

# Analitičko rješenje za dvoslojnu kompozitnu gredu s popustljivim veznim slojem primijenjeno u analizi termalnih efekata kod lameliranog stakla

---

Veljačić, Vita

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:244948>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Vita Veljačić**

**Analitičko rješenje za dvoslojnu kompozitnu gredu s popustljivim  
veznim slojem primijenjeno u analizi termalnih efekata kod  
lameliranog stakla**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2024.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Diplomski sveučilišni studij građevinarstva  
Konstrukcije  
Stabilnost konstrukcija**

**Vita Veljačić  
0114033140**

**Analitičko rješenje za dvoslojnu kompozitnu gredu s popustljivim  
veznim slojem primijenjeno u analizi termalnih efekata kod  
lameliranog stakla**

**Diplomski rad**

**Rijeka, rujan 2024.**

## **IZJAVA**

Završni/Diplomski rad izradio/izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom/mentoricom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Vita Veljačić

U Rijeci, 16.9.2024.

## SAŽETAK

U današnje vrijeme sve se više nastoji optimizirati upotreba različitih materijala u spregnutim nosačima kako bi jedan materijal nadomjestio nedostatke drugog. Ovaj rad bavi se analizom spregnutih nosača kroz izradu analitičkog rješenja za dvoslojnu gredu za tri vrste modela: potpuno spregnutih (bez klizanja između slojeva), djelomično spregnutih (ograničeno klizanje između slojeva) i nespregnutih nosača (slobodno klizanje između slojeva). Svi modeli u obzir uzimaju i termalne efekte nastale zbog nejednolike promjene temperature po visini poprečnog presjeka spregnutog nosača. Mogućnosti izvedenih analitičkih rješenja testirane su na primjeru lameliranog stakla, čije je ponašanje analizirano pod utjecajem jednolike i nejednolike raspodjele temperature. Ovaj primjer posebno je relevantan kod primjena staklenih fasada u suvremenom inženjerstvu, budući da su one izložene različitim klimatskim uvjetima koji uzrokuju termičke efekte. Model se pokazao izrazito prikladnim za ovu vrstu problema jer, osim što može precizno predvidjeti globalno ponašanje spregnutog nosača (progibi i naprezanja na rubovima), daje izvrstan uvid u raspodjelu unutrašnji sila i momenata savijanja te naprezanja po visini presjeka u svakom sloju, ali i deformirano stanje nosača (uključujući klizanje između slojeva).

**Ključne riječi:** spregnuti nosač, kompozitni nosači, analitičko rješenje, lamelirano staklo, termalni efekti, temperaturne deformacije

## **ABSTRACT**

In modern times, there is an increasing focus on optimizing the use of different materials in composite beams to allow one material to compensate for the deficiencies of another. This paper deals with the analysis of composite beams by developing an analytical solution for a two-layer beam for three types of models: fully composite (no slipping between layers), partially composite (limited slipping between layers), and non-composite beams (free slipping between layers). All models also take into account thermal effects caused by non-uniform temperature changes along the height of the composite beam's cross-section. The capabilities of the derived analytical solutions were tested on the example of laminated glass, whose behavior was analyzed under the influence of both uniform and non-uniform temperature distribution. This example is particularly relevant in the application of glass facades in modern engineering, as they are exposed to various climatic conditions that cause thermal effects. The model has proven to be extremely suitable for this type of problem because, in addition to accurately predicting the global behavior of the composite beam (deflections and edge stresses), it provides excellent insight into the distribution of internal forces, bending moments, and stresses along the height of the cross-section in each layer, as well as the deformed state of the beam (including slipping between layers).

**Keywords:** composite beam, composite structures, analytical solution, laminated glass, thermal effects, temperature deformations.

# Sadržaj

1. UVOD .....	1
2. SPREGNUTE KONSTRUKCIJE I TERMALNI EFEKTI.....	2
2.1. Osnovni koncept spregnutih konstrukcija.....	2
2.2. Terminalni efekti kod lameliranog stakla .....	5
3. ANALITIČKA RJEŠENJA ZA DVOSLOJNU GREDU S POPUSTLJIVIM KONTAKTOM I TERMALNIM EFEKTIMA.....	8
3.1. Osnovne jednačbe problema.....	9
3.1.1. Kinematičke jednačbe.....	9
3.1.2. Konstitutivne jednačbe .....	12
3.1.3. Ravnotežne jednačbe.....	14
3.1.4. Vezne jednačbe .....	16
3.2. Model RRR.....	17
3.3. Model CRR.....	18
3.4. Model ORR.....	20
4. EKSPERIMENTALNI REZULTATI .....	21
5. VALIDACIJA MODELA.....	30
5.1. Model analitičkog rješenja .....	30
5.2. Utjecaj jednolike raspodjele temperature .....	51
5.3. Utjecaj nejednolike raspodjele temperature .....	68
6. ZAKLJUČAK.....	79
Literatura .....	81

## Popis slika

Slika 1: Raspodjela naprezanja nespregnutog nosača [1].....	3
Slika 2: Raspodjela naprezanja spregnutog nosača [1] .....	3
Slika 3: Stari Savski most Zagreb [3].....	4
Slika 4: Slojevi lameliranog stakla [4] .....	6
Slika 5: Stakleno stubište i ograda na Građevinskom fakultetu u Rijeci.....	7
Slika 6: Kinematičke veličine deformirane grede uslijed kombiniranog djelovanja savijanja i uzdužne sile .....	10
Slika 7: Kut smicanja kao razlika između nagiba tangente na deformiranu os nosača i kuta zaokreta poprečnog presjeka [5] .....	10
Slika 8: Koordinatni sustav za svaki sloj dvoslojne grede s odgovarajućim smjerom zaokreta poprečnog presjeka.....	11
Slika 9: Promjena temperature po visini presjeka .....	13
Slika 10: Dijagram slobodnog tijela i konvencija predznaka .....	15
Slika 11: Shematski prikaz relativnog klizanja između dva sloja dvoslojne grede .....	16
Slika 12: Savijanje u četiri točke, EN 1288-3:2008 [4].....	22
Slika 13: Uređaj za provođenje testa i termalna kutija.....	22
Slika 14: Sila-naprezanje međusloja PVB.....	24
Slika 15: Sila-pomak međusloja PVB .....	24
Slika 16: Sila-naprezanje međusloja Ionoplasta.....	25
Slika 17: Sila-pomak međusloja Ionoplasta .....	25
Slika 18: Promjena efektivne debljine.....	27
Slika 19: Modeli sprežanja [1] .....	28
Slika 20: Promjena koeficijenta sprežanja .....	29
Slika 21: Shema modela CRR i ORR s dva segmenta (a i b) i odgovarajućim rubnim uvjetima .....	31
Slika 22: Shema modela RRR s dva segmenta (a i b) i odgovarajućim rubnim uvjetima .....	32
Slika 23: Usporedba graničnih slučajeva sila-pomak.....	33
Slika 24: Usporedba graničnih slučajeva sila-naprezanje .....	33
Slika 25: Usporedba rezultata međusloja PVB za 25°C.....	35
Slika 26: Usporedba rezultata međusloja PVB za 40°C.....	36
Slika 27:Usporedba rezultata međusloja PVB za 50°C.....	37
Slika 28: Usporedba rezultata međusloja PVB za 60°C.....	38
Slika 29: Usporedba rezultata međusloja PVB za 70°C.....	39
Slika 30: Usporedba rezultata međusloja PVB za 80°C.....	40
Slika 31: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 25°C.....	41
Slika 32: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 40°C.....	42
Slika 33: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 50°C.....	43
Slika 34: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 60°C.....	44
Slika 35: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 70°C.....	45
Slika 36: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 80°C.....	46
Slika 37: Usporedba rezultata sila-pomak PVB .....	47



Slika 38: Usporedba rezultata sila-naprezanje PVB.....	47
Slika 39: Usporedba rezultata sila-pomak Ionoplast.....	48
Slika 40: Usporedba rezultata sila-naprezanje Ionoplast.....	48
Slika 41: Modul klizanja za PVB.....	49
Slika 42: Modul klizanja Ionoplast.....	49
Slika 43: Usporedba progibnih linija dobivenih analitičkim rješenjem za razne temperature i granične slučajeve.....	52
Slika 44: Usporedba klizanja između slojeva pri različitim temperaturama s graničnim slučajevima.....	52
Slika 45: Raspodjela uzdužnih sila u sloju 1 za različite temperature i granične slučajeve.....	53
Slika 46: Raspodjela uzdužnih sila u sloju 2 za različite temperature i granične slučajeve.....	53
Slika 47: Ukupna uzdužna sila za različite temperature i granične slučajeve.....	54
Slika 48: Raspodjela poprečnih sila u sloju 1.....	54
Slika 49: Raspodjela poprečnih sila u sloju 2.....	55
Slika 50: Ukupna ukupnih poprečnih sila.....	55
Slika 51: Momentni dijagram sloja 1.....	56
Slika 52: Momentni dijagram sloja 2.....	56
Slika 53: Ukupni momentni dijagram.....	57
Slika 54: Kontaktna naprezanja, pt.....	57
Slika 55: Raspodjela naprezanja za monolitno staklo.....	58
Slika 56: Profil naprezanja na sredini grede za monolitno staklo.....	58
Slika 57: Raspodjela naprezanja za dvoslojno staklo.....	59
Slika 58: Profil naprezanja na sredini grede za dvoslojno staklo.....	60
Slika 59: Naprezanja kod jednolike temperature za 25 °C.....	60
Slika 60: Profil naprezanja na sredini grede za 25°C.....	61
Slika 61: Naprezanja kod jednolike temperature za 80 °C.....	61
Slika 62: Profil naprezanja na sredini grede za 80°C.....	62
Slika 63: Progib nosača pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile.....	63
Slika 64: Uzdužne sile u slojevima 1 i 2 pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile.....	64
Slika 65: Poprečna sile u slojevima 1 i 2 pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile.....	64
Slika 66: Moment savijanja sile u slojevima 1 i 2 pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile.....	65
Slika 67: Izduženje (horizontalni pomak) slojeva 1 i 2 uzrokovan promjenom temperature...65	65
Slika 68: Usporedba uzdužne sile u sloju 1 sa i bez vlastite težine.....	66
Slika 69: Usporedba poprečne sile u sloju 1 sa i bez vlastite težine.....	67
Slika 70: Usporedba momenta savijanja u sloju 1 sa i bez vlastite težine.....	67
Slika 71: Usporedba progibne linije nosača sa i bez vlastite težine.....	68
Slika 72: Nejednolika promjena temperature po visini presjeka.....	69
Slika 73: Uzdužna sila u sloju 1 pri nejednolikoj promjeni temperature.....	70
Slika 74: Poporečna sila u sloju 1 pri nejednolikoj promjeni temperature.....	70
Slika 75: Moment savijanja u sloju 1 pri nejednolikoj promjeni temperature.....	70

Slika 76: Horizontalni pomak sloja 1 pri nejednolikoj promjeni temperature .....	71
Slika 77: Horizontalni pomak sloja 2 pri nejednolikoj promjeni temperature .....	72
Slika 78: Progibna linija nosača pri nejednolikoj promjeni temperature .....	72
Slika 79: Progib uslijed sile i nejednolike temperature .....	73
Slika 80: Diskontinuitetna promjena temperature po visini presjeka.....	74
Slika 81: Uzdužne sile uzrokovane diskontinuitetnom raspodjelom temperature .....	74
Slika 82: Poprečne sile uzrokovane diskontinuitetnom raspodjelom temperature.....	75
Slika 83: Momenti savijanja uzrokovani diskontinuitetnom raspodjelom temperature .....	75
Slika 84: Naprezanja uzrokovana diskontinuitetnom raspodjelom temperature .....	76
Slika 85: Profil naprezanja na sredini grede za diskontinuitetnu temperaturu .....	76
Slika 86: Progib nosača uzrokovan diskontinuitetnom temperaturom.....	77
Slika 87: Usporedba progiba nejednolikih temperatura .....	78

## 1. UVOD

Kombiniranje različitih materijala postaje sve popularnije u današnjoj građevinskoj industriji. Ispravno kombiniranje materijala omogućava stvaranje kompozita koji mogu nadoknaditi slabosti pojedinih materijala, čime se postiže učinkovitiji element. Ovaj rad se fokusira na utjecaju temperature na takve spregnute nosače, proučavajući njihovo ponašanje pod različitim uvjetima opterećenja i temperature.

U ovom radu najprije je razvijeno analitičko rješenje za dvoslojnu gredu s popustljivim spojnim sistemom koji omogućava klizanje između slojeva. Modelirana su tri različita tipa nosača: potpuno spregnuti, djelomično spregnuti i nespregnuti nosači. Analitički model je implementiran u softveru *Wolfram Mathematica* te je poslužio za analizu ponašanja lameliranog stakla podvrgnutog različitim termalnim utjecajima. Kao eksperimentalni primjer korišteno je lamelirano staklo testirano na 6 različitih temperatura u rasponu od 25 do 80°C. Na temelju eksperimentalnih rezultata, određeni su koeficijenti sprezanja za svaku od ispitanih temperatura koji su zatim korišteni za provedbu dodatnih analiza unutrašnjih sila, naprezanja i deformacija u svakom sloju uz pomoć analitičkog modela.

Potpuno spregnuti nosač predstavljen je monolitnim staklom, djelomično spregnuti model lameliranim staklom, dok nespregnuti model predstavlja dvoslojno staklo (dva odvojena stakla koja slobodno kližu jedan u odnosu na drugi). Monolitno i dvoslojno staklo koriste se kao granični slučajevi, predstavljajući dva ekstrema u ponašanju stakla: monolitno staklo ima beskonačno velik koeficijent sprezanja, dok dvoslojno staklo ima koeficijent sprezanja jednak nuli.

Rezultati istraživanja pokazuju da se povećanjem temperature lamelirano staklo ponaša sve sličnije dvoslojnom staklu, smanjujući svoj koeficijent sprezanja. S druge strane, smanjenjem temperature, lamelirano staklo približava se ponašanju monolitnog stakla. Ovi rezultati su ključni optimizaciju upotrebe staklenih materijala u građevinskoj industriji, osobito u uvjetima različitih klimatskih promjena.

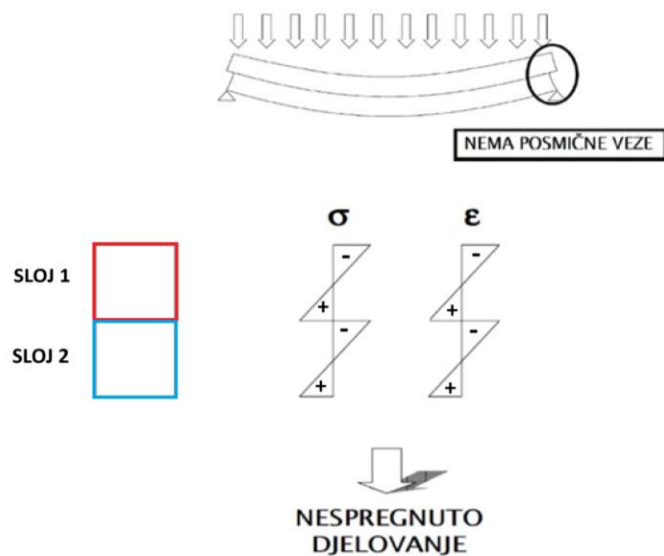
## 2. SPREGNUTE KONSTRUKCIJE I TERMALNI EFEKTI

### 2.1. Osnovni koncept spregnutih konstrukcija

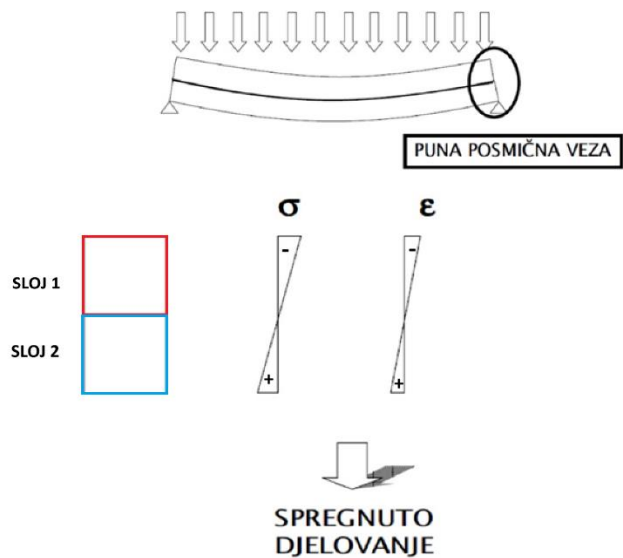
Spregnute konstrukcije sastoje se od dva ili više međusobno povezana elemenata od različitih materijala. Spregnuti nosači omogućuju inženjerima da kombiniraju najbolje karakteristike različitih materijala kako bi postigli najbolju izvedbu uz optimizaciju materijala i troškova. Ovakvi nosači imaju svojstva materijala ne samo drugačija od njihovih pojedinih komponenti, nego i komplementarna, jer jedan materijal može nadomjestiti nedostatke drugog i obrnuto. Iz tog razloga važno je gdje se pojedini element postavlja u poprečnom presjeku. Na primjer, kod spregnutog nosača s betonom važno je da se drugi materijal (poput čelika, drva, karbonskog vlakna i sl.) nalazi u vlačnoj zoni, budući da beton u toj zoni pokazuje najslabija svojstva. Istovremeno, beton bi trebao biti smješten u tlačnoj zoni presjeka, gdje pokazuje najbolja mehanička svojstva. Osnovna prednost spregnutog nosača je puno veća krutost pri savijanju u usporedbi sa nespregnutim nosačem istih geometrijskih karakteristika.

Nespregnuti nosač je sustav u kojem nema posmične veze između dva sloja nosača pa iz tog razloga na krajevima nosača postoji relativni pomak između slojeva (Slika 1). Svaki element unutar nespregnutog nosača nosi dio opterećenja proporcionalan svojoj krutosti i deformira se nezavisno od susjednog elementa, što rezultira pojavom vlačnih i tlačnih napreznja u oba sloja.

Nasuprot tome, u spregnutom nosaču postoji puna posmična veza između slojeva. Ova veza omogućuje da se oba elementa ponašaju kao jedinstveni presjek, bez relativnog horizontalnog pomaka između elemenata na krajevima (Slika 2). To znači da se prilikom savijanja normalne deformacije linearno mijenjaju po visini kompozitnog presjeka (progib za oba sloja mora biti jednak na dodirnoj liniji), kao što je to slučaj kod monolitnih greda. Primjenom Hookeovog zakona, odnosno pretpostavkom linearno-elastičnog ponašanja materijala, slijedi i da raspodjela normalnih napreznja mora biti linearna po visini kompozitnog presjeka, kao što je prikazano na Slici 2. Na taj se način postiže da jedan sloj primarno preuzima vlačna, a drugi tlačna napreznja [1].



