

# Primjena računalne matrične analize rešetkaste konstrukcije

---

**Matković, Luka**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:739902>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Luka Matković**

**Primjena računalne matrične analize rešetkaste konstrukcije**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2024.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Diplomski sveučilišni studij  
Urbano inženjerstvo  
Računalno programiranje**

**Luka Matković  
JMBAG: 0114033497**

**Primjena računalne matrične analize rešetkaste konstrukcije**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2024.**

## **IZJAVA**

Diplomski rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Ime i prezime

U Rijeci, 2024.

## **SAŽETAK**

Cilj ovog rada je opisati i analizirati primjenu računalne matrične analize sila i pomaka rešetkastih konstrukcija. Rad obuhvaća izvod potrebnih matematičkih izraza, njihovu primjenu i implementaciju u Mathcad 15. Analizom rešetkaste konstrukcije provjerena je točnost izraza. Zaključeno je da točnost rezultata ovisi o ispravnosti unesenih koordinata čvorova, definiranja štapova i unosa mehaničkih karakteristika štapova. Dodatno je provedena usporedba momenata unutarnjih sila štapova rešetkastog nosača oko Ritterove točke i momenta savijanja grede. Utvrđeno je da su ovi momenti jednaki samo u teoretskom slučaju s beskonačno mnogo štapova rešetke. U suprotnom je moment savijanja grede veći.

## **KLJUČNE RIJEČI:**

Matrica, pomak, čvor, štap, rešetka, moment

## **ABSTRACT**

The aim of this paper is to describe and analyze the application of computational matrix analysis of forces and displacements in truss structures. The study involves deriving necessary mathematical expressions, their application, and implementation in Mathcad 15. The accuracy of the expressions was verified through analysis of the truss structure. It was concluded that the accuracy of the results depends on the correct input of node coordinates, definition of members, and input of mechanical characteristics of the members. Additionally, a comparison was made between the moments of internal forces of truss members around Ritter's point and the bending moment of the beam at the same section. It was found that these moments are equal only in the theoretical case of an infinite number of truss members. Otherwise, the bending moment of the beam is larger.

## **KEYWORDS:**

Matrix, displacement, node, member, truss, moment

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. POSTUPAK PRIMJENE IZVEDENIH JEDNADŽBI.....	7
3. RAČUNALN MATRIČNA ANALIZA REŠETKE .....	17
4. USPOREDBA MOMENTA GREDE I REŠETKE .....	43
5. ZAKLJUČAK .....	48
5.1. Zaključak računalne primjene matrične analize rešetkastog nosača .....	48
5.2. Zaključak usporedbe momenata grede i sila rešetkastog nosača .....	48
6. LITERATURA.....	49

## POPIS OZNAKA

$\sigma$	naprezanje (N/mm <sup>2</sup> )
E	modul elastičnosti (N/mm <sup>2</sup> )
$\varepsilon$	deformacija (bezdimenzionalna vrijednost)
$\Delta L$	promjena duljine štapa (m)
L	početna duljina štapa (m)
F	sila opterećenja (kN)
A	površina poprečnog presjeka štapa (mm <sup>2</sup> )
u	pomak čvora rešetke (m)
q	sila opterećenja (q=F) (kN)
K	krutost šapova (N/mm)
$\lambda$	kosinus kuta nagiba šapova (bezdimenzionalna vrijednost)
i	početni čvor štapa
j	krajnji čvor štapa
s	uzdužne sile u štapovima (kN)



## **POPIS TABLICA**

Tablica 1: Rezultati kosinusa kutova položaja štapova u odnosu na glavne osi koordinatnog sustava

Tablica 2: Prikaz usporedbe rezultata momenata savijanja grede i momenata sila rešetkastog nosača

## POPIS SLIKA

slika 1: Skica općeg položaja štapa u kartezijevom prostornom koordinatnom sustavu za izvod općeg izraza krutosti štapova

slika 2: Shematski prikaz izvoda izraza odnosa sile, produljenja i krutosti štapa

slika 3: Slikoviti prikaz i pojašnjenja elemenata matrice krutosti štapa

slika 4: Oblik rešetkastog nosača

slika 5: Rešetkasti nosač sa definiranim koordinatama čvorova i numeracijom čvorova i štapova

slika 6: Rezultati matrice krutosti rešetke s pojašnjenjima elemenata matrice

slika 7: Rješenje matrice krutosti rešetke sa reakcijama u osloncima

slika 8: Rešetkasti nosač s opterećenjem

Slika 9: Prikaz modela rešetkastog nosača sa numeriranim čvorovima

Slika 10: Prikaz modela rešetkastog nosača sa numeriranim štapovima

Slika 11: Izrazi za definiranje geometrijskih karakteristika štapova te same geometrije rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Slika 12: Izrazi za definiranje broja čvorova i štapova zadanog modela rešetkaste konstrukcije (Mathcad 15)

Slika 13: Matrični zapis definiranja koordinata čvorova te numeracije čvorova (Mathcad 15)

Slika 14: Matrica definiranja koordinata čvorova te numeracije čvorova (Mathcad 15)

Slika 15: Matrični zapis definiranja numeracije štapova ovisno o tome između kojih čvorova se nalaze (Mathcad 15)

Slika 16: Matrica definiranja numeracije štapova ovisno o tome između kojih čvorova se nalaze (Mathcad 15)

Slika 17: Matrični zapis definiranja krutosti presjeka štapova (Mathcad 15)

Slika 18: Definiranje matrice numeriranih čvorova oslonaca te definiranje slobode pomaka u njima prema glavnih osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 19: Matrica numeriranih čvorova oslonaca te definiranje slobode pomaka u njima prema glavnih osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 20: Matrični zapisi za definiranje koordinata čvorova (Mathcad 15)

Slika 21: Izrazi za definiranje koordinata čvorova (Mathcad 15)

Slika 22: Matrice koordinata čvorova (Mathcad 15)

Slika 23: Grafički prikaz rešetkaste konstrukcije u x-z ravnini (nacrt) (Mathcad 15)

Slika 24: Grafički prikaz rešetkaste konstrukcije u y-z ravnini (bokocrt) (Mathcad 15)

Slika 25: Grafički prikaz rešetkaste konstrukcije u x-y ravnini (tlocrtno) (Mathcad 15)

Slika 26: Matrični zapis duljine štapova (Mathcad 15)

Slika 27: Matrica duljine štapova (Mathcad 15)

Slika 28: Matrični zapis kosinusa kutova štapova sa glavnim osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 29: Matrica kosinusa kutova štapova sa glavnim osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 30: Opća matrica krutosti štapova (Mathcad 15)

Slika 31: Karakteristične lokalne matrice krutosti štapova rešetke (Mathcad 15)

Slika 32: Matrični zapis globalne matrice krutosti rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Slika 33: Globalna matrica krutosti rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Slika 34: Matrice krutosti sa uračunatim spriječenim pomacima u osloncima (Mathcad 15)

Slika 35: Matrični zapis matrice krutosti sa uračunatim spriječenim pomacima u osloncima (Mathcad 15)

Slika 36: Prikaz modela rešetkastog nosača sa osloncima, opterećenjem i numeriranih čvorova

Slika 37: Matrični zapis veličine opterećenja i numeriranog čvora u kojem je opterećenje (Mathcad 15)

Slika 38: Matrični zapis opterećenja u čvorovima (sila akcija) (Mathcad 15)

Slika 39: Matrica opterećenja u čvorovima (sila akcija) (Mathcad 15)

Slika 40: Izraz definiranja pomaka čvorova u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 41: Matrica pomaka čvorova u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 42: Izraz definiranja sila u čvorovima u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 43: Matrica sila u čvorovima u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Slika 44: Matrični zapis pomaka čvorova (Mathcad 15)

Slika 45: Matrica pomaka čvorova (Mathcad 15)

Slika 46: Izraz definiranja matrice novih koordinata položaja pomaknutih čvorova s povećanjem za veličinu  $d$  (za potrebe boljeg uočavanja pomaka u grafu)

Slika 47: Matrica novih koordinata položaja pomaknutih čvorova (Mathcad 15)

Slika 48: Matrični zapis koordinata pomaka čvorova

Slika 49: Grafički prikaz pomaka čvorova u x-z ravnini (u nacrtu) (Mathcad 15)

Slika 50: Grafički prikaz pomaka čvorova u y-z ravnini (u pogledu) (Mathcad 15)

Slika 51: Grafički prikaz pomaka čvorova u x-y ravnini (tlocrtno) (Mathcad 15)

Slika 52: Matrični zapis rezultata reakcija u osloncima numeriranim čvorovima

Slika 53: Matrica rezultata reakcija u osloncima numeriranim čvorovima

Slika 54: Opći izraz za zapis rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke

Slika 55: Matrični zapis rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

Slika 56: Matrica rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

Slika 57: Matrični zapis veličine opterećenja i numeriranog čvora u kojem je opterećenje (Mathcad 15)

Slika 58: Definirane karakteristike rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Slika 59: Matrica rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

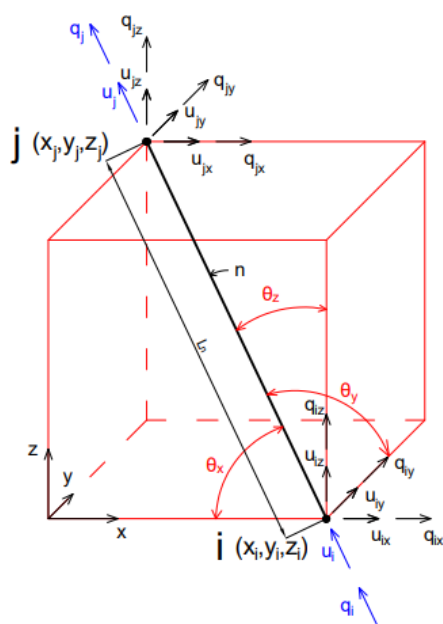
Slika 60: Matrični zapis numeriranih štapova, sila u štapovima, kraka momenta, momenta sila i x koordinate tih momenata (Mathcad 15)

Slika 61: Matrica numeriranih štapova, sila u štapovima, kraka momenta, momenta sila i x koordinate tih momenata (Mathcad 15)

Slika 62: Rešetkasti nosač od 25 trokutasto (piramidalno) povezanih štapova (Mathcad 15)

# 1. UVOD

Unutar prostornog pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava promatra se prostorno postavljene štapa kako je prikazano na slici 1. Štapa je numeriran brojem  $n$ , te je definiran koordinatama čvorova  $i (x_i, y_i, z_i)$  i  $j (x_j, y_j, z_j)$ . Štapa u ovom slučaju predstavlja dužinu, duljine  $L_n$ . Dužina je omeđena dvjema krajnjim točkama, to jest čvorovima  $i$  i  $j$ . Ukoliko u čvorovima nisu spriječeni pomaci, pri opterećenju rešetke, svaki čvor u prostoru ima tri (3) glavne slobode pomaka  $u_x, y$  i  $z$  smjeru što ih stvaraju  $x, y$  i  $z$  komponente sile  $q$  koja djeluje u tim čvorovima. Tako, čvor  $i$  u smjeru  $x$  ima pomak  $u_{ix}$  od sile  $q_{ix}$ , u sjeru  $y$  ima pomak  $u_{iy}$  od sile  $q_{iy}$ , a u smjeru  $z$  ima pomak  $u_{iz}$  od sile  $q_{iz}$ . Analogni vrijedi za čvor  $j$ . Sila koja djeluje u čvorovima je jednaka zbroju svih sila koje djeluju u štapovima koji su povezani u tom čvoru.



slika 1: Skica općeg položaja štapa u kartezijevom prostornom koordinatnom sustavu za izvod općeg izraza krutosti štapova

Iz kombinacije izraza Hookeovog zakona linearno elastične veze deformacije i naprezanja (izraz 1), izraza za normalno naprezanje (izraz 2) te izraza za deformaciju, dobiva se izraz odnosa sile i pomaka (izraz 4).

