}{\partial y} - \varphi_x & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$



Slika 1: Kinematika mikropolarnog kontinuumu

Pojavom mikrorotacije kao dodatnog oblika pomaka posljedično dolazimo i do potrebe

za dodatnim oblikom deformacije. Ovu deformaciju nazivamo kutnom deformacijom ili kraće zakrivljenošću i označujemo s κ [6]. Prvi indeks pri kutnoj deformaciji označava os oko koje se rotacija odvija, a drugi indeks os duž koje promatramo promjenu veličine kutne deformacije [3], npr

$$\kappa_{zx} = \frac{\partial \varphi_z(x, y)}{\partial x}.$$

Temeljem toga kinematičke jednadžbe za trodimenzionalni kontinuum u matričnoj formi glase:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Ovdje razmatramo mikropolarni kontinuum koji je izotropan i homogen, odnosno njegove materijalne značajke jednake su u svim smjerovima. Konstitutivne jednadžbe koje povezuju naprezanja s deformacijama jednake su onima u klasičnoj teoriji i glase:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= (\mu + \nu)\epsilon_{xy} + (\mu - \nu)\epsilon_{yx} \\ \sigma_{xz} &= (\mu + \nu)\epsilon_{xz} + (\mu - \nu)\epsilon_{zx} \\ \sigma_{yx} &= (\mu - \nu)\epsilon_{xy} + (\mu + \nu)\epsilon_{yx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda\epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} &= (\mu + \nu)\epsilon_{yz} + (\mu - \nu)\epsilon_{zy} \\ \sigma_{zx} &= (\mu - \nu)\epsilon_{xz} + (\mu + \nu)\epsilon_{zx} \\ \sigma_{zy} &= (\mu - \nu)\epsilon_{yz} + (\mu + \nu)\epsilon_{zy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} \end{aligned} \quad (5)$$

Pritom je potrebno uočiti kako u jednadžbama (5) μ označava jednu od materijalnih konstanti uz ν i λ , a ne momentno naprezanje. Iz toga će razloga u ostatku rada oznaka za momentno naprezanje μ_{ij} pored sebe imati dva indeks, dok će materijalna konstanta μ biti bez indeksa. Prvi indeks momentnog naprezanja ukazuje na os oko koje se odvija momentno naprezanje, a drugi indeks smjer normale stranice na kojoj djeluje. Poglavlje 8.1 opisuje odnose ovih inženjerskih parametara s materijalnim parametrima.

Sukladno jednadžbama (5), konstitutivne jednadžbe koje povezuju momentno naprezanje

s kutnom deformacijom glase [3]

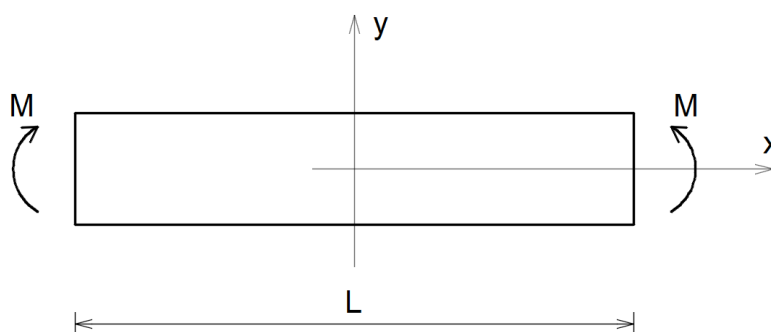
$$\begin{aligned}
 \mu_{xx} &= (\alpha + 2\beta)\kappa_{xx} + \alpha\kappa_{yy} + \alpha\kappa_{zz} \\
 \mu_{xy} &= (\beta + \gamma)\kappa_{xy} + (\beta - \gamma)\kappa_{yx} \\
 \mu_{xz} &= (\beta + \gamma)\kappa_{xz} + (\beta - \gamma)\kappa_{zx} \\
 \mu_{yx} &= (\beta - \gamma)\kappa_{xy} + (\beta + \gamma)\kappa_{yx} \\
 \mu_{yy} &= \alpha\kappa_{xx} + (\alpha + 2\beta)\kappa_{yy} + \alpha\kappa_{zz} \\
 \mu_{yz} &= (\beta + \gamma)\kappa_{yz} + (\beta - \gamma)\kappa_{zy} \\
 \mu_{zx} &= (\beta - \gamma)\kappa_{xz} + (\beta + \gamma)\kappa_{zx} \\
 \mu_{zy} &= (\beta - \gamma)\kappa_{yz} + (\beta + \gamma)\kappa_{zy} \\
 \mu_{zz} &= \alpha\kappa_{xx} + \alpha\kappa_{yy} + (\alpha + 2\beta)\kappa_{zz}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Konačno, kako bi unutar kontinuuma deformacije bile kontinuirane potrebne su jednadžbe kompatibilnosti koje proizlaze iz kinematičkih jednadžbi, a za stanje ravninskih deformacija glase:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} + \kappa_{zx} &= \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \\
 \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} + \kappa_{zy} &= \frac{\partial \epsilon_{yx}}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{7}$$

3 ANALIZA GAUTHIEROVOG RJEŠENJA PROBLEMA CILINDRIČNOG ČISTOG SAVIJANJA PLOŠNOG NOSAČA

Provedena je analiza savijanje ploče duljine L , širine b i debljine h u x, y ravnini opterećene rubnim momentom M_z (u nastavku M) kao na slici 2. Ploči je u smjeru osi z spriječen pomak te je time onemogućeno antiklastično savijanje. Posljedično, ploča se savija u cilindrični oblik te razmatramo problem 2D čistog savijanja kao ravninsko stanje deformacija u x, y koordinatnom sustavu. U Gauthierovom diplomskom radu [6] te kasnijem članku s Jahsmanom [2] analiziran je problem cilindričnog savijanja pri kojem je moment M jednak rezultanti distribuiranog naprezanja na bočnim stranicama, što je u ovom poglavlju prikazno.



Slika 2: Ploča u x, y ravnini opterećena čistim savijanjem

3.1 Analiza problema klasičnom teorijom elastičnosti

Prema klasičnoj teoriji samo su normalna površinska opterećenja ta koja se pojavljuju kada se bočne stranice ne iskrivljuju, kao na slici 3. Prilikom analize problema kao 2D Cauchyjevog kontinuuma pretpostavljamo kako linearno distribuirano opterećenje

$$p_{sx} = -\frac{2p_0}{h}y$$

na bočnoj stranici stvara rezultantni moment M :

$$M = -b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y p_{sx}(y) dy = \frac{2b}{h} p_0 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{2b}{h} p_0 \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{2bh^3}{12h} p_0 = \frac{bh^2}{6} p_0 = W_z p_0$$

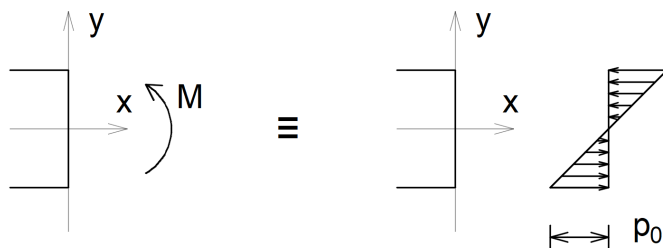
te iz toga proizlazi kako je:

$$p_0 = \frac{6}{h^2} \frac{M}{b} = \frac{M}{W_z}$$

dok je samo distribuirano opterećenje definirano kao:

$$p_{sx}(y) = -\frac{12My}{bh^3} = -\frac{M}{I_z}y$$

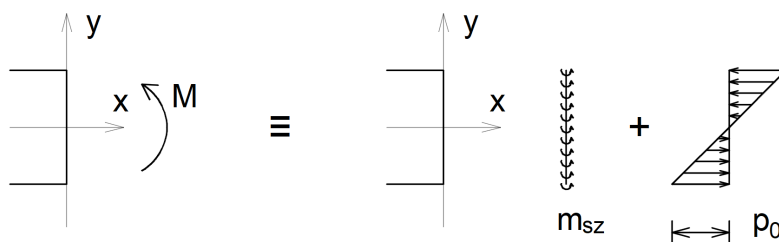
što je očekivani rezultat koji odgovara distribuciji normalnog napreznja na pravokutni po-
prečni presjek.



Slika 3: Rubni uvjeti prema klasičnoj teoriji

3.2 Analiza problema mikropolarnom teorijom elastičnosti

Prema mikropolarnoj teoriji elastičnosti distribuirano opterećenje odgovara navedenom op-
terećenju p_{sx} na bočnoj stranici, no uz dodatno distribuirano momentno opterećenje m_{sz} kao
na slici 4.



Slika 4: Rubni uvjeti prema mikropolarnoj teoriji

I u ovom slučaju ukupno distribuirano opterećenje na bočnoj stranici mora proizvesti
rezultantni moment M :

$$M = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-yp_{sx}(y) + m_{sz}) dy = \dots = \frac{bh^2}{6} p_0 + bhm_{sz} = W_z p_0 + Am_{sz} \quad (8)$$

iz čega je vidljivo kako iz zadanog momenta M veličine p_0 i m_{sz} ne mogu biti određeni na
jedinstven način.

Za svaki vertikalni presjek ravnoteža je zadovoljena za distribuciju napreznja koja je
neovisna od x

$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \mu_{zx}, \mu_{zy}$ - funkcije ovisne samo od y .

Slijedom toga iz jednadžbi ravnoteže (1) i (2) možemo zaključiti kako su

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = konst. \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \sigma_{yy} = konst. \\ \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} + \sigma_{yx} - \sigma_{xy} &= 0 \Rightarrow \mu_{zy}(y) = \int (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dy + konst.\end{aligned}\quad (9)$$

Pošto su gornja i donja stranice neopterećene

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(y = -\frac{h}{2}) &= 0, & \sigma_{xy}(y = \frac{h}{2}) &= 0 \\ \sigma_{yy}(y = -\frac{h}{2}) &= 0, & \sigma_{yy}(y = \frac{h}{2}) &= 0 \\ \mu_{zy}(y = -\frac{h}{2}) &= 0, & \mu_{zy}(y = \frac{h}{2}) &= 0,\end{aligned}$$

slijedi kako naprezanja σ_{xy} i σ_{yy} nestaju

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(x, y) &= 0 \\ \sigma_{yy}(x, y) &= 0,\end{aligned}\quad (10)$$

dok je momentno naprezanje μ_{zy} generirano samo utjecajem σ_{yx}

$$\mu_{zy}(y) = - \int_{-\frac{h}{2}}^y \sigma_{yx}(y) dy, \quad (11)$$

te iz konstitutivne jednadžbe za σ_{xy} (5)

$$\sigma_{xy} = \mu(\epsilon_{xy} + \epsilon_{yx}) + \nu(\epsilon_{xy} - \epsilon_{yx})$$

slijedi kako je

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0, \quad (12)$$

jer su $\mu > 0$ i $\nu > 0$ međusobno nezavisni, a $\sigma_{xy} = 0$. Potrebno je uvidjeti kako za $\nu = \mu$ vrijednost ϵ_{yx} može biti različit od nula. Nastavljajući izvod za slučaj $\nu \neq \mu$, iz konstitutivne jednadžbe za σ_{yx} (5):

$$\sigma_{yx} = \mu(\epsilon_{xy} + \epsilon_{yx}) + \nu(\epsilon_{yx} - \epsilon_{xy})$$

sada slijedi:

$$\sigma_{yx} = 0$$

te posljedično iz jednadžbe ravnoteže (11):

$$\mu_{zy} = 0.$$

Jedina naprezanja koja nisu jednaka nuli sada su σ_{xx} i μ_{zx} . Konstitutivna jednadžba za σ_{yy} (5) glasi:

$$\sigma_{yy} = \lambda \epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{yy}$$

te, pošto je $\sigma_{yy} = 0$,

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx}. \quad (13)$$

Stoga konstitutivna jednačba za σ_{xx} (5)

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy}$$

prelazi u oblik

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx} \\ &= 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx} \equiv \frac{E}{1 - n^2} \epsilon_{xx} \end{aligned} \quad (14)$$

pri čemu uvrštavanjem osnosa inženjerskih i materijalnih parametara [11]

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad (15)$$

i

$$n = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (16)$$

dobivamo konstitutivnu jednačbu za σ_{xx} izraženu preko modula elastičnosti i Poissonova koeficijenta. Konstitutivna jednačba za μ_{zy} (6) glasi:

$$\mu_{zy} = (\beta + \gamma)\kappa_{zy}.$$

Kako je $\mu_{zy} = 0$ iz (4) slijedi:

$$\kappa_{zy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi_z = \varphi_z(x). \quad (17)$$

Temeljem gornjih izraza za analizu problema čistog savijanja u mikropolarnom kontinuumu preostaju nam naprezanja σ_{xx} (14) i μ_{zx} (6)

$$\sigma_{xx} = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx}$$

$$\mu_{zx} = (\beta + \gamma)\kappa_{zx},$$

a iz rubnih uvjeta slijedi da je

$$\sigma_{xx} = p_{sx} = -\frac{2p_0}{h}y \quad (18)$$

$$\mu_{zx} = m_{sz}. \quad (19)$$

Izraze (18) i (19) uvrštavamo u (13), (14) i μ_{zx} iz (2):

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}} = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{p_0}{h}y \quad (20)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{p_0}{h}y \quad (21)$$

$$\kappa_{zx} = \frac{\mu_{zx}}{\beta + \gamma} = \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma}. \quad (22)$$