Slika 1: Raspodjela naprezanja nespregnutog nosača [1]

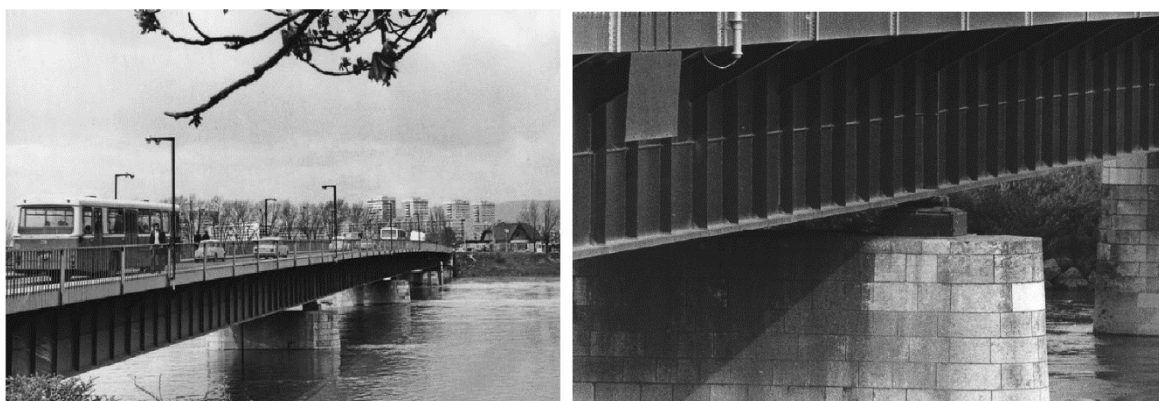


Slika 2: Raspodjela naprezanja spregnutog nosača [1]

U općenitom slučaju, osim klizanja između slojeva, može se pojaviti i poprečno razdvajanje slojeva te (ukoliko slojeve tretiramo kao grede) razlika u kutovima zaokreta poprečnih presjeka slojeva na istoj uzdužnoj koordinati. Za primjer prikazan na Slici 1, efekti poprečnog razdvajanja i relativnog rotiranja poprečnih presjeka imaju relativno mali utjecaj na krutost spregnutog nosača (što je potvrđeno u [2]) pa se s dovoljnom točnošću problem može analizirati modelom koji dopušta jedino relativno klizanje na kontaktu između dva sloja.

Kod spregnutih konstrukcija od beton-čelik, beton preuzima tlačna naprezanja, a čelik vlačna naprezanja. To rezultira smanjenjem maksimalnih deformacija i naprezanja u svakom sloju, jer svaki materijal koristi svoje optimalne karakteristike za preuzimanje naprezanja. Konkretno, beton se nalazi u tlaku, a čelik u vlaku. Na taj način, dolazi do povećanja krutosti na savijanje pa spregnuti nosači pružaju veću nosivost, stabilnost i efikasnost u usporedbi s nespregnutim nosačem [1].

Sprezanje betona i čelika često se koristi kod nosivih konstrukcija mostova. Uočeno je da su progibi konstrukcije manji od očekivanih, koji su dobiveni pod pretpostavkom da cijelo opterećenje prenosi čelični nosač [3]. Primjer takvog mosta je Savski most u Zagrebu, izgrađen 1939. godine. Most ima simetrične čelične nosače s armiranom betonskom pločom (Slika 3). “Kasnije je dokazana nosivost armiranobetonske ploče koja je zbog potpunog sprezanja s čelikom premašila svoju predviđenu ulogu pukog prijenosa opterećenja. Svi ti razlozi učinili su ovaj most iznimnim ostvarenjem, zapaženim i zabilježenim i u svjetskoj literaturi”, zapisao je građevinski inženjer Neven Crnobrnja u znanstvenom radu “Zagrebački savski mostovi“ [3].



*Slika 3: Stari Savski most Zagreb [3]*

S vremenom je klasična oplata sve više ustupala mjesto čeličnim trapeznim limovima kao tzv. izgubljenoj oplati, budući je čelični lim nakon otvrdnjavanja betona ostajao u konstrukciji kao sastavni dio armiranobetonske ploče. Dobrim izborom oblika limova, sidrenjima na krajevima i slično razvijala se i tehnologija spregnutih ploča [3]. Spregnute ploče brzo su postale ekonomično rješenje za međukatne konstrukcije u visokogradnji. Dobivaju se konstrukcije relativno malih dimenzija i smanjene vlastite težine. Danas se razvijaju složeni sustavi u spregnutoj izvedbi, od kontinuiranih nosača do okvirnih konstrukcija, s posebnim naglaskom na problematiku spojeva [3].

Spojni sistem daje naglasak na posmične sile koje djeluju na kontaktnoj plohi između dva različita materijala. Cilj spoja je da na optimalan način uključiti oba materijala u nosivost spregnutog nosača. Savršen spoj koji sprječava svaki relativni pomak između slojeva omogućio bi potpuni prijenos normalnih i posmičnih naprezanja i osigurao optimalnu izvedbu spoja. Međutim, u praksi veze pokazuju konačnu krutost, tako da se mogu pojaviti relativni poprečni i uzdužni pomaci (uzdizanja i klizanja) na spoju između slojeva.

Standardno određivanje krutosti spregnutih elemenata određuje se postupkom zamjenskog poprečnog presjeka. Čitavi presjek se pretvara u samo jedan materijal na način da se dijelu od preostalog materijala površina i moment II. reda (moment inercije) množe faktorom  $n$  koji označava omjer modula elastičnosti dva zadana materijala. Time dobivamo jedinstveni poprečni presjek koji predstavlja kombinirane karakteristike oba materijala, pri čemu se pretpostavlja da je sprežanje između dva dijela presjeka savršeno (nema klizanja ili uzdizanja) [1].

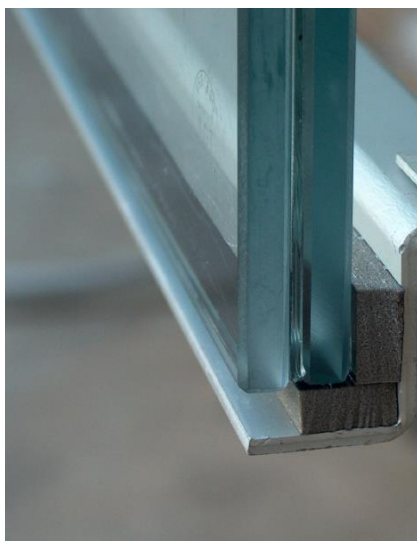
## **2.2. Terminalni efekti kod lameliranog stakla**

Poseban naglasak u ovom radu stavljen je na utjecaj temperature na spregnute konstrukcije. U situacijama poput ekstremnih klimatskih uvjeta ili izloženosti konstrukcija sunčevom zračenju, gdje se mogu pojaviti značajne razlike u temperaturi između vanjskog okruženja i unutrašnjosti konstrukcije, postoji potencijal za problematične situacije. Materijali se pod utjecajem temperature šire ili skupljaju. Kod spregnutih konstrukcija razlike u termičkom širenju između različitih materijala mogu stvoriti dodatna naprezanja (tzv. temperaturna ili termička

naprezanja), što može dovesti do neželjenih efekata poput pukotina, izvijanja ili gubitka nosivosti.

U suvremenoj arhitekturi, staklo je materijal koji se sve više koristi zbog estetskih razloga. Njegova prozirnost, elegancija i sposobnost integracije u različite dizajnerske koncepte čini ga izuzetni privlačnim materijalom. Međutim, unatoč brojnim prednostima, korištenje stakla nosi i određene izazove. Jedan od izazova su termička naprezanja koja se javljaju u materijalu kada dođe do promjene temperature. Staklo loše provodi toplinu, što znači da različiti dijelovi staklene ploče mogu imati različite temperature u isto vrijeme. Iz tog razloga, u situaciji kada je temperatura u vanjskom okruženju znatno drugačija od temperature u unutrašnjosti konstrukcije, dolazi do termičkih naprezanja koja mogu dovesti do pukotina ili sloma.

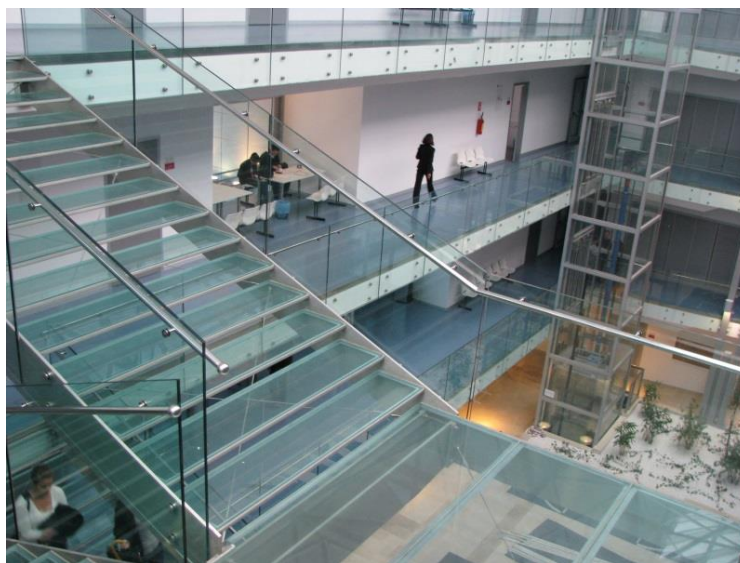
Lamelirano staklo je vrsta stakla koja se sastoji od dvije ili više staklenih ploča zalijepljenih međusobno po cijeloj površini laminirajućim materijalom (Slika 4). Laminirajući sloj jest materijal između dvije ili više staklenih ploča laminiranog stakla, koji adhezivno prijanja na staklo i svojim mehaničkim svojstvima omogućava djelomično sprezanje ploča. [4]



*Slika 4: Slojevi lameliranog stakla [4]*

Lamelirano staklo se široko koristi u zgradama zbog svoje čvrstoće i sigurnosnih svojstava. Primjer primjene ovog materijala za nosive elemente nalazi se na Građevinskom fakultetu u Rijeci, gdje su gazišta stubišta i ograda od lameliranog stakla (Slika 5).





*Slika 5: Stakleno stubište i ograda na Građevinskom fakultetu u Rijeci*

Međutim, ako zbog termičkih naprezanja dođe do prekoračenja čvrstoće stakla, može doći do loma stakla. Budući da je staklo izrazito krhki materijal, i samim time nepredvidiv u pogledu gubitka nosivosti, može se reći da je lamelirano staklo jedan oblik intervencije u staklenim konstrukcijama kojim se osigurava dodatni kapacitet nosivosti nakon što nastupi lom jednog ili više panela [2]. Polimerni međusloj u lameliranom staklu može zadržati slomljene dijelove zajedno, sprječavajući da ispadnu iz okvira. No to ne znači da je lamelirano staklo sigurno za upotrebu nakon pucanja. Poseban fokus u ovom radu biti će posvećen analizi lameliranog (dvoslojnog) stakla i njegovom ponašanju pri višim temperaturama.

### 3. ANALITIČKA RJEŠENJA ZA DVOSLOJNU GREDU S POPUSTLJIVIM KONTAKTOM I TERMALNIM EFEKTIMA

U ovom radu razvijeno je analitičko rješenje za dvoslojnu gredu s popustljivim spojnim sistemom koji omogućava klizanje između slojeva. Svaki sloj spregnutog nosača zasebno se modelira kao Timošenkova greda uz pretpostavku da među slojevima nema poprečnog razmicanja i da na istoj uzdužnoj koordinati oba sloja imaju isti zaokret poprečnog presjeka. Ponašanje spojnog sistema je linearno elastično i definirano je parametrom koji označava posmičnu krutost na kontaktu. Prednost ovakvog modela u odnosu na standardni pristup, koji koristi postupak zamjenskog poprečnog presjeka, je u tome što omogućava određivanje raspodjele unutrašnjih sila i naprezanja u svakom sloju pojedinačno za spojni sistem koji dozvoljava (ali i ograničava) klizanje između slojeva. Također, ovaj pristup je jednostavniji i brži za korištenje od 2D i 3D modela po metodi konačnih elemenata jer je potrebno riješiti relativno mali sustav linearnih algebarskih jednažbi.

U radu su korištena tri modela po uzoru na rad Siciliana i koautora [2]:

- **Model RRR** – spriječeno klizanje među slojevima jer je spojni sistem apsolutno krut (posjeduje beskonačnu krutost)
- **Model CRR** – ograničeno klizanje među slojevima jer spojni sistem ima konačnu krutost i time pruža otpor klizanju
- **Model ORR** – slobodno klizanje među slojevima jer nema spojnog sistema (što odgovara spojnog sistemu čija je krutost jednaka nuli)

U ovim kraticama, prvo, drugo i treće slovo označavaju klizanje, uzdizanje i relativno rotiranje poprečnog presjeka, slijedom, pri čemu R ("rigid") znači da nije dozvoljeno, dok C ("compliant"), znači da je dozvoljeno. Stoga, vidljivo je da u sva tri modela pretpostavljamo da nema uzdizanja i relativnog rotiranja poprečnih presjeka susjednih slojeva, dok po pitanju klizanja imamo tri različite situacije (spriječeno, ograničeno i slobodno klizanje). Detaljnije objašnjenje ovih modela slijedi u poglavljima 3.2, 3.3 i 3.4.

U analitičkom rješenju za dvoslojnu gredu u svakom su sloju dodatno uzete u obzir temperaturne deformacije uslijed promjene temperature, pri čemu je pretpostavljena linearna promjena temperature po debljini sloja, dok u uzdužnom smjeru nema promjene temperature.

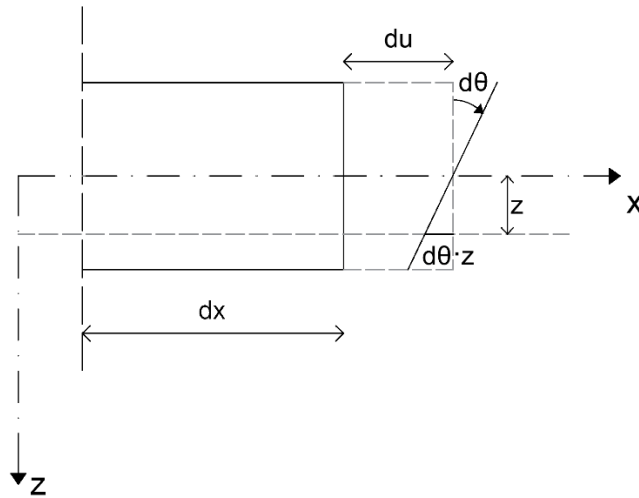
Analitičko rješenje za dvoslojnu gredu bit će prikazano kroz analizu dvije zasebne grede s odgovarajućom vezom između njih. Pretpostavlja se da među slojevima nema poprečnog pomaka (uzdizanja) te da na istoj uzdužnoj koordinati oba sloja imaju jednak zaokret poprečnog presjeka. U nastavku će biti prikazane osnovne jednačbe problema nakon čega će se objasniti postupak rješavanja sustava za model RRR (bez klizanja), model CRR (s ograničenim klizanjem između slojeva) i model ORR (slobodno klizanje između slojeva).

### **3.1. Osnovne jednačbe problema**

Osnovne jednačbe problema čine kinematičke, konstitutivne i ravnotežne jednačbe za svaki sloj te vezne jednačbe koje definiraju vezu između slojeva.

#### **3.1.1. Kinematičke jednačbe**

Deformacija i zakrivljenost povezuju se s pomacima i kutom zaokreta poprečnog presjeka kinematičkim jednačbama. Prema Slici 6, pozitivni uzdužni pomak ( $u$ ) je u smjeru osi  $x$ , poprečni ( $w$ ) u smjeru osi  $z$ , a kut zaokreta poprečnog presjeka ( $\theta$ ) oko osi  $y$  u smjeru kazaljke na satu (od pozitivnog  $x$ -a prema pozitivnom  $z$ -u). Pretpostavljamo da u deformiranom stanju dolazi do relativno malih deformacija obzirom na dimenzije nosača, pa koristimo linearizirane kinematičke jednačbe. Drugim riječima, analiza koju provodimo je geometrijski linearna.



Slika 6: Kinematičke veličine deformirane grede uslijed kombiniranog djelovanja savijanja i uzdužne sile

Aksijalna deformacija ( $\varepsilon$ ) uzrokovana uzdužnom silom i momentom savijanja jedne grede je

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - \frac{d\theta}{dx}z,$$

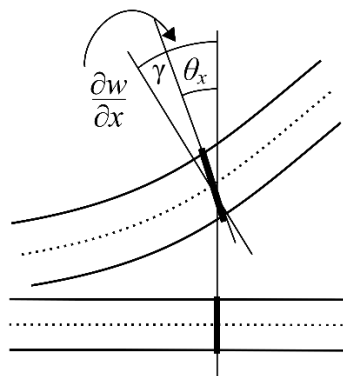
pri čemu prvi član predstavlja doprinos uzdužne sile i možemo ga označiti kao  $\varepsilon_0 = \frac{du}{dx}$ . Ukoliko se promatra deformacija na osi  $x$ , gdje je težište, odnosno  $z = 0$ , drugi član

$\frac{d\theta}{dx}z$ , koji predstavlja doprinos savijanja, otpada. Kut smicanja ( $\gamma$ ) definira se kao razlika nagiba

tangente na deformiranu os nosača ( $\frac{dw}{dx}$ ) i kuta zaokreta poprečnog presjeka ( $\theta$ ), odnosno  $\gamma =$

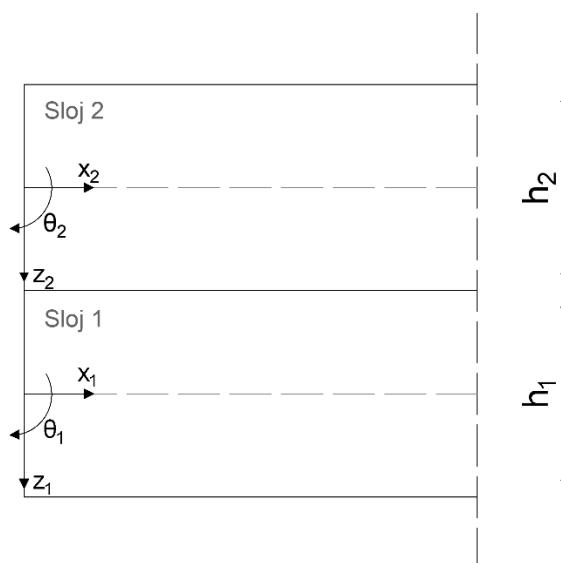
$\frac{dw}{dx} - \theta$  (Slika 7). Treća jednačba u kinematičkim jednačbama daje izraz za zakrivljenost ( $\kappa$ ),

što predstavlja negativni prirast kuta  $\theta$ .



Slika 7: Kut smicanja kao razlika između nagiba tangente na deformiranu os nosača i kuta zaokreta poprečnog presjeka [5]

Za slučaj dvoslojne grede, kinematičke jednadžbe definiraju se za svaki sloj grede zasebno. Uvodimo indeks  $i = 1, 2$ , koji označava sloj, pri čemu 1 predstavlja donji, a 2 gornji sloj grede (Slika 8). Svaki sloj ima vlastiti koordinatni sustav  $x_i - y_i - z_i$ , pri čemu su u smjeru koordinatnih osi  $x_i$  i  $z_i$  definirani pomaci  $u_i$  i  $w_i$ , slijedom, a kutovi zaokreta poprečnog presjeka  $\theta_i$  rotiraju oko osi  $y_i$ . U daljnjim analizama usvojiti ćemo da je  $x = x_1 = x_2$  te pretpostaviti da su osi  $z_i$  težišne osi poprečnog presjeka svakog sloja. Druga pretpostavka je ključna kako bi osigurali da poprečna opterećenja na svaki sloj (koja djeluju u smjeru osi  $z_i$ ) uzrokuju savijanje oko osi  $y_i$ , odnosno deformacije u ravnini  $x - z_i$ . Dodatno će se pretpostaviti da su slojevi simetrični obzirom na os  $y_i$  tako da uzdužna os svakog sloja prolazi sredinom poprečnog presjeka.