$$\sigma = E * \varepsilon \tag{1}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3)$$

$$F = \frac{E * A}{L} * \Delta L \quad (4)$$

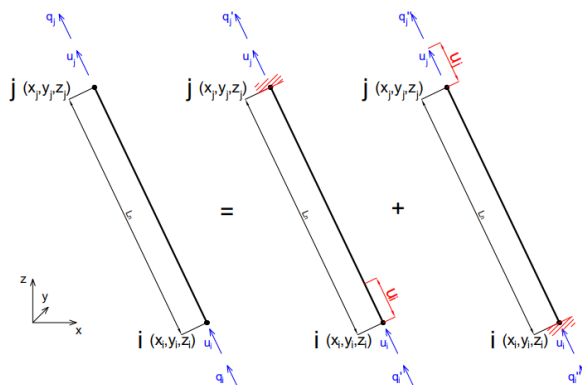
$\Delta L$  predstavlja promjenu duljine štapa pa samim time i pomak u čvorova. S toga se izraz 4 može zapisati u obliku izraza 5.

$$F = \frac{E * A}{L} * u \quad (5)$$

U izrazu 5, omjer umnoška modula elastičnosti  $E$  i površine poprečnog presjeka  $A$  te duljine štapa  $L$  predstavlja krutost štapa  $K$ . Prema tome, izraz 5 se može zapisati u obliku izraza 6 uz zapis  $F = q$ .

$$q = K * u \quad (6)$$

Prema slici 2, promatrajući čvor  $i$ , u njemu djeluje aksijalna sila  $q_i'$  te pri tom stvara deformaciju  $u_i$  (izraz 7) i reakciju  $q_j'$  u čvoru  $j$  (izraz 8). Prema tome, uzimajući u obzir izraz 6, vrijedi izraz 7 i izraz 8.



slika 2: Shematski prikaz izvoda izraza odnosa sile, produljenja i krutosti štapa

$$q_i' = \frac{E * A}{L} * u_i \quad (7)$$

$$q'_j = -\frac{E * A}{L} * u_i \quad (8)$$

Analogno tome, također prema slici 2, promatrajući čvor  $j$ , u njemu djeluje aksijalna sila  $q_j''$  te pri tom stvara deformaciju  $u_j$  (izraz 9) i reakciju  $q_i''$  u čvoru  $i$  (izraz 10). Prema tome, uzimajući u obzir izraz 6, vrijedi izraz 9 i izraz 10.

$$q_j'' = \frac{E * A}{L} * u_j \quad (9)$$

$$q_i'' = -\frac{E * A}{L} * u_j \quad (10)$$

Tako je ukupna sila u čvoru  $i$  je definirana izrazom 11, a ukupna sila u čvoru  $j$  je definirana izrazom 12.

$$q_i = q'_i + q_i'' \quad (11)$$

$$q_j = q'_j + q_j'' \quad (12)$$

Izraz 11 i izraz 12, s obzirom na izraze 9 i 10, se mogu zapisati općim matičnim izrazom odnosa sile i deformacije kako je prikazano u izrazu 13.

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E * A}{L} & -\frac{E * A}{L} \\ -\frac{E * A}{L} & \frac{E * A}{L} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Odnosno, izraz 13 se može zapisati u obliku izraza 14.

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = \frac{E * A}{L} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Pošto na čvor djeluje više sila zbog povezanosti više prostorno položenih štapova, smjer pomaka čvora će biti u smjeru rezultante tih sila. Kako bi se odredio pomak čvora po smjeru glavnih koordinatnih osi, potrebno je odrediti x, y, z komponente

sile u svakom štapu. Iz poznatih koordinata čvorova štapa, osim duljina štapova prema izrazu 15, poznati su i kutovi između štapa i osi koordinatnog sustava. Veličine tih kutova se mogu zapisati prema izrazima 16, 17 i 18.

$$L_n = \sqrt{(x_i - x_j)_n^2 + (y_i - y_j)_n^2 + (z_i - z_j)_n^2} \quad (15)$$

$$\lambda_x = \cos(\theta_x) = \frac{x_i - x_j}{L} \quad (16)$$

$$\lambda_y = \cos(\theta_y) = \frac{y_i - y_j}{L} \quad (17)$$

$$\lambda_z = \cos(\theta_z) = \frac{z_i - z_j}{L} \quad (18)$$

Prema tome, ukupan pomak čvora definiran je izrazom 19, a ukupan pomak čvora definiran je izrazom 20.

$$u_i = u_{ix} * \lambda_x + u_{iy} * \lambda_y + u_{iz} * \lambda_z \quad (19)$$

$$u_j = u_{jx} * \lambda_x + u_{jy} * \lambda_y + u_{jz} * \lambda_z \quad (20)$$

Izraz 19 i izraz 20 se matrično mogu zapisati zajedno kako je prikazano u izrazu 21.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{jz} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Analogno izrazima za komponente pomaka čvorova u ovisnosti o kutovima štapa i glavnih osi se mogu zapisati i izrazi za komponente sila u čvorovima. S toga vrijede sljedeći izrazi: izraz 22, izraz, 23, izraz 24, izraz 25, izraz 26 i izraz 27.

$$q_{ix} = q_i * \lambda_x \quad (22)$$



$$q_{iy} = q_i * \lambda_y \quad (23)$$

$$q_{iz} = q_i * \lambda_z \quad (24)$$

$$q_{jx} = q_j * \lambda_x \quad (25)$$

$$q_{jy} = q_j * \lambda_y \quad (26)$$

$$q_{jz} = q_j * \lambda_z \quad (27)$$

Izraz 22, izraz 23, izraz 24, izraz 25, izraz 26 i izraz 27 zajedno su u matričnom obliku zapisani u izrazu 28.

$$\begin{Bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{iz} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ \lambda_z & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \\ 0 & \lambda_z \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Uvrstivši izraz 21 i izraz 28 u izraz 14, dobiva se ukupni izraz 29 odnosa sile u čvorovima, pomaka čvorova te krutosti štapova.

$$\begin{Bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{iz} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{jz} \end{Bmatrix} = \frac{E * A}{L} * \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x * \lambda_y & \lambda_x * \lambda_z & -\lambda_x^2 & -\lambda_x * \lambda_y & -\lambda_x * \lambda_z \\ \lambda_y * \lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y * \lambda_z & -\lambda_y * \lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y * \lambda_z \\ \lambda_z * \lambda_x & \lambda_z * \lambda_y & \lambda_z^2 & -\lambda_z * \lambda_x & -\lambda_z * \lambda_y & -\lambda_z^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x * \lambda_y & -\lambda_x * \lambda_z & \lambda_x^2 & \lambda_x * \lambda_y & \lambda_x * \lambda_z \\ -\lambda_y * \lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y * \lambda_z & \lambda_y * \lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y * \lambda_z \\ -\lambda_z * \lambda_x & -\lambda_z * \lambda_y & -\lambda_z^2 & \lambda_z * \lambda_x & \lambda_z * \lambda_y & \lambda_z^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{jz} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Iz izraza 29 se može izdvojiti dio koji predstavlja krutost štapa  $n$ . Krutost štapa je definirana u izrazu 30.

$$K_n = \frac{E_n * A_n}{L_n} * \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x * \lambda_y & \lambda_x * \lambda_z & -\lambda_x^2 & -\lambda_x * \lambda_y & -\lambda_x * \lambda_z \\ \lambda_y * \lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y * \lambda_z & -\lambda_y * \lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y * \lambda_z \\ \lambda_z * \lambda_x & \lambda_z * \lambda_y & \lambda_z^2 & -\lambda_z * \lambda_x & -\lambda_z * \lambda_y & -\lambda_z^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x * \lambda_y & -\lambda_x * \lambda_z & \lambda_x^2 & \lambda_x * \lambda_y & \lambda_x * \lambda_z \\ -\lambda_y * \lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y * \lambda_z & \lambda_y * \lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y * \lambda_z \\ -\lambda_z * \lambda_x & -\lambda_z * \lambda_y & -\lambda_z^2 & \lambda_z * \lambda_x & \lambda_z * \lambda_y & \lambda_z^2 \end{bmatrix}_n \quad (30)$$

S obzirom na način popunjavanja matrice u izrazu 30, matrica se može pojasniti na način kako je to slikovito prikazano na slici 3. Prvih 9 (3x3) članova matrice označavaju početni čvor štapa, to jest točku i, a zadnjih 9 (3x3) članova označavaju krajnji čvor štapa, to jest točku j. ostali elementi označavaju između kojih čvorova, to jest točaka se štapa n nalazi. Ovakav način promatranja matrice krutosti će biti potrebno kod raspisivanja matrice krutosti rešetke. Na slici 3  $i_x, i_y, i_z, j_x, j_y, j_z$  predstavljaju lokalne koordinatne osi u čvorovima i i j.

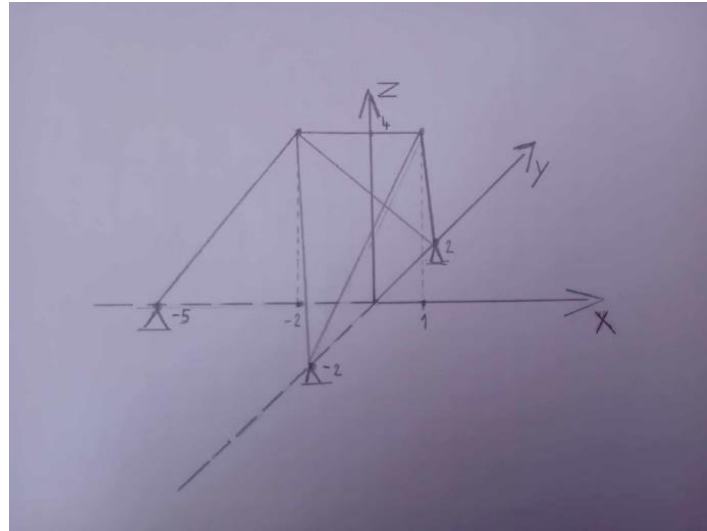
i			j			
$i_x$	$i_y$	$i_z$	$j_x$	$j_y$	$j_z$	
$\lambda_x^2$	$\lambda_x * \lambda_y$	$\lambda_x * \lambda_z$	$-\lambda_x^2$	$-\lambda_x * \lambda_y$	$-\lambda_x * \lambda_z$	$i_x$
$\lambda_y * \lambda_x$	$\lambda_y^2$	$\lambda_y * \lambda_z$	$-\lambda_y * \lambda_x$	$-\lambda_y^2$	$-\lambda_y * \lambda_z$	$i_y$ i
$\lambda_z * \lambda_x$	$\lambda_z * \lambda_y$	$\lambda_z^2$	$-\lambda_z * \lambda_x$	$-\lambda_z * \lambda_y$	$-\lambda_z^2$	$i_z$
$-\lambda_x^2$	$-\lambda_x * \lambda_y$	$-\lambda_x * \lambda_z$	$\lambda_x^2$	$\lambda_x * \lambda_y$	$\lambda_x * \lambda_z$	$j_x$
$-\lambda_y * \lambda_x$	$-\lambda_y^2$	$-\lambda_y * \lambda_z$	$\lambda_y * \lambda_x$	$\lambda_y^2$	$\lambda_y * \lambda_z$	$j_y$ j
$-\lambda_z * \lambda_x$	$-\lambda_z * \lambda_y$	$-\lambda_z^2$	$\lambda_z * \lambda_x$	$\lambda_z * \lambda_y$	$\lambda_z^2$	$j_z$

slika 3: Slikoviti prikaz i pojašnjenja elemenata matrice krutosti štapa

Ovisno o tome, između kojih čvorova se nalazi koji štapa te o tome u koje čvorove su povezani koji štapovi, preko matrice krutosti štapova, dobiva se ukupna matrica krutosti rešetke kojom se na osnovu međudjelovanja štapova preko čvorova dobivaju pomaci čvorova i sile u njima. S obzirom da svaki čvor u prostornom koordinatnom sustavu ima tri glavne osi pomaka (x, y i z), matrica krutosti rešetke će biti veličine tri puta veće od broja čvorova, to jest imat će tri puta više redova i tri puta više stupaca od broja čvorova. S toga je potrebno prije svega numerirati štapove (n), čvorove (i, j) te smjerove pomaka čvorova ( $u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}, u_{jx}, u_{jy}, u_{jz}$ ). i sila u njima ( $q_{ix}, q_{iy}, q_{iz}, q_{jx}, q_{jy}, q_{jz}$ ). Način primjene ove metode uz objašnjenja je prikazan i proveden u nastavku.