Za 2D stanje ravninskih deformacija, kinematičke jednadžbe (3) i (4) glase

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi_z, & \epsilon_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_z, \\ \kappa_{zx} &= \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, & \kappa_{zy} &= \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}, \end{aligned} \quad (23)$$

temeljem čega iz (20), (21) i (22) slijedi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{p_o}{h} y \quad (24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{p_o}{h} y \quad (25)$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} = \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma}. \quad (26)$$

Prethodno dobiveni uvjeti (12) uvrštavanjem u (3) vode prema

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \varphi_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi_z \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_z. \quad (28)$$

Kako je $\kappa_{zy} = 0$ uslijed (17) i konstitutivne jednadžbe za κ_{zy} u (6), a $\kappa_{zx} = const.$ izraz (26) deriviramo

$$\varphi_z = \frac{m_{sz}x}{\beta + \gamma},$$

taj rezultat uvrstimo u izraze (27) i (28) te integriramo

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

i

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

sa svim parcijalnim derivacijama sada poznatim kao funkcijama ovisnim od x i y . No integriranje pomaka iz deformacija ne smije se provoditi bez zadovoljavanja jednadžbi kompatibilnosti (7) koje osiguravaju kontinuitet deformacija. Uvrštavanje (20), (22) i (12) u prvu jednadžbu (7) daje izraz:

$$-\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{p_o}{h} + \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma} = 0,$$

dok uvrštavanje (21), (17) i (12) u drugu jednadžbu (7) daje:

$$0 - 0 = 0.$$

Stoga, kako bi pretpostavljeno stanje naprezanja (konstantno duž dužine, promjenjivo samo duž visine poprečnog presjeka te bez pojave tangencijalnih naprezanja) bilo moguće nanosena

opterećenja p_0 i m_{sz} nisu neovisna jedno od drugoga. Umjesto toga njihov odnos opisan je izrazom:

$$\frac{m_{sz}}{p_0} = \frac{1}{h} \frac{(\lambda + 2\mu)(\beta + \gamma)}{2\mu(\lambda + \mu)} = 4(1-n) \frac{l_b^2}{h} = 4(1-n)h \left(\frac{l_b}{h}\right)^2 \equiv \frac{h}{6}(1-n)\delta, \quad (29)$$

pri čemu je prema Lakesu [5]

$$\beta + \gamma = 4\mu l_b^2 = \frac{2El_b^2}{1+n} \quad (A)$$

i uz odnose materijalnih i inženjerskih konstanti [11]

$$\lambda = \frac{En}{(1+n)(1-2n)} \quad (B)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+n)} \quad (C)$$

te

$$\delta = 24 \left(\frac{l_b}{h}\right)^2 \quad (*)$$

gdje je l_b karakteristična duljina za savijanje, odnosno jedan od dodatnih inženjerskih parametara mikropolarnog kontinuuma. Odnosi (A), (B) i (C) proizlaze iz odnosa inženjerskih i materijalnih parametara opisanih u poglavlju 8.1. Kako je krajnji rezultatni moment za uzorak širine b (8) izražen preko p_0 jednak

$$M = \frac{bh^2}{6} p_0 + bhm_{sz} = \frac{bh^2}{6} p_0 + bh \frac{h}{6} (1-n)\delta p_0 = (1 + (1-n)\delta) \frac{bh^2}{6} p_0,$$

odnosno izražen preko m_{sz} jednak

$$M = \frac{bh^2}{6} p_0 + bhm_{sz} = \frac{bh^2}{6} \frac{m_{sz}}{\frac{h}{6}(1-n)\delta} + bhm_{sz} = \frac{1 + (1-n)\delta}{(1-n)\delta} bhm_{sz},$$

nanesena opterećenja p_0 i m_{sz} sada mogu biti izražen preko krajnjeg rezultatnog momenta kao

$$p_0 = \frac{1}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{W_z} \quad (30)$$

$$m_{sz} = \frac{(1-n)\delta}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{A}. \quad (31)$$

Njihovim uvrštavanjem u rubne uvjete (18) i (19) dobivamo analitičke izraze za naprezanja

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{I_z} y \quad (32)$$

$$\mu_{zx} = \frac{(1-n)\delta}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{A}. \quad (33)$$

Uvrštavanjem odnosa Laméovih konstanti i inženjerskih parametara (B) i (C) u odnose materijalnih parametara koji se pojavljuju u konstitutivnim jednadžbama (20) i (21) dobivamo

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} = 4 \frac{1-n^2}{E}$$

$$\frac{\lambda}{\mu(\lambda + \mu)} = 4n \frac{1+n}{E}$$

te uz izraz (30) i uvrštavanjem izraza (31) i (A) u izraz (22) slijede analitički izrazi za deformacije

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{p_o}{h} y = -\frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} y \quad (34)$$

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \epsilon_{xx} = \frac{n}{(1 - n)} \frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} y \quad (35)$$

$$\kappa_{zx} = \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma} = \frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z}. \quad (36)$$

Pošto je $\frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = \kappa_{zy} \equiv 0$, $\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} = \kappa_{zx}$ slijedi da je φ_z funkcija isključivo od x

$$\varphi_z = \frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} x \quad (37)$$

te da je $\varphi_z(0) = 0$. Polja pomaka dobivena su iz parcijalnih derivacija (24), (25), (27) i (28)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{xx} \equiv -\frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi_z = -\frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} x$$

i

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_z = \frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_{yy} \equiv \frac{n}{(1 - n)} \frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} y.$$

Iz polja deformacija konačno dobivamo i analitičke izraze za pomake

$$u = -\frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} xy \quad (38)$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{1 - n^2}{1 + (1 - n)\delta} \frac{M}{EI_z} (x^2 + \frac{n}{1 - n} y^2). \quad (39)$$

Ovi rezultati u potpunosti odgovaraju Gauthierovima. Ako m_{sz} i p_0 nisu u odnosu danim (29) ovi rezultati ne vrijede. Takvo stanje napreznjanja bilo bi promjenjivo duž osi x te suprotno promatranom slučaju sve komponente napreznjanja i momentnog napreznjanja bile bi posljedica opterećenja koje nije jednolično naneseo.

4 PROBLEM CILINDRIČNOG SAVIJANJA PLOČASTOG NOSAČA U ORTOTROPNOM KONTINUUMU PREMA MIKROPOLARNOJ TEORIJI

Prethodni problem sada proučavamo za slučaj ortotropnog kontinuuma, odnosno za slučaj kada inženjerske konstante E i n nisu jednake u međusobno okomitim smjerovima. Drugim riječima, za svaki smjer koordinatnog sustava x , y i z razlikujemo module elastičnosti $E_x \neq E_y \neq E_z$. Poissonov koeficijent n_{ij} razlikuje se za svaku kombinaciju i i j pri čemu je i smjer jednoosnog opterećenja, a j smjer pripadajuće bočne deformacije, okomite na os i . Pritom su $i, j = x, y, z$ i $i \neq j$ [7].

4.1 Postavke ortotropnog klasičnog kontinuuma

Konstitutivna jednadžba koja povezuje normalna naprezanja i normalne deformacije ortotropnog klasičnog kontinuuma u matričnom obliku glasi [7]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{n_{yx}}{E_y} & -\frac{n_{zx}}{E_z} \\ -\frac{n_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{n_{zy}}{E_z} \\ -\frac{n_{xz}}{E_x} & -\frac{n_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Kako je matrica fleksibilnosti simetrična potrebno je uočiti kako su

$$\begin{aligned} \frac{n_{yx}}{E_y} &= \frac{n_{xy}}{E_x} \\ \frac{n_{zx}}{E_z} &= \frac{n_{xz}}{E_x} \\ \frac{n_{zy}}{E_z} &= \frac{n_{yz}}{E_y}. \end{aligned} \quad (41)$$

Time odnos između normalnog naprezanja i normalnih deformacija ortotropnog kontinuuma možemo opisati sa šest umjesto s devet inženjerskih konstanti.

Problem kojeg razmatramo je problem ravninskih deformacija, što znači da postoje tri komponente normalnih naprezanja, no samo dvije komponente normalnih deformacija. Prema tome konstitutivna jednadžba za normalna naprezanja i normalne deformacije glasi [7]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} E_x(1 - n_{yz}n_{zy}) & E_x(n_{yx} + n_{yz}n_{zx}) \\ E_y(n_{xy} + n_{xy}n_{zy}) & E_y(1 - n_{zx}n_{zx}) \\ E_z(n_{xz} + n_{xy}n_{yz}) & E_z(n_{yz} + n_{yx}n_{xz}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

gdje je

$$M = 1 - n_{xy}n_{yx} - (n_{yz}n_{zy} + n_{zx}n_{xz} + 2n_{xy}n_{yz}n_{zx})$$

a deformacija ϵ_{zz} jednaka je nuli. Daljnjim razvojem gornje jednadžbe dolazimo do matričnog

izraza [7]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2} \begin{bmatrix} \psi_o^{-1} & \alpha_o \\ \alpha_o & \psi_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

odnosno do konstitutivnih jednažbi ortotropnog kontinuuma u stanju ravninskih deformacija:

$$\sigma_{xx} = \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2} (\psi_o^{-1} \epsilon_{xx} + \alpha_o \epsilon_{yy}) \quad (43)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2} (\alpha_o \epsilon_{xx} + \psi_o \epsilon_{yy}), \quad (44)$$

pri čemu je $\tilde{E} > 0$, $\psi > 0$ i $\alpha \in (-1, 1)$. Ovi inženjerski parametri koreliraju s Youngovim modulom elastičnosti i Poissonovim koeficijentom na način:

$$\tilde{E} = \sqrt{\tilde{E}_x \tilde{E}_y} \quad (45)$$

$$\psi_o = \sqrt{\frac{\tilde{E}_y}{\tilde{E}_x}} \quad (46)$$

$$\alpha_o = \frac{\sqrt{\tilde{E}_x \tilde{E}_y}}{E_y} (n_{yx} + n_{yz} n_{zx}) = \frac{\sqrt{\tilde{E}_x \tilde{E}_y}}{E_x} (n_{xy} + n_{zy} n_{xz}) \quad (47)$$

gdje su

$$\tilde{E}_x = \frac{E_x}{1 - n_{zx} n_{xz}}$$

$$\tilde{E}_y = \frac{E_y}{1 - n_{yz} n_{zy}}$$

U gornjim izrazima indeks o označuje inženjerske konstante ortotropnog kontinuuma, kako bi se napravila distinkcija od materijalne konstante α i inženjerske konstante ψ .

4.2 Postavke ortotropnog mikropolarnog kontinuuma

Prema Passarelli [8] konstitutivnu matricu za ravninsko stanje deformacija možemo napisati u općem obliku, tako da sadrži i posmična naprezanja i deformacije

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & A_{78} & A_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \end{Bmatrix}. \quad (48)$$

Gdje su A_{ij} konstitutivni koeficijenti. Koeficijenti A_{11} , A_{12} i A_{22} jednaki su onima iz izraza (42) prema Jeleniću [7]. Za koeficijente A_{77} , A_{78} i A_{88} nisu utvrđeni materijalni ni inženjerski parametri, stoga će u nastavku ove analize ostati u općem obliku.

Uz to, za opis ortotropnog mikropolarnog kontinuuma u stanju ravninskih deformacija preostaju konstitutivne jednažbe momentnih naprezanja μ_{zx} i μ_{zy} za koje pretpostavljamo

da su jednake onima za izotropni mikropolarni kontinuum iz (6)

$$\mu_{zx} = (\beta + \gamma)\kappa_{zx}$$

$$\mu_{zy} = (\beta + \gamma)\kappa_{zy}.$$

4.3 Analitičko rješenje čistog savijanja ortotropnog mikropolarnog kontinuuma

S novim konstitutivnim jednadžbama (48) ulazimo u Gauthierov izvod analitičkih izraza za stanje čistog savijanja. Ponovo krećemo od konstatacije kako ukupno distribuirano opterećenje na bočnoj stranici mora proizvesti rezultantni moment M (8) kao na slici 4, te kako se vrijednosti p_0 i m_{sz} ne mogu odrediti na jedinstven način iz momenta M . Prema jednakom postupku kao i za izotropan mikropolarni kontinuum dolazimo do izraza (10) i (11). Konstitutivna jednadžba za σ_{xy} iz (48) glasi

$$\sigma_{xy} = A_{77}\epsilon_{xy} + A_{78}\epsilon_{yx}.$$

Kako razmatramo problem čistog savijanja i dalje mora vrijediti izraz (12)

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0$$

te je stoga i i izraz (10)

$$\sigma_{xy} = 0.$$

Iz konstitutivne jednadžbe za σ_{yx} (48)

$$\sigma_{yx} = A_{78}\epsilon_{xy} + A_{88}\epsilon_{yx}$$

temeljem izraza (12) ponovo slijedi

$$\sigma_{yx} = 0$$

te posljedično iz (9)

$$\mu_{zy} = 0$$

ponovo dolazimo do zaključka kako su σ_{xx} i μ_{zx} jedina naprezanja koja nisu jednaka nuli.