Slika 8: Koordinatni sustav za svaki sloj dvoslojne grede s odgovarajućim smjerom zaokreta poprečnog presjeka.

Konačno kinematičke jednadžbe za dvoslojnu gredu glase:

$$\varepsilon_{0,i} = \frac{du_i}{dx}, \quad (1)$$

$$\gamma_i = \frac{dw}{dx} - \theta_i, \quad (2)$$

$$\kappa_i = -\frac{d\theta_i}{dx}, \quad (3)$$

gdje deformacija uzrokovana uzdužnom silom ( $\varepsilon_{0,i}$ ) predstavlja derivaciju uzdužnog pomaka sloja ( $u_i$ ), kut smicanja ( $\gamma_i$ ) definira se kao nagib tangente na defomiranu os nosača ( $\frac{dw}{dx}$ ) umanjen za kut zaokreta poprečnog presjeka ( $\theta_i$ ), a zakrivljenost ( $\kappa_i$ ) je derivacija kuta zaokreta poprečnog presjeka ( $\theta_i$ ). Može se uočiti kako je progib nosača ( $w$ ) isti za oba sloja, jer pretpostavljamo da nema uzdizanja među slojevima. U jednadžbi (3) pojavljuje se negativni predznak jer pozitivna zakrivljenost ogovara omjeru negativnog prirasta kuta zaokreta poprečnog presjeka po  $x$ -u.

### 3.1.2. Konstitutivne jednadžbe

Uz pretpostavku linearnog odnosa između naprezanja i deformacija, veza unutrašnjih sila (rezultanti naprezanja) i deformacija svakog sloja opisana je odgovarajućim konstitutivnim jednadžbama:

$$N_i = E_i A_i \varepsilon_{0,i}, \quad (4)$$

$$T_i = G_i A_{si} \gamma_i, \quad (5)$$

$$M_i = E_i I_i \kappa_i, \quad (6)$$

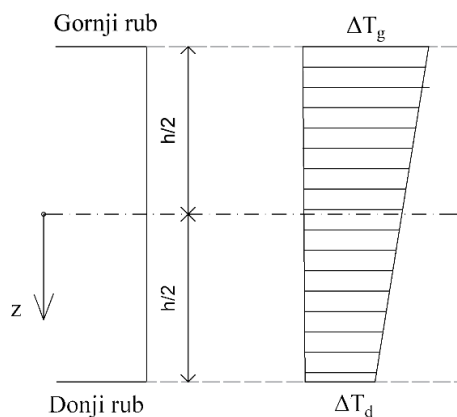
gdje su  $N_i$  i  $T_i$  uzdužna i poprečna sila, a  $M_i$  moment savijanja u sloju  $i$ . Aksijalna krutost je definirana kao  $E_i A_i$ , gdje je  $E_i$  Youngov modul elastičnosti, a  $A_i$  je površina poprečnog presjeka sloja. Posmična krutost je  $G_i A_{si}$ , gdje je  $G_i$  modul posmika i  $A_{si}$  korigirana površina poprečnog presjeka kao posljedica uprosječivanja analize po teoriji elastičnosti na Timošenkovu grednu teoriju za potrebe određivanja posmičnih naprezanja od poprečne sile. Pri tome je  $A_{si} = A_i k_{si}$ , gdje je  $k_{si}$  korekcijski koeficijent koji za pravokutni poprečni presjek iznosi 5/6. Kod Timošenkove gredne teorije pretpostavljamo da poprečni presjek ostaje ravan, ali nije okomit na os nosača. Budući da je posmična deformacija  $\gamma$  zapravo kut za koji se poprečni presjek dodatno rotira, nema promjene posmične deformacije  $\gamma$  po visini presjeka. Iz Hookeovog zakona za posmik zaključujemo da i raspodjela naprezanja po visini presjeka mora biti konstantna. Iz teorije elastičnosti znamo [6] da je raspodjela posmičnih naprezanja od poprečne

sile po visini presjeka kvadratna funkcija (parabola) pa je očito da Timošenkova gredna teorija i u tom segmentu pojednostavljuje analizu. Krutost na savijanje definirana je kao  $E_i I_i$ , gdje je  $I_i$  moment površine II. reda u odnosu na os  $y$  (horizontalnu glavnu os poprečnog presjeka sloja).

U konstitutivnim jednadžbama možemo uvesti i članove koji u obzir uzimaju utjecaj promjene temperature. Ako na gredu djeluje promjenjiva temperatura po visini sloja, ona uzrokuje dodatnu zakrivljenost elementa ( $\kappa$ ) i promjenu uzdužne deformacije ( $\epsilon$ ), zbog zagrijavanja gornje strane poprečnoga presjeka, a hlađenja donje (ili obratno). Stoga do geometrijske deformacije vlakna grede na nekoj visini  $z$  dolazi uslijed naprezanja i promjene temperature, što možemo zapisati kao:

$$\epsilon(z) = u' + \kappa \cdot z = \frac{\sigma(z)}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T(z) \quad (7)$$

gdje je  $\sigma(z)$  naprezanje na nekoj visini  $z$ ,  $\alpha_T$  je koeficijent linearnog toplinskog rastezanja, a  $\Delta T(z)$  je promjena temperature na nekoj visini  $z$ . Pri tome pretpostavljamo da nema promjene temperature uzduž osi grede, odnosno da  $\Delta T$  nije funkcija  $x$ -a.



Slika 9: Promjena temperature po visini presjeka

Ovdje treba reći da model pretpostavlja kako pri određenoj referentnoj temperaturi (npr. sobnoj temperaturi) nema termalnih efekata. Tek pri promjeni temperature  $\Delta T$  u odnosu na referentnu temperaturu dolazi do terminalnih efekata. Ukupna promjena temperature ( $\Delta T$ ) na nekoj visini  $z$  (Slika 9) glasi:

$$\Delta T(z) = \frac{\Delta T_g + \Delta T_d}{2} + \frac{z}{h}(\Delta T_d - \Delta T_g) \quad (8)$$

gdje su  $\Delta T_g$  i  $\Delta T_d$  promjena temperature (u odnosu na referentnu) na gornjem i donjem rubu sloja, slijedom.

Naprezanja na nekoj visini ( $z$ ) iz jednadžbe (7) definiramo kao:

$$\sigma(z) = E[u' + \kappa \cdot z - \alpha_T \cdot \Delta T(z)] \quad (9)$$

Rezultante normalnih naprezanja i njihovih momenata u poprečnom presjeku daju uzdužnu silu  $N_i$  i moment  $M_i$  u sloju  $i$ :

$$\begin{aligned} N_i &= \int \sigma(z) dA = E_i A_i \left( u' - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} + \Delta T_{di}}{2} \right) + E_i \left[ \kappa_i - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} - \Delta T_{di}}{h_i} \right] \int z dA = \quad (9.1) \\ &= E_1 A_1 \left( u' - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} + \Delta T_{di}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i &= \int \sigma(z) z dA = \\ &= E_i \left( u' - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} + \Delta T_{di}}{2} \right) \int z dA + E_i \left[ \kappa_i - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} - \Delta T_{di}}{h_i} \right] \int z^2 dA \quad (9.2) \\ &= E_1 I_1 \left( \kappa_i - \alpha_{Ti} \frac{\Delta T_{gi} - \Delta T_{di}}{h_i} \right) \end{aligned}$$

Također, pretpostavlja se da temperatura nema utjecaj na tangencijalna naprezanja, deformacije i poprečne sile. Konačno, sustav konstitutivnih jednadžbi sada postaje:

$$N_i = E_i A_i \left( \varepsilon_i - \alpha_{Ti} \frac{T_{gi} + T_{di}}{2} \right), \quad (10)$$

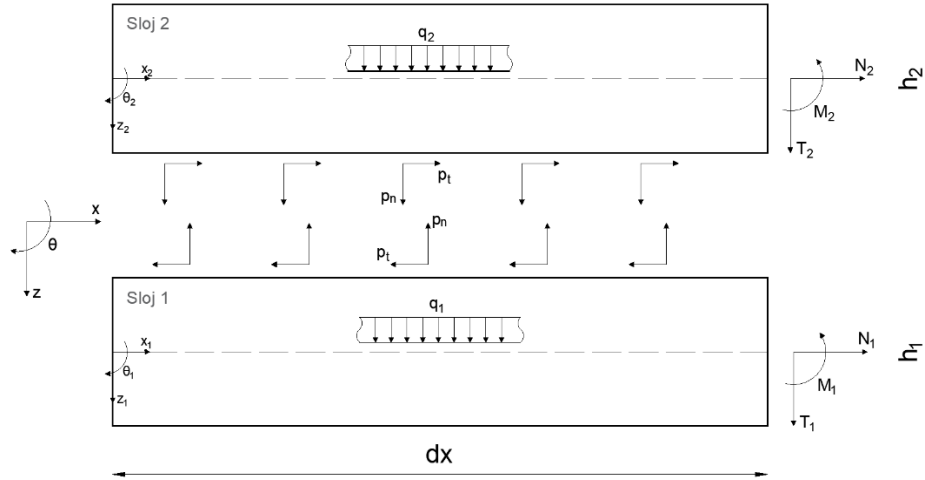
$$T_i = G_i A_s i \gamma_i, \quad (11)$$

$$M_i = E_i I_i \left( \kappa_i + \alpha_{Ti} \frac{T_{gi} - T_{di}}{h_i} \right). \quad (12)$$

### 3.1.3. Ravnotežne jednadžbe



Jednadžbe ravnoteže definiraju odnos između vanjskih opterećenja i unutarnjih sila za svaki sloj. Na Slici 10 prikazana je konvencija smjerova unutarnjih sila ( $N_i$ ,  $T_i$  i  $M_i$ ) te opterećenja  $q_i$  za svaki sloj. Kontaktna naprezanja između slojeva u tangencijalnom i normalnom smjeru označena su s  $p_t$  i  $p_n$ , slijedom. Obzirom da je analiza, kao što smo ranije napomenuli, geometrijski linearna, ravnotežne jednadžbe zapisuju se na početnoj (nedeformiranoj) konfiguraciji.



Slika 10: Dijagram slobodnog tijela i konvencija predznaka

Uspostavljanjem ravnoteže uzdužnih i poprečnih sila te momenata prema Slici 10 dolazi se do ravnotežnih jednadžbi:

$$\frac{dN_1}{dx} - p_t = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dN_2}{dx} + p_t = 0, \quad (14)$$

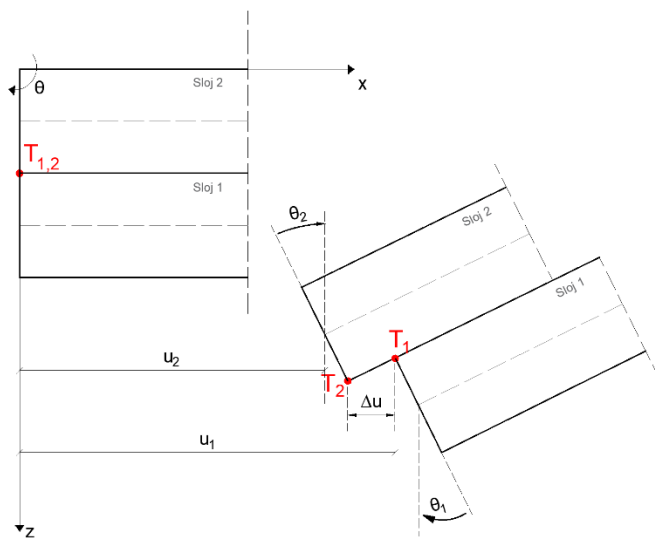
$$\frac{dT_1}{dx} + \frac{dT_2}{dx} + q_1 + q_2 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dM_1}{dx} - T_1 + p_t \frac{h_1}{2} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{dM_2}{dx} - T_2 + p_t \frac{h_2}{2} = 0. \quad (17)$$

### 3.1.4. Vezne jednadžbe

Nakon ove tri osnovne skupine jednadžbi moramo uvesti i vezne jednadžbe kako bismo slojeve povezali u cjelinu i na koncu mogli riješiti sustav jednadžbi. Na Slici 11 uočimo točku  $T_{1,2}$  koja je zajednička točka za oba sloja u nedeformiranom položaju grede, ali se u deformiranom položaju dijeli se na dvije točke  $T_1$  i  $T_2$ , pri čemu ne dolazi to poprečnog razmicanja slojeva, a presjeci koji sadržavaju te točke imaju isti kut rotacije ( $\theta_1 = \theta_2$ ).



Slika 11: Shematski prikaz relativnog klizanja između dva sloja dvoslojne grede

Uz pretpostavku relativno malih rotacija slojeva, relativno klizanje  $\Delta u$  definiramo u smjeru osi  $x$  kao razliku horizontalnog pomaka donjeg ruba gornjeg sloja i gornjeg ruba donjeg sloja:

$$\Delta u = u_{1t} - u_{2b} \quad (18)$$

$$u_{1t} = u_1 + \frac{h_1}{2} \theta_1, \quad u_{2b} = u_2 - \frac{h_2}{2} \theta_2, \quad (19)$$

gdje je  $u_{1t}$  horizontalni pomak gornjeg ruba donjeg sloja (horizontalna komponenta pomaka od  $T_{1,2}$  do  $T_1$ ), a  $u_{2b}$  horizontalni pomak donjeg ruba gornjeg sloja (horizontalna komponenta pomaka  $T_{1,2}$  do  $T_2$ ). Konačno, uz pretpostavku da je  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  imamo:

$$\Delta u = u_1 - u_2 + h_0 \theta, \quad (20)$$

gdje je  $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ .

Nakon definiranja kinematičkih, konstitutivnih, ravnotežnih i veznih jednadžbi, predstaviti će se postupak rješavanja njihovog sustava redom za slučajeve RRR, CRR i ORR.

### 3.2. Model RRR

Budući da je  $\Delta u = 0$ , iz jednadžbe (20) možemo izraziti  $u_1$  preko  $u_2$  pa ćemo kao nepoznanicu imati samo jedan horizontalni pomak ( $u_2$ ). Kombiniranjem ranije izvedenih jednadžbi dolazimo do tri diferencijalne jednadžbe s tri nepoznanice  $u_2$ ,  $w$  i  $\theta$ . Prva jednadžba proizlazi iz zbrajanja jednadžbi (13) i (14), nakon što su konstitutivne jednadžbe uvrštene u ravnotežne jednadžbe.

$$EA_0 u_2'' - E_1 A_1 h_0 \theta'' = 0, \quad (21)$$

gdje je  $EA_0 = E_1 A_1 + E_2 A_2$ .

Ravnotežna jednadžba (15) postaje:

$$q_0 + GA_{s,0} (w'' - \theta') = 0 \quad (22)$$

gdje je  $GA_{s,0} = G_1 A_{s,1} + G_2 A_{s,2}$ .

Treća jednadžba proizašla iz ravnotežnih jednadžbi (16) i (17) glasi:

$$-GA_{s,0} (w' - \theta) - E_2 A_2 h_0 u_2'' - EI_0 \theta'' = 0, \quad (23)$$

gdje je  $EI_0 = E_1 I_1 + E_2 I_2$ .

Ovaj sustav s tri jednađbe (21), (22) i (23) i tri nepoznanice ( $u_2, w$  i  $\theta$ ), riješili smo pomoću programa *Wolfram Mathematica*. Kao rezultat dobivene su funkcije  $u_2(x)$ ,  $w(x)$  i  $\theta(x)$  u kojima se pojavljuje šest konstantni integracije. Kao što će biti prikazano kasnije, te konstante integracije se određuju iz rubnih uvjeta za specifični problem koji se rješava.

### 3.3. Model CRR

U ovom modelu dozvoljeno je klizanje među slojevima ( $\Delta u \neq 0$ ) te stoga, za razliku od modela RRR, iz jednađbi (18)-(20), više nije moguće izraziti  $u_2$ . Iz tog razloga javljaju se 4 nepoznanice ( $u_1, u_2, w$  i  $\theta$ ) u 4 jednađbe. Prve dvije jednađbe dobivaju se uvrštavanjem konstitutivnih jednađbi u ravnotežne jednađbe (13) i (14), što daje:

$$E_1 A_1 u_1'' - p_t = 0 \quad (24)$$

$$E_1 A_2 u_2'' + p_t = 0 \quad (25)$$

Treća jednađba proizašla je iz ravnotežne jednađbe (15) i glasi:

$$q_0 + GA_{s,0} (w'' - \theta') = 0, \quad (26)$$

a četvrta jednađba

$$-EI_0 \theta'' - GA_{s,0} (w' - \theta) + h_0 p_t = 0, \quad (27)$$

dobivena je zbrajanjem ravnotežnih jednađbi (16) i (17), nakon što su u njih uvrštene konstitutivne i ravnotežne jednađbe.

Zbrajanjem jednađbe (26) i prve derivacije (27) po  $x$ -u, dobiva se:

$$q_0 + h_0 p_t' - EI_0 \theta''' = 0 \quad (28)$$

Iz jednađbe (24) i (25) izražava se  $u_1''$  i  $u_2''$  preko  $p_t$ , U modelu CRR u kojem je dozvoljeno klizanje, uvodi se modul klizanja  $K_t$  koji povezuje relativno klizanje  $\Delta u$  s tangencijalnim naprežanjima na kontaktu  $p_t$  preko linearno-elastičnog konstitutivnog zakona:

$$p_t = \Delta u K_t, \quad (29)$$

gdje je  $\Delta u$  definiran veznom jednađbom (20). Uvrštavanjem izraza za  $u_1''$  i  $u_2''$  preko  $p_t$  u drugu derivaciju po  $x$ -u izraza (20) u kojem se  $\Delta u$  izražava preko  $p_t$  koristeći izraz (29) dobiva se

$$K_t \frac{EA_0}{EA_p} p_t + h_0 K_t \theta'' - p_t'' = 0 \quad (30)$$

gdje je  $EA_p = E_1 A_1 E_2 A_2$ . Derivacijom jednađbe (30) u koju se uvrštavaju izrazi za  $p_t''$  i  $p_t'$  dobiveni iz jednađbe (28), dolazimo do diferencijalne jednađbe po samoj jednoj nepoznatoj funkciji:

$$\theta^V - \delta_1 \theta''' + \delta_2 = 0, \quad (31)$$

gdje je

$$\delta_1 = K_t \left( \frac{EA_0}{EA_p} + \frac{h_0^2}{EI_0} \right), \quad \delta_2 = \frac{K_t EA_0}{EI_0 EA_p} q_0. \quad (32)$$

Iz jednađbe (31) dolazi se do rješenja za  $\theta(x)$  s 5 konstanti integracije. Iz kombinacije jednađbi (28) i (30) najprije se određuje  $p_t(x)$ , zatim se iz jednađbe (29) dobiva  $\Delta u(x)$ , a iz jednađbe (24)  $u_1(x)$ , pri čemu se generiraju još dvije konstante integracije. Korištenjem vezne jednađbe određuje se izraz za  $u_2(x)$ , te se putem jednađbe (27) dolazi do izraza za  $w(x)$  uz još jednu dodatnu konstantu integracije. Stoga, kompletno rješenje za model CRR ima 8 konstanti integracije koje se za specifični problem određuju iz rubnih uvjeta.