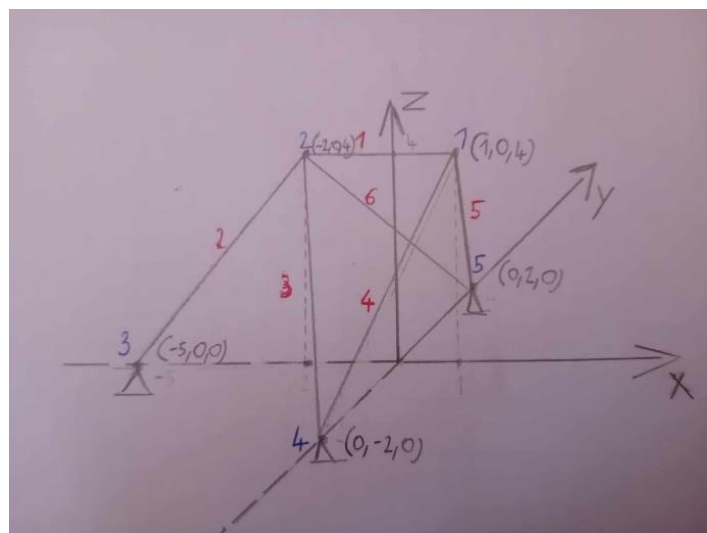
## 2. POSTUPAK PRIMJENE IZVEDENIH JEDNADŽBI

Prikaz postupka primjene matrice analize rešetkastog nosača provest će se po prostornoj rešetci prikazanoj na slici 4.



slika 4: Oblik rešetkastog nosača

Prvi korak je numeracija štapova i čvorova te određivanje koordinata čvorova. Kako je prikazano na slici 5.



slika 5: Rešetkasti nosač sa definiranim koordinatama čvorova i numeracijom čvorova i štapova

Sada je za svaki štap potrebno odrediti njegovu duljinu prema izrazu 15. Duljina štapa  $n=1$  izračunata je u izrazu 31. S obzirom na smjer glavnih osi koordinatnog sustava, čvor 2 odgovara čvoru  $i$ , a čvor 1 odgovara čvoru  $j$  od štapa 1.

$$L_1 = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = 3 \quad (31)$$

Duljina štapa  $n=2$  izračunata je u izrazu 32. S obzirom na smjer glavnih osi koordinatnog sustava, čvor 3 odgovara čvoru  $i$ , a čvor 2 odgovara čvoru  $j$  od štapa 2.

$$L_2 = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 5 \quad (32)$$

Duljina štapa  $n=3$  izračunata je u izrazu 33. S obzirom na smjer glavnih osi koordinatnog sustava, čvor 4 odgovara čvoru  $i$ , a čvor 2 odgovara čvoru  $j$  od štapa 3.

$$L_3 = \sqrt{(0 + 2)^2 + (-2 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 4,9 \quad (33)$$

Duljina štapa  $n=4$  izračunata je u izrazu 34. S obzirom na smjer glavnih osi koordinatnog sustava, čvor 4 odgovara čvoru  $i$ , a čvor 1 odgovara čvoru  $j$  od štapa 4.

$$L_4 = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-2 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 4,58 \quad (34)$$

Duljina štapa  $n=5$  izračunata je u izrazu 35. S obzirom na smjer glavnih osi koordinatnog sustava, čvor 5 odgovara čvoru  $i$ , a čvor 1 odgovara čvoru  $j$  od štapa 5.

$$L_5 = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 4,58 \quad (35)$$

Duljina štapa  $n=6$  izračunata je u izrazu 36. S obzirom na smjer glavnih osi koordinatnog sustava, čvor 5 odgovara čvoru  $i$ , a čvor 2 odgovara čvoru  $j$  od štapa 6.

$$L_6 = \sqrt{(0 + 2)^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 4,9 \quad (36)$$

Nakon izračunatih duljina štapova i poznatih čvorova potrebno je odrediti kutove koje štapovi zatvaraju u odnosu na glavne osi ( $x$ ,  $y$  i  $z$ ) koordinatnog sustava. To se

provodi prema izrazima 16, 17 i 18. Rezultati izračuna za analiziranu rešetku su prikazani u tablici 1.

Tablica 1: Rezultati kosinusa kutova položaja štapova u odnosu na glavne osi koordinatnog sustava

štap	duljina	kosinusi kutova		
n	Ln	$\lambda_x$	$\lambda_y$	$\lambda_z$
1	3,00	-1,00	0,00	0,00
2	5,00	-0,60	0,00	-0,80
3	4,90	0,41	-0,41	-0,82
4	4,58	-0,22	-0,44	-0,87
5	4,58	-0,22	0,44	-0,87
6	4,90	0,41	0,41	-0,82

Sada se prema izrazu 30 može odrediti krutost svakog štapa. Radi lakšeg proračun, uzeto je da je krutost presjeka  $A \cdot E$  za svaki štap jednaka 1. Izračun krutosti štapa  $n=1$  prikazan je u izrazu 37, a rezultat tog izračuna je prikazan u izrazu 38.

$$K_1 = \frac{1}{3} * \begin{bmatrix} (-1)^2 & -1 * 0 & -1 * 0 & -(-1)^2 & -(-1) * 0 & -(-1) * 0 \\ 0 * (-1) & 0^2 & 0 * 0 & -0 * (-1) & -0^2 & -0 * 0 \\ 0 * (-1) & 0 * 0 & 0^2 & -0 * 0 & -0 * 0 & -0^2 \\ -(-1)^2 & -(-1) * 0 & -(-1) * 0 & (-1)^2 & -1 * 0 & -1 * 0 \\ 0 * (-1) & -0^2 & -0 * 0 & 0 * (-1) & 0^2 & 0 * 0 \\ 0 * (-1) & -0 * 0 & -0^2 & 0 * (-1) & 0 * 0 & 00^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$K_1 = \frac{1}{3} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Prema matrici iz izraza 38 može se primijetiti da su skoro svi članovi matrice nule osim na poziciji koje opisuju vrijednost  $\lambda_x$ , to jest vrijednost kosinusa kuta koji zatvara štap sa osi x. Pošto ta vrijednost kosinusa kuta iznosi 1, to znači da je štap paralelan sa osi x, što je i vidljivo sa modela rešetke na slici. Konačna matrica krutosti štapa 1 prikazana je u izrazu 39.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0,333 & 0 & 0 & -0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,333 & 0 & 0 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Analogno postupku izračunavanja matrice krutosti šapa 1 izračunate su i vrijednosti matrica krutosti ostalih šapova. Matrica krutosti šapa n=2 prikazana je u izrazu 40.

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,021 & 0,042 & -0,01 & -0,021 & -0,042 \\ 0,021 & 0,042 & 0,083 & -0,021 & -0,042 & -0,083 \\ 0,042 & 0,083 & 0,166 & -0,042 & -0,083 & -0,166 \\ -0,01 & -0,021 & -0,042 & 0,01 & 0,021 & 0,042 \\ -0,021 & -0,042 & -0,083 & 0,021 & 0,042 & 0,083 \\ -0,042 & -0,083 & -0,166 & 0,042 & 0,083 & 0,166 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Matrica krutosti šapa n=3 prikazana je u izrazu 41.

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0,01 & -0,021 & 0,042 & -0,01 & 0,021 & -0,042 \\ -0,021 & 0,042 & -0,083 & 0,021 & -0,042 & 0,083 \\ 0,042 & -0,083 & 0,166 & -0,042 & 0,083 & -0,166 \\ -0,01 & 0,021 & -0,042 & 0,01 & -0,021 & 0,042 \\ 0,021 & -0,042 & 0,083 & -0,021 & 0,042 & -0,083 \\ -0,042 & 0,083 & -0,166 & 0,042 & -0,083 & 0,166 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Matrica krutosti šapa n=4 prikazana je u izrazu 42.

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0,034 & -0,034 & -0,068 & -0,034 & 0,034 & 0,068 \\ -0,034 & 0,034 & 0,068 & 0,034 & -0,034 & -0,068 \\ -0,068 & 0,068 & 0,136 & 0,068 & -0,068 & -0,136 \\ -0,034 & 0,034 & 0,068 & 0,034 & -0,034 & -0,068 \\ 0,034 & -0,034 & -0,068 & -0,034 & 0,034 & 0,068 \\ 0,068 & -0,068 & -0,136 & -0,068 & 0,068 & 0,136 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Matrica krutosti šapa n=5 prikazana je u izrazu 43.

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0,034 & 0,034 & -0,068 & -0,034 & -0,034 & 0,068 \\ 0,034 & 0,034 & -0,068 & -0,034 & -0,034 & 0,068 \\ -0,068 & -0,068 & 0,136 & 0,068 & 0,068 & -0,136 \\ -0,034 & -0,034 & 0,068 & 0,034 & 0,034 & -0,068 \\ -0,034 & -0,034 & 0,068 & 0,034 & 0,034 & -0,068 \\ 0,068 & 0,068 & -0,136 & -0,068 & -0,068 & 0,136 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Matrica krutosti štapu  $n=6$  prikazana je u izrazu 44.

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0,72 & 0 & 0,096 & -0,72 & 0 & -0,096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,096 & 0 & 0,128 & -0,096 & 0 & -0,128 \\ -0,72 & 0 & -0,096 & 0,72 & 0 & 0,096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,096 & 0 & -0,128 & 0,096 & 0 & 0,128 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Nakon izračunatih matrica krutosti štapova, potrebno je na osnovu modela rešetke i lokalnih koordinata čvorova postaviti matricu krutosti rešetke. Rješenje dobivene matrice te slikovito pojašnjenje je prikazano na slici 6.

čvor 1			čvor 2			čvor 3			čvor 4			čvor 5		
1x	1y	1z	2x	2y	2z	3x	3y	3z	4x	4y	4z	5x	5y	5z
0.354	0	0.083	-0.333	0	0	0	0	0	-0.01	-0.021	-0.042	-0.01	0.021	-0.042
0	0.083	0	0	0	0	0	0	0	-0.021	-0.042	-0.083	0.021	-0.042	0.083
0.083	0	0.333	0	0	0	0	0	0	-0.042	-0.083	-0.166	-0.042	0.083	-0.166
-0.333	0	0	0.473	0	-0.04	-0.072	0	-0.096	-0.034	0.034	0.068	-0.034	-0.034	0.068
0	0	0	0	0.068	0	0	0	0	0.034	-0.034	-0.068	-0.034	-0.034	0.068
0	0	0	-0.04	0	0.4	-0.096	0	-0.128	0.068	-0.068	-0.136	0.068	0.068	-0.136
0	0	0	-0.072	0	-0.096	0.072	0	0.096	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.096	0	-0.128	0.096	0	0.128	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.021	-0.042	-0.034	0.034	0.068	0	0	0	0.044	-0.013	-0.026	0	0	0
-0.021	-0.042	-0.083	0.034	-0.034	-0.068	0	0	0	-0.013	0.076	0.151	0	0	0
-0.042	-0.083	-0.166	0.068	-0.068	-0.136	0	0	0	-0.026	0.151	0.302	0	0	0
-0.01	0.021	-0.042	-0.034	-0.034	0.068	0	0	0	0	0	0	0.044	0.013	-0.026
0.021	-0.042	0.083	-0.034	-0.034	0.068	0	0	0	0	0	0	0.013	0.076	-0.151
-0.042	0.083	-0.166	0.068	0.068	-0.136	0	0	0	0	0	0	-0.026	-0.151	0.302

slika 6: Rezultati matrice krutosti rešetke s pojašnjenjima elemenata matrice

Kao što se vidi, dijagonalni članovi (označeni zelenim okvirom) predstavljaju zbroj svih članova matrica krutosti onih štapova koji se spajaju u iste čvorove, a ostali članovi matrice krutosti rešetke se odnose na zbroj članova matrice krutosti štapova koji se nalaze između određenih čvorova. S obzirom da su pomaci u osloncima, to jest u čvorovima 3, 4, 5 spriječeni, kako je prikazano u izrazu 45, u svim trima smjerovima, a s obzirom na izraz 29 odnosa sile, pomaka i krutosti, konačni oblik matrice krutosti rešetke s osloncima  $K_u$  izgleda kako je prikazano na slici.