Konstitutivna jednadžba za σ_{yy} (44) glasi:

$$\sigma_{yy} = \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2}(\alpha_o\epsilon_{xx} + \psi_o\epsilon_{yy}),$$

a pošto je $\sigma_{yy} = 0$ vrijedi

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\alpha_o}{\psi_o}\epsilon_{xx} \quad (49)$$

te stoga, iz konstitutivne jednadžbe za σ_{xx} (43),

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2} (\psi_o^{-1} \epsilon_{xx} + \alpha_o \epsilon_{yy}) = \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2} (\psi_o^{-1} \epsilon_{xx} - \alpha_o \frac{\alpha_o}{\psi_o} \epsilon_{xx}) \\ &= \frac{\tilde{E}}{1 - \alpha_o^2} \frac{(1 - \alpha_o^2) \epsilon_{xx}}{\psi_o} = \frac{\tilde{E}}{\psi_o} \epsilon_{xx}\end{aligned}\quad (50)$$

Konstitutivne jednadžbe za μ_{zy} iz (6) ostaje jednaka

$$\mu_{zy} = (\beta + \gamma) \kappa_{zy},$$

te vrijedi izraz (17)

$$\kappa_{zy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi_z = \varphi_z(x)$$

Temeljem gornjih izraza, u ortotropnom kontinuumu djeluju naprezanja σ_{xx} (50) i μ_{zx} (6)

$$\sigma_{xx} = \frac{\tilde{E}}{\psi_o} \epsilon_{xx}$$

$$\mu_{zx} = (\beta + \gamma) \kappa_{zx}$$

Uvrštavanjem rubnog uvjeta (18) u izraz (50) uz izraz (49) slijedi

$$\epsilon_{xx} = \frac{\psi_o}{\tilde{E}} \left(-\frac{2p_o}{h} y \right) = -2 \frac{\psi_o p_o}{\tilde{E} h} y \quad (51)$$

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\alpha_o}{\psi_o} \left(-2 \frac{\psi_o p_o}{\tilde{E} h} y \right) = 2 \frac{\alpha_o p_o}{\tilde{E} h} y \quad (52)$$

te izraz za kutnu deformaciju κ_{zx} (22) ostaje jednak kao za slučaj izotropnog kontinuuma

$$\kappa_{zx} = \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma}.$$

Za 2D stanje ravninskih deformacija kinematičke jednadžbe (23) i dalje glase

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi_z, & \epsilon_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_z, \\ \kappa_{zx} &= \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, & \kappa_{zy} &= \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}\end{aligned}$$

temeljem kojih iz izraza (51), (52) i (22) slijedi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2 \frac{\psi_o p_o}{\tilde{E} h} y \quad (53)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\alpha_o p_o}{\tilde{E} h} y \quad (54)$$

i izraz (26) ostaje jednak

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} = \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma}.$$

I dalje vrijede izrazi (27) i (28)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \varphi_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi_z$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_z,$$

kao i uvjeti kompatibilnosti (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} + \kappa_{zx} &= \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \\ \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} + \kappa_{zy} &= \frac{\partial \epsilon_{yx}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Uvrštavanje (51), (22) i (12) u prvi izraz (7) daje izraz

$$-2 \frac{\psi_o}{\bar{E}} \frac{p_o}{h} + \frac{m_{sz}}{\beta + \gamma} = 0$$

Dok uvrštavanje (52), (17) i (12) u drugi izraz (7) daje

$$0 - 0 = 0.$$

Odnos nanesenih opterećenja p_o i m_{sz} koji je potreban za ostvarivanje stanja čistog savijanja za ortotropni kontinuum glasi

$$\frac{m_{sz}}{p_o} = 2 \frac{\psi_o}{\bar{E}} \frac{1}{h} (\beta + \gamma) = 2 \frac{\psi_o}{\bar{E}} \frac{1}{h} \frac{2\bar{E}l_b^2}{1 + \alpha_o} = \frac{h}{6} \frac{\psi_o}{1 + \alpha_o} \delta \quad (55)$$

pri čemu je $\beta + \gamma$ sada jednak

$$\beta + \gamma = \frac{2\bar{E}}{1 + \alpha_o} \quad (A')$$

i δ ostaje jednak (*)

$$\delta = 24 \left(\frac{l_b}{h} \right)^2$$

Sada krajnji resultantni moment savijanja možemo izraziti preko p_o kao

$$M = \frac{bh^2}{6} p_o + bhm_{sz} = \frac{bh^2}{6} p_o + bh \frac{h}{6} \frac{\psi_o}{1 + \alpha_o} \delta p_o = \frac{1 + \alpha_o + \psi_o \delta}{1 + \alpha_o} \frac{bh^2}{6} p_o,$$

dnosno preko M_{sz} kao

$$M = \frac{bh^2}{6} p_o + bhm_{sz} = \frac{bh^2}{6} \frac{6(1 + \alpha_o)}{h\psi_o \delta} + bhm_{sz} = \frac{1 + \alpha_o + \psi_o \delta}{\psi_o \delta} bhm_{sz}$$

te prema tome nanesena linearno distribuirana opterećenja možemo izraziti preko momenta savijanja

$$p_o = \frac{1 + \alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{W_z} \quad (56)$$

$$m_{sz} = \frac{\psi_o \delta}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{A} \quad (57)$$

Slijede analitički izrazi za naprezanja u ortotropnom mikropolarnom kontinuumu uvrštavanjem izraza (56) i (57) u rubne uvijete (18) i (19)

$$\sigma_{xx} = - \frac{1 + \alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{I_z} y \quad (58)$$

$$\mu_{zx} = \frac{\psi_o \delta}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{A} \quad (59)$$

te analitički izrazi za deformacije uvrštavajući izraza (56), (57) i (A') u (51),(52) i (22)

$$\epsilon_{xx} = -\frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} y \quad (60)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{(1 + \alpha_o)\alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} y \quad (61)$$

$$\kappa_{zx} = \frac{\psi_o\delta}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{1 + \alpha_o}{2\widetilde{EI}_b^2} \frac{M}{A} = \frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z}. \quad (62)$$

Pošto je $\frac{\partial\varphi_z}{\partial y} = \kappa_{zy} \equiv 0$, $\frac{\partial\varphi_z}{\partial x} = \kappa_{zx}$ slijedi da je φ_z funkcija isključivo od x i glasi

$$\varphi_z = \frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} x \quad (63)$$

te da je $\varphi_z(0) = 0$. Polja pomaka dobivena su iz parcijalnih derivacija

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{xx} \equiv -\frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi_z \equiv -\frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} x$$

i

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_z \equiv \frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_{yy} \equiv \frac{(1 + \alpha_o)\alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} y$$

te iz polja deformacija konačno dobivamo analitičke izraze za pomake

$$u = -\frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} xy \quad (64)$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{(1 + \alpha_o)}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} (\psi_o x^2 + \alpha_o y^2). \quad (65)$$

Vrijedi pravilo kao i za izotropni kontinuum: Ako m_{sz} i p_0 nisu u odnosu definiranim (55) ova analitička rješenja ne vrijede.

U Dodatku 8.2 pokazano da u slučaju izotropnog kontinuuma svi rezultati izvedeni u ovom poglavlju odgovaraju onima izvedenim u poglavlju 3.2.

5 DOBIVANJE INŽENJERSKIH PARAMETARA MATERIJALA SIMULIRANE MIKROPOLARNOSTI

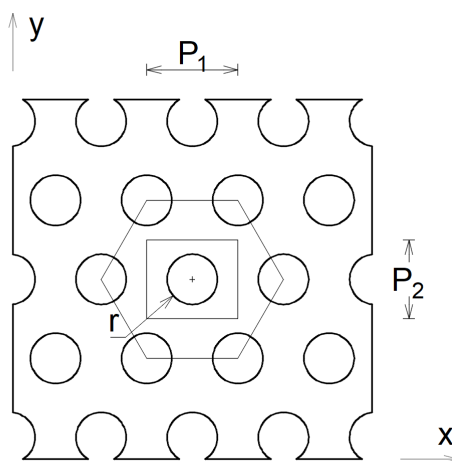
Kako bi opisali ortotropni mikropolarni kontinuum opterećen čistim savijanjem kao stanje ravninskih deformacija iz prethodnog poglavlja potrebni su inženjerski parametri koji opisuju takav kontinuum. Iz prethodnog izvoda vidljivo je kako su nam za analizu potrebni sljedeći inženjerski parametri:

Moduli elastičnosti E_x , E_y i E_z

Poissonovi koeficijenti n_{xy} , n_{xz} , n_{yx} , n_{yz} , n_{zx} i n_{zy}

Karakteristična duljina za savijanje l_b

Analizu je provedena na uzorcima izrađenim prema članku Beveridgea i ostalih [9]. Sami uzorci na kojima je provedeno ispitivanje detaljnije su opisani u sljedećem poglavlju. Ovdje je razmatrana njihova geometrijska struktura koja je prikazana na slici 5. Unutar spomenutog rada razmatrani su uzorci takozvane HMD (High Mass Density) i LMD (Low Mass Density) strukture. Razlika u geometriji dvije strukture je u veličini P_1 koja je za HMD strukturu jednaka 16 mm, a za LMD strukturu 9 mm, što daje LMD strukturi veću zastupljenost oslabljenja u materijalu od HMD strukture. Veličina $P_2 = 12,7\text{mm}$ jednaka je za obje vrste strukture, kao i radijus oslabljenja $r = 3,5\text{mm}$. U ovome radu razmatra se isključivo LMD struktura uzoraka.



Slika 5: Geometrija strukture uzoraka

Ova struktura u stvarnosti je heterogeni kontinuum koji se sastoji od dva materijala. Prvi materijal je aluminij s eksperimentalno utvrđenim modulom elastičnosti $E = 72,399\text{ GPa}$ i

pretpostavljenim Poissonovim koeficijentom $n = 0,3$ koji čini matricu strukture [10]. Drugi materijal ne postoji, odnosno njegov njegovi inženjerski parametri su $E = 0$ GPa i $n = 0$ te on čini šupljine u matrici. No u ovome radu ova je struktura promatrana kao homogen mikropolarni kontinuum, tako da je pretpostavljeno kako se cijela struktura sastoji od jednog materijala sa šest prethodno navedenih inženjerskih parametara. Potrebno je uočiti kako je ova struktura ortotropna zato što je $P_1 \neq P_2$. Uzorci imaju i treću dimenziju u smjeru osi z u kojoj je struktura kontinuirana duž osi. Promatrana struktura je ortotropna, bila analizirana kao heterogen klasični kontinuum ili kao homogen mikropolarni kontinuum.

Radi određivanja ortotropnih inženjerskih parametara strukture promatrana je jedna njena jedinična ćelija dimenzija $P_1 \times P_2$, prikazana na slici 5. Dimenzije jedinične ćelije su:

$$P_1 = L = l_x = 9 \text{ mm}$$

$$P_2 = H = l_y = 12,7 \text{ mm}$$

$$r = 3,5 \text{ mm}$$

dok je duljina u smjeru osi z uzeta kao jedinična. Na slici 6 prikazana je geometrija jedinične ćelije. Ishodište koordinatnog sustava u kojem je ćelija promatrana nalazi se u središtu njene perforacije. Tako rubove ovog promatranog elementa opisuju sljedeće funkcije:

$$\text{Perforacija: } x^2 + y^2 = r^2$$

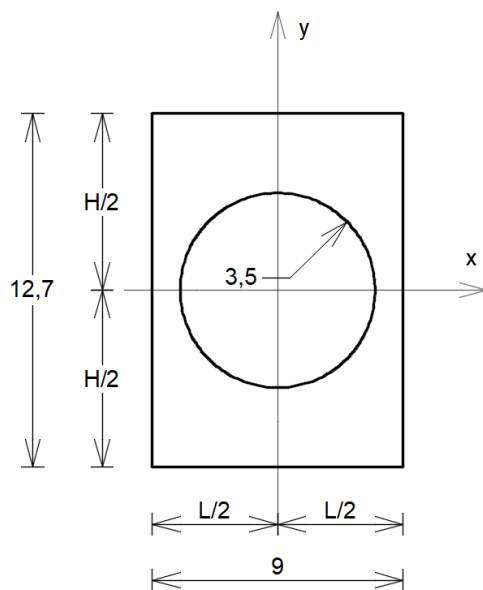
$$\text{Lijevi rub: } x = -L/2$$

$$\text{Desni rub: } x = L/2$$

$$\text{Gornji rub: } y = H/2$$

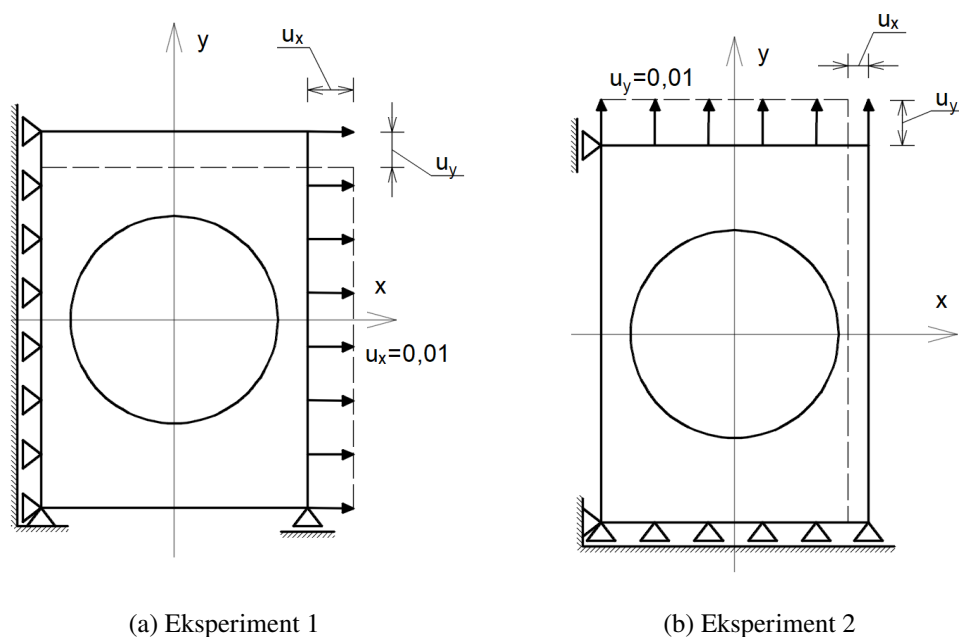
$$\text{Donji rub: } y = -H/2$$

Postupak dobivanja inženjerskih parametara proveden je pomoću metode konačnih elemenata u računalnom programu FEAP 8.5.2j [12]. Jedinična ćelija modeliran je na način da gornje funkcije opisuju kontinuum s inženjerskim karakteristikama aluminija. Sama analiza je provedena prema klasičnoj teoriji elastičnosti, kao stanje ravninskih naprezanja. Uvedena je pretpostavka da je ova jedinična ćelija reprezentativni uzorak strukture LMD te da inženjerski parametri dobiveni ovim postupkom vrijede i za skup više ćelija, odnosno cijelu strukturu. U računalnom programu GMSH 3.0.5 stvorena je mreža konačnih elemenata za jediničnu ćeliju koja se sastoji od 662 čvora koji čine 1159 trokutnih elemenata tipa T3. Mreža je jednake gustoće duž jedinične ćelije.