### 3.4. Model 0RR

U ovom modelu dozvoljeno je klizanje, kao i u prethodnom modelu CRR, ali ne postoji nikakav otpor klizanju, što znači da je  $K_t = 0$ . Budući da rješenje dobiveno za model CRR (čiji je izvod predstavljen u poglavlju 3.3) nije moguće koristiti za  $K_t = 0$  (jer bi se pojavilo dijeljenje s nulom), do rješenja se mora doći drugim putem koji je predstavljen ovdje. Kombiniranjem kinematičkih, konstitutivnih i ravnotežnih jednadžbi za svaki sloj dobiva se:

$$E_i A_i u_i'' = 0 \quad (33)$$

$$G A_{s,0} (w'' - \theta') + q_0 = 0 \quad (34)$$

$$-E_i I_i \theta'' - G_i A_{s,i} (w' - \theta) = 0 \quad (35)$$

Zbrajanjem jednadžbe (35) za oba sloja, dobiva se:

$$-E I_0 \theta'' - G A_{s,0} (w' - \theta) = 0 \quad (36)$$

Iz jednadžbe (36) izrazi se  $w' - \theta$ , te se uvrsti taj izraz u jednadžbu (34):

$$-E I_0 \theta''' + q_0 = 0 \quad (37)$$

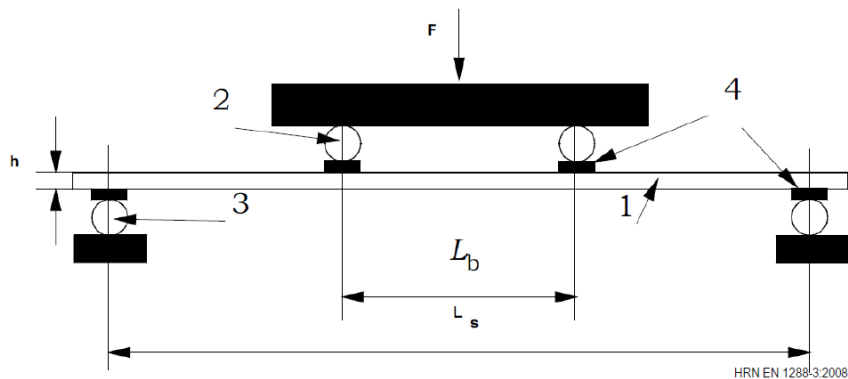
Iz jednadžbe (37) dobiva se izraz za  $\theta(x)$  uz 3 konstante integracije, izraz za  $w(x)$  iz jednadžbe (36) uz jednu dodatnu konstantu integracije, te izrazi za  $u_1(x)$  i  $u_2(x)$  iz jednadžbi (33) i (34) uz 4 dodatne konstante integracije. Stoga, kompletno rješenje za model 0RR ima 8 konstanti integracije koje se za specifični problem određuju iz rubnih uvjeta.

## 4. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

Lamelirano staklo često nosi kratkotrajna opterećenja (<30 sekundi) okomita na svoju ravninu. U takvim uvjetima opterećenja, deformacija je složena zbog dva glavna razloga: (1) velikog nesklada modula elastičnosti između stakla i međusloja; (2) svojstva međusloja koja ovise o temperaturi [7]. Kako bi se istražio utjecaj različitih međuslojeva na ponašanje lameliranog stakla pod takvim uvjetima, u ovom radu korišteni su isključivo podaci iz eksperimenta provedenog od strane Huang, Xiaokun i suradnika [6], korištene su dvije vrste međusloja: polivinil butiral (PVB) i Ionoplast SentryGlas® Plus. U oba slučaja radi se o visokoelastičnim materijalima čiji prijenos posmičnih sila ovisi o okolnoj temperaturi. Ovaj eksperiment, čiji su rezultati objavljeni u radu *The Flexural Performance of Laminated Glass Beams under Elevated Temperature*, predstavlja temelj za analizu u ovom radu [7].

Lamelirano staklo koje se koristi u konstrukcijama često je izloženo vanjskim uvjetima. Pod utjecajem sunčevog zračenja, površinske temperature lameliranog stakla mogu biti i do 80°C. U ovom eksperimentalnom istraživanju analizirano je ponašanje lameliranog stakla s PVB i Ionoplast međuslojem. Testovi su provedeni na šest razina temperature, odnosno 25°C, 40°C, 50°C, 60°C, 70°C i 80°C. Nominalna debljina uzoraka ispitanih u ovom eksperimentu je 10 mm. Uzorci lamelinarog stakla proizvedeni su od dva sloja od 5 mm debele kaljene natrijev-vapneno-silikatne staklene ploče s međuslojem debljine 0.76 mm. Duljina i širina svih uzoraka je 1100 mm i 360 mm. Youngov modul stakla iznosi  $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ , a Poissonov koeficijent je  $\nu = 0.22$  uzeto prema prEN 16612 2013 [5].

Istraživanje koristi shemu savijanja u četiri točke, a uzorci su podvrgnuti kratkotrajnim opterećenjima. Shema savijanja u četiri točke radila se po normi EN 1288-3:2008. Shema opterećenja prikazana je na Slici 12. Uzorci dimenzije 1100 x 360 mm (1) su postavljeni na dva valjkasta oslonca (3) s konstantnim rasponom  $L_s = 1000 \text{ mm}$ . Opterećenje se primjenjuje na uzorke preko dva dodatna valjka (2) s razmakom  $L_b = 200 \text{ mm}$ . Između uzorka i valjka postavljene su gumene trake (4) kako bi se smanjila koncentracija naprezanja. Za uvjete visoke temperature ( $\geq 40^\circ\text{C}$ ) testovi su provedeni u posebno izrađenoj temperaturnoj komori. Kutija je izrađena od drva i obložena polistirenskim pločama na unutarnjim plohama radi osiguranja toplinske izolacije (Slika 13).



Slika 12: Savijanje u četiri točke, EN 1288-3:2008 [4]



Slika 13: Uređaj za provođenje testa i termalna kutija

Podaci prikupljeni tijekom eksperimenta su temperatura u komori, opterećenje (sila) na kidalici te normalna naprezanja na donjem rubu uzorka i progibi izmjereni na sredini raspona. Uzorci su monotono opterećeni prirastom maksimalnog normalnog naprezanja od 2 MPa/s, te se test zaustavlja pri 35 MPa i stoga traje otprilike 17-18 sekundi. Podaci se automatski prikupljaju računalnim sustavom. Postupak za testiranje na povišenim temperaturama je sljedeći: prvo se postave uzorci i zatvori se temperaturna komora. Zatim se zagrijava na zadanu temperaturu,



koja se održava 30 minuta. Instrumenti se postave na nulu, nakon čega se nanosi opterećenje i prikupljaju se podaci. Potom se opterećenje rastereti na 0, kutija ostaje zatvorena i temperatura se podiže na višu razinu, ponavljajući korake zagrijavanja i prikupljanja podataka.

Istraživanje je usmjereno na odnose između opterećenja i naprezanja te opterećenja i deformacije s ciljem procjene kapaciteta prijenosa posmičnih sila PVB i Ionoplast međusloja pri različitim temperaturama. Za svrhe usporedbe, također su testirani monolitno staklo i dvostruko slojevito staklo iste nominalne debljine kao i uzorci lameliranog stakla. Budući da se očekuje da kaljeno staklo od natrij-vapno-silikata neće biti osjetljivo na temperature u rasponu od 25°C do 80°C, uzorci monolitnog i dvostruko slojevitog stakla testirani su samo na sobnoj temperaturi od 25°C.

Granični slučajevi su uspoređeni i s teorijskim rezultatima. Teorijsko rješenje za progib izvedeno je po metodi sila, pri čemu je zanemaren doprinos smicanja.

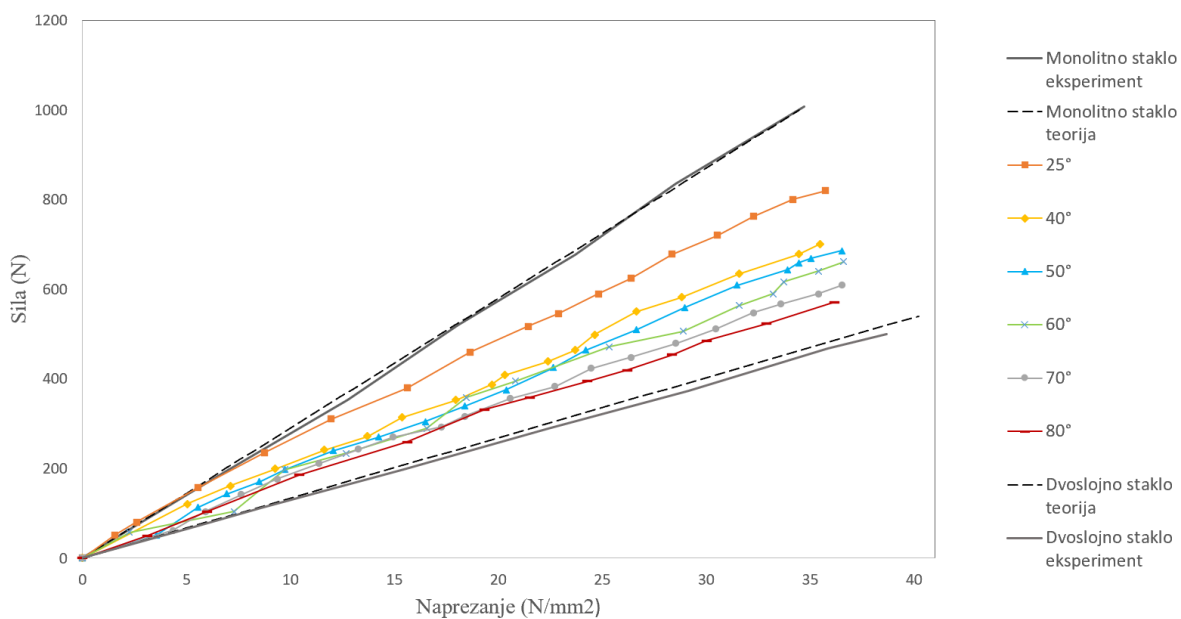
$$\delta = \frac{F(L_s - L_b)(1 - \nu^2)}{8EB(h)^3} (3L_s^2 - (L_s - L_b)^2) \quad (38)$$

gdje je  $B$  širina uzorka (grede). Teorijsko rješenje za maksimalno naprezanje dobiveno je dijeljenjem maksimalnog momenta savijanja  $(F(L_s - L_b)/4$  u srednjoj zoni čistog savijanja) s momentom otpora čitavog (kompozitnog) presjeka  $(Bh^3/6)$ , što konačno daje:

$$\sigma = \frac{3F(L_s - L_b)}{2Bh^2} \quad (39)$$

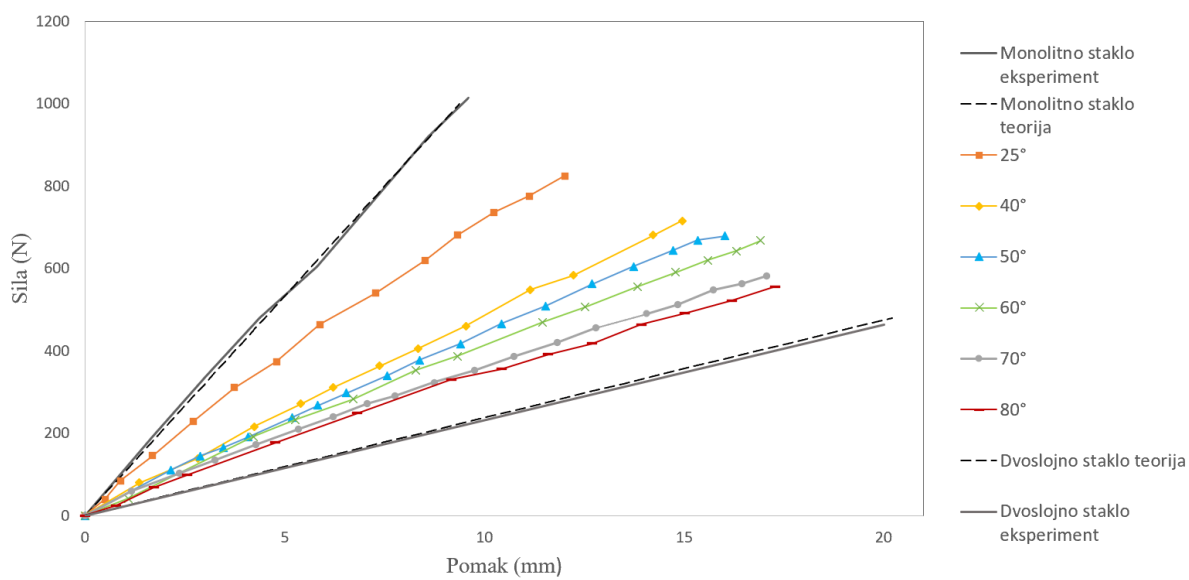
Pri postupnom opterećivanju uzoraka (postupnim povećanjem sile  $F$ ) mjereno je progib te su kreirani rezultati sila-pomak i sila-naprezanje pri različitim temperaturama, što je prikazano na slikama 14-17. Možemo primijetiti da krivulje na grafovima pokazuju približno linearne karakteristike na svim temperaturnim razinama što upućuje na to da se s dovoljnom točnošću može pretpostaviti da je ponašanje stakla i međusloja linearno elastično. Progibi u ovom eksperimentu idu na otprilike 1-2% u odnosu na duljinu raspona, što ulazi u domenu u kojoj je geometrijski linearna teorija dovoljno točna.

### PVB NAPREZANJA

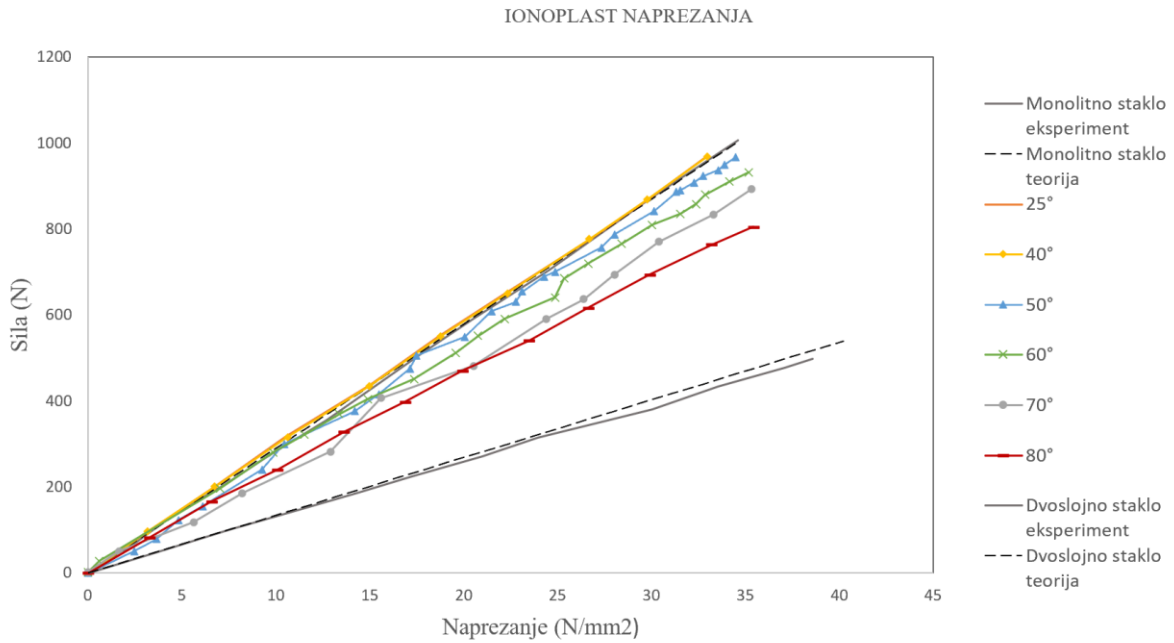


Slika 14: Sila-naprezanje međusloja PVB

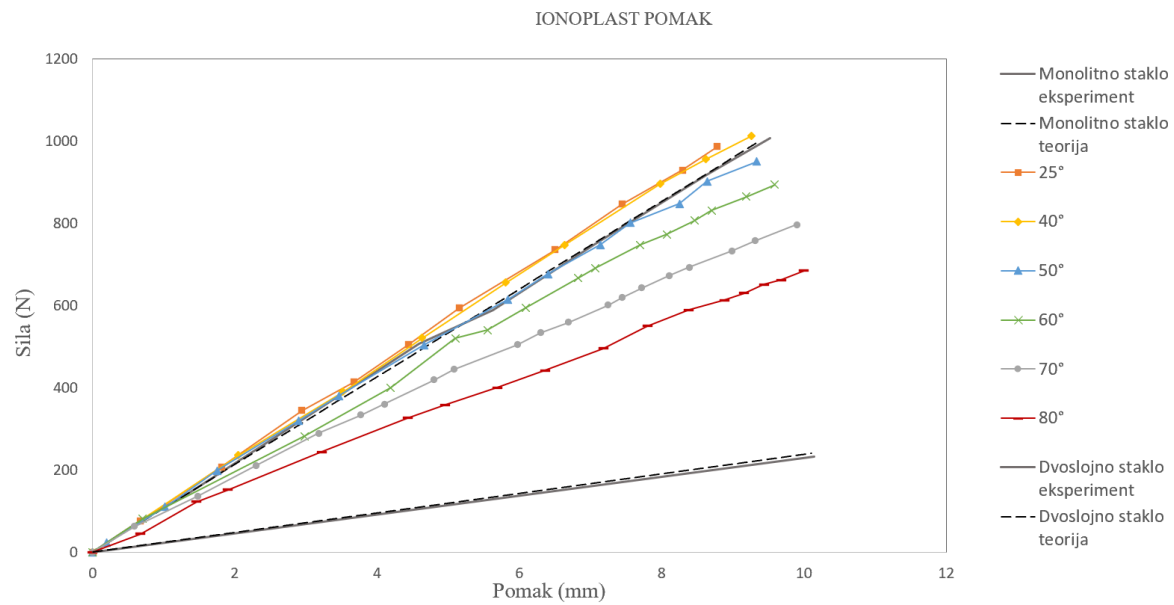
### PVB POMAK



Slika 15: Sila-pomak međusloja PVB



*Slika 16: Sila-naprezanje međusloja Ionoplasta*



*Slika 17: Sila-pomak međusloja Ionoplasta*

Rezultati prikazani na Slikama 14-17 jasno pokazuju kako se progib PVB i Ionoplast lameliranog stakla povećava se s porastom temperature. Kod lameliranog stakla s PVB međuslojem, progib se značajno povećava kada temperature naraste s 25°C na 40°C, dok je kod Ionoplasta to primjetno tek kada temperature naraste preko 60°C.