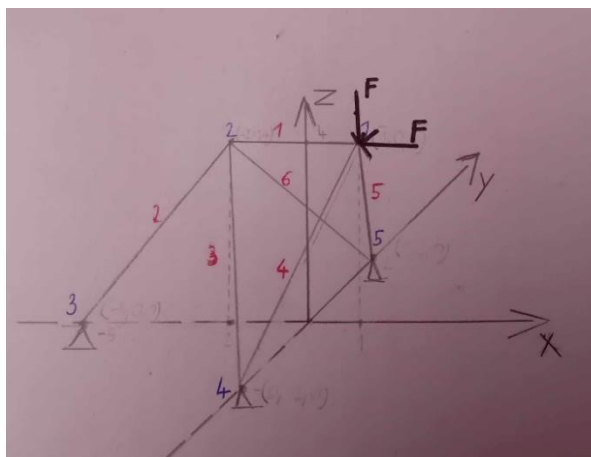
$$\begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{3z} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{4z} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \\ u_{5z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	0.354	0	0.083	-0.333	0	0	0	0	0	-0.01	-0.021	-0.042	-0.01	0.021	-0.042
	0	0.083	0	0	0	0	0	0	0	-0.021	-0.042	-0.083	0.021	-0.042	0.083
	0.083	0	0.333	0	0	0	0	0	0	-0.042	-0.083	-0.166	-0.042	0.083	-0.166
	-0.333	0	0	0.473	0	-0.04	-0.072	0	-0.096	-0.034	0.034	0.068	-0.034	-0.034	0.068
	0	0	0	0	0.068	0	0	0	0	0.034	-0.034	-0.068	-0.034	-0.034	0.068
	0	0	0	-0.04	0	0.4	-0.096	0	-0.128	0.068	-0.068	-0.136	0.068	0.068	-0.136
Ku =	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

slika 7: Rješenje matrice krutosti rešetke sa reakcijama u osloncima

Množenjem matrice krutosti rešetke  $K_n$  sa poznatim (zadanim) vanjskim opterećenjima na rešetku u čvorovima u smjeru prema glavnim osima kako je to prikazano u izrazu 29 (s matricom krutosti štapa, a analogno vrijedi za rešetku), dobivaju se ukupni pomaci u čvorovima. Za potrebe izračuna, postaviti će se opterećenja kako je prikazano na slici. Opterećenja djeluju u čvoru 1 u pravcu osi x, suprotno smjeru osi x te u pravcu osi y suprotno smjeru osi y. Sila F neka iznosi 10 Kn.





slika 8: Rešetkasti nosač s opterećenjem

Ostale sile u čvorovima u glavnim smjerovima (x, y, z) iznose nula (0). Prema tome, matrica opterećenja ovog slučaja ima oblik prikazanom izrazom 47.

$$\begin{Bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \\ q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \\ q_{3x} \\ q_{3y} \\ q_{3z} \\ q_{4x} \\ q_{4y} \\ q_{4z} \\ q_{5x} \\ q_{5y} \\ q_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Izrazom 47 izračunavaju se pomaci u čvorovima.

$$\begin{Bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \\ q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \\ q_{3x} \\ q_{3y} \\ q_{3z} \\ q_{4x} \\ q_{4y} \\ q_{4z} \\ q_{5x} \\ q_{5y} \\ q_{5z} \end{Bmatrix} * Kn^{-1} = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{3z} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{4z} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \\ u_{5z} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Rješenje te jednačbe, to jest iznosi pomaka prikazani su u izrazu 49.

$$\begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} * Ku^{-1} = \begin{Bmatrix} -77.636 \\ 0 \\ -10.664 \\ -55.136 \\ 0 \\ -5.523 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Množenjem pomaka i matrice krutosti s uračunatim smjerovima reakcije, dobivaju se ukupne sile u svim čvorovima rešetke. To se provodi prema izrazu 49.

$$\begin{Bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \\ q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \\ q_{3x} \\ q_{3y} \\ q_{3z} \\ q_{4x} \\ q_{4y} \\ q_{4z} \\ q_{5x} \\ q_{5y} \\ q_{5z} \end{Bmatrix} = Ku0 * \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{3z} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{4z} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \\ u_{5z} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Rješenje jednadžbe je prikazano u izrazu 51.

$$\begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 0 \\ 6 \\ 2.75 \\ 1 \\ 2 \\ 2.75 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} = Ku0 * \begin{Bmatrix} -77.636 \\ 0 \\ -10.664 \\ -55.136 \\ 0 \\ -5.523 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Ovim izrazom su dobivene i reakcije u osloncima i to prema glavnim osima kao je prikazano u izrazu 52.

$$\begin{pmatrix} R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{3z} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{4z} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \\ R_{5z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 6 \\ 2.75 \\ 1 \\ 2 \\ 2.75 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

S obzirom na poznate sile u čvorovima te poznate koordinate čvorova, odnosno smjerova štapova, mogu se izračunati i uzdužne sile u njima kako je to prikazano u izrazu 53.

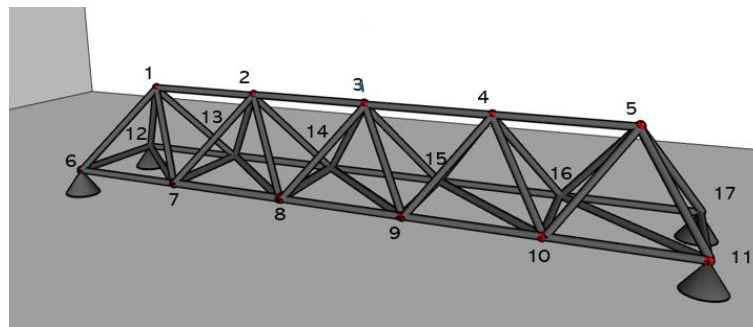
$$S_e = \frac{E_e * A_e}{L_e} * [\lambda_{x,e} \quad \lambda_{y,e} \quad \lambda_{z,e} \quad -\lambda_{x,e} \quad -\lambda_{y,e} \quad -\lambda_{z,e}] * \begin{pmatrix} u_{e,ix} \\ u_{e,iy} \\ u_{e,iz} \\ u_{e,jx} \\ u_{e,iy} \\ u_{e,iz} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Rezultati izraza 52 su sile u štapovima, a njihove vrijednosti su prikazane u izrazu 54.

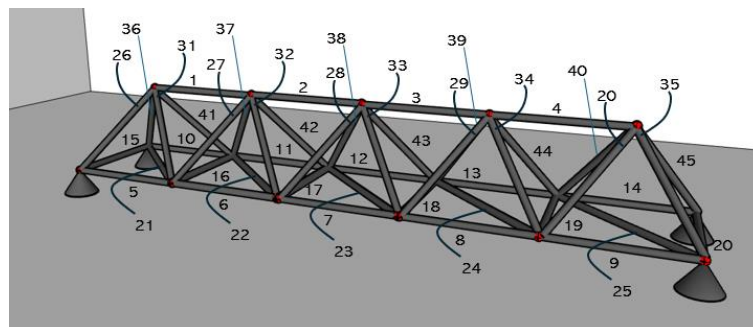
$$S_e = \begin{pmatrix} -7,5 \\ -5,7 \\ 3,7 \\ 3,7 \\ -7,5 \end{pmatrix} \quad (53)$$

### 3. RAČUNALN MATRIČNA ANALIZA REŠETKE

U ovom poglavlju obrađena je analiza rešetkastog nosača geometrije i numeracije čvorova (slika 9) i štapova (slika 10). Analiza je provedena u programu Mathcad 14 postupkom provedenom u poglavlju 2 ovog rada.



Slika 9: Prikaz modela rešetkastog nosača sa numeriranim čvorovima



Slika 10: Prikaz modela rešetkastog nosača sa numeriranim štapovima

Ukupna duljina cijelog nosača iznosi 10 m. Kao što se vidi na prethodnoj slici, nosač se može podijeliti na elemente u obliku piramida. Ukoliko je broj elemenata (piramida)  $n=5$ , duljina elementa iznosi  $\Delta x = 2$ . Širina elementa, a samim time i nosača iznosi  $\Delta y = 4$ , a visina  $\Delta y = 4$ . to je u programu Mathcadu zapisao na način kako je to prikazano na slici 11.

### 1. Geometrijske karakteristike

- duljina nosača:  $L := 10$
- broj elemenata:  $n := 5$
- duljina elementa:  $\Delta x := \frac{L}{n} = 2$
- širina elementa (nosača):  $\Delta y := 4$
- visina elementa (nosača):  $\Delta z := 4$

Slika 11: Izrazi za definiranje geometrijskih karakteristika štapova te same geometrije rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Oblik izraza za izračun broja čvorova i broja štapova prikazan je na slici 12.

### 2. Broj čvorova i štapova

- broj čvorova:  $n_{cv} := 3 \cdot (n + 1) - 1 = 17$
- broj štapova:  $n_{st} := 10n - n = 45$

Slika 12: Izrazi za definiranje broja čvorova i štapova zadanog modela rešetkaste konstrukcije (Mathcad 15)

S obzirom da su poznate dimenzije elementa, moguće je definirati izraz za određivanje koordinata čvorova. To je može provesti u matičnom obliku čiji zapis je prikazan na slici 13.

```

cv := | for i ∈ 1..n
      | a1,i ← (i·Δx - Δx) +  $\frac{\Delta x}{2}$ 
      | a2,i ←  $\frac{\Delta y}{2}$ 
      | a3,i ← Δz
      | for i ∈ 1..n + 1
      | b1,i ← i·Δx - Δx
      | b2,i ← 0
      | b3,i ← 0
      | for i ∈ 1..n + 1
      | c1,i ← i·Δx - Δx
      | c2,i ← Δy
      | c3,i ← 0
      | augment(a,b,c)

```

Slika 13: Matrični zapis definiranja koordinata čvorova te numeracije čvorova (Mathcad 15)

Rezultat tog zapisa je prikazan u obliku matrice na slici 14. Svaki stupac se odnosi na numerirani čvor rešetke, dok je prvi redak x, drugi redak y, a treći redak je z koordinata tok čvora.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
cv =	1	3	5	7	9	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
	3	4	4	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Slika 14: Matrica definiranja koordinata čvorova te numeracije čvorova (Mathcad 15)

Na osnovu geometrije rešetke i numeraciju čvorova i štapova, može se raspisati izraz za definiranje toga koji štapovi se spajaju na koje čvorove. To je definirano matričnim zapisom na način kako je prikazano na slici 15.

```

vz :=
for i ∈ 1..n - 1
| a1,i ← i
| a2,i ← i + 1
for i ∈ 1..n
| b1,i ← i + n
| b2,i ← i + n + 1
for i ∈ 1..n
| c1,i ← i + 2n + 1
| c2,i ← i + 2n + 2
for i ∈ 1..n + 1
| d1,i ← i + n
| d2,i ← i + 2n + 1
for i ∈ 1..n
| e1,i ← i + n + 1
| e2,i ← i + 2n + 1
for i ∈ 1..n
| f1,i ← i
| f2,i ← i + n
for i ∈ 1..n
| g1,i ← i
| g2,i ← i + 2n + 1
for i ∈ 1..n
| h1,i ← i
| h2,i ← i + n + 1
for i ∈ 1..n
| j1,i ← i
| j2,i ← i + 2n + 2
augment(a,b,c,d,e,f,g,h,j)

```

Slika 15: Matrični zapis definiranja numeracije štapova ovisno o tome između kojih čvorova se nalaze (Mathcad 15)

Rješenje ovako raspisanog izraza za matricu je matrica prikazana na slici 16. Broj stupca odgovara numeriranom broju štapa, dok prvi redak odgovara početnom čvoru, to jest točki i štapa, a drugi redak odgovara krajnjem čvoru, to jest točki j štapa.