Slika 6: Geometrija jedinične ćelije

Element je opterećen zadavanjem pomaka veličine $u_x = u_y = 0,01$ mm. Prilikom prvog eksperimenta pomak je nanesen duž desnog ruba elementa, u smjeru osi x (slika 7(a)). Prilikom drugog eksperimenta pomak je nanesen duž gornjeg ruba elementa, u smjeru osi y (slika 7(b)). Na rubu nasuprotnom opterećenom rubu onemogućeni su pomaci u smjeru nanašanja opterećenja. Uz to, u rubnim točkama jedne susjedne stranice opterećenog ruba ćelije onemogućeni su pomaci u smjeru okomitom na smjer opterećenja.



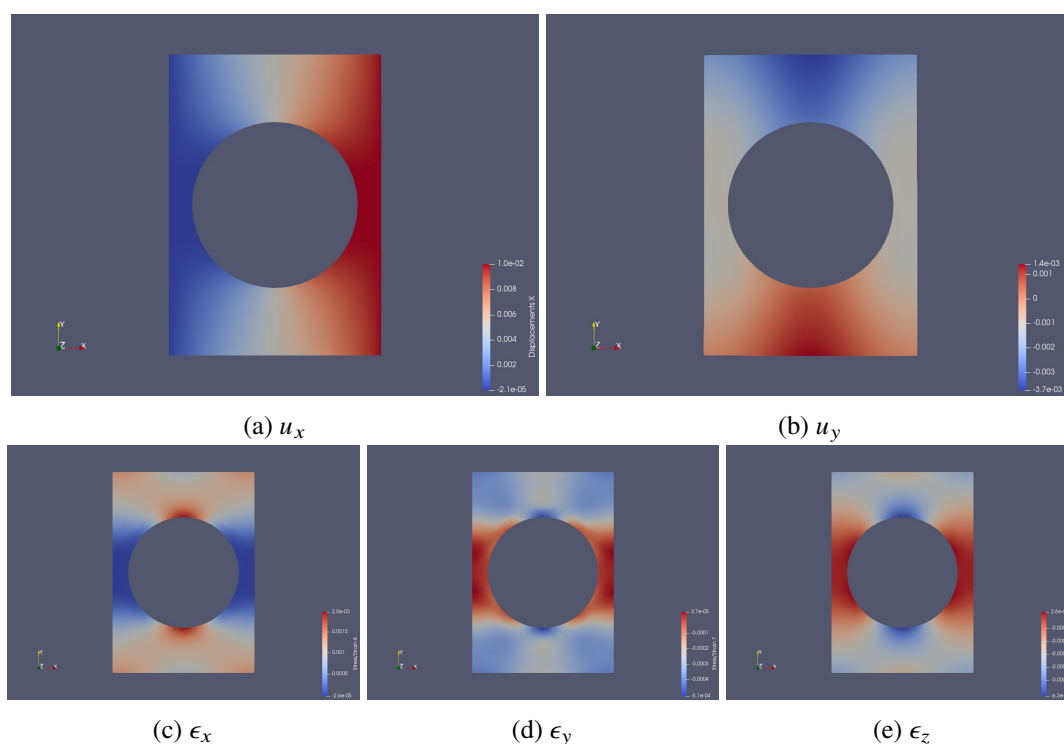
Slika 7: Eksperimenti na jediničnoj ćeliji

5.1 Rezultati eksperimenata

Kao prvi inženjerski parametar određen je modul elastičnosti u smjeru osi z E_z . Ovaj parametar nije dobiven pomoću analize metodom konačnih elemenata, već iz odnosa površine ćelije sa šupljinom naprema površine pune ćelije kao

$$E_z = \frac{H * L - r^2 \pi}{H * L} * E = \frac{12,7 * 9 - 3,5^2 \pi}{12,7 * 9} * 72,399 = 48,022 GPa$$

Na slikama 8 i 9 prikazani su rezultati analize metodom konačnih elemenata jedinične ćelije. Na slikama je prikazan pomak u_x (a), pomak u_y (b), deformacija ϵ_x (c), deformacija ϵ_y (d) i deformacija ϵ_z (e).

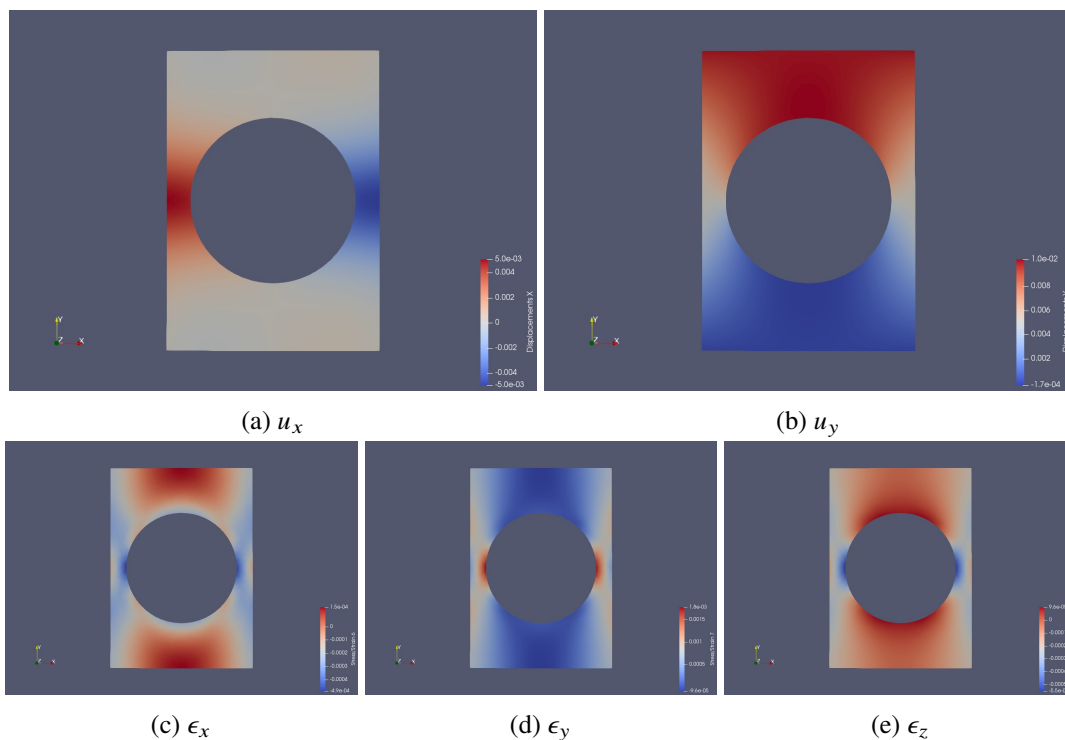


Slika 8: Rezultati eksperimenta 1

Tablica 1 prikazuje dobivene vrijednosti pomaka i deformacija iz prvog i drugog eksperimenta. Pomaci na rubu okomitom na opterećeni rub dobiveni su kao prosječna vrijednosti pomaka svih čvorova koji se nalaze na tom rubu, pri čemu je $a_{x,y}$ broj čvorova na promatranom rubu

$$u_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{a_{x,y}} u_{xi,yi}}{a_{x,y}}$$

Deformacije u smjeru osi x i y u smjerovima nanašanja opterećenja dobivene su dijeljenjem zadanih veličina pomaka s duljinom ćelije u istom smjeru. Deformacije u smjeru okomitom na smjer opterećenja dobivene su dijeljenjem uprosječenih veličina pomaka u tom



Slika 9: Rezultati eksperimenta 2

smjeru s pripadajućom duljinom ćelije. Za oba slučaja vrijedi formula

$$\epsilon_{x,y} = \frac{u_{x,y}}{l_{x,y}}.$$

Deformacije u smjeru osi z dobivene su kao prosječna vrijednost deformacija u smjeru osi z u svakoj Gaussovoj točki ćelije ($a = 1159$).

$$\epsilon_z = \frac{\sum_{i=1}^a \epsilon_{zi}}{a}.$$

Tablica 1: Pomaci i deformacije ćelija

Veličina	Eksperiment 1	Eksperiment 2
u_x	0,01	-0,0017
u_y	-0,003	0,01
ϵ_x	0,00111	-0,00019
ϵ_y	-0,00024	0,00079
ϵ_z	-0,00026	-0,00011

Konačno, iz eksperimenta 1 dobiveni su Poissonovi koeficijenti n_{xy} i n_{xz} kao

$$n_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = 0,212$$

i

$$n_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = 0,231$$

te iz eksperimenta 2 Poissonovi koeficijenti n_{yx} i n_{yz}

$$n_{yx} = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = 0,241$$

i

$$n_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y} = 0,143.$$

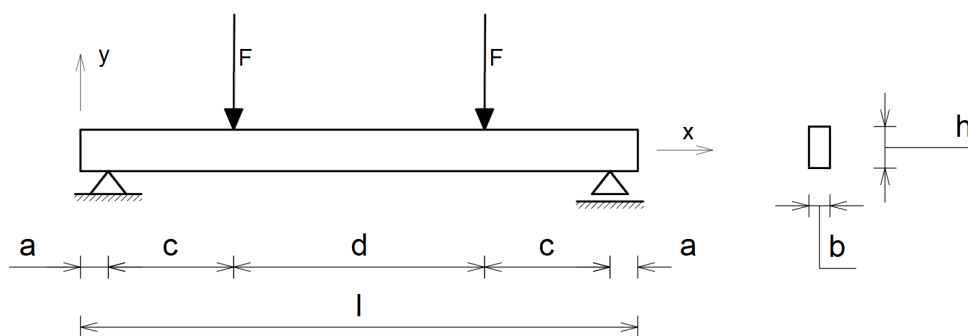
Iako su sve veličine naprezanja poznate nije moguće na isti način dobiti Poissonove koeficijente n_{zx} i n_{zy} iz razloga što dobivene veličine naprezanja ϵ_z nisu posljedica opterećenja u smjeru osi z , što nije sukladno definiciji Poissonova koeficijenta.

Sada su preostale nepoznate veličine potrebne za opis ortotropnog mikropolarnog kontinuuma opterećenog na čisto savijanje E_x , E_y , n_{zx} , n_{zy} i l_b .

U dodatku 4 prikazan je alternativni postupak za dobivanje vrijednosti inženjerskih parametara E_x , E_y , n_{zx} i n_{zy} te je objašnjeno zašto su ti rezultati netočni.

6 VIRTUALNI EKSPERIMENTI OPTEREĆENJEM NA ČISTO SAVIJANJE

S ciljem utvrđivanja karakteristične duljine na savijanje l_b provodimo virtualne eksperimente čistog savijanja kao stanje ravninskih naprezanja na uzorcima LMD geometrije. Uzorci nazvani B1, B2, B3 i B4, ovisno o svojoj veličini, opterećeni su na čisto savijanje putem *four point load* opterećenja, odnosno simetričnim opterećenjem dvjema silama $F = 1$ kN. Slika 10 prikazuje statički sustav eksperimenta, a tablica 2 prikazuje vrijednosti veličina sa slike 10, ovisno o promatranom uzorku. Kao što je opisano u prošlom poglavlju strukturu uzoraka promatramo kao uzorke punog presjeka odnosno kao homogen ortotropni mikropolarni kontinuum opisan odgovarajućim inženjerskim parametrima.