Određivanje efektivne debljine presjeka je postupak u kojem se kompozitni presjek svodi na ekvivalentni monolitni presjek koji ima istu ukupnu krutost kao originalni kompozitni presjek. Jednadžba za određivanje efektivne debljine presjeka dobivena je iz jednadžbe za progib, bazirane na Euler-Bernoullijevoj grednoj teoriji (zanemaruje se doprinos posmičnih deformacija) za progib na sredini raspona jednostavno oslonjene grede pri savijanju u četiri točke:

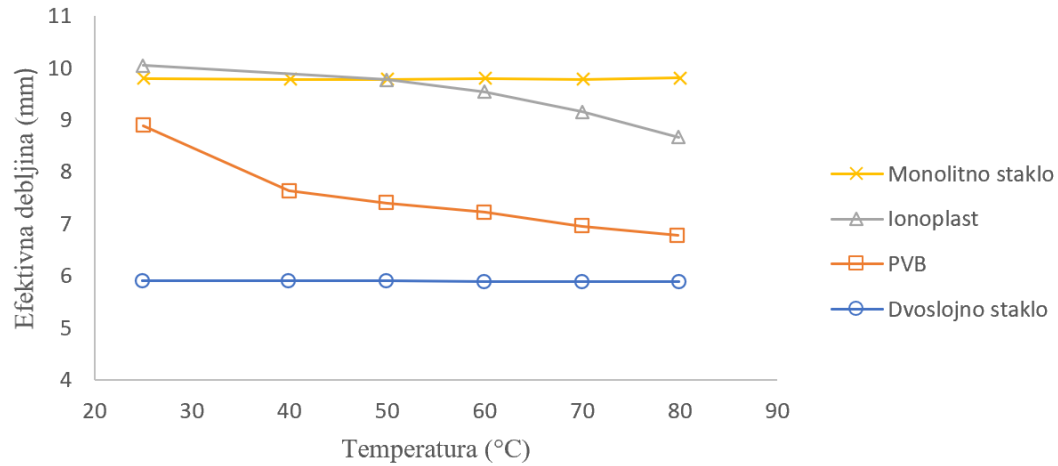
$$\delta = \frac{F(L_s - L_b)(1 - \nu^2)}{8EBh^3} [3L_s^2 - (L_s - L_b)^2]. \quad (38)$$

Iz jednadžbe za progib izražava se debljina presjeka i dolazi se do jednadžbe za efektivnu debljinu presjeka:

$$h_{ef} = \sqrt[3]{\delta(L_s - L_b)(1 - \nu^2)[3L_s^2 - (L_s - L_b)^2]/8EB} \quad (39)$$

Promjena efektivne debljina lameliranog stakla s PVB i Ionoplast međuslojem pri različitim temperaturama dana je na Slici 18. Kod PVB-a je efektivna debljina lameliranog stakla približno 90% debljine monolitnog stakla koji ima istu nominalnu debljinu za 25°C, ali brzo pada na 75% kad se temperature poveća na 40°C. S daljnjim povećanjem temperature efektivna debljina nastavlja opadati, ali sporije. Važno je napomenuti da pri temperature od 80°C efektivna debljina PVB lameliranog stakla je još uvijek približno 15% veća od onog kod dvoslojnog stakla za istu nominalnu debljinu. To znači da na temperaturi od čak 80°C, sprezanje između dva sloja stakla za PVB međusloj nije potpuno izgubljeno.

### Promjena efektivne debljine

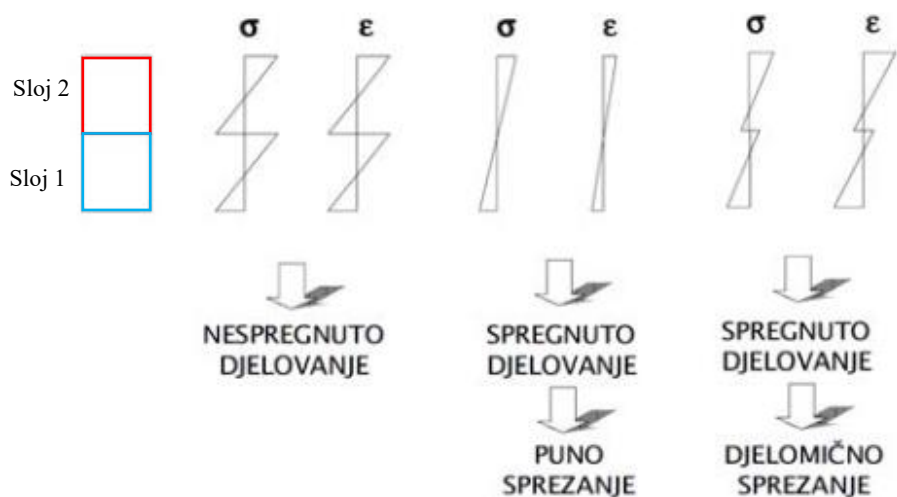


Slika 18: Promjena efektivne debljine

Za lamelirano staklo s Ionoplastom efektivne debljine su veće (oko 1-2%) nego kod monolitnog stakla u temperaturnim rasponima od 25°C do 40°C. To je zato što je u ovom eksperimentu prosječna debljina lameliranog Ionoplast stakla 10,1 mm, a monolitnog stakla 9.8 mm. Prisutnost Ionoplast međusloja povećava presjek i posljedično rezultira većom efektivnom debljinom. Kada se temperature okoline poveća na 50°C efektivna debljina postaje vrlo blizu debljine monolitnog stakla. Daljnjim povećanjem temperature, efektivna debljina postaje manja od debljine monolitnog stakla. Na 80°C efektivna debljina lameliranog stakla s međuslojem od Ionoplasta je oko 88% monolitnog stakla.

Na Slici 18 vidimo da su efektivne debljine za monolitno i dvoslojno staklo konstantne obzirom na temperaturu. To je zato jer su ti uzorci, kao što je ranije navedeno, ispitani samo na temperaturi od 25°C te je pretpostavljeno da više temperature u tom rasponu neće utjecati na njihova svojstva. Stoga, pretpostavlja se njihova se efektivna debljina neće mijenjati s temperaturom te da je pri svim temperaturama jednaka stvarnoj debljini stakla.

Savijanje lameliranog stakla može se analizirati na osnovu jednog od tri teorijska modela: a) potpuno spregnuti presjek, b) djelomično spregnuti presjeka i c) nespregnuti presjek. Kod potpunog spreznjanja, lamelirano staklo ponaša se kao monolitno staklo i nema relativnog klizanja kada se progiba. U slučaju nespregnutog presjeka, pretpostavlja se da slojevi stakla djeluju nezavisno i svaki sloj može slobodno klizati u odnosu na drugi. U djelomično spregnutom stanju, svaki sloj lameliranog stakla dolazi do prijenosa posmičnih sila prenosi između slojeva pa je klizanja među njima ograničeno. Za PVB se pokazalo da se na rasponu između 25°C i 80°C graf nalazi između monolitnog i dvoslojnog stakla što ga čini djelomično spregnutim presjekom. S druge strane, Ionoplast se prema rezultatima prikazanim na Slici 18 nalazi između monolitnog i slojevitog stakla jedino kada temperatura pređe 50°C. Međutim, takvo ponašanje nije realno, razlog tome je, kao što je ranije objašnjeno, taj što je početna debljina lameliranog stakla s Ionoplastom uzeta veća (10.1 mm) od debljine monolitnog stakla (9.8 mm). Kada bi te debljine bile iste, lamelirano staklo s Ionoplastom bi djelovalo kao djelomično spregnut presjek u čitavom rasponu temperatura (od 25°C do 80°C). Ipak, treba primijetiti da je spreznjanje kod Ionoplasta puno efikasnije nego kod PVB-a. Gotovo je savršeno kod nižih temperatura, a pri porastu temperature manje degradira.



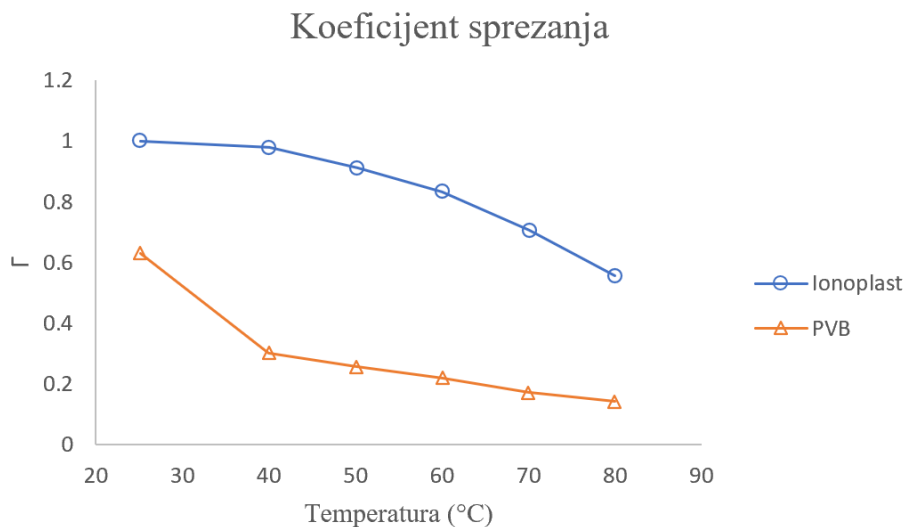
Slika 19: Modeli spreznjanja [1]

Prijenos posmičnih sila između slojeva u eksperimentu je prikazana koeficijentom smicana ( $\Gamma$ ) u skladu s normom prEN 16612 (2013) [8]. Ovaj koeficijent varira od 0 do 1. Vrijednost 0 znači da se nema spreznjanja, odnosno prijenosa posmičnih naprezanja, između slojeva stakla, tj.

lamelirano staklo je dvoslojno staklo. Kada je koeficijent jednak jedinici znači da se posmična naprezanja mogu učinkovito prenositi i u tom slučaju lamelirano staklo je potpuno spregnuto. Koeficijent sprezanja u normama se izražava preko efektivne debljine:

$$\Gamma = \frac{(h_{ef}^3 - h_1^3 - h_2^3)(h_1 + h_2)}{12h_1h_2[0.5(h_1 + h_2) + h_v]} \quad (40)$$

gdje su  $h_1, h_2$  i  $h_v$ , debljine slojeva i debljina međusloja u lameliranom staklu. Na Slici 20 vidi se da je koeficijent smicanja za PVB približno 0.62 na 25°C i 0.14 na 80°C. Za Ionoplast vrijednost koeficijenta smicanja je približno 1 na 25°C i 0.56 na 80°C. Smanjenje koeficijenta za PVB je najznačajnije od 25°C do 40°C, dok je smanjenje koeficijenta za Ionoplast osjetno kada temperature podigne iznad 60°C. Ipak, i na temelju analize koeficijenta sprezanja može se zaključiti kako je sprezanje lameliranog stakla Ionoplastom efikasnije.



Slika 20: Promjena koeficijenta sprezanja

## 5. VALIDACIJA MODELA

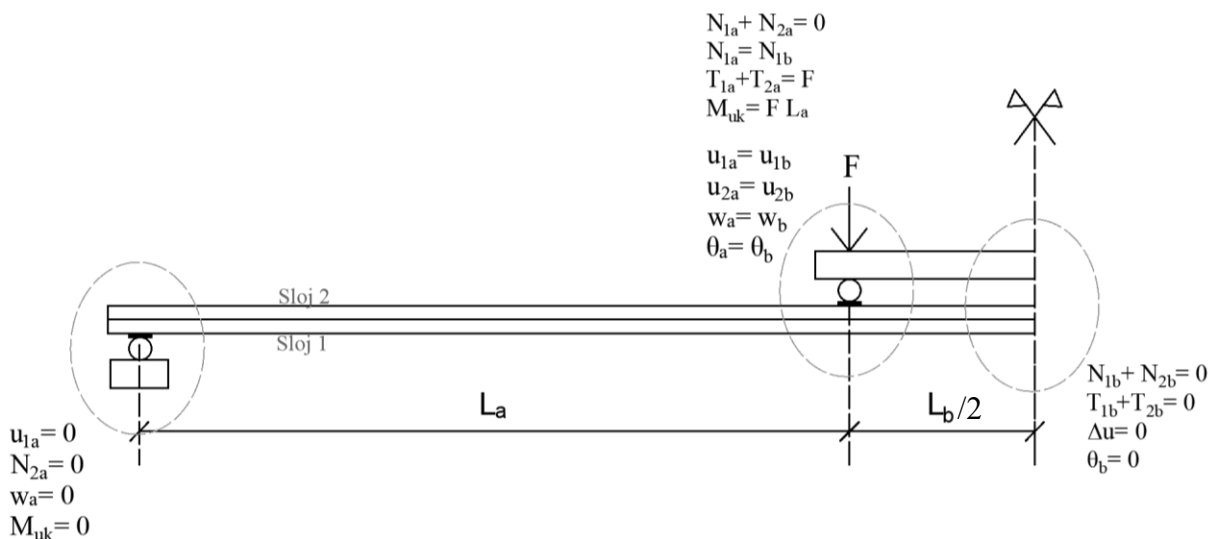
### 5.1. Model analitičkog rješenja

Dobiveni rezultati ovog eksperimenta uspoređena su s analitičkim rješenjima predstavljenim u ovom radu. Za usporedbu monolitnog stakla, korišten je model RRR u kojem nije dopušteno klizanje između slojeva, što odgovara apsolutno krutom međusloju (krutost  $K_t = \infty$ ). Za slojevito staklo koristimo model ORR, kod kojeg nema prijenosa tangencijalnih napreznja na kontaktu. Za usporedbu eksperimentalnih rezultata za lamelirano staklo s analitičkim rješenjem iz ovog rada koristit će se model CRR. Putem poklapanja rezultata doći će se do odgovarajuće krutosti međusloja  $K_t$  za određenu temperaturu, preko kojeg se također može ocijeniti razina spreznja lameliranog stakla.

U softveru *Wolfram Mathematica*, radi pojednostavljenja, modelirali smo polovicu uzorka s obzirom na njegovu potpunu simetričnost. Ta polovica podijeljena je na segment  $a$  i segment  $b$ , pri čemu se spoj tih segmenata nalazi na mjestu prijenosa koncentrirane sile (pola od ukupne sile na kidalici) na uzorak. Veza između segmenata i uvjeti na krajevima uzorka definirani su rubnim uvjetima te uvjetima kontinuiteta. Na Slici 21 prikazana je shema s odgovarajućim rubnim uvjetima i uvjetima kontinuiteta za rješenje modela CRR i ORR u softveru *Wolfram Mathematica* koje ima po 8 konstanti integracije za segmente  $a$  i  $b$  (ukupno 16).

Na lijevom kraju, pomak donjeg sloja je spriječen, a uzdužna sila u gornjem sloju je nula jer se horizontalna reakcija može javiti samo na dodiru s osloncem u donjem sloju. Progib je također spriječen te je ukupni moment na lijevom kraju nula. Ukupne vrijednosti reznih sila za čitavu spregnutu gredu ne ovise o uvjetima na međusloju. Tako ukupnu uzdužnu silu, poprečnu silu i moment možemo redom definirati kao:  $N_T = N_1 + N_2$ ,  $T_T = T_1 + T_2$  i  $M_T = M_1 + M_2 + N_1 h_2 / 2 - N_2 h_1 / 2$ . Iz ravnoteže momenata u odnosu na bilo koju referentnu točku u presjeku, jasno je da se ukupni moment savijanja sastoji od  $M_1$  i  $M_2$ , kao i od doprinosa uzdužnih sila u svakom sloju. U slučaju čistog savijanja ( $N_T = 0$ ), ukupni moment je jednak bez obzira na izbor referentne točke. Međutim, kada  $N_T \neq 0$  ukupni moment savijanja mijenja se ovisno o izboru referentne točke, tj. ovisno o ekcentricitetu uzdužne sile u odabranoj referentnoj točki [2].

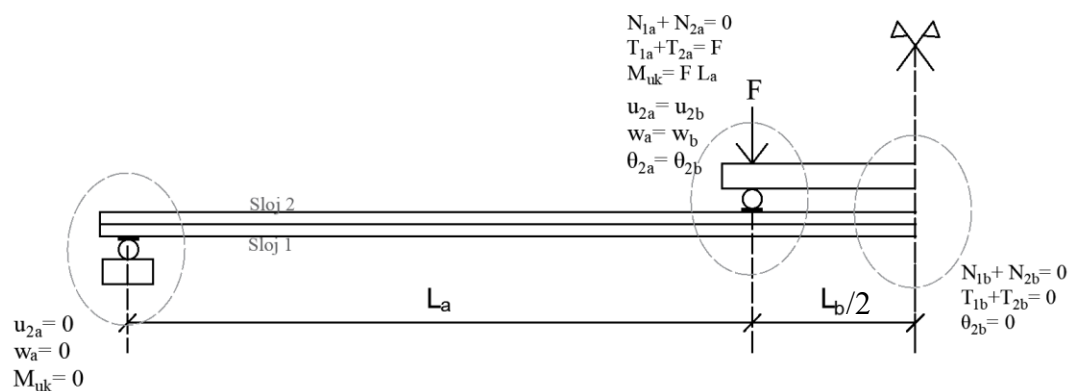




Slika 21: Shema modela CRR i ORR s dva segmenta (a i b) i odgovarajućim rubnim uvjetima

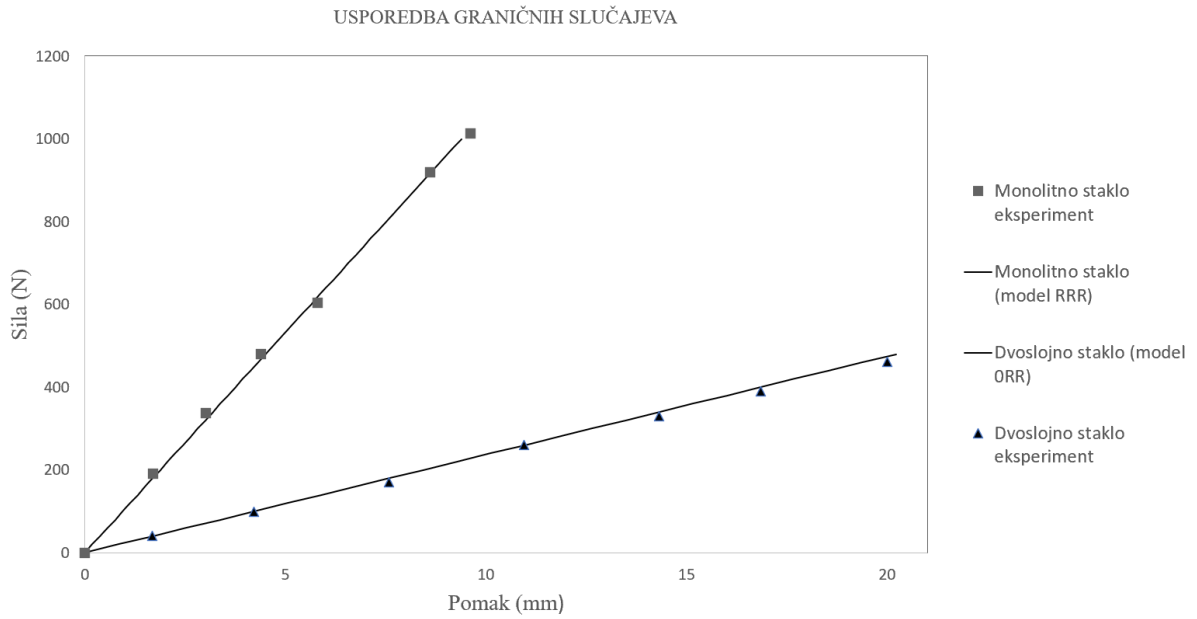
Na mjestu koncentrirane sile, gdje se spajaju segmenti *a* i *b* treba najprije definirati kontinuitet pomaka i kutova zaokreta oba sloja. To je ukupno 4 uvjeta kojima definiramo da su horizontalni i vertikalni pomaci te kut zaokreta poprečnog presjeka svakog sloja na tom mjestu jednaki za oba segmenta. S dodatna 4 uvjeta na tom mjestu definiramo vrijednosti ukupnih unutrašnjih sila za dvoslojnu gredu. To su unutrašnje sile za oba presjeka zajedno koje se uravnotežavaju s vanjskim opterećenjem i po iznosu su identične unutrašnjim silama koje bi dobili na standardni način za slučaj da je greda monolitna (jednoslojna). Stoga, ukupna uzdužna sila ( $N_T = N_1 + N_2$ ) na prijelazu iz segmenta *a* u *b* je nula te dodatno mora postojati kontinuitet uzdužnih sila u svakom sloju između segmenata *a* i *b*. Ukupna poprečna sila ( $T_T = T_1 + T_2$ ) je jednaka  $F/2$  (što je konstantni iznos za čitavi segment *a*, dok je u segmentu *b* ukupna poprečna sila jednaka nuli), a ukupni moment je  $\frac{F}{2}L_a$ . Na desnom kraju modela, tj. na sredini nosača, ukupna uzdužna i poprečna sila su nula (to znamo iz dijagrama ukupnih unutrašnjih sila). Dopuštamo da se nosač na tom mjestu pomiče horizontalno jer pretpostavljamo da je desni oslonac (kojeg u ovom modelu nema) klizni. Stoga, osim uvjeta da je rotacija oba sloja na sredini jednaka nuli (zbog simetrije), dodatni uvjet u horizontalnom smjeru je taj da nema klizanja između slojeva. Naime, za ovakav simetrični nosač poznato je da je klizanje maksimalno na rubovima nosača, a na sredini jednako nuli [2].