	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	6	7
6	7	8
7	8	9
8	9	10
9	10	11
10	12	13
11	13	14
12	14	15
13	15	16
14	16	17
15	6	12
16	7	13
17	8	14
18	9	15
19	10	16
20	11	17
21	7	12
22	8	13
23	9	14
24	10	15
25	11	16
26	1	6
27	2	7
28	3	8
29	4	9
30	5	10
31	1	12
32	2	13
33	3	14
34	4	15
35	5	16
36	1	7
37	2	8
38	3	9
39	4	10
40	5	11
41	1	13
42	2	14
43	3	15
44	4	16
45	5	17

$vz^T =$

Slika 16: Matrica definiranja numeracije štapova ovisno o tome između kojih čvorova se nalaze (Mathcad 15)

Kako je u većini slučajeva rešetkasi nosač sastavljan od štapova istog materijala te istog porpečnog presjeka i u ovom slučaju će se uzeti takošer da je krustos svih štapova jednaka de da iznosi 10000. To je matrično zapisao u obliku prikazanom na slici 17.

$$EA := \begin{cases} \text{for } e \in 1..n_{st} \\ \quad mt_e \leftarrow 1000 \\ \quad mt \end{cases}$$

Slika 17: Matrični zapis definiranja krutosti presjeka štapova (Mathcad 15)

Rezultat tog izraza je matrica u kojoj redni broj reda odgovara numeriranom broju štap, a stupac odgovara krutosti tog štapa. Oslonci rešetke su nepomični u svim smjerovima te su smješteni na krajnjim točkama nosača (kako je prethodno prikazano na slici 18). Izraz kojim se može definirati navedeni uvjeti nepomičnosti i položaja je prikazan matrični zapisom na slici.

$$os := \begin{pmatrix} n + 1 & 2n + 1 & 2n + 2 & n_{cv} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 18: Definiranje matrice numeriranih čvorova oslonaca te definiranje slobode pomaka u njima prema glavnih osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Rezultat tog zapisa je prikazan na slici 19. Svaki stupac i prvi redak odgovara čvoru na kojem se nalazi oslonac. Drugi, treći i četvrti redak definiraju ako je spriječen pomak u osloncu prema glavnim x, y, z osima. Ukoliko je vrijednost nula (0) pomak je spriječen, a ako je vrijednost jedan (1) pomak nije spriječen. Drugi redak odgovara reakciji u smjeru osi x, treći redak osi y, a četvrti redak osi z.

$$os = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 19: Matrica numeriranih čvorova oslonaca te definiranje slobode pomaka u njima prema glavnih osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Za prikaz rešetkastog modela u koordinatnom sustavu koriste se podaci koordinata čvorova iz matrice čvorova te numeracija štapova iz matrice veza čvorova. Opći matrični izraz zapisa x, y i z koordinata svih čvorova rešetke ima oblika kako je prikazano na slici 20.

$$x_{st}(i) := \begin{pmatrix} cv_{1,vz1,i} \\ cv_{1,vz2,i} \\ cv_{1,vz1,i} \end{pmatrix} \quad y_{st}(i) := \begin{pmatrix} cv_{2,vz1,i} \\ cv_{2,vz2,i} \\ cv_{2,vz1,i} \end{pmatrix} \quad z_{st}(i) := \begin{pmatrix} cv_{3,vz1,i} \\ cv_{3,vz2,i} \\ cv_{3,vz1,i} \end{pmatrix}$$

Slika 20: Matrični zapisi za definiranje koordinata čvorova (Mathcad 15)

Kako bi se prikazale koordinate svih čvorova te veze među njima u obliku dužina koje predstavljaju štapove, potrebno je članove matrice prema slici 20 zapisa u jednu matricu iz koje se uzimaju podaci za grafički prikaz u koordinatnom sustavu. Način takvog zapisivanja matrice x, y i z koordinata prikazan je u obliku funkcija na slici 21. U tim izrazima vrijednost e se kreće od 1 do onoliko koliko rešetkasti nosač ima štapova ( $n_{st}$ ).

$$e := 1..n_{st} \quad x^{(e)} := x_{st}(e) \quad y^{(e)} := y_{st}(e) \quad z^{(e)} := z_{st}(e)$$

Slika 21: Izrazi za definiranje koordinata čvorova (Mathcad 15)

Time su dobivene 3 matrice: x koordinata, y koordinata i z koordinata krajnjih točaka štapova, to jest koordinata čvorova. Matrice su prikazane na slici 22. Broj retka matrice odgovara numeriranom broju štapova. Prvi i treći stupac definiraju koordinatu početnog  $i$ , a drugi stupac koordinatu krajnjeg  $j$  čvora štapova. Ovime je postavljen zapis za prikaz rešetkastog nosača u koordinatnom sustavu.

	1	2	3
1	1	3	1
2	3	5	3
3	5	7	5
4	7	9	7
5	0	2	0
6	2	4	2
7	4	6	4
8	6	8	6
9	8	10	8
10	0	2	0
11	2	4	2
12	4	6	4
13	6	8	6
14	8	10	8
15	0	0	0
16	2	2	2
17	4	4	4
18	6	6	6
19	8	8	8
20	10	10	10
21	2	0	2
22	4	2	4
23	6	4	6
24	8	6	8
25	10	8	10
26	1	0	1
27	3	2	3
28	5	4	5
29	7	6	7
30	9	8	9
31	1	0	1
32	3	2	3
33	5	4	5
34	7	6	7
35	9	8	9
36	1	2	1
37	3	4	3
38	5	6	5
39	7	8	7
40	9	10	9
41	1	2	1
42	3	4	3
43	5	6	5
44	7	8	7
45	9	10	9

 $x^T =$ 

	1	2	3
1	2	2	2
2	2	2	2
3	2	2	2
4	2	2	2
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	4	4	4
11	4	4	4
12	4	4	4
13	4	4	4
14	4	4	4
15	0	4	0
16	0	4	0
17	0	4	0
18	0	4	0
19	0	4	0
20	0	4	0
21	0	4	0
22	0	4	0
23	0	4	0
24	0	4	0
25	0	4	0
26	2	0	2
27	2	0	2
28	2	0	2
29	2	0	2
30	2	0	2
31	2	4	2
32	2	4	2
33	2	4	2
34	2	4	2
35	2	4	2
36	2	0	2
37	2	0	2
38	2	0	2
39	2	0	2
40	2	0	2
41	2	4	2
42	2	4	2
43	2	4	2
44	2	4	2
45	2	4	2

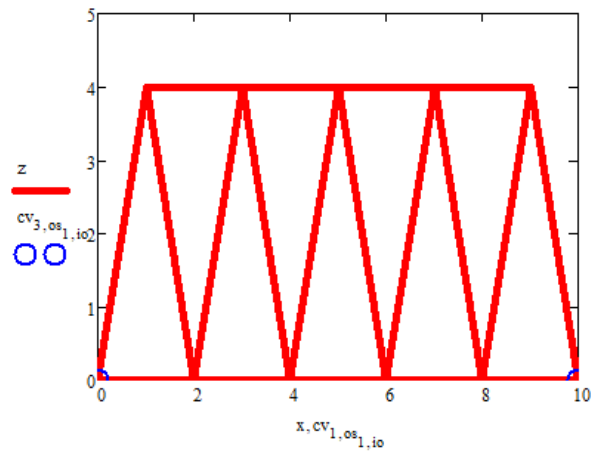
 $y^T =$ 

	1	2	3
1	4	4	4
2	4	4	4
3	4	4	4
4	4	4	4
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0
11	0	0	0
12	0	0	0
13	0	0	0
14	0	0	0
15	0	0	0
16	0	0	0
17	0	0	0
18	0	0	0
19	0	0	0
20	0	0	0
21	0	0	0
22	0	0	0
23	0	0	0
24	0	0	0
25	0	0	0
26	4	0	4
27	4	0	4
28	4	0	4
29	4	0	4
30	4	0	4
31	4	0	4
32	4	0	4
33	4	0	4
34	4	0	4
35	4	0	4
36	4	0	4
37	4	0	4
38	4	0	4
39	4	0	4
40	4	0	4
41	4	0	4
42	4	0	4
43	4	0	4
44	4	0	4
45	4	0	4

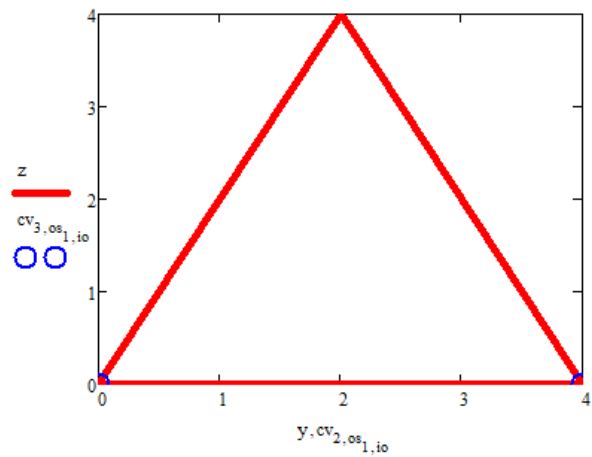
 $z^T =$ 

Slika 22: Matrice koordinata čvorova (Mathcad 15)

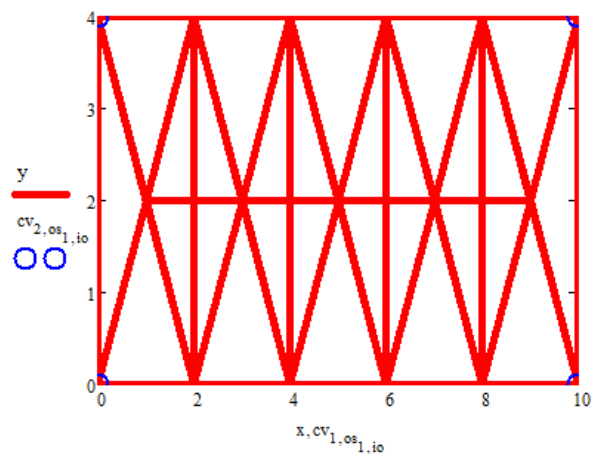
Osim prikaza rešetke, u grafu su prikazane i pozicije oslonaca prema zapisu koji je prikazan na slici (prije). Grafički prikaz nosača s osloncima je prikazan u 3 ravnine (pogleda). Na slici 23 je prikazan rešetkasti nosač u ravnini x-z (nacrtni), na slici 24 u ravnini y-z (bokocrt), a na slici 25 u ravnini x-y (tlocrt).



Slika 23: Grafički prikaz rešetkaste konstrukcije u x-z ravnini (nacrtno) (Mathcad 15)



Slika 24: Grafički prikaz rešetkaste konstrukcije u y-z ravnini (bokocrt) (Mathcad 15)



Slika 25: Grafički prikaz rešetkaste konstrukcije u x-y ravnini (tlocrtno) (Mathcad 15)

Nakon definiranih pozicija čvorova, a samim time i štapova moguće je prema izrazu 17 odrediti duljine štapova. Opći matricni zapis toga prikaza prikazan je na slici 26.

$$L_{st} := \begin{array}{l} \text{for } e \in 1..n_{st} \\ \left| \begin{array}{l} dx \leftarrow x_{1,e} - x_{2,e} \\ dy \leftarrow y_{1,e} - y_{2,e} \\ dz \leftarrow z_{1,e} - z_{2,e} \\ l_e \leftarrow \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \end{array} \right. \\ 1 \end{array}$$

Slika 26: Matrični zapis duljine štapova (Mathcad 15)

Rezultat tog zapisa je matrica duljine štapova koja je prikazan na slici 27. Prvi stupac odgovara numeraciji štapa, a stupac ispod njega predstavlja duljinu tog štapa.