Slika 10: Geometrija uzoraka i opterećenja

Tablica 2: Geometrija uzoraka i opterećenja

Uzorak	$l(mm)$	$d(mm)$	$h(mm)$	$b(mm)$	$a(mm)$	$c(mm)$
B1	150	70	12,7	12,7	5	35
B2	280	128	25,4	12,7	10	66
B3	400	248	38,1	12,7	10	66
B4	530	378	50,8	12,7	10	66

Virtualni eksperimenti provedeni su na isti način kao i eksperimenti na jediničnoj ćeliji, u računalnom programu FEAP 8.5.2j [12]. Prilikom eksperimenta izmjerene su deformacije na gornjem i donjem rubu uzoraka u zoni čistog savijanja. Vrijednosti deformacija se razlikuju po predznaku ovisno promatramo li gornji i donji rub, ali i u veličini, ovisno o tome promatramo li vrijednost deformacije iznad oslabljenja ili u području između dva oslabljenja. U prijašnjim ispitivanjima [13] pokazano je kako je vrijednost deformacija veća u području između dva oslabljenja radi raspodjele naprezanja unutar strukture, što je suprotno onome što bi očekivali

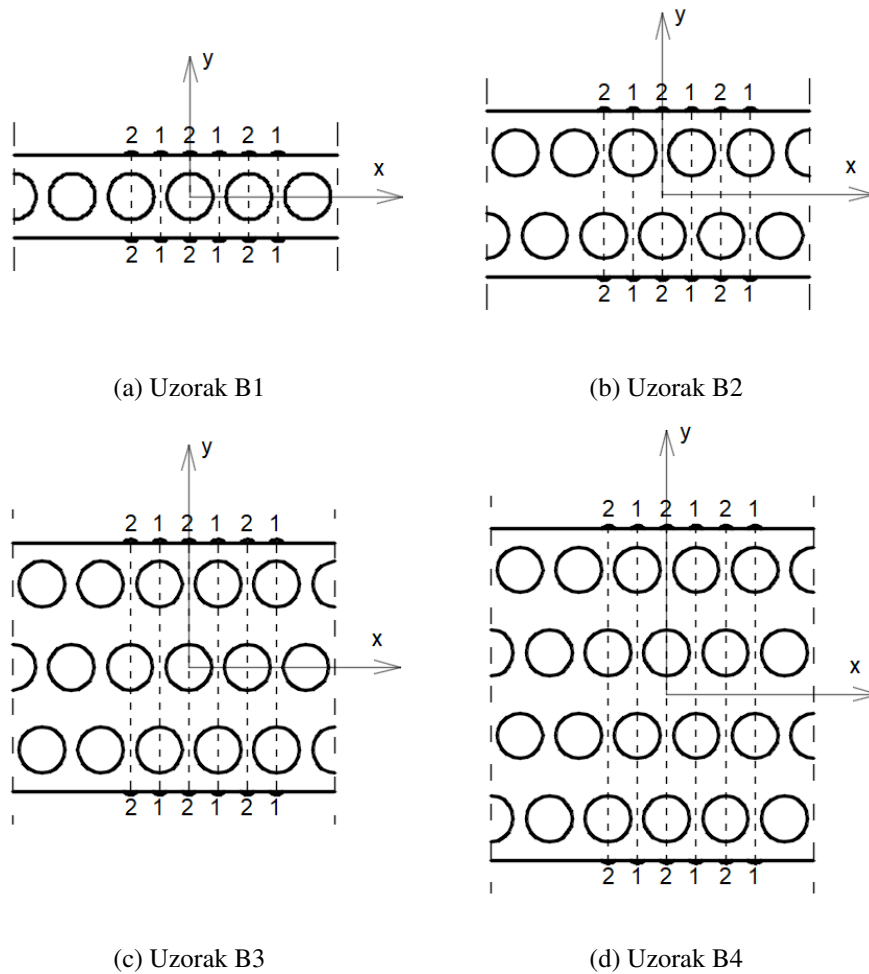
analizirajući ovaj problem pomoću gredne teorije.

Vrijednosti deformacija očitane su u 16 točaka u kojima su zadani čvorovi prilikom formiranja mreže konačnih elemenata. Tablica 3 prikazuje koordinate točaka u kojima su očitane deformacije, koje su jednake za sve četiri vrste uzoraka. Na uzorcima su odabrana dva karakteristična presjeka za dva granična slučaja. Kod uzoraka B1 i B3 koji su simetrični s obzirom na svoju uzdužnu os presjek 1 je jači presjek, odnosno onaj u kojem se nalazi manji broj oslabljenja, a presjek 2 je slabiji presjek u kojem se nalazi veći broj oslabljenja. Uzorci B2 i B4 nisu simetrični s obzirom na uzdužnu os te nije moguće odrediti jači i slabiji presjek istom analogijom. Stoga je presjek 1 definiran kao presjek s oslabljenjem u najvišem redu oslabljenja, a presjek 2 kao presjek bez oslabljenja u najvišem redu oslabljenja. Takvom podjelom presjek 1 je omeđen parovima čvorova 7-8, 11-12 i 15-16, a presjek 2 parovima čvorova 5-6, 9-10, 13-14, za sve četiri vrste uzoraka. Koordinate presjeka prikazani su u tablici 3, a pozicije presjeka na uzorcima su prikazane na slici 11. Potrebno je uočiti kako radi strukture uzoraka B2 i B4 njihova neutralna os nije linija već krivulja koja prati strukturu.

Tablica 3: Koordinate promatranih čvorova

Broj čvora	x koordinata	y koordinata
5	-9	h/2
6	-9	-h/2
7	-4,5	h/2
8	-4,5	-h/2
9	0	h/2
10	0	-h/2
11	4,5	h/2
12	4,5	-h/2
13	9	h/2
14	9	-h/2
15	13,5	h/2
16	13,5	-h/2

Mreže konačnih elemenata koje su korištene za provedbu virtualnih eksperimenata generirane su u programu GMSH 3.0.5 i jednake su gustoće za sve uzorke. Mreža je načinjena od trokutnih elemenata tipa T3. U tablici 4 prikazan je broj čvorova i elemenata u pojedinoj mreži ovisno o promatranom uzorku.



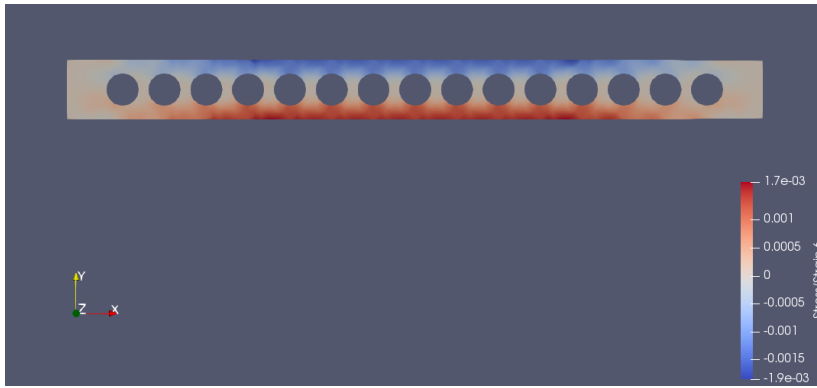
Slika 11: Pozicije promatranih presjeka na uzorcima

Tablica 4: Broj čvorova i elemenata mreže konačnih elemenata

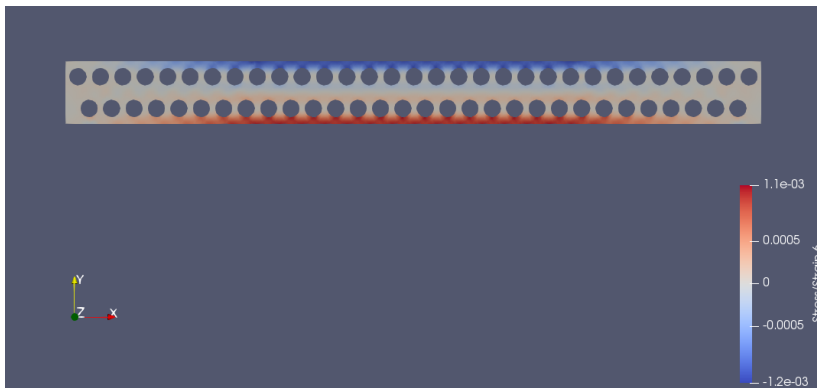
Uzorak	Broj čvorova	Broj elemenata
B1	954	1967
B2	3611	7419
B3	7776	15956
B4	13723	28162

6.1 Rezultati eksperimenata

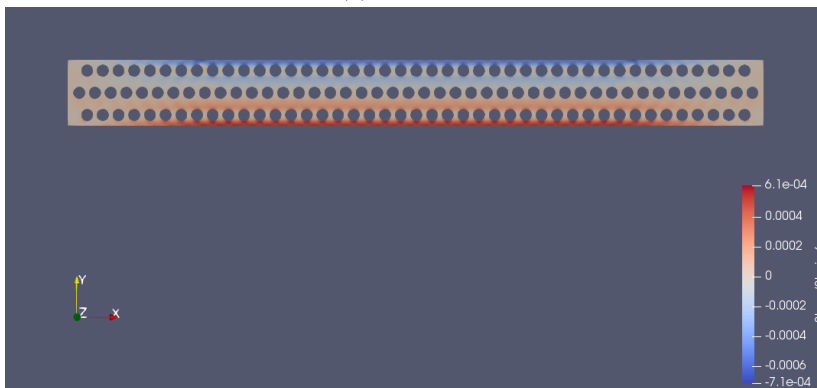
Raspodjela deformacija u smjeru x ϵ_x po pojedinim uzorcima prikazana je na slici 12. Prema njoj je vidljivo kako zaista se radi o stanju čistog savijanja. Moguće je uočiti kako je raspodjela deformacija, a samim time i napreznja, unutar LMD geometrije u obliku lukova koji vode od vrha oslabljenja do ruba uzorka između dva oslabljenja. To je bolje prikazano na slici 13)koja prikazuje isječak tlačnog ruba uzorka B3. Upravo su zbog te pojave u jačem presjeku 1 zabilježene veće deformacije od onih u slabijem presjeku 2, što je vidljivo u tablicama 5 i 6 gdje je moguće očitati vrijednosti deformacija.



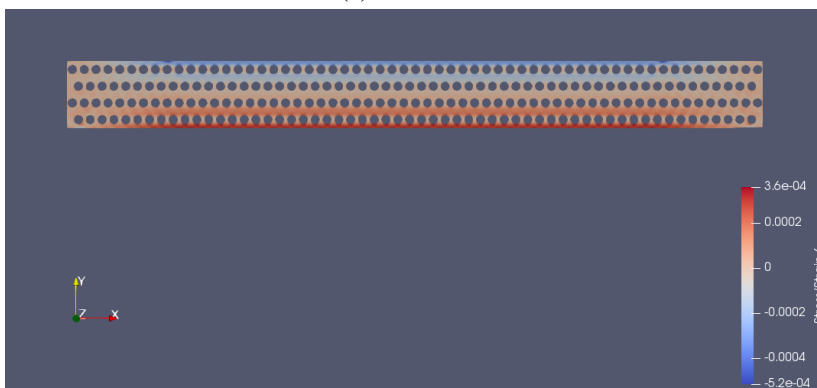
(a) Uzorak B1



(b) Uzorak B2

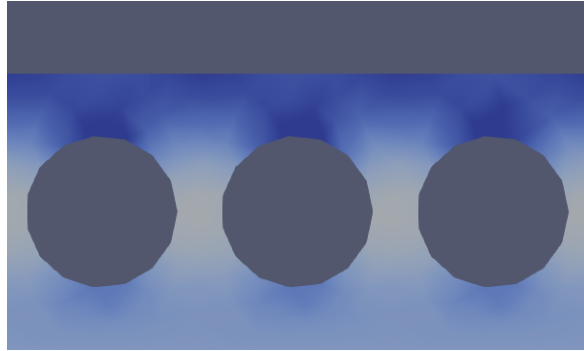


(c) Uzorak B3



(d) Uzorak B4

Slika 12: Deformacije u smjeru osi x



Slika 13: Raspodjela naprezanja na uzorku B3

Tablice 5 i 6 prikazuje apsolutne vrijednosti deformacija u promatranim čvorovima, uprosječene vrijednosti deformacija u presjecima 1 $\epsilon_{e,1,pros}$ i 2 $\epsilon_{e,2,pros}$ te vrijednost prosječne deformacije duž ruba nosača, odnosno homogenizirane deformacije na rubu nosača koja iznosi:

$$\tilde{\epsilon}_e = \frac{\epsilon_{e,1,pros} + \epsilon_{e,2,pros}}{2}$$

Indeks i kod deformacija jednak je 1 ili 2, ovisno o promatranom presjeku. Deformacija izražena na ovaj način jednaka je deformaciji na rubu nosača izrađenog od homogenog mikropolarnog materijala.

Tablica 5: Vrijednosti deformacija u smjeru x za uzorke B1 i B3

Uzorak	Presjek	Čvor	$ \epsilon_{e,i} $	$\epsilon_{e,i,pros}$	$\tilde{\epsilon}_e$
B1	1	7	0,001530	0,001530	0,001434
		8	0,001530		
		11	0,001530		
		12	0,001530		
		15	0,001530		
		16	0,001531		
	2	5	0,001338	0,001339	
		6	0,001339		
		9	0,001339		
		10	0,001339		
		13	0,001338		
		14	0,001339		
B3	1	7	0,000545	0,000545	0,000505
		8	0,000545		
		11	0,000545		
		12	0,000545		
		15	0,000544		
		16	0,000544		
	2	5	0,000461	0,000465	
		6	0,000461		
		9	0,000467		
		10	0,000467		
		13	0,000467		
		14	0,000467		

Pomoću homogenizirane deformacije na rubu pojedinog uzorka dobiven je homogeniziran modul elastičnosti u smjeru x E_x^* kao:

$$E_x^* = \frac{\sigma_{xx,e}}{\tilde{\epsilon}_e} = \frac{M}{W\tilde{\epsilon}_e}$$

U tablici 7 prikazani su homogenizirani momenti otpora uzoraka. Naime, u analizi su korišteni su momenti otpora punih presjeka, te je na taj način materijal koji je homogen i mikropolaran.