Na Slici 22 prikazana je shema rubnih uvjeta i uvjeta kontinuiteta za model RRR u softveru *Wolfram Mathematica* koji ima po 6 konstanti integracije za segmente *a* i *b* (ukupno 12). Način određivanja rubnih uvjeta vrlo je sličan onome za model CRR. Jedina razlika je u tome što u je u horizontalnom smjeru dovoljan samo po jedan uvjet na lijevom i desnom kraju modela, te dva uvjeta na spoju segmenata *a* i *b*.

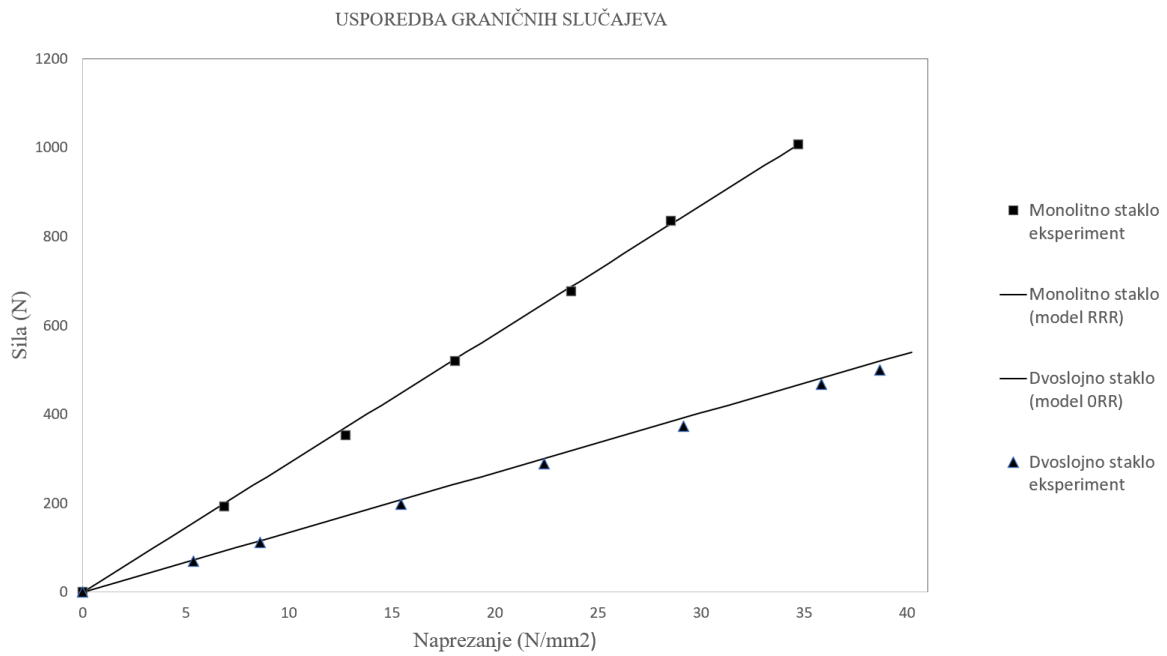


Slika 22: Shema modela RRR s dva segmenta (*a* i *b*) i odgovarajućim rubnim uvjetima

Prvo smo modelirali granične slučajeve, monolitno staklo u modelu RRR i dvoslojno staklo u modelu ORR. Očekivali smo dobro poklapanje našeg analitičkog modela s eksperimentalnim rezultatima, što se pokazalo točnim. Na Slici 23 prikazani su rezultati graničnih slučajeva usporedbe analitičkog modela i eksperimentalnih podataka za dijagram sila-pomak. Analitički rezultati prikazani su punom crtom, dok su eksperimentalni rezultati prikazani punim markerima. Na Slici 24 prikazani su rezultati za dijagram sila-naprezanje na isti način.

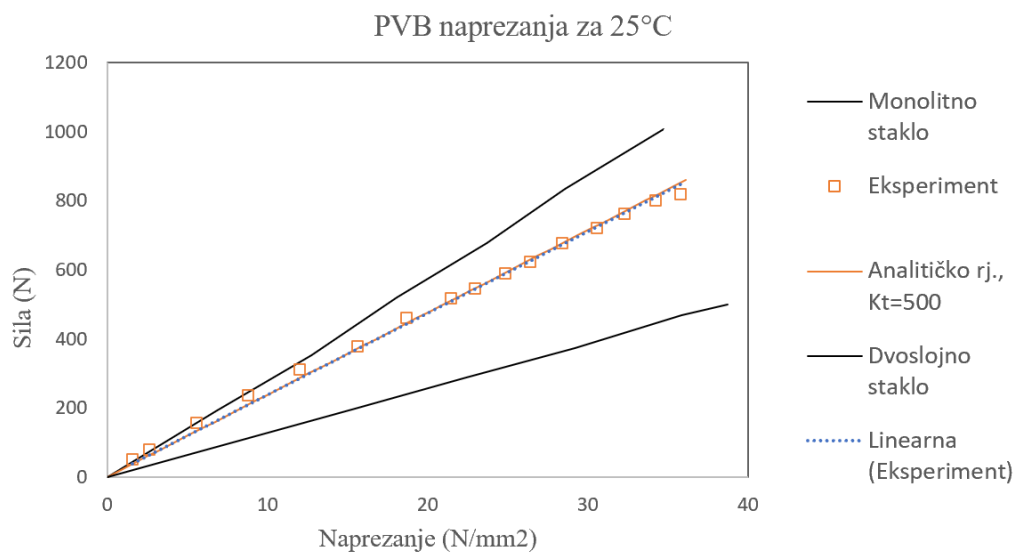
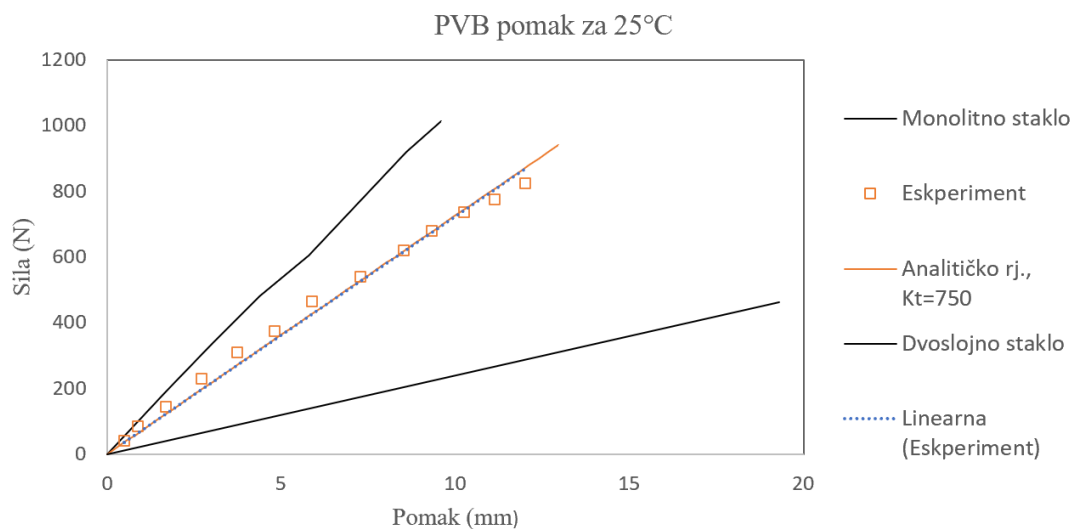


Slika 23: Usporedba graničnih slučajeva sila-pomak

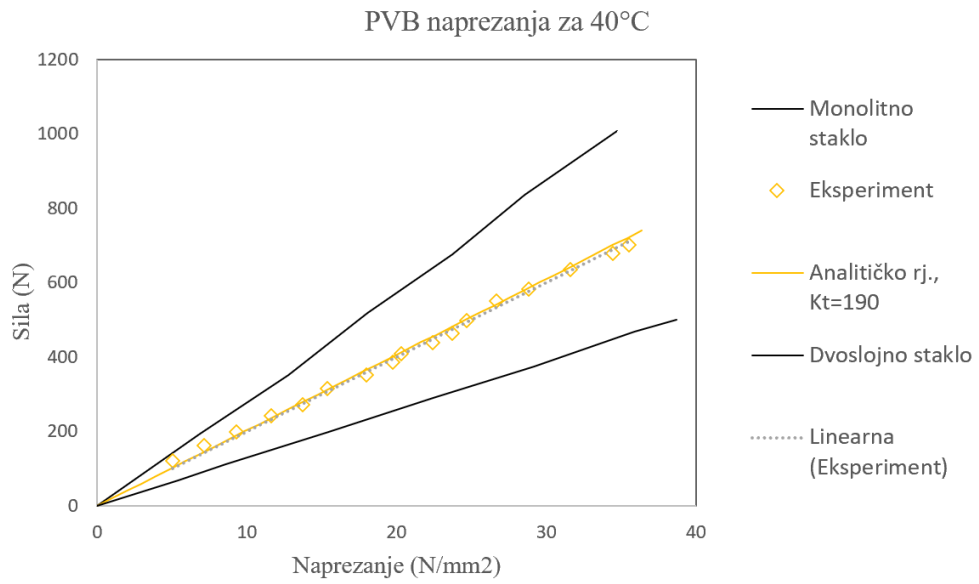
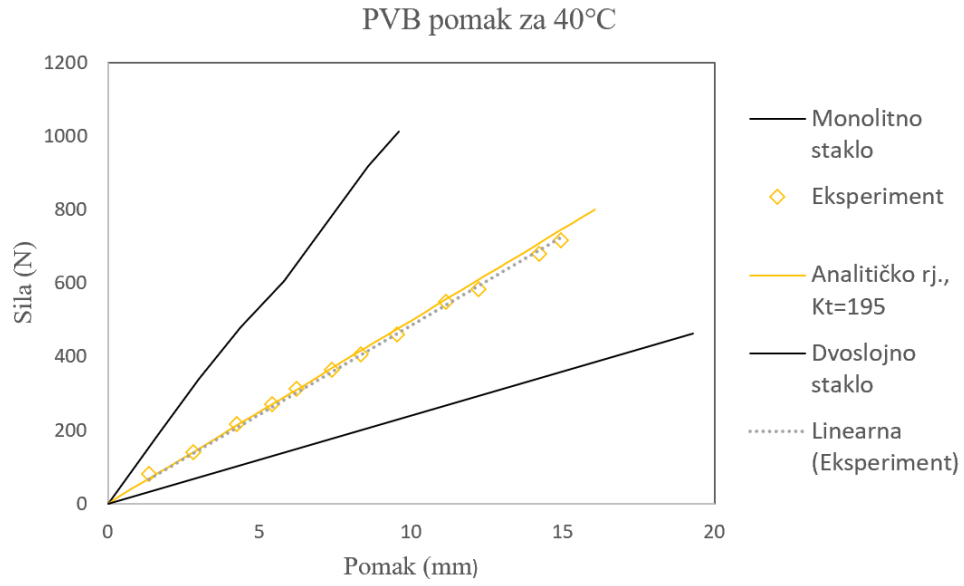


Slika 24: Usporedba graničnih slučajeva sila-naprezanje

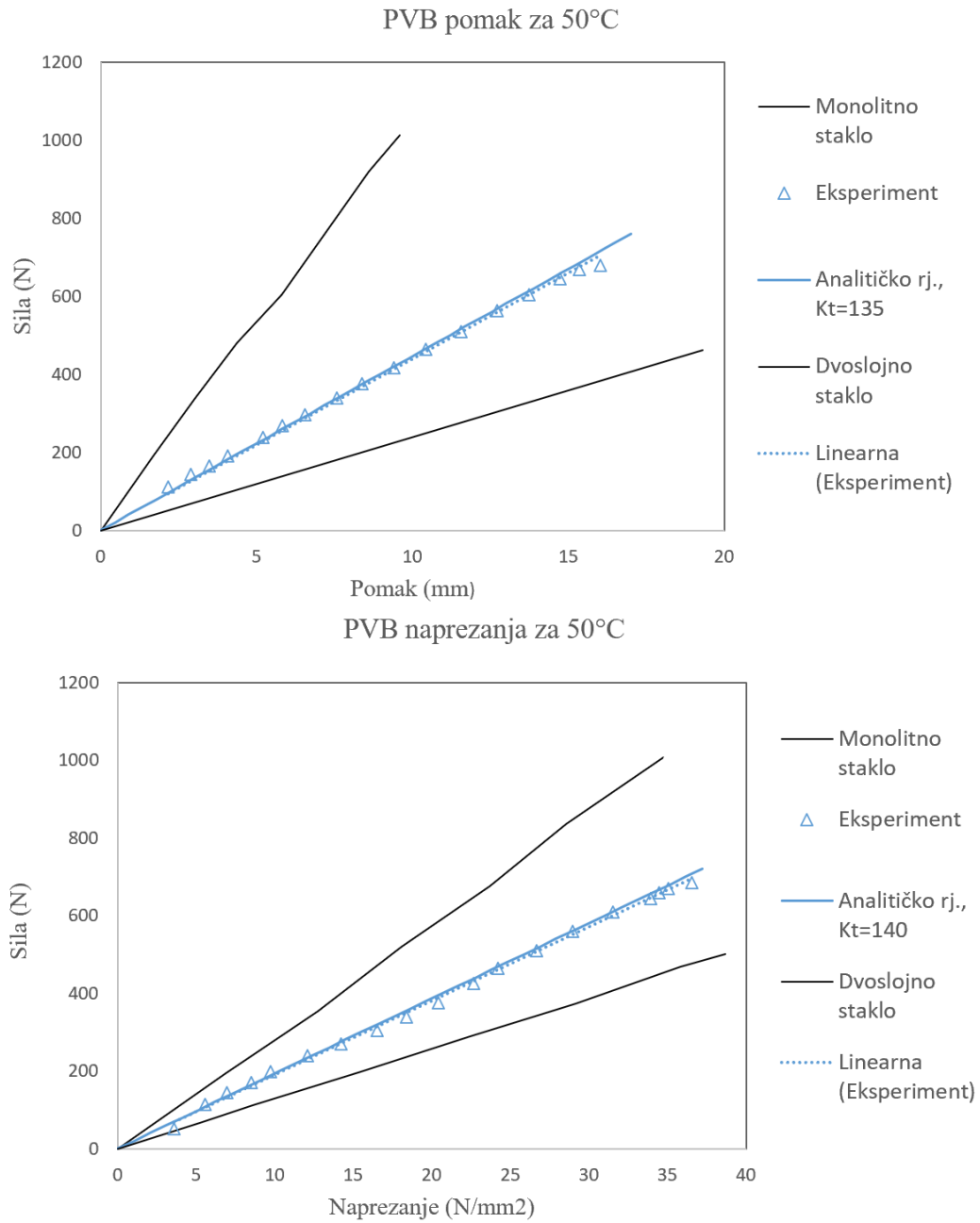
Nadalje prikazano je poklapanje analitičkih i eksperimentalnih rezultata pojedinačno za svaku temperaturu modela CRR. Kako bi se dobilo najbolje moguće poklapanje modela i eksperimenta, bilo je potrebno odrediti odgovarajuće vrijednosti krutosti  $K_t$  u modelu. Naime, degradacija sprežanja s porastom temperature se modelira smanjivanjem vrijednosti krutosti  $K_t$ . Kada su određene odgovarajuće vrijednosti krutosti  $K_t$ , na Slikama 25-36 dani su rezultati sila-pomak i sila-napreznje za PVB i Ionoplast za svaku ispitanu temperaturu te su u legendi uz oznaku „analitičko rj.“ dane i odgovarajuće vrijednosti krutosti  $K_t$ . Može se primijetiti da se rezultati eksperimenta i njihova linearna aproksimacija izvrsno podudaraju s analitičkim rješenjima. Pri većim silama, eksperimentalni podaci odstupaju od pravca, što sugerira da dolazi do nelinearnih efekata, odnosno do gubitka krutosti međusloja (manje vjerojatno i stakla). Ti efekti mogu uključivati plastičnu deformaciju, mikro pukotine ili druge nelinearne oblike ponašanja materijala koja nisu predviđena jednostavnim analitičkim modelom. Smanjenjem krutosti laminiranog stakla ono se više deformira pri većim opterećenjima, što je vidljivo iz zakrivljenosti eksperimentalne krivulje.