	1
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2
15	4
16	4
17	4
18	4
19	4
20	4
21	4.47
22	4.47
23	4.47
24	4.47
25	4.47
26	4.58
27	4.58
28	4.58
29	4.58
30	4.58
31	4.58
32	4.58
33	4.58
34	4.58
35	4.58
36	4.58
37	4.58
38	4.58
39	4.58
40	4.58
41	4.58
42	4.58
43	4.58
44	4.58
45	4.58

Slika 27: Matrica duljine štapova (Mathcad 15)

Nakon izračunatih duljina štapova, za potrebe matrice krutosti štapova, potrebno je odrediti i kosinuse kutova koje zatvaraju štapovi u odnosu na glave osi koordinatnog sustava. To se radi raspisivanjem matrice kako je prikazano na slici 28 prema izrazu 18, izrazu 19 i izrazu 20.

$$\alpha := \left| \begin{array}{l} \text{for } e \in 1..n_{st} \\ \quad dx \leftarrow x_{1,e} - x_{2,e} \\ \quad dy \leftarrow y_{1,e} - y_{2,e} \\ \quad dz \leftarrow z_{1,e} - z_{2,e} \\ \quad f_e \leftarrow \frac{dx}{L_{st_e}} \\ \quad s_e \leftarrow \frac{dy}{L_{st_e}} \\ \quad c_e \leftarrow \frac{dz}{L_{st_e}} \\ \text{augment}(f, s, c) \end{array} \right.$$

Slika 28: Matrični zapis kosinusa kutova štapova sa glavnim osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Rezultat tog zapisa je matrica kosinusa kutova štapova kako je prikazano na slici 29. Svaki stupac odgovara numeriranom broju štapa, a redovi s lijeva na desno redom odgovaraju kosinusu kuta štapa i x koordinate, kosinusu kuta štapa i y koordinate te kosinusu kuta štapa i z koordinate.

	1	2	3
1	-1	0	0
2	-1	0	0
3	-1	0	0
4	-1	0	0
5	-1	0	0
6	-1	0	0
7	-1	0	0
8	-1	0	0
9	-1	0	0
10	-1	0	0
11	-1	0	0
12	-1	0	0
13	-1	0	0
14	-1	0	0
15	0	-1	0
16	0	-1	0
17	0	-1	0
18	0	-1	0
19	0	-1	0
20	0	-1	0
21	0.45	-0.89	0
22	0.45	-0.89	0
23	0.45	-0.89	0
24	0.45	-0.89	0
25	0.45	-0.89	0
26	0.22	0.44	0.87
27	0.22	0.44	0.87
28	0.22	0.44	0.87
29	0.22	0.44	0.87
30	0.22	0.44	0.87
31	0.22	-0.44	0.87
32	0.22	-0.44	0.87
33	0.22	-0.44	0.87
34	0.22	-0.44	0.87
35	0.22	-0.44	0.87
36	-0.22	0.44	0.87
37	-0.22	0.44	0.87
38	-0.22	0.44	0.87
39	-0.22	0.44	0.87
40	-0.22	0.44	0.87
41	-0.22	-0.44	0.87
42	-0.22	-0.44	0.87
43	-0.22	-0.44	0.87
44	-0.22	-0.44	0.87
45	-0.22	-0.44	0.87

Slika 29: Matrica kosinusa kutova štapova sa glavnim osima koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Sada je moguće, na osnovu izraza 32, zapisati opći izraz za matricu krutosti svih štapova. Taj izraz ima oblik kako je prikazano na slici 30, a rješenja tog izraza su pojedinačne matrice krutosti za svih 45 štapova (izraz 31). S obzorom na isti paralelni položaj, tj. jednak kosinus kuta spram koordinatnim osima, duljinu te krutost materijala štapa, matrice krutosti tih štapova su jednake. Štapovi ove rešetke koji zadovoljavaju te uvjete, to jest štapovi koji su po tome jednaki su štapovi od štapa 1 do štapa 14, zatim od štapa 15 do štapa 20, pa od štapa 21 do 25 te od



štapa 26 do 45. Od svake te jednakosti je na slici prikazana po jedna matrica krutosti. Prikazane su matrice krutosti štapa 1, štapa 15 te štapa 21 i štap 26.

$$k_{st(e)} := \frac{EA_e}{L_{st_e}} \cdot \begin{pmatrix} (\alpha_{e,1})^2 & \alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,2} & \alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,3} & -(\alpha_{e,1})^2 & -(\alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,2}) & -(\alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,3}) \\ \alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,1} & (\alpha_{e,2})^2 & \alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,3} & -(\alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,1}) & -(\alpha_{e,2})^2 & -(\alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,3}) \\ \alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,1} & \alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,2} & (\alpha_{e,3})^2 & -(\alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,1}) & -(\alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,2}) & -(\alpha_{e,3})^2 \\ -(\alpha_{e,1})^2 & -(\alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,2}) & -(\alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,3}) & (\alpha_{e,1})^2 & \alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,2} & \alpha_{e,1} \cdot \alpha_{e,3} \\ -(\alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,1}) & -(\alpha_{e,2})^2 & -(\alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,3}) & \alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,1} & (\alpha_{e,2})^2 & \alpha_{e,2} \cdot \alpha_{e,3} \\ -(\alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,1}) & -(\alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,2}) & -(\alpha_{e,3})^2 & \alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,1} & \alpha_{e,3} \cdot \alpha_{e,2} & (\alpha_{e,3})^2 \end{pmatrix}$$

Slika 30: Opća matrica krutosti štapova (Mathcad 15)

$$k_{st(1)} = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{st(15)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 0 & -250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -250 & 0 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{st(21)} = \begin{pmatrix} 44.72 & -89.44 & 0 & -44.72 & 89.44 & 0 \\ -89.44 & 178.89 & 0 & 89.44 & -178.89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -44.72 & 89.44 & 0 & 44.72 & -89.44 & 0 \\ 89.44 & -178.89 & 0 & -89.44 & 178.89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{st(26)} = \begin{pmatrix} 10.39 & 20.78 & 41.57 & -10.39 & -20.78 & -41.57 \\ 20.78 & 41.57 & 83.13 & -20.78 & -41.57 & -83.13 \\ 41.57 & 83.13 & 166.26 & -41.57 & -83.13 & -166.26 \\ -10.39 & -20.78 & -41.57 & 10.39 & 20.78 & 41.57 \\ -20.78 & -41.57 & -83.13 & 20.78 & 41.57 & 83.13 \\ -41.57 & -83.13 & -166.26 & 41.57 & 83.13 & 166.26 \end{pmatrix}$$

Slika 31: Karakteristične lokalne matrice krutosti štapova rešetke (Mathcad 15)

Istim postupkom kako je matrica krutosti rešetke slikovito objašnjena i raspisana na slici 6 u drugom poglavlju, tim postupkom je i zapisan opći matrični izraz matrice krutosti promatra rešetke u ovom poglavlju. Taj izrazima oblik kako je prikazano na slici 32.

```

Ku0 := | for i ∈ 1..nCV·3
        | for j ∈ 1..nCV·3
        |   Ku1,j ← 0
        | for e ∈ 1..nst
        |   for i ∈ 1..2
        |     for j ∈ 1..2
        |       ii ← i·3
        |       jj ← j·3
        |       gi ← vz1,e·3
        |       gj ← vzj,e·3
        |       Kugi,gj ← Kugi,gj + kst(e)ii,jj
        |       Kugi-1,gj ← Kugi-1,gj + kst(e)ii-1,jj
        |       Kugi-2,gj ← Kugi-2,gj + kst(e)ii-2,jj
        |       Kugi,gj-1 ← Kugi,gj-1 + kst(e)ii,jj-1
        |       Kugi,gj-2 ← Kugi,gj-2 + kst(e)ii,jj-2
        |       Kugi-1,gj-1 ← Kugi-1,gj-1 + kst(e)ii-1,jj-1
        |       Kugi-2,gj-2 ← Kugi-2,gj-2 + kst(e)ii-2,jj-2
        |       Kugi-1,gj-2 ← Kugi-1,gj-2 + kst(e)ii-1,jj-2
        |       Kugi-2,gj-1 ← Kugi-2,gj-1 + kst(e)ii-2,jj-1
        | Ku

```

Slika 32: Matrični zapis globalne matrice krutosti rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Rješenje tog zapisa je matrica krutosti rešetke prikazana na slici 33. S obzirom da je rešetka sastavljena od 17 čvorova, a kako je to već pojašnjeno u prethodnom poglavlju, broj stupaca i redova je tri puta veći o broja čvorova. S toga matrica krutosti ove rešetke ima 51 stupaca i 51 redova.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51			
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Slika 33: Globalna matrica krutosti rešetkastog nosača (Mathcad 15)

Uzevši u obzir pozicije oslonaca, odnosno smjerova pomaka koje oslonci sprječavaju, dobiva se matrica prikazana na slici 34. To se zapisuje postupkom kako je pojašnjeno na slici 7 u drugom poglavlju.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Slika 34: Matrice krutosti sa uračunatim spriječenim pomacima u osloncima (Mathcad 15)

Opći zapis izraza te matrice je prikazan na slici 35.

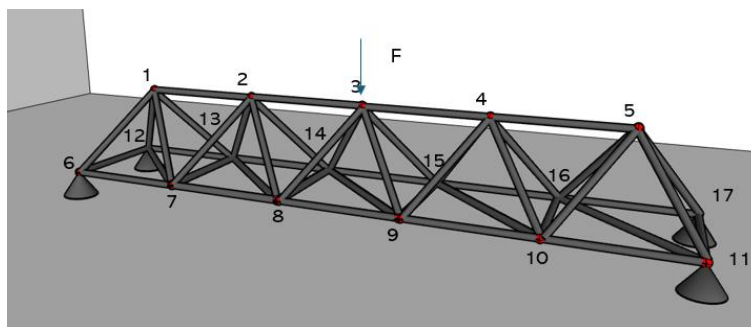
```

Ku := | Ku ← Ku0
      | "rubni uvjeti"
      | for io ∈ 1..no
      | | cv_0s ← os_1,io
      | | if os_2,io = 0
      | | | for ij ∈ 1..n_cv·3
      | | | | Ku_cv_0s-3-1,ij ← 0
      | | | | Ku_cv_0s-3-1,cv_0s-3-1 ← 1
      | | | if os_3,io = 0
      | | | | for ij ∈ 1..n_cv·3
      | | | | | Ku_cv_0s-3,ij ← 0
      | | | | | Ku_cv_0s-3,cv_0s-3 ← 1
      | | | if os_4,io = 0
      | | | | for ij ∈ 1..n_cv·3
      | | | | | Ku_cv_0s-3-2,ij ← 0
      | | | | | Ku_cv_0s-3-2,cv_0s-3-2 ← 1
      | Ku

```

Slika 35: Matrični zapis matrice krutosti sa uračunatim spriječenim pomacima u osloncima (Mathcad 15)

Ovime je definirana matrica krutosti rešetke sa osloncima. U daljnjem postupku analiziranja rešetke (pomaka čvorova, uzdužnih sila u štapovima te reakcija u osloncima) provodi se definiranje smjera djelovanja (u odnosu na smjerove glavnih koordinatnih osi) i veličine (iznosa) sila u čvorovima. Ukoliko se sila stavi u čvor 3 i da pritom djeluje suprotno od pozitivnog smjera osi z, kako je prikazano na slici 36, a da pri tom sila iznosi 10, matrični zapis takvog slučaja izgleda kako je prikazano na slici 37.