U tablici 8 prikazane su vrijednosti homogeniziranog modula elastičnosti u smjeru x E_x^* , te vrijednost $1/h^2$ za pojedine uzorke koji se nalazi uz vrijednost l_b u izrazu za vrijednost δ (*)

Odnos vrijednosti E_x^* i $1/h^2$ za pojedine uzorke prikazan je na slici 14. Ove vrijednosti opisane su linearnom regresijom koja nas dovodi do funkcije koja opisuje ovisnost homogeniziranog modula elastičnosti E_x^* o visini presjeka. Korelacijski koeficijent ove linearne regresije jednak je $R^2 = 0,9999$ što implicira na gotovo potpunu razinu korelacije. Regresijski

Tablica 6: Vrijednosti deformacija u smjeru x za uzorke B2 i B4

Uzorak	Presjek	Čvor	$ \epsilon_{e,i} $	$\epsilon_{e,i,pros}$	$\bar{\epsilon}_e$
B2	1	7	0,001103	0,001027	0,001026
		8	0,000951		
		11	0,001103		
		12	0,000951		
		15	0,001103		
		16	0,000952		
	2	5	0,000945	0,001026	
		6	0,001103		
		9	0,000951		
		10	0,001104		
		13	0,000951		
		14	0,001103		
B4	1	7	0,000320	0,000297	0,000297
		8	0,000273		
		11	0,000320		
		12	0,000274		
		15	0,000320		
		16	0,000274		
	2	5	0,000273	0,000297	
		6	0,000319		
		9	0,000274		
		10	0,000320		
		13	0,000274		
		14	0,000320		

pravac možemo opisati kao funkciju

$$E_x^*(h) = \frac{A}{h^2} + B$$

čije su vrijednosti A i B jednake

$$A = 5000000N$$

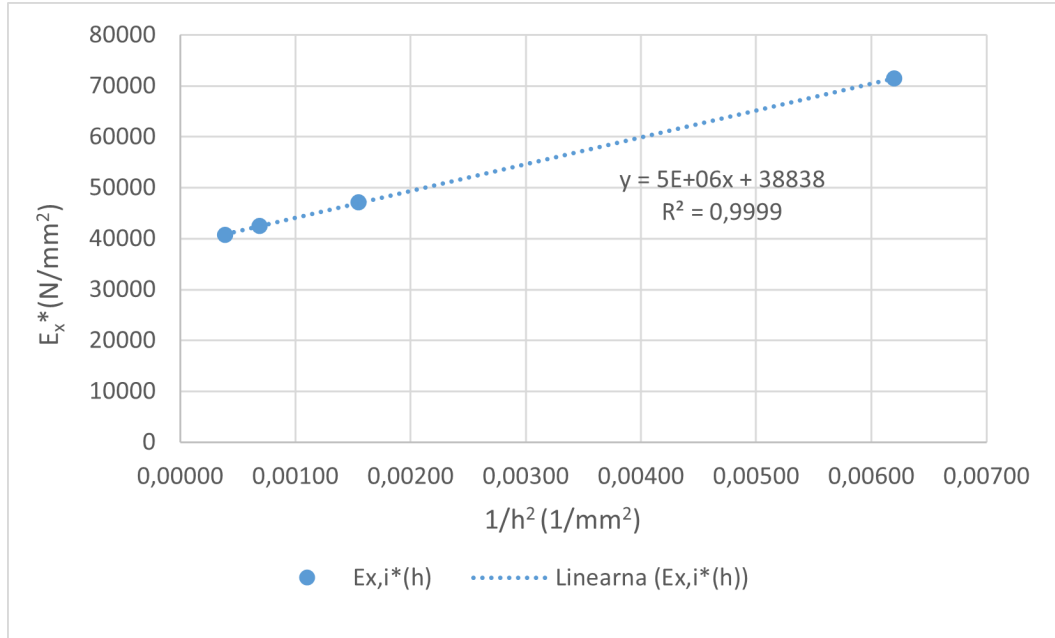
$$B = 38838N/(mm^2).$$

Tablica 7: Homogenizirani momenti otpora homogenih uzoraka

Uzorak	$b(mm)$	$h(mm)$	$W(mm^3)$
B1	12,7	12,7	341,40
B2	12,7	25,4	1365,59
B3	12,7	38,1	3072,57
B4	12,7	50,8	5462,35

Tablica 8: Homogenizirani modul elastičnosti uzoraka

Uzorak	$F(N)$	$M(Nmm)$	$W(mm^3)$	$\bar{\epsilon}_e$	E_x^*	$1/h^2$
B1	1000	35000	341,40	0,001434	71473,15	0,00620
B2	1000	66000	1365,59	0,001026	47086,24	0,00155
B3	1000	66000	3072,57	0,000505	42540,49	0,00069
B4	1000	66000	5462,35	0,000297	40742,17	0,00039



Slika 14: Odnos uprosječenog modula elastičnosti E_x^* o visini presjeka

Kako bi analitički izvedenom formulom dobili vrijednost naprezanja u smjeru osi x na rubu uzorka u izraz (60) uvrštavamo $y = h/2$. Tako dolazimo do izraza:

$$\epsilon_{x,e} = \frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\bar{E}W} \quad (66)$$

gdje su

$$\alpha_o = \frac{\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y}}{E_y} (n_{yx} + n_{yz}n_{zx}) = \frac{\sqrt{\frac{E_x}{1-n_{zx}n_{xz}} \frac{E_y}{1-n_{yz}n_{zy}}}}{E_y} (n_{yx} + n_{yz}n_{zx})$$

i

$$\psi_o = \sqrt{\frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x}} = \sqrt{\frac{E_y}{E_x} \frac{1 - n_{zx}n_{xz}}{1 - n_{yz}n_{zy}}}$$

U prethodnom poglavlju dobivene su sljedeće vrijednosti inženjerskih parametara:

$$n_{xy} = 0,212$$

$$n_{xz} = 0,231$$

$$n_{yx} = 0,241$$

$$n_{yz} = 0,143$$

$$E_z = 48,022 \text{ GPa}.$$

Prema tome nepoznate vrijednosti u izrazu za ϵ_e su E_x , E_y , n_{zx} i n_{zy} . Iz relacija matrice krutosti ortotropnog mikropolarnog kontinuuma (41) proizlaze odnosi

$$\frac{n_{xy}}{E_x} = \frac{n_{yx}}{E_y} \Rightarrow E_y = \frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x$$

$$\frac{n_{zx}}{E_z} = \frac{n_{xz}}{E_x} \Rightarrow n_{zx} = n_{xz} \frac{E_z}{E_x}$$

$$\frac{n_{zy}}{E_z} = \frac{n_{yz}}{E_y} \Rightarrow n_{zy} = \frac{n_{yz}}{E_y} E_z = \frac{n_{yz}}{\frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x} E_z = \frac{n_{yz} n_{xy}}{n_{yx}} \frac{E_z}{E_x}.$$

Na ovaj način su svi nepoznati inženjerski parametri izraženi preko nepoznatog modula elastičnosti E_x . Jednako tako moguće je izraziti i veličine \tilde{E} , ψ_o i α_o koji se nalaze u konstitutivnoj matrici ortotropnog mikropolarnog kontinuuma (42) kao funkcije od E_x

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \sqrt{\frac{E_x}{1 - n_{zx} n_{xz}} \frac{E_y}{1 - n_{yz} n_{zy}}} = \sqrt{\frac{E_x}{1 - n_{xz} \frac{E_z}{E_x} n_{xz}} \frac{\frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x}{1 - n_{yz} \frac{n_{yz} n_{xy}}{n_{yx}} \frac{E_z}{E_x}}} \\ &= \sqrt{\frac{n_{yx}^2 E_x^4}{(E_x - n_{xz}^2 E_z)(n_{xy} n_{yx} E_x - n_{xy}^2 n_{yz}^2 E_z)}} \end{aligned}$$

$$\psi_o = \sqrt{\frac{E_y}{E_x} \frac{1 - n_{zx} n_{xz}}{1 - n_{yz} n_{zy}}} = \sqrt{\frac{\frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x}{E_x} \frac{1 - n_{xz} \frac{E_z}{E_x} n_{xz}}{1 - n_{yz} \frac{n_{yz} n_{xy}}{n_{yx}} \frac{E_z}{E_x}}} = \sqrt{\frac{n_{yx}^2 (E_x - n_{xz}^2 E_z)}{n_{xy} (n_{yx} E_x - n_{xy}^2 n_{yz}^2 E_z)}}$$

$$\begin{aligned} \alpha_o &= \frac{\sqrt{\frac{E_x}{1 - n_{zx} n_{xz}} \frac{E_y}{1 - n_{yz} n_{zy}}}}{E_y} (n_{yx} + n_{yz} n_{zx}) = \frac{\sqrt{\frac{E_x}{1 - n_{xz} \frac{E_z}{E_x} n_{xz}} \frac{\frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x}{1 - n_{yz} \frac{n_{yz} n_{xy}}{n_{yx}} \frac{E_z}{E_x}}}}{\frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x} (n_{yx} + n_{yz} n_{xz} \frac{E_z}{E_x}) \\ &= \frac{n_{xy} (E_x n_{yx} + E_z n_{xz} n_{yz}) \sqrt{\frac{E_x^4 n_{yx}^2}{n_{xy} (E_x - E_z n_{xz}^2) (E_x n_{yx} - E_z n_{xy} n_{yz}^2)}}}{E_x^2 n_{yx}} \end{aligned}$$

Jednadžbu za naprezanja na rubu (66) moguće je preurediti tako da zahtijevamo

$$\frac{1 + \alpha_o + \psi_o \delta}{(1 + \alpha_o) \psi_o} \tilde{E} = \frac{M}{W \epsilon_e} \stackrel{!}{=} E^* \left(\frac{1}{h^2} \right).$$

Ako gornji izraz promatramo kao pravac linearne regresije i postavimo zahtjev

$$\frac{1}{\psi_o} \tilde{E} + \frac{\psi_o \tilde{E}}{(1 + \alpha_o) \psi_o} \delta \stackrel{!}{=} \frac{A}{h^2} + B$$

vidimo kako je, temeljem utjecaja visine presjeka

$$\frac{\psi_o \tilde{E}}{(1 + \alpha_o) \psi_o} \delta = \frac{A}{h^2}$$

i

$$\frac{1}{\psi_o} \tilde{E} = B.$$

Uređivanjem gornjih jednadžbi dolazimo do izraza

$$\frac{\tilde{E}}{(1 + \alpha_o)} \frac{24l_b^2}{h^2} = \frac{A}{h^2}$$

i

$$\frac{\tilde{E}}{\psi_o} = B,$$

odnosno

$$l_b^2 = \frac{A(1 + \alpha_o)}{24\tilde{E}} \quad (67)$$

i

$$\tilde{E} = B\psi_o. \quad (68)$$

Ako se u posljednjoj jednadžbi vrijednosti \tilde{E} i ψ_o izraze kao funkcije od E_x

$$\tilde{E}(E_x) = B\psi_o(E_x)$$

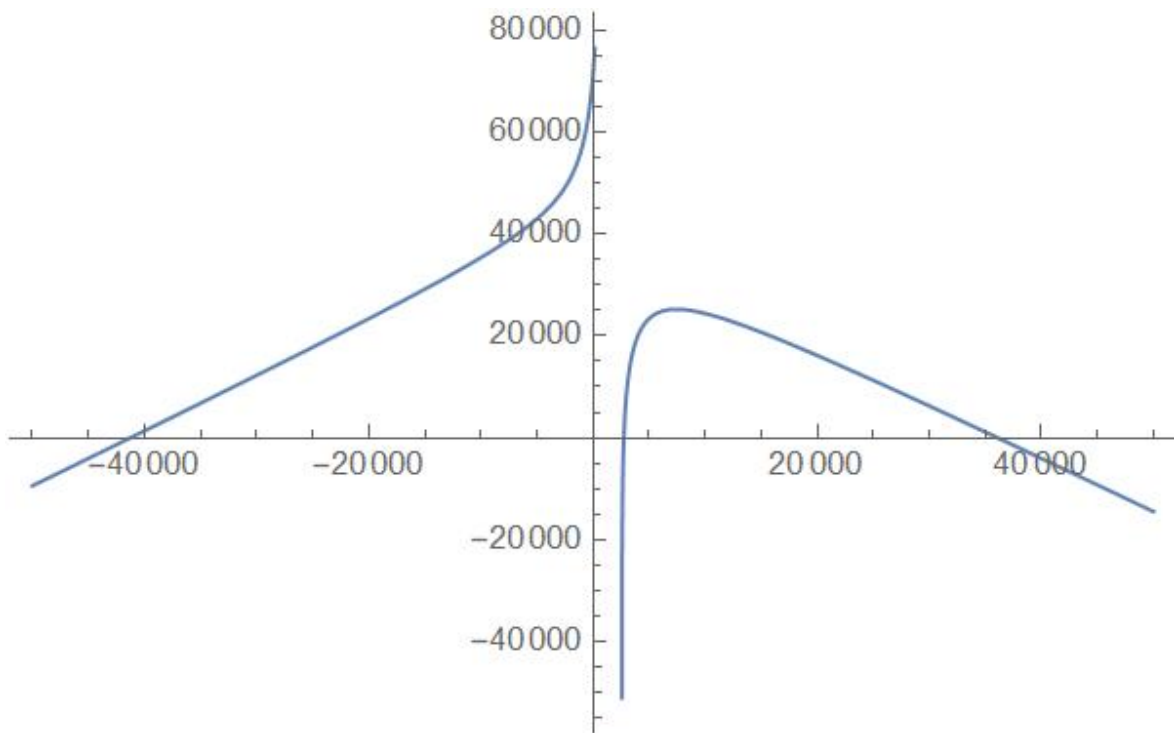
te se vrijednost \tilde{E} prebaci na desnu stranu dobivamo izraz pogodan za primjenu Newton Raphsonove metode numeričke iteracije

$$f(E_x) = B\psi_o(E_x) - \tilde{E}(E_x) = 0.$$

Uvrštavanjem vrijednosti \tilde{E} i ψ_o izražene kao funkcije of E_x dobivamo funkciju

$$f(E_x) = B \sqrt{\frac{n_{yx}^2 (E_x - n_{xz}^2 E_z)}{n_{xy} (n_{yx} E_x - n_{xy} n_{yz}^2 E_z)}} - \sqrt{\frac{n_{yx}^2 E_x^4}{(E_x - n_{xz}^2 E_z) (n_{xy} n_{yx} E_x - n_{xy}^2 n_{yz}^2 E_z)}} = 0.$$

Analiza ove funkcije provedena je u računalnom programu Wolfram Mathematica 12.1. Prikazom funkcije s uvrštenim svim poznatim koeficijentima na grafu (slika 15) vidljivo je kako postoje dvije pozitivne nultočke.