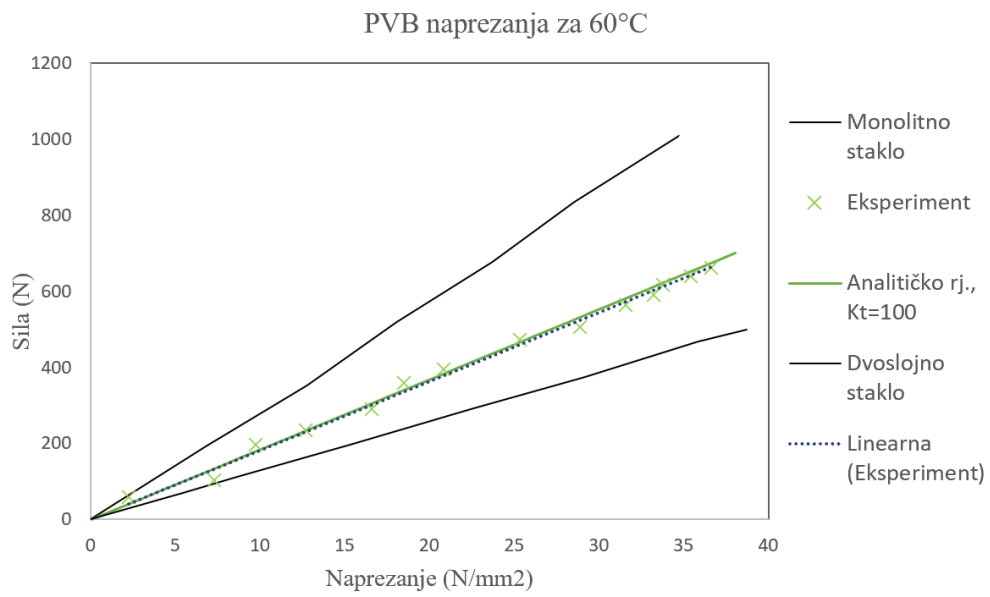
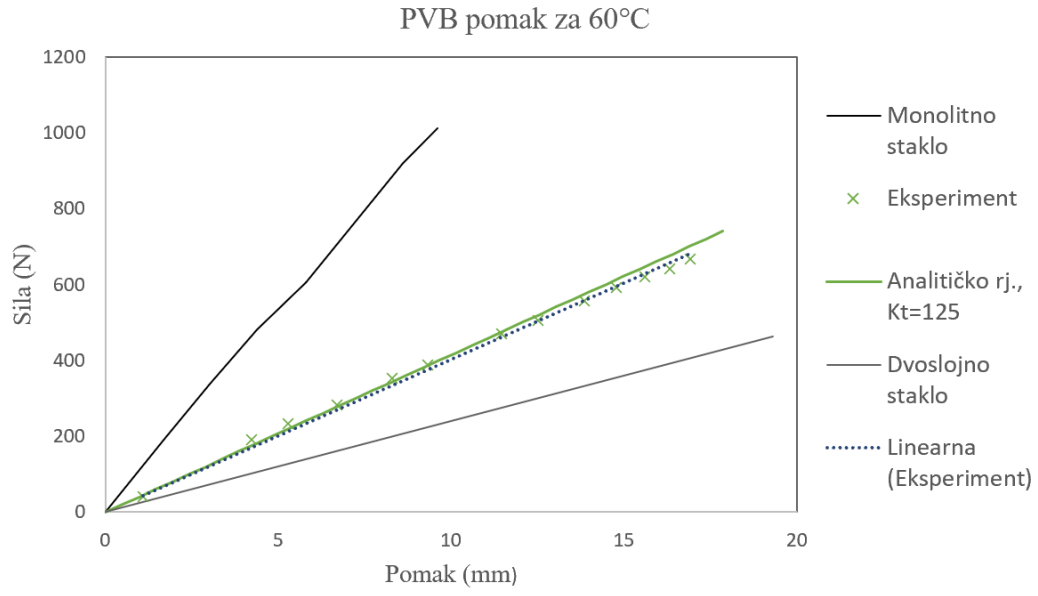
*Slika 25: Usporedba rezultata međusloja PVB za 25°C*



*Slika 26: Usporedba rezultata međusloja PVB za 40°C*



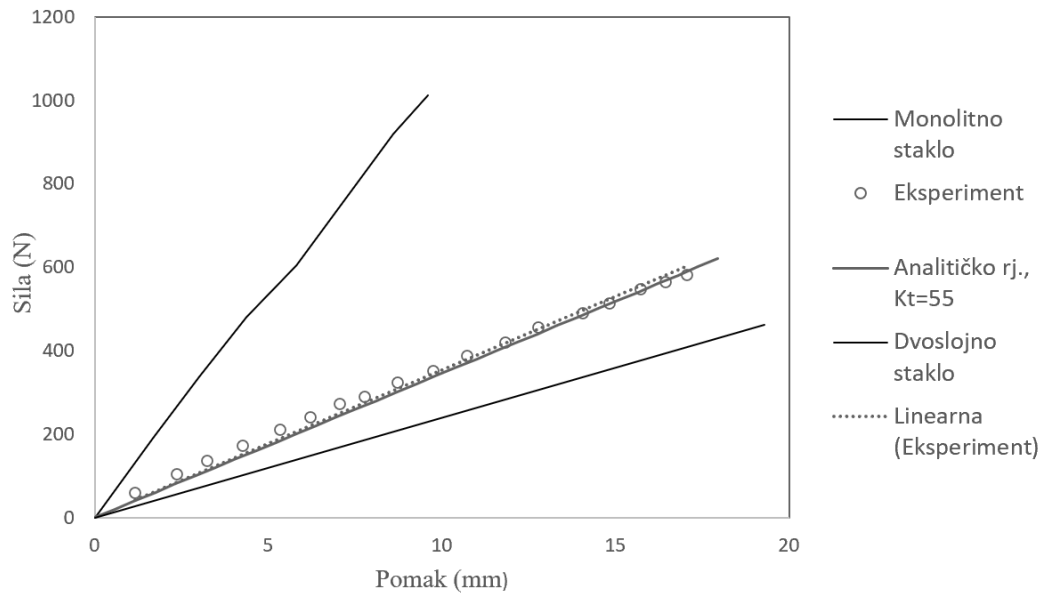
*Slika 27: Usporedba rezultata međusloja PVB za 50°C*



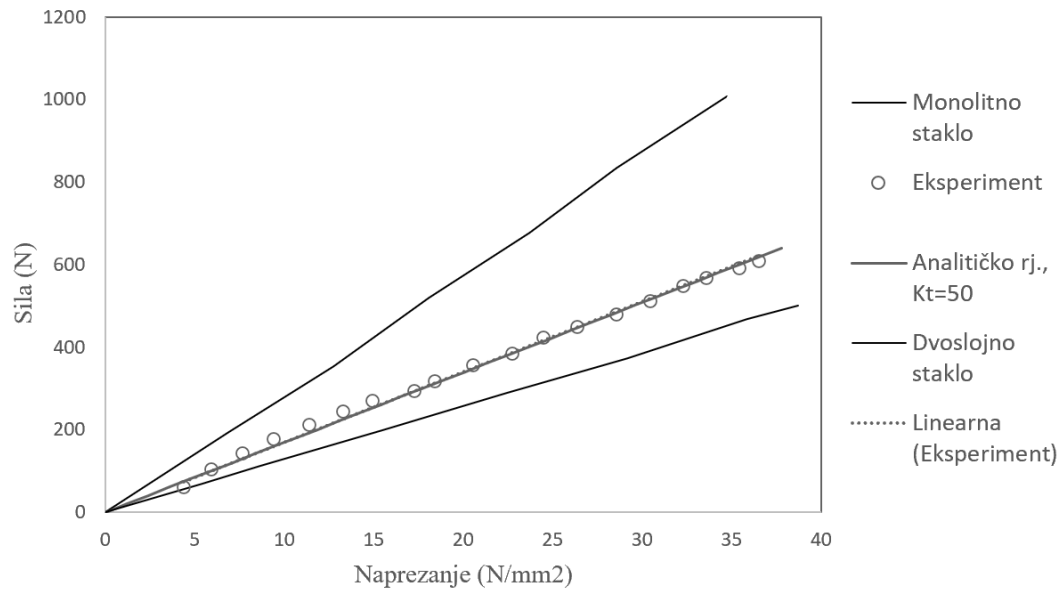
Slika 28: Usporedba rezultata međusloja PVB za 60°C



PVB pomak za 70°C

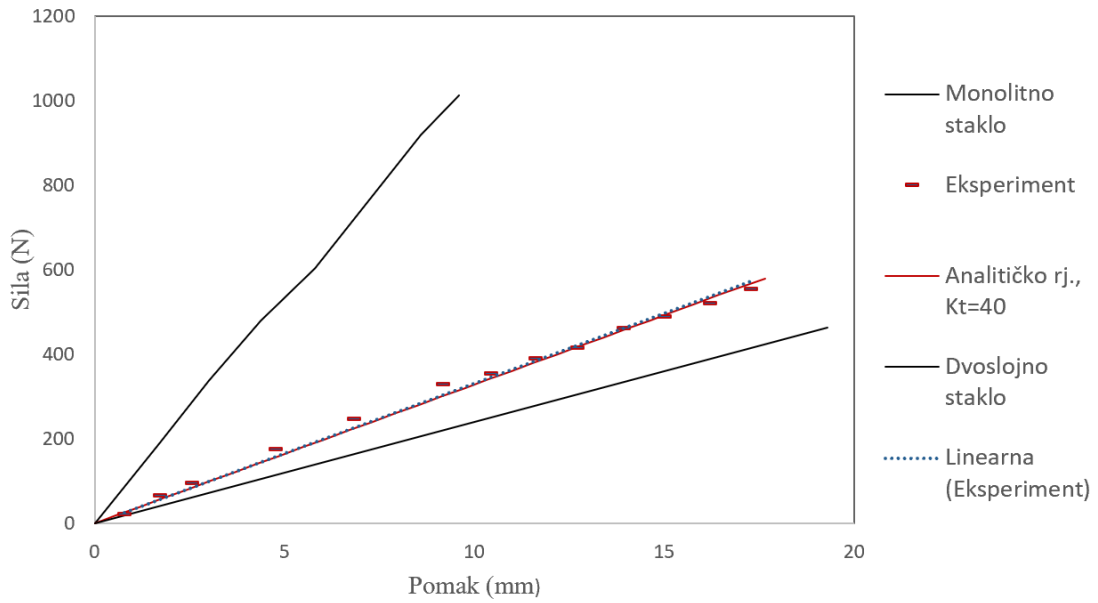


PVB naprežanja za 70°C

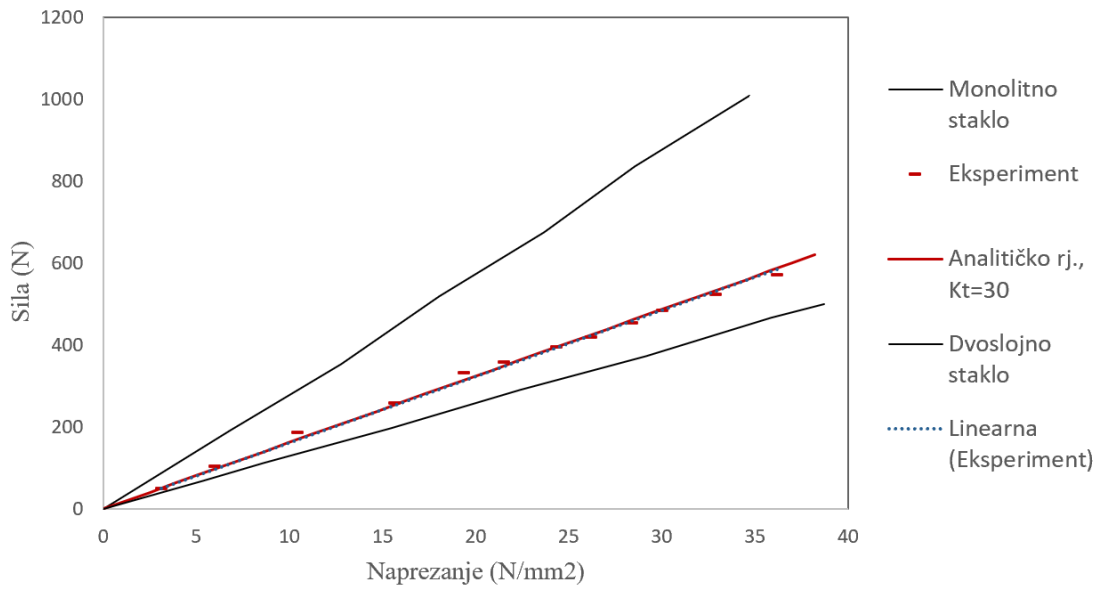


Slika 29: Usporedba rezultata međusloja PVB za 70°C

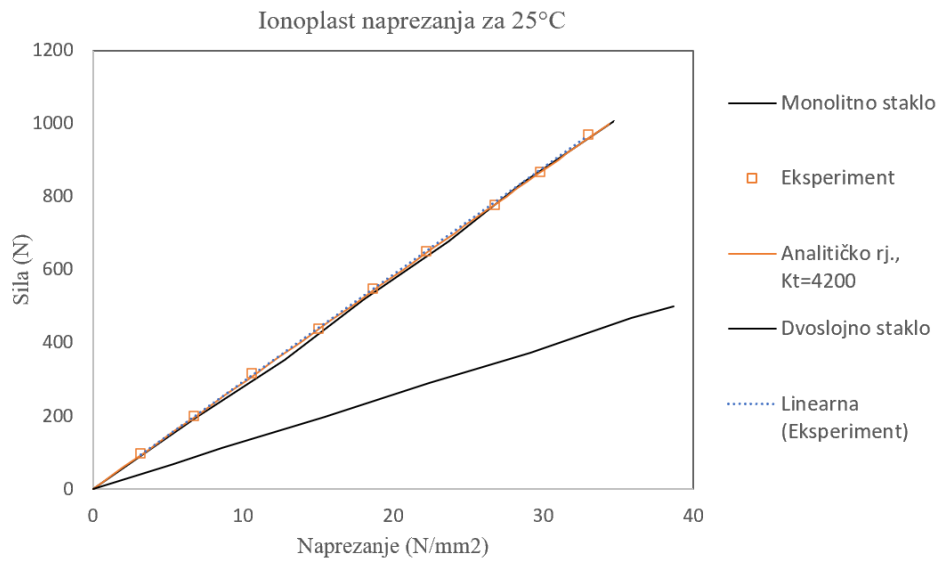
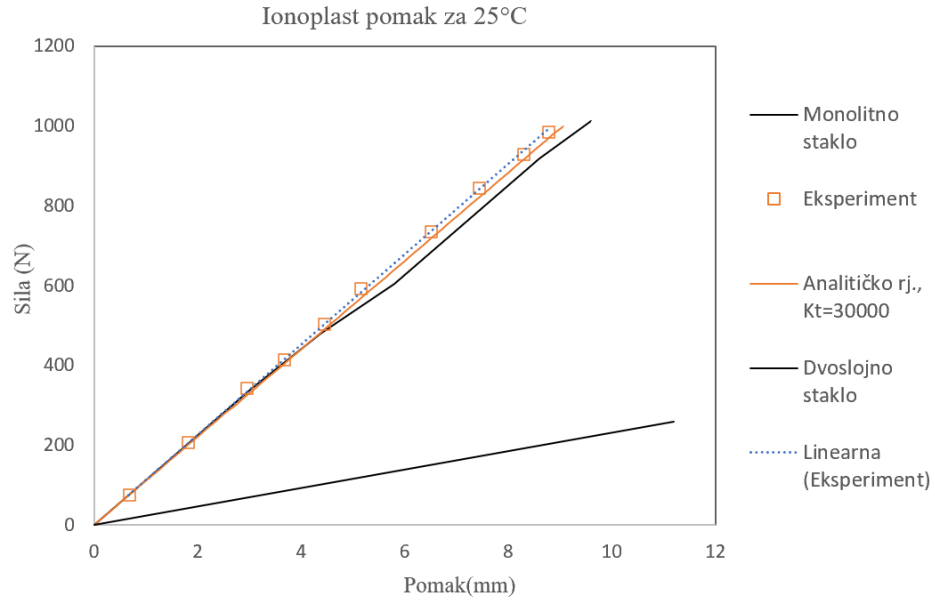
PVB pomak za 80°C



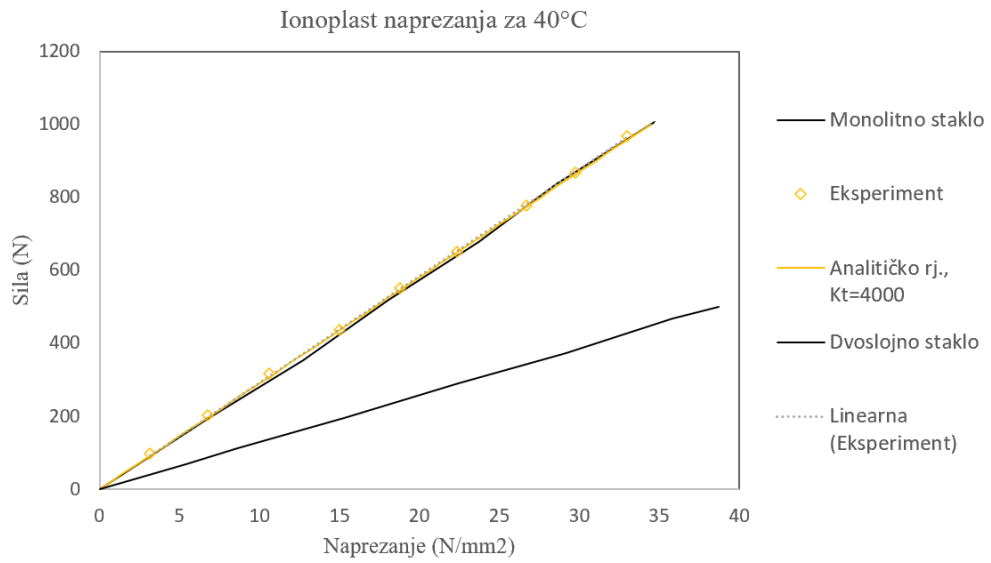
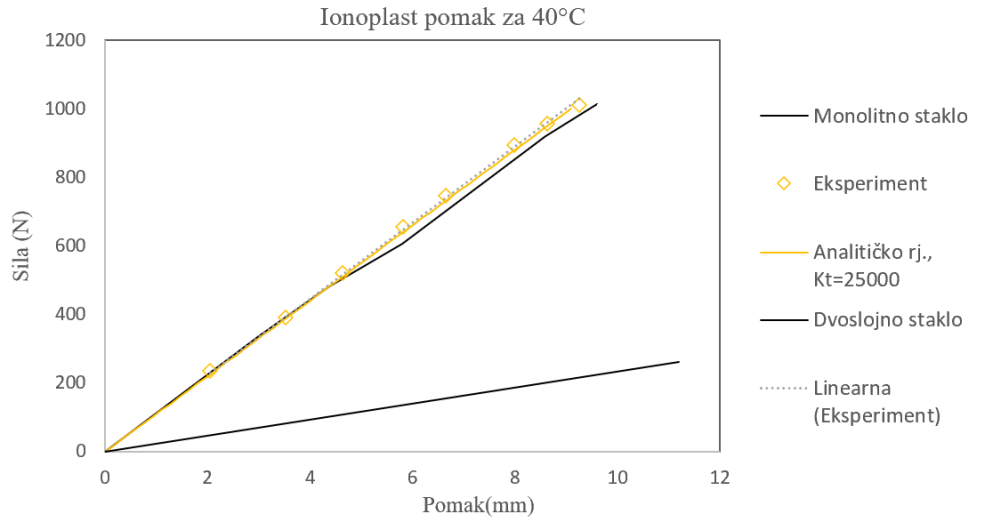
PVB napreznja za 80°C



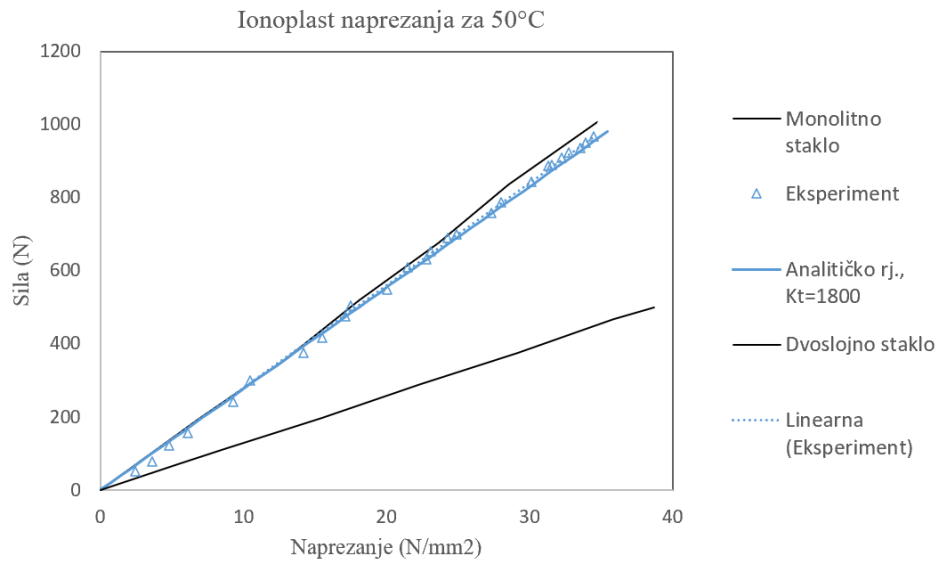
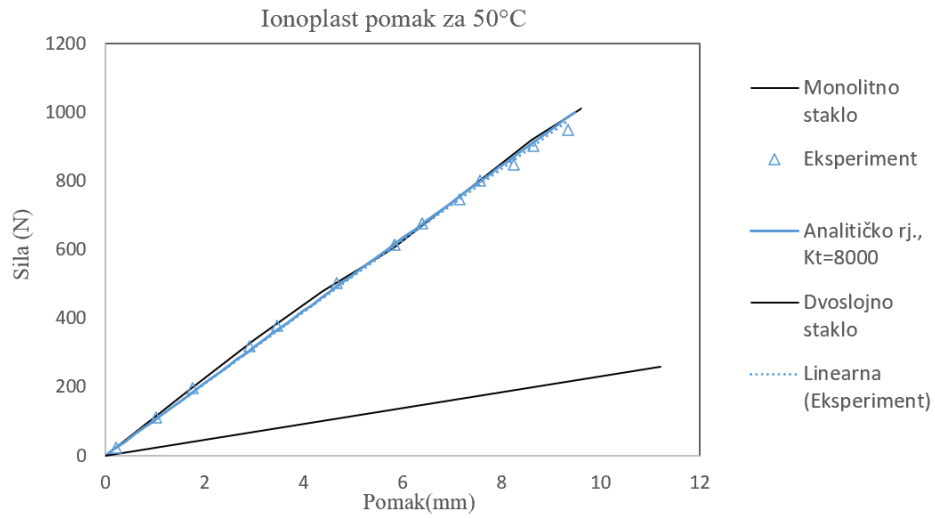
Slika 30: Usporedba rezultata međusloja PVB za 80°C