Slika 36: Prikaz modela rešetkastog nosača sa osloncima, opterećenjem i numeriranih čvorova

$$fo = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Slika 37: Matrični zapis veličine opterećenja i numeriranog čvora u kojem je opterećenje (Mathcad 15)

Prvi redak označava da sila F djeluje u čvoru 3. Svi redovi ispod redom označavaju veličinu sile u x, y i z smjeru. Tako je definirano da iznos sile iznosi 10 suprotno od pozitivnog smjera osi z. Izrazom prikazanim na slici 38 definirane su veličine svih vanjskih sila koje djeluju u svim čvorovima u smjeru glavnih koordinatnih osi.

$$nf := \text{cols}(fo) \quad nf = 1$$

$$Fo := \begin{array}{l} Fo_{n_{cv},3} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..nf \\ \quad cv_f \leftarrow fo_{1,i} \\ \quad Fo_{cv_f,3} \leftarrow fo_{4,i} \\ \quad Fo_{cv_f,3-1} \leftarrow fo_{3,i} \\ \quad Fo_{cv_f,3-2} \leftarrow fo_{2,i} \\ Fo \end{array}$$

Slika 38: Matrični zapis opterećenja u čvorovima (sila akcija) (Mathcad 15)

Rezultat tog zapisa je matrica opterećenja u čvorovima prikazan na slici 39.

	1
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	-10
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
22	0
23	0
24	0
25	0
26	0
27	0
28	0
29	0
30	0
31	0
32	0
33	0
34	0
35	0
36	0
37	0
38	0
39	0
40	0
41	0
42	0
43	0
44	0
45	0
46	0
47	0
48	0
49	0
50	0
51	0

F<sub>0</sub> =

Slika 39: Matrica opterećenja u čvorovima (sila akcija) (Mathcad 15)

Preostalo je definiranje izraza pomaka čvorova i veličina sila u čvorovima prema glavnim osi koordinatnog sustava. Opći izraz veličine pomaka je definiran prema izrazu 48 u drugo poglavlju, a njegov oblik izraza u ovom slučaju izgleda kako je prikazano na slici 40.

$$\delta := Ku^{-1} \cdot Fo$$

Slika 40: Izraz definiranja pomaka čvorova u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava  
(Mathcad 15)

Rješenje ovog izraza je matrica pomaka čvorova prikazana na slici 41. Prva tri retka definiraju smjer pomaka svakog čvora 1 u x, y i z smjeru. Iduća tri retka definiraju smjer pomaka čvora 2 u x, y i z smjeru i tako redom do zadnjeg 17. čvora rešetke.

	1
1	0.01
2	0
3	-0.02
4	0.01
5	0
6	-0.06
7	0
8	0
9	-0.09
10	-0.01
11	0
12	-0.06
13	-0.02
14	0
15	-0.02
16	0
17	0
18	0
19	-0
20	-0
21	-0.04
22	-0
23	-0
24	-0.07
25	0
26	0
27	-0.07
28	0
29	0
30	-0.04
31	0
32	0
33	0
34	0
35	0
36	0
37	-0
38	-0
39	-0.04
40	-0
41	-0
42	-0.07
43	0
44	0
45	-0.07
46	0
47	0
48	-0.04
49	0
50	0
51	0

( $\delta$ ) =

Slika 41: Matrica pomaka čvorova u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Množenjem opće matrice krutosti rešetke (matrice krutosti rešetke bez uračunatih spriječenih pomaka u osloncima) sa matricom pomaka čvorova, dobivaju se sve sile koje djeluju u čvorovima računajući i reakcije, to jest sile u osloncima. Zapis izraza kojim se to definira je prikazan na slici 42.



$$FF := Ku \cdot \delta$$

Slika 42: Izraz definiranja sila u čvorovima u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Rješenje ovog izraza je matrica sila u čvorovima koje djeluju u glavnim smjerovima koordinatnih osi x, y i z, a iz matrice se iščitavaju na način kako je to pojašnjeno za matricu pomaka čvorova. Rješenje matrice je prikazano na slici 43.

	1
1	0
2	-0
3	-0
4	-0
5	-0
6	-0
7	0
8	-0
9	-10
10	-0
11	0
12	0
13	0
14	-0
15	-0
16	1.62
17	1.25
18	2.5
19	0
20	0
21	0
22	0
23	0
24	0
25	-0
26	-0
27	-0
28	0
29	0
30	0
31	-1.62
32	1.25
33	2.5
34	1.63
35	-1.25
36	2.5
37	-0
38	0
39	-0
40	0
41	0
42	-0
43	0
44	0
45	-0
46	0
47	-0
48	0
49	-1.62
50	-1.25
51	2.5

Slika 43: Matrica sila u čvorovima u smjerovima glavnih osi koordinatnog sustava (Mathcad 15)

Za grafičko prikazivanje čvorova koristi se matrični zapis koji je prikazan na slici 44. Taj zapis uzima podatke iz matrice pomaka i svrstava ih tako da broj stupca odgovara broju numeriranog čvora, a svaki redak ispod prvog retka odgovara redom x, y i z veličini pomaka tog stupca.

$$d := \begin{cases} d_{2,n_{cv}} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n_{cv} \\ \quad \begin{cases} d_{1,i} \leftarrow \delta_{i,3-2} \\ d_{2,i} \leftarrow \delta_{i,3-1} \\ d_{3,i} \leftarrow \delta_{i,3} \end{cases} \\ d \end{cases}$$

Slika 44: Matrični zapis pomaka čvorova (Mathcad 15)

Rješenje ovog zapisa je matrica pomaka čvorova definirana numeriranim brojem čvora. Njeno rješenje je prikazano na slici 45. Iznos pomaka 0 je u smjeru u kojem je pomak spriječen u osloncu.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
d =	1	0.015	0.01	0	-0.01	-0.015	0	-0.002	-0.002	0.001	0.002	0	0	-0.002	-0.002	0.001	0.002	0
	2	0	0	0	0	0	0	-0.001	-0.001	0.001	0.001	0	0	-0.001	-0.001	0.001	0.001	0
	3	-0.019	-0.056	-0.089	-0.056	-0.019	0	-0.038	-0.074	-0.074	-0.039	0	0	-0.039	-0.074	-0.074	-0.038	0

Slika 45: Matrica pomaka čvorova (Mathcad 15)

S obzirom na početni položaj, koordinate čvorova opterećene rešetke su zadane izrazom kako je prikazano na slici 46.

$$c_{vd} := cv + d$$

Slika 46: Izraz definiranja matrice novih koordinata položaja pomaknutih čvorova s povećanjem za veličinu  $d$  (za potrebe boljeg uočavanja pomaka u grafu)

Rješenje ovog izraza je matrica koordinata čvorova prikazan na slici 47. Koordinate čvorova se iz matrice iščitavaju na načina na koji se to radi kod matrice pomaka čvorova numeriranim brojem čvora.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
c <sub>vd</sub> =	1	1.02	3.01	5	6.99	8.98	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
	2	2	2	2	2	2	0	-0	-0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
	3	3.98	3.94	3.91	3.94	3.98	0	-0.04	-0.07	-0.07	-0.04	0	0	-0.04	-0.07	-0.07	-0.04	0

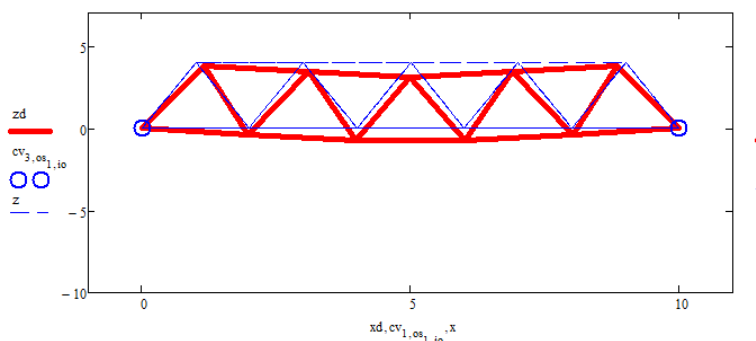
Slika 47: Matrica novih koordinata položaja pomaknutih čvorova (Mathcad 15)

Prikazivanja opterećenog rešetkastog nosača u koordinatnom sustavu provodi se izrazima prikazanim na slici 48, a njihova funkcija je ista kao i kod grafičkog prikaza neopterećene rešetke.

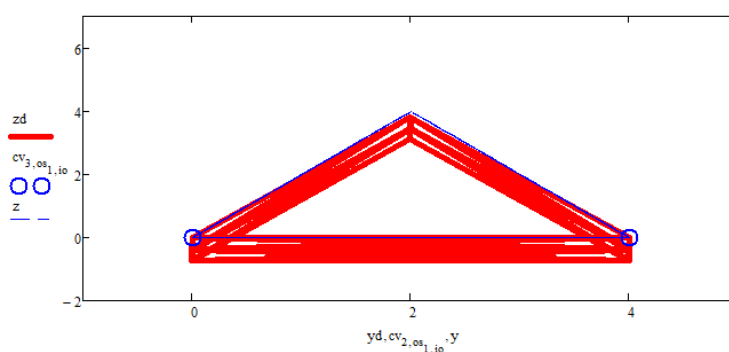
$$\begin{aligned}
 \mathbf{xd}_{st}(i) &:= \begin{pmatrix} \text{cvd}_{1,vz1,i} \\ \text{cvd}_{1,vz2,i} \\ \text{cvd}_{1,vz1,i} \end{pmatrix} & \mathbf{yd}_{st}(i) &:= \begin{pmatrix} \text{cvd}_{2,vz1,i} \\ \text{cvd}_{2,vz2,i} \\ \text{cvd}_{2,vz1,i} \end{pmatrix} & \mathbf{zd}_{st}(i) &:= \begin{pmatrix} \text{cvd}_{3,vz1,i} \\ \text{cvd}_{3,vz2,i} \\ \text{cvd}_{3,vz1,i} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{xd}^{(e)} &:= \mathbf{xd}_{st}(e) & \mathbf{yd}^{(e)} &:= \mathbf{yd}_{st}(e) & \mathbf{zd}^{(e)} &:= \mathbf{zd}_{st}(e)
 \end{aligned}$$

Slika 48: Matrični zapis koordinata pomaka čvorova (Mathcad 15)

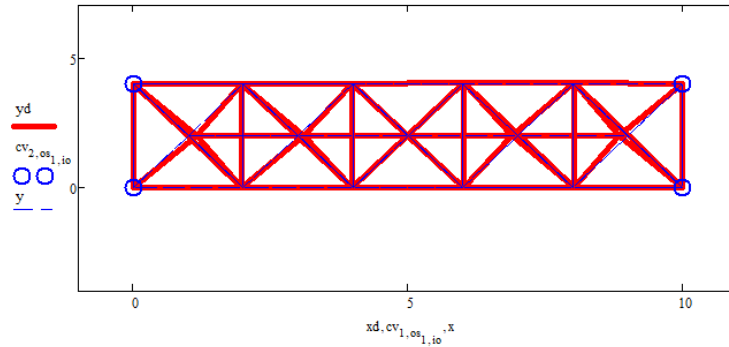
Na slikama je prikazano rješenje ovog zapisa uz rješenje stanja prije opterećenja sa osloncima kako je to definirano u prethodnim izrazima ovog poglavlja. Veličine pomaka su u ovom slučaju, radi lakše vizualizacije, uvećanje deset puta. Na slici 49 je prikazan rešetkasti nosač u ravnini x-z (nacrtni), na slici 50 u ravnini y-z (bococrt), a na slici 51 u ravnini x-y (tlocrt).



Slika 49: Grafički prikaz pomaka čvorova u x-z ravnini (u nacrtu) (Mathcad 15)



Slika 50: Grafički prikaz pomaka čvorova u y-z ravnini (u pogledu) (Mathcad 15)



Slika 51: Grafički prikaz pomaka čvorova u x-y ravnini (tlocrtno) (Mathcad 15)

S obzirom da se oslonci nalaze u kutovima rešetkastog nosača, pozicije čvorova na kojima se nalaze te veličine reakcije mogu se zapisati izrazom prikazanim na slici 52. Veličine reakcije se preuzimaju iz matrice sile u čvorovima.