Slika 15: Funkcija $f(E_x)$

Pomoću Newton Raphsonove metode uz pretpostavljenu vrijednost $E_x = 40000N/mm^2$ nakon 5 iteracija dobivena je vrijednost $E_x = 36079,6N/mm^2$ uz razliku između dvije iteracije jednaku 0. Ovo je vrijednost koju možemo ocijeniti mogućom, pošto nultočka manje vrijednosti predstavlja veličinu modula elastičnosti koja je fizikalno vrlo malo moguća uzimajući u obzir materijal uzorka, a negativna vrijednost je fizikalno potpuno nemoguća. Prihvatanjem te vrijednosti slijedi kako su inženjerski parametri iz matrice (40) jednaki

$$\alpha_o = 0,281$$

$$\psi_o = 1,04$$

$$\tilde{E} = 40398,2N/mm^2$$

te iz izraza (67) karakteristična duljina za savijanje l_b ove strukture jednaka

$$l_b^2 = 6,606 \frac{1}{mm^2}$$

Nepoznati ortotropni inženjerski parametri prema konstitutivnim relacijama (41) sada iznose

$$E_y = \frac{n_{yx}}{n_{xy}} E_x = \frac{0,241}{0,212} * 36,080 = 41,015GPa,$$

$$n_{zx} = n_{xz} \frac{E_z}{E_x} = 0,231 * \frac{48,022}{36,080} = 0,307$$

i

$$n_{zy} = \frac{n_{yz}n_{xy}}{n_{yx}} \frac{E_z}{E_x} = \frac{0,143 * 0,212}{0,241} \frac{48,022}{36,080} = 0,167.$$

Konačno, radi provjere rezultata dobivene vrijednosti uvrštene su u izraz (68)

$$\frac{\tilde{E}}{\psi_o} = B$$
$$\frac{40398,2}{1,04} = 38838$$

$$38844,42N/mm^2 \approx 38838N/mm^2$$

Iz čega je vidljivo kako pogreška iznosi 0,02%, što predstavlja zanemarivu pogrešku koju možemo pripisati zaokruživanju. Možemo zaključiti kako je ovaj rezultat ispravan, pogotovo ako uspoređujemo s pogreškom dobivenom prilikom prvog pokušaja dobivanja inženjerskih parametara opisanog u dodatku 4.

6.2 Analiza rezultata

Promatrajući rezultate iz tablice 5 i 6 vidljivo je kako je pri uzorcima B2 i B4 deformacija jednaka u presjecima 1 i 2, što nije slučaj kod uzoraka B1 i B3. Razlog tome je mikrostruktura uzoraka B2 i B4 koja čini prosječnu vrijednost deformacija jednaku u oba presjeka, no različitu unutar jednog promatranog presjeka. To je rezultat toga što su uzorci nisu simetrični s obzirom na svoju uzdužnu os, te je njihova neutralna os krivulja. Kod svih uzoraka deformacija je veća u čvoru ispod kojeg se ne nalazi perforacija nego u čvoru ispod kojeg se ona nalazi. To je u prijašnjim istraživanjima [13] objašnjeno pojavom tlačno-vlačnih lukova koji prenose naprezanje od vrha oslabljenja do ruba uzorka, kao što je vidljivo na slici 13.

Sa slike 15 je vidljivo kako je dobiven vrlo visok koeficijent korelacije linearne regresije, koji iznosi $R^2 = 0,9999$, za razliku od koeficijenta $R^2 = 0,9812$ dobivenog istom metodologijom kod Dukić [10]. No treba uzeti u obzir kako su u ovome radu provedeni virtualni eksperimenti metodom konačnih elemenata, dok su u navedenom istraživanju provedeni laboratorijski eksperimenti pri kojima je potrebno uzeti u obzir šum prilikom mjerenja.

Pogreška u konačnom rezultatu u iznosu 0,02% dobivena provjerom izraza (68) u prethodnom poglavlju je zanemariva pri usporedbi pogreške od 46,22% dobivene u poglavlju 8.3 te zaključujemo kako je ovaj rezultat točan.

Konačno, inženjerski parametri potrebni za analizu čistog savijanja strukture LMD glase

$$E_x = 36,08 \text{ GPa}$$

$$E_y = 41,015 \text{ GPa}$$

$$E_z = 48,022 \text{ GPa}$$

$$n_{xy} = 0,212$$

$$n_{xz} = 0,231$$

$$n_{yx} = 0,241$$

$$n_{yz} = 0,143$$

$$n_{zx} = 0,307$$

$$n_{zy} = 0,167$$

$$l_b = 2,571 / \text{mm}$$

Analizom tablice 8 moguće je vidjeti kako su homogenizirani modul elastičnosti E^*_{*x} za sve uzorke veći od modula utvrđenog modula elastičnosti u smjeru x E_x . Uz to, homogenizirani modul elastičnosti E^*_{*x} za uzorak B1 je gotovo veći i od modula elastičnosti izvornog materijala matrice $E = 72,399$ GPa, što odgovara podacima iz eksperimenata prema Dukić [10].

Ova razdioba homogeniziranih modula elastičnosti E^*_{*x} pri različitim prikazuje na size-effect pojavu kod mikropolarnih materijala, gdje vidimo kako homogenizirani modul elastičnosti raste sa smanjivanjem visine uzorka. Prema rezultatima sa slike 14 možemo zaključiti kako bi za uzorak kome visina teži u beskonačnost homogenizirani modul elastičnosti E^*_{*x} težio prema 38,838 GPa. I ova pojava je zabilježena u rezultatima od Dukić [10].

Vrijednost dobivene karakteristične duljine za savijanje l_b možemo djelomično usporediti s vrijednošću dobivenom u istraživanjima koje su proveli Beveridge [9] i Dukić [10], koji su za svoje analize koristili jednake uzorke, ali HMD strukture. Istraživanje od Dukić dalo je vrijednost $l_b = 2,45$ mm, dok kod Beveridgea vrijednost nije direktno izražena. Naime, u tom radu postoje dvije vrijednosti koje nazivaju karakterističnom duljinom na savijanje. Dan je rezultat za l_b^* koji je jednak 10,14 mm, a može se prevesti u ovdje promatranu vrijednost relacijom $l_b^* = l_b \sqrt{24(1-n)}$. Prema tome promatрана vrijednost iznosi $l_b = 2,47$ mm. Potrebno je napomenuti kako su obje vrijednosti rezultat virtualnih eksperimenata koji su provedeni homogenizacijom izotropnih mikropolarnih uzoraka. Također, Beveridge i ostali su u svom radu koristili three point bending test.

7 ZAKLJUČAK

U ovome radu razmatran je problem čistoga savijanja ortotropnog mikropolarnog kontinuuma. Postojeći Gauthierovi analitički izrazi za naprezanja, deformacije i pomake izotropnog mikropolarnog kontinuuma prošireni su na ortotropni kontinuum. Virtualnim eksperimentima na reprezentativnoj jediničnoj ćeliji LMD strukture dobivena je vrijednost četiri Poissonova koeficijenta, a iz omjera površine jedinične ćelije s i bez šupljine dobiven je modul elastičnosti u smjeru osi z . Pomoću virtualnih eksperimenata čistog savijanja dobivena je vrijednost ostala dva Poissonova koeficijenta, ostala dva modula elastičnosti te karakteristične duljine na savijanje.

Dobivanje posljednjeg parametra bio je cilj ovoga rada. Iako su dobivene vrijednosti zadovoljile sve pretpostavljene uvijete potrebno je kritički sagledati rezultate i zapitati se dali je jedna vrijednost karakteristične duljine za savijanje l_b dovoljna za opisivanje ortotropnog kontinuuma. Konačne rezultate potrebno je provjeriti analizom ovog problema metodom konačnih elemenata temeljenoj na mikropolarnoj teoriji kontinuuma. Možemo pretpostaviti kako će takva analiza dati bolji odgovor na ovo pitanje. Također, točnost dobivenih inženjerskih parametara moguće je potvrditi laboratorijskim ispitivanjima uzoraka LMD strukture.

Usporedbom homogeniziranog modula elastičnosti s visinom presjeka promatranog uzorka vidljiva je size-effect pojava spomenuta u prethodnim radovima koji su ustanovili metodologiju za eksperimentalno dobivanje karakteristične duljine za savijanje.

Vrijednost ovoga rada ponajprije se nalazi u izvodu analitičkih vrijednosti za naprezanja, deformacije i pomake ortotropnog mikropolarnog kontinuuma koji će poslužiti u njegovu daljnjem istraživanju. Osim toga, još je jednom utvrđena metodologija eksperimenta čistog savijanja mikropolarnih nosača s ciljem dobivanja vrijednosti karakteristične duljine za savijanje. U poglavlju 5 predstavljen je način dobivanja Poissonovih koeficijenata pomoću virtualnih eksperimenata na jediničnoj ćeliji, što može poslužiti kod analize materijala strukture slične ovoj.

Sveukupno, ovaj rad je još jedan mali korak koji doprinosi razumijevanju ponašanja ortotropnih mikropolarnih materijala.

8 DODATCI

8.1 Dodatak 1: Odnos izotropnih mikropolarnih inženjerskih i materijalnih konstanti

Kako je i prije spomenuto, izotropni mikropolarni kontinuum opisuje šest inženjerskih konstanti:

E $[F/l^2]$ - Youngov modul elastičnosti

n $[1]$ - Poissonov koeficijent

N $[1]$ - Mjera povezanosti makrorotacije i mikrorotacije (u vrijednosti od 0 do 1)

ψ $[1]$ - Polarni omjer (u vrijednosti od 0 do 3/2)

l_t $[l]$ - karakteristična duljina za torziju

l_b $[l]$ - karakteristična duljina za savijanje

U ovom radu je razmatran problem čistog savijanja, tako da su se u njemu pojavile samo tri konstante; E , n i l_b , čije je pronalaženje glavna tema ovoga rada. Također, radi opisa materijalnih konstanti potrebno je spomenuti i modul posmika G koji je jednak

$$G = \frac{E}{2(1+n)} \quad [F/l^2].$$

U konstitutivnim jednadžbama za izotropni mikropolarni kontinuum (5) i (6) pojavljuje se šest materijalnih konstanti. Relacije koje ih povezuju s inženjerskim konstantama, prema Lakesu [5] su u nastavku:

$$\lambda = \frac{2nG}{1-2n} = \frac{En}{(1+n)(1-n)} \quad [F/l^2]$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+n)} \quad [F/l^2]$$

$$\nu = \frac{GN^2}{1-N^2} = \frac{E}{2(1-n)} \frac{N^2}{1-N^2} \quad [F/l^2]$$

$$\alpha = \frac{2Gl_t^2(1-\psi)}{\psi} = \frac{El_t^2(1-\psi)}{\psi(1-n)} \quad [M/l]$$

$$\beta = Gl_t^2 = \frac{El_t^2}{2(1-n)} \quad [M/l]$$

$$\gamma = G(4l_b^2 - l_t^2) = \frac{E(4l_b^2 - l_t^2)}{2(1-n)} \quad [M/l]$$

8.2 Dodatak 2: Transformacija iz ortotropnog u izotropni kontinuum

Kako bi provjerili točnost izvedenih formula za ortotropni kontinuum u njih uvrštavamo vrijednosti konstitutivnih koeficijenata koji odgovaraju izotropnom kontinuumu. Izvedena jednačba zadovoljava ako nakon uvrštavanja koeficijenata poprimi vrijednost svoje veličine za izotropni kontinuum.

Za izotropni kontinuum vrijede izrazi (45), (46) i (47):

$$\tilde{E} = \frac{E}{1 - n^2}$$

$$\psi_o = 1$$

$$\alpha_o = \frac{n}{1 - n}$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u izvedene formule za analitička naprezanja, deformacije i pomake u ortotropnom kontinuumu dobivamo izraze za iste vrijednosti u izotropnom kontinuumu:

Izrazi za naprezanja: (58) \Rightarrow (32)

$$\sigma_{xx} = -\frac{1 + \alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{I_z} y = -\frac{1 + \frac{n}{1-n}}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{I_z} y = -\frac{\frac{1-n+n}{1-n}}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{M}{I_z} y = -\frac{1}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{I_z} y$$

(59) \Rightarrow (33)

$$\mu_{zx} = \frac{\psi_o \delta}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{A} = \frac{1\delta}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{A} = \frac{\delta}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{M}{A} = \frac{(1-n)\delta}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{A}$$

Izrazi za deformacije: (60) \Rightarrow (34)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -\frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{\tilde{E}I_z} y = -\frac{(1 + \frac{n}{1-n})1}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{\frac{E}{1-n^2}I_z} y \\ &= -\frac{\frac{1-n+n}{1-n}}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{(1-n^2)M}{EI_z} y = -\frac{1-n^2}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{EI_z} y \end{aligned}$$

(61) \Rightarrow (35)

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \frac{(1 + \alpha_o)\alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o \delta} \frac{M}{\tilde{E}I_z} y = \frac{(1 + \frac{n}{1-n})\frac{n}{1-n}}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{\frac{E}{1-n^2}I_z} y \\ &= \frac{\frac{1-n+n}{1-n} \frac{n}{1-n}}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{(1-n^2)M}{EI_z} y = \frac{n}{1-n} \frac{(1-n^2)}{1 + (1-n)\delta} \frac{M}{EI_z} y \end{aligned}$$

(62) \Rightarrow (36)

$$\begin{aligned} \kappa_{zx} &= \frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} = \frac{(1 + \frac{n}{1-n})1}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{\frac{E}{1-n^2}I_z} \\ &= \frac{\frac{1-n+n}{1-n}}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{(1-n^2)M}{EI_z} = \frac{1-n^2}{1+(1-n)\delta} \frac{M}{EI_z} \end{aligned}$$

Izraz za pomake: (63) \Rightarrow (37)

$$\begin{aligned} \varphi_z &= \frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} x = \frac{(1 + \frac{n}{1-n})1}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{\frac{E}{1-n^2}I_z} x \\ &= \frac{\frac{1-n+n}{1-n}}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{(1-n^2)M}{EI_z} x = \frac{1-n^2}{1+(1-n)\delta} \frac{M}{EI_z} x \end{aligned}$$

(64) \Rightarrow (38)

$$\begin{aligned} u &= -\frac{(1 + \alpha_o)\psi_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} xy = -\frac{(1 + \frac{n}{1-n})1}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{\frac{E}{1-n^2}I_z} xy \\ &= -\frac{\frac{1-n+n}{1-n}}{\frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n}} \frac{(1-n^2)M}{EI_z} xy = -\frac{1-n^2}{1+(1-n)\delta} \frac{M}{EI_z} xy \end{aligned}$$

(65) \Rightarrow (39)

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \frac{1 + \alpha_o}{1 + \alpha_o + \psi_o\delta} \frac{M}{\widetilde{EI}_z} (\psi_o x^2 + \alpha_o y^2) = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{n}{1-n}}{1 + \frac{n}{1-n} + 1\delta} \frac{M}{\frac{E}{1-n^2}I_z} (1x^2 + \frac{n}{1-n}y^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-n+n}{1-n} \frac{1-n+n+(1-n)\delta}{1-n} \frac{(1-n^2)M}{EI_z} (x^2 + \frac{n}{1-n}y^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-n^2}{1+(1-n)\delta} \frac{M}{EI_z} (x^2 + \frac{n}{1-n}y^2) \end{aligned}$$

8.3 Dodatak 3: Prvobitni pokušaji dobivanja vrijednosti inženjerskih parametara

Na rezultatima eksperimenta 1 i 2 iz poglavlja 5 provedena je analiza rezultata koja je u konačnici odbačena kao pogrešna. Analiza rezultata iz spomenutog poglavlja pretpostavljena je kao točna, a prvobitna analiza, kao i razlozi ustvrđivanja njene netočnosti su objašnjeni ispod.

Prilikom prvog pokušaja dobivanja inženjerskih parametara moduli elastičnosti E_x i E_y dobiveni su kao

$$E_i = \frac{\sigma_{avr,i}}{\epsilon_i}$$

pri čemu je $\sigma_{avr,i}$ kvocijent sume reakcija u čvorovima opterećene stranice i površine te stranice (širina stranice u smjeru osi z pretpostavljena je kao jedinična)

$$\sigma_{avr,i} = \frac{\sum R_i}{l_j * 1},$$

pritom je deformacija jednaka:

$$\epsilon_i = \frac{u_i}{l_i}$$

Tako dobivene vrijednosti modula elastičnosti u smjeru osi x i y iznose

$$E_x = 36,886Gpa$$

$$E_y = 22,645Gpa$$

Za izračun Poissonovih koeficijenata prvo su određeni lokalni Poissonovi koeficijenti za svaku Gaussovu točku, kao omjer očitanih deformacija u jednom od smjerova okomitih na smjer opterećenja i očitane deformacije u smjeru opterećenja. Globalni Poissonovi koeficijenti uzet su kao prosječna vrijednost lokalnih koeficijenata iz svake Gaussove točke

$$n_{ij} = \frac{\sum_{i,j=1}^a \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}}{a},$$

pri čemu su $i, j = x, y, z$, ali $i \neq j$. Tako su iz eksperimenta 1 dobivene vrijednosti

$$n_{xy} = 0,417$$

$$n_{xz} = 0,250,$$

a iz eksperimenta 2

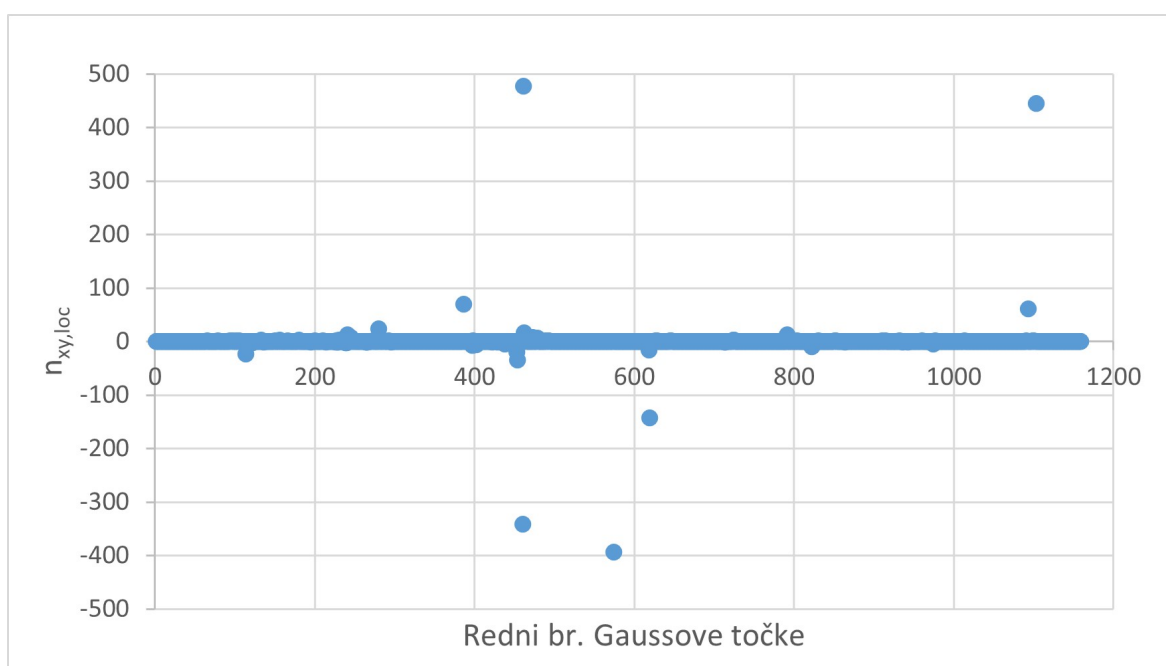
$$n_{yx} = 1,131$$

$$n_{yz} = -0,056$$

Očigledno je kako vrijednost n_{yx} fizikalno nije moguća s obzirom na gornju granicu vrijednosti Poissonova koeficijenta od 0,5. S druge strane negativna vrijednost n_{yz} implicira kako je ovaj mikropolarni materijal auksetičan u smjeru osi z prilikom nanašanja opterećenja u smjeru osi

y, što je također fizikalno malo vjerojatno.

Vrijednosti n_{xy} i n_{xz} na prvi pogled izgledaju prihvatljivo. No ako promotrimo pojedinačne vrijednosti $n_{xy,loc}$ možemo uvidjeti vrlo izraženo rasipanje. Na slici 16 prikazane su vrijednosti $n_{xy,loc}$ u svakoj Gaussovoj točki mreže konačnih elemenata jedinične ćelije. Očigledno je kako dolazi do nekoliko vrlo velikih odstupanja, koja je moguće jednostavno objasniti kao grešku u podacima. Kako bi se uvjerali u točnost ovih podataka na njima je provedena statistička analiza, te je utvrđeno kako, iako prosječna vrijednost za n_{xy} iznosi 0,417, raspon od minimalne do maksimalne vrijednosti $n_{xy,loc}$ iznosi 871,06, a standardna devijacija je jednaka 25,11. Sličan je slučaj i kod vrijednosti n_{xz} . Iz ovoga je moguće zaključiti kako su vrijednost Poissonovih koeficijenata dobivene na ovaj način netočne, a objašnjenje tome možemo naći u definiciji Poissonova koeficijenta. Naime, on je definiran kao odnosa deformacija u lateralnom i aksijalnom smjeru jednoosnog opterećenja tijela, a ne točke. Kod tijela, uslijed njegovih dužnih dimenzija, moguće je izračunati deformaciju kao omjer promjene duljine uslijed opterećenja i početne duljine, dok kod točke to nije moguće.



Slika 16: Rasap vrijednosti $n_{xy,loc}$

Iako je pokazano kako vrijednosti Poissonovih koeficijenata dobiveni ovim putem nisu ispravne i dalje preostaju vrijednosti modula elastičnosti E_x i E_y . Možemo koristiti relacije (41) iz ortotropne konstitutivne matrice kako bi uz pomoć Poissonovih koeficijenata iz poglavlja 5 i modula elastičnosti E_x i E_y iz ovog poglavlja dobili preostala dva Poissonova

koeficijenta

$$n_{zx} = n_{xz} \frac{E_z}{E_x} = 0,301$$

$$n_{zy} = n_{yz} \frac{E_z}{E_y} = 0,303$$

što ponovo na prvi pogled izgleda kao dobar rezultat. No iz relacija (41) prvi izraz možemo iskoristiti kao kontrolu

$$\begin{aligned} \frac{n_{yx}}{E_y} &= \frac{n_{xy}}{E_x} \\ \frac{0,241}{22,645} &= \frac{0,212}{36,886} \\ 0,0106 &\neq 0,0057 \end{aligned}$$

što ukazuje na pogrešku od 46,22%. Iz tog razloga su vrijednosti za module elastičnosti E_x i E_y dobiveni iz eksperimenata 1 i 2 zanemareni, te je postupak određivanja inženjerskih parametara nastavljen u poglavlju *Virtualni eksperimenti čistog savijanja*.

9 LITERATURA

- [1] *Theory of micropolar elasticity*. Springer-Verlag, Vienna, 1972.
- [2] Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants. *Journal of Applied Mechanics*, 42:369–374, 1975.
- [3] Grbčić S. *Linked Interpolation and Strain Invariance in Finite-Element Modeling of Micropolar Continuum*. PhD thesis, University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering, 2018.
- [4] Žiković L. , Jelenić G. Analiza 2d mikropolarnog kontinuuma metodom konačnih elemenata. In *Zajednici temelji 2019*. Udruga hrvatskih građevinskih fakulteta, 2019.
- [5] Lakes R.S. Physical meaning of elastic constants in cosserat, void, and microstretch elasticity. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 11, 217-229 2016.
- [6] Gauthier R.D. *Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity*. PhD thesis, University of Colorado, Department of Mechanical Engineering, 1974.
- [7] Jelenić G. On pure bending in non-linear elasticity: A circular closed-form 2d solution for semi-linear orthotropic material. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 90, 2021.
- [8] Passarella F., Tibullo V., Zampoli V. On the strong ellipticity for orthotropic micropolar elastic bodies in a plane strain state. *Mechanics Research Communications*, 38:512–517, 2011.
- [9] Beveridge A.J., Wheel M.A., Nash D.H. The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 50:246–255, 2013.
- [10] Dukić E.P., Žiković L., Jelenić G. Pure-bending experiments on specimens with architected internal structure. 2022.
- [11] *Theory of elasticity*. McGraw-Hill book company, Inc., 1951.

- [12] Taylor R. *Finite Element Analysis Program*, url <http://www.ce.berkeley/feap> edition, 2014.
- [13] Jurković D., Žiković L. , Dukić E.P., Jelenić G. Analitička, eksperimentalna i numerička analiza čistog savijanja aluminijskih nosača s umjetno proizvedenom strukturom. *Zbornik radova Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Rijeci*, 24:51–65, 2021.