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix}
 os_{1,1} & os_{1,2} & os_{1,3} & os_{1,4} \\
 FF_{os_{1,1},3-2,1} & FF_{os_{1,2},3-2,1} & FF_{os_{1,3},3-2,1} & FF_{os_{1,4},3-2,1} \\
 FF_{os_{1,1},3-1,1} & FF_{os_{1,2},3-1,1} & FF_{os_{1,3},3-1,1} & FF_{os_{1,4},3-1,1} \\
 FF_{os_{1,1},3,1} & FF_{os_{1,2},3,1} & FF_{os_{1,3},3,1} & FF_{os_{1,4},3,1}
 \end{pmatrix}$$

- numeracija čvora na kojem je oslonac  
 - reakcija u smjeru osi x  
 - reakcija u smjeru osi y  
 - reakcija u smjeru osi z

Slika 52: Matrični zapis rezultata reakcija u osloncima numeriranim čvorovima (Mathcad 15)

Rješenje ovog izraza je matrica (slika 53) sila reakcija u osloncima te numeracija čvorova u kojem se oslonci nalaze.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}
 6 & 11 & 12 & 17 \\
 1.625 & -1.625 & 1.625 & -1.625 \\
 1.25 & 1.25 & -1.25 & -1.25 \\
 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5
 \end{pmatrix}$$

Slika 53: Matrica rezultata reakcija u osloncima numeriranim čvorovima (Mathcad 15)

Nakon pomaka i reakcija u osloncima, sile u štapovima se računaju prema izrazu 54 iz drugog poglavlja. Zapis takvog izraza u općem obliku prema definiranim krutostima, duljinama i kosinusima kutova štapova te dobivenim matricama pomaka čvorova prikazan je na slici 55.

$$S_e := \frac{EA_e}{L_{st_e}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{e,1} & \alpha_{e,2} & \alpha_{e,3} & -\alpha_{e,1} & -\alpha_{e,2} & -\alpha_{e,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{[(vz^T)^{(1)}]_{e,1 \cdot 3-2,1}} \\ \delta_{[(vz^T)^{(1)}]_{e,1 \cdot 3-1,1}} \\ \delta_{[(vz^T)^{(1)}]_{e,1 \cdot 3,1}} \\ \delta_{[(vz^T)^{(2)}]_{e,1 \cdot 3-2,1}} \\ \delta_{[(vz^T)^{(2)}]_{e,1 \cdot 3-1,1}} \\ \delta_{[(vz^T)^{(2)}]_{e,1 \cdot 3,1}} \end{bmatrix}$$

Slika 54: Opći izraz za zapis rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

Raspisivanjem dodatne matrice (slika 55) dobivena je konačna matrica uzdužnih sila u štapovima prikazan na slici 56. Numerirani broj stupca odgovara numeriranom broju štapa, a vrijednost u stupcu je vrijednost uzdužne sile. Negativni brojevi predstavljaju tlačnu silu, a pozitivni brojevi vlačnu silu u štapu. Ovime je analiziran pomak čvorova i opterećenja štapova rešetkastog nosača.

$$S := \begin{cases} \text{for } e \in 1..n_{st} \\ a_{1,e} \leftarrow S_e \\ \text{augment}(a) \end{cases}$$

Slika 55: Matrični zapis rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

$$s^T =$$

	1
1	-2.5
2	-5
3	-5
4	-2.5
5	-1
6	0.2
7	1.5
8	0.3
9	-1
10	-1
11	0.3
12	1.5
13	0.3
14	-1
15	0
16	0
17	-0
18	0
19	-0
20	0
21	-0
22	0
23	0
24	-0
25	-0
26	-2.9
27	-2.9
28	-2.9
29	2.9
30	2.9
31	-2.9
32	-2.9
33	-2.9
34	2.9
35	2.9
36	2.9
37	2.9
38	-2.9
39	-2.9
40	-2.9
41	2.9
42	2.9
43	-2.9
44	-2.9
45	-2.9

Slika 56: Matrica rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

## 4. USPOREDBA MOMENTA GREDE I REŠETKE

Za potrebe analize usporedbe momenata grede i rešetke od kraka uzdužne sile, postaviti će se opterećenja na jednaku poziciju grede i rešetke te će sila biti po iznosu i smjeru jednaka i iznositi će 10. Sila će biti suprotno orijentirana od smjera osi z te će biti na sredini raspona nosača što znači da rešetkasti nosač može imati samo neparan broj elemenata, to jest piramidalnih spojeva štapova, uz uvjet da je broj veći od jedan (1). Matrični zapis položaja sile je prikazan na slici 57.

$$f_0 := \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Slika 57: Matrični zapis veličine opterećenja i numeriranog čvora u kojem je opterećenje (Mathcad 15)

Uz to postaviti će se da je visina i duljina grede jednaka. Geometrija rešetkastog nosača je ista kao i kod analize rešetke u trećem poglavlju također uz to da će i u ovom slučaju broj elemenata piramida biti jednak  $n=5$ . Samim time će se promijeniti i duljina elementa (piramide) te broj čvorova i štapova kako je prikazano na slici 58.

### 1. Geometrijske karakteristike

- duljina nosača:  $L_{na} := 10$

- broj elemenata:  $n := 5$

- duljina elementa:  $\Delta x := \frac{L}{n}$

- širina elementa (nosača):  $\Delta y := 4$

- visina elementa (nosača):  $\Delta z := 4$

### 2. Broj čvorova i štapova

- broj čvorova:  $n_{cv} := 3 \cdot (n + 1) - 1$

- broj štapova:  $n_{st} := 10n - n$

Slika 58: Definirane karakteristike rešetkastog nosača (Mathcad 15)

U slučaju kada se promatra opterećenje grede s istim uvjetima geometrije i pozicije te smjera opterećenja, moment na polovici raspona grede se računa prema izrazu 54.

$$M_g = \frac{F * L}{4} \quad (54)$$

S obzirom na silu od 10 i duljinu od 10, moment u polovici raspona iznosi 25 kako je pokazano izračunom u izrazu 55.

$$M_g = \frac{10 * 10}{4} = 25 \quad (55)$$

Cijeli postupak dobivanja rezultata uzdužnih sila je jednak kako je provedeno u trećem poglavlju. Različito je jedino da, s obzirom da je manje čvorova, manje su i matrice. Veličina sila u štapovima je prikazana na slici 59.



$$s^T =$$

	1
1	-4.2
2	-4.2
3	-0.7
4	1.4
5	-0.7
6	-0.7
7	1.4
8	-0.7
9	0
10	-0
11	0
12	-0
13	0
14	-0
15	0
16	-3
17	-3
18	3
19	-3
20	-3
21	3
22	3
23	-3
24	-3
25	3
26	-3
27	-3

Slika 59: Matrica rezultata uzdužnih sila u štapovima rešetke (Mathcad 15)

Veličina momenta koja se promatra je veličina momenta od gornjih štapova rešetke, a krak sile momenta je jednak visini rešetkastog nosača, to jest  $\Delta z = 4$ . Matrica kojom su raspisane numeracije promatranih štapova, veličina sila u štapovima, veličine krakova momenta (visina rešetke) te x koordinate na kojima se mjeri veličina momenta je prikazan na slici 60.

$$\text{Mr} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n_{\text{st}} - (n_{\text{st}} - n + 1) \\ \quad a_{1,i} \leftarrow i \\ \quad a_{2,i} \leftarrow -(S^T)_i \\ \quad a_{3,i} \leftarrow \Delta z \\ \quad a_{4,i} \leftarrow -(S^T)_i \cdot \Delta z \\ \quad a_{5,i} \leftarrow i \cdot \Delta x \\ \text{return } a \end{array} \right.$$

Slika 60: Matrični zapis numeriranih štapova, sila u štapovima, kraka momenta, momenta sila i x koordinate tih momenata (Mathcad 15)

Rezultat zapisa tog izraza je matrica momenata sila rešetkastog nosača prikazana na slici 61.

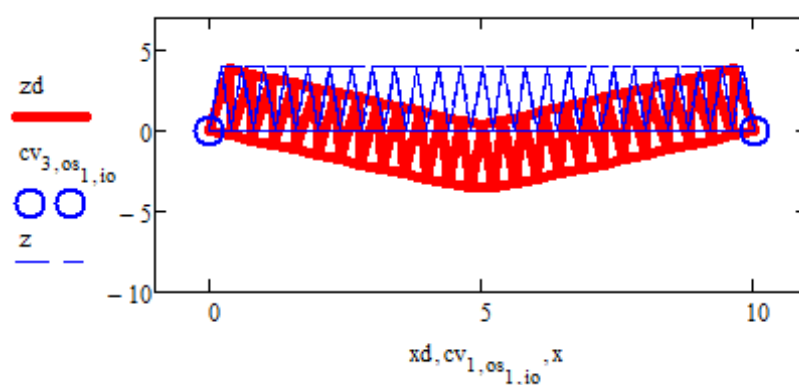
$$\text{Mr} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2.5 & 5 & 5 & 2.5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 20 & 20 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- broj štapa} \\ \text{- sile u štapovima} \\ \text{- krak momenta ( } \Delta z \text{)} \\ \text{- moment sila} \\ \text{- x koordinata momenta} \end{array}$$

Slika 61: Matrica numeriranih štapova, sila u štapovima, kraka momenta, momenta sila i x koordinate tih momenata (Mathcad 15)

Iz ovog se može iščitati da je moment na polovici raspona jednak 20 što je za 5 manje od momenta u gredi na istoj koordinatnoj poziciji. Povećavanjem broja elemenata, to jest piramidalnih štapnih oblika rešetke, na jednaku ukupnu duljinu rešetke i grede, moment koji stvara uzdužna sila u štapu trebala bi se približavati iznosu momenta kod grede. U tablici 2 je prikazan odnos momenta grede i rešetkastog nosača u zavisnosti od broja piramidalnih štapnih elemenata rešetke. Kao primjer, prikazana je deformacija rešetke od takvog opterećenja na slici 62.

Tablica 2: Prikaz usporedbe rezultata momenata savijanja grede i momenata sila rešetkastog nosača

broj "piramida" rešetke	moment sila rešetke	moment grede
n	Mr	Mg
3	16,67	25
5	20,00	25
11	22,73	25
23	23,91	25
47	24,47	25
85	25,71	25
171	24,85	25



Slika 62: Rešetkasti nosač od 25 trokutasto (piramidalno) povezanih štapova (Mathcad 15)

## **5. ZAKLJUČAK**

### **5.1. Zaključak računalne primjene matrične analize rešetkastog nosača**

Ovim načinom primjene matrične analize rešetkastog nosača uz računalno postavljanje općih izraza mogu se brzo izračunati pomaci čvorova, veličina uzdužnih sila u štapovima te sila reakcija u osloncima te se mogu izdvojiti ekstremne vrijednosti prema kojima se proračunava konstrukcija rešetke. Nedostatak ovakvog oblika računalne primjene matrične analize je taj što je vjerojatnost unošenja pogrešnih podataka veća što rešetka ima više štapova iz razloga što je potrebno izrazito pažljivo unositi točne koordinate čvorova te unositi točno numerirane štapove koji se vežu u istom čvoru. Isto tako, kod izračunatih rezultata pomaka i sila potrebno je, prema početnoj numeraciji čvorova i štapova, tražiti o kojem se čvoru ili štapu unutar rešetke radi.

### **5.2. Zaključak usporedbe momenata grede i sila rešetkastog nosača**

Veličina momenta koju uzdužna sila u štapu stvara djelovanjem na nekom kraku, zavisi o veličini tog kraka. Za iste vanjske gabarite rešetke i grede, momenti od istog opterećenja (istog intenziteta, orijentacije i položaja na nosaču) mogu biti samo teoretski jednaki i to u slučaju kada je broj trokutasto spojenih štapova u rešetci beskonačan, u suprotnom je moment u gredi veći.

## 6. LITERATURA

1. I. Kožar, Ravninske štapne konstrukcije, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, 2022.
2. Aslam Kassimali, Matrix Analysis of Structures, Second Edition, Southern Illinois University Carbondale, 2010.
3. Šimić, V., Otpornost materijala I, Školska knjiga Zagreb, 1992.
4. Tehnička mehanika 1, Sveučilište u Splitu, Split, 2020.
5. Mcad\_UserGuide; User's Guide: Mathcad 14.0,  
<http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/Nivelamento/Mathcad/2-Apostilas/Mathcad%20Users%20Guide.pdf>, datum pristupa: 20.06.2024.