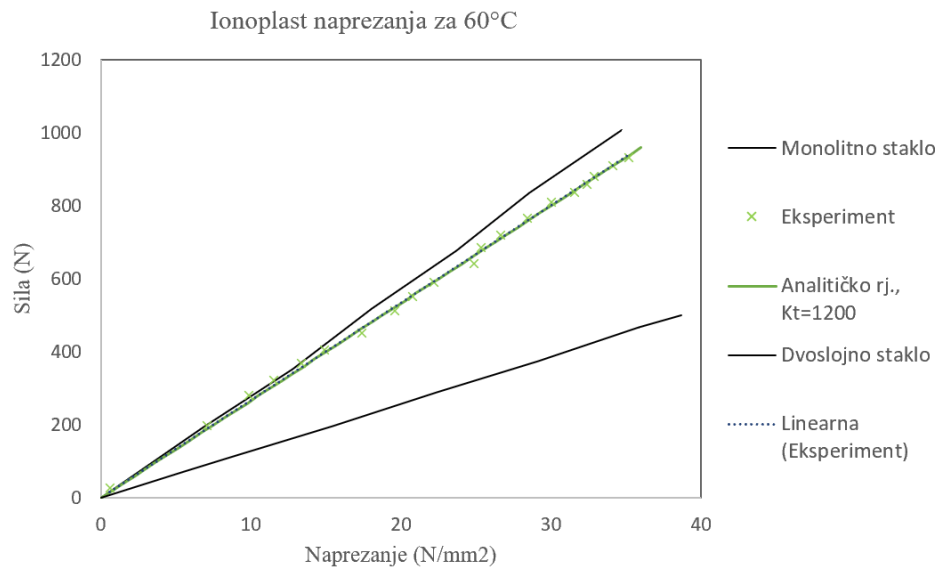
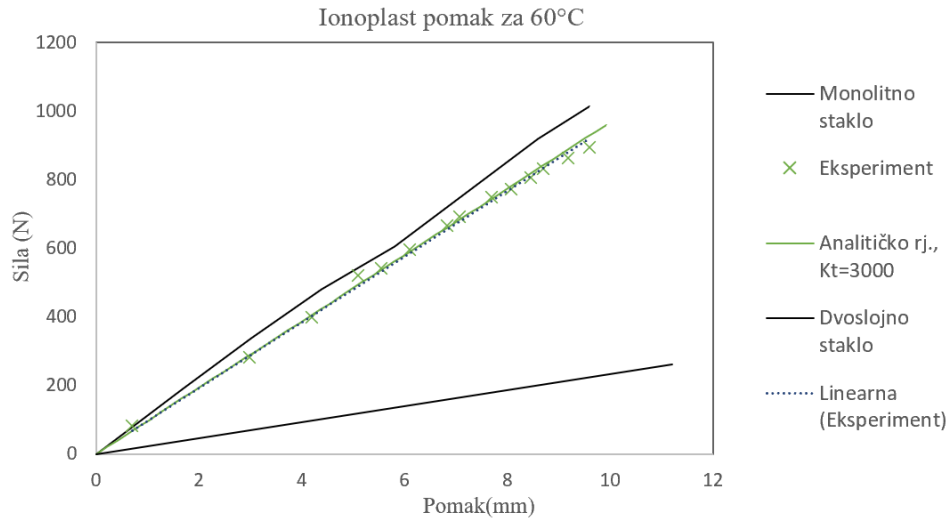
Slika 31: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 25°C



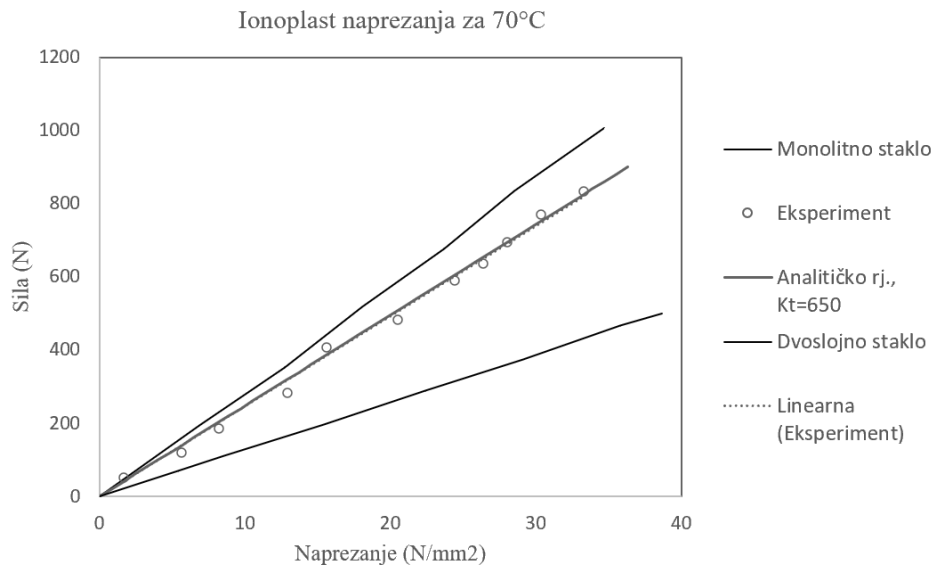
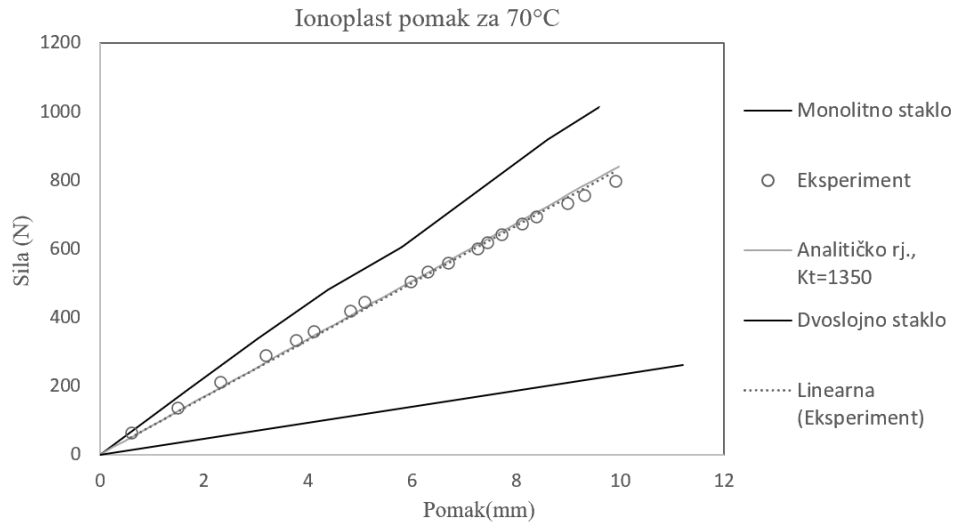
*Slika 32: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 40°C*



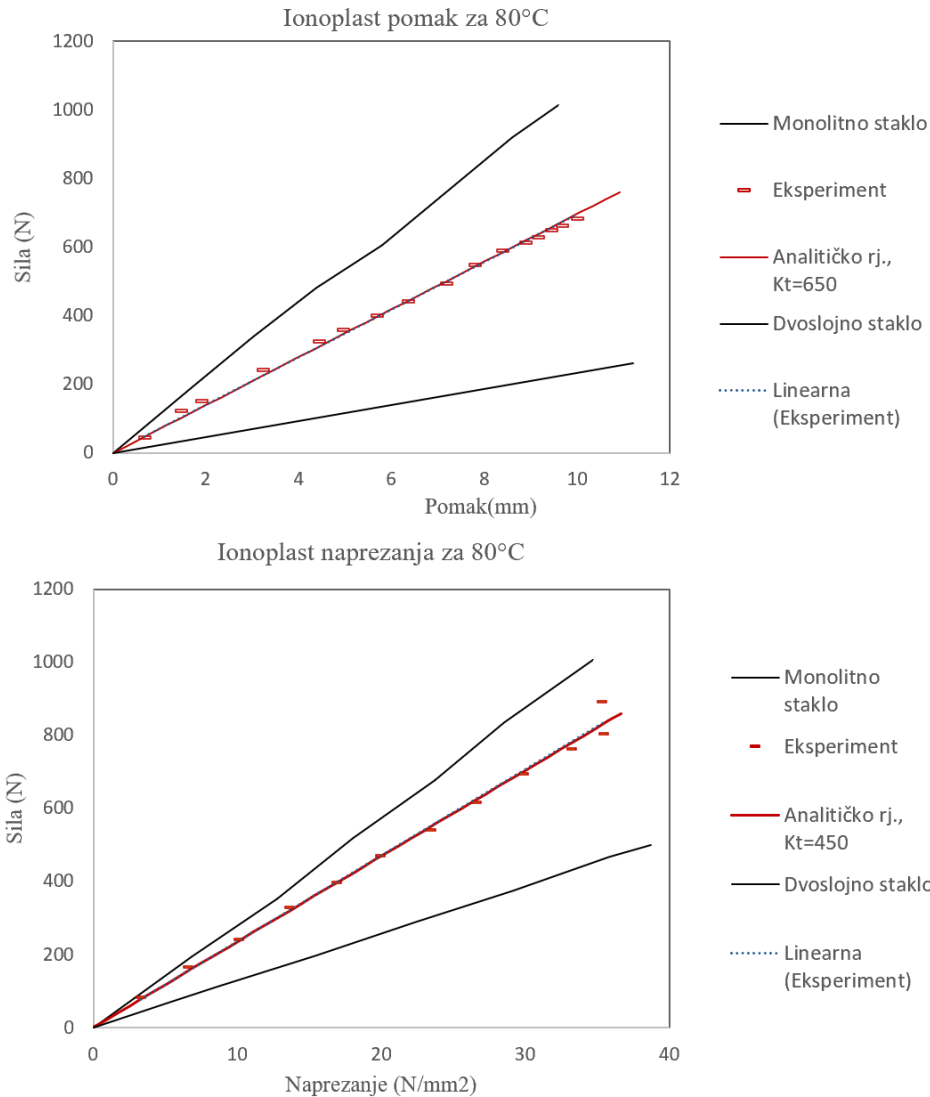
*Slika 33: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 50°C*



*Slika 34: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 60°C*



Slika 35: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 70°C



Slika 36: Usporedba rezultata međusloja Ionoplast za 80°C

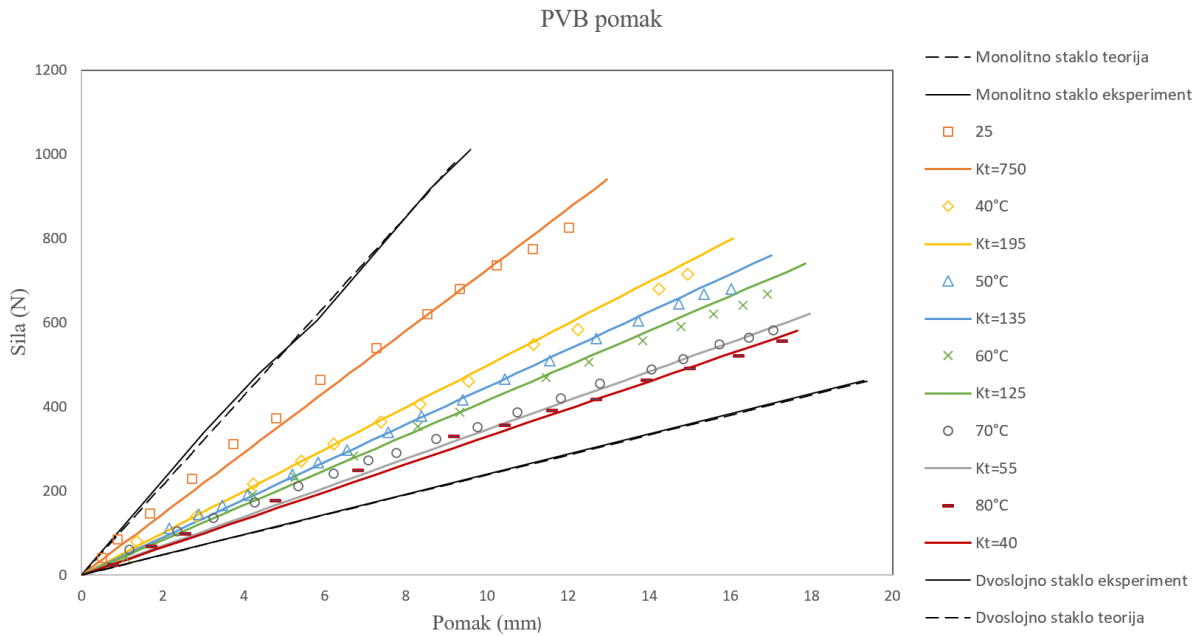
Na Slikama 37-40 prikazana je usporedba rezultata modela za sve temperature zajedno. Punom linijom označeno je analitičko rješenje za svaku temperaturu u drugoj boji, a markerima su u istim bojama označeni eksperimentalni rezultati. Teorijska rješenja dana su formulama prema oznakama sa Slike 21. Za progib to je:

$$\delta = \frac{2F(L_a)}{8E_1b(h_1 + h_2)^3} (3L^2 - (2L_a)^2) \quad (41)$$

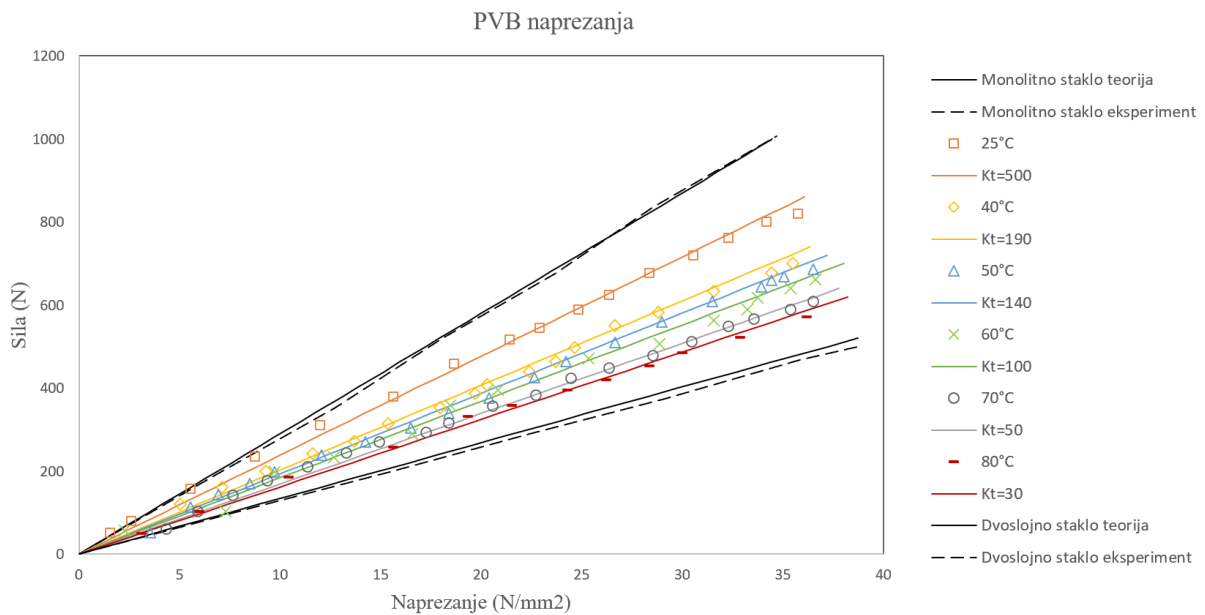
dok je teorijsko rješenje za naprezanje u ovom slučaju glasi:



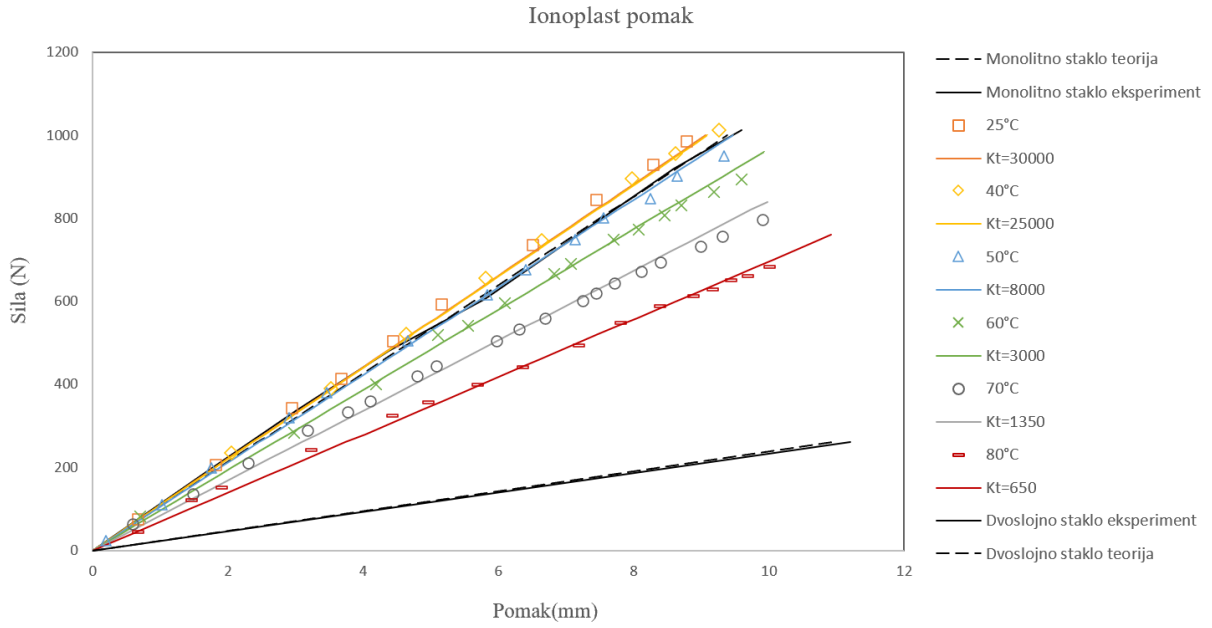
$$\sigma = \frac{12FL_a \frac{h}{2}}{b_1(h_1 + h_2)^3} \quad (42)$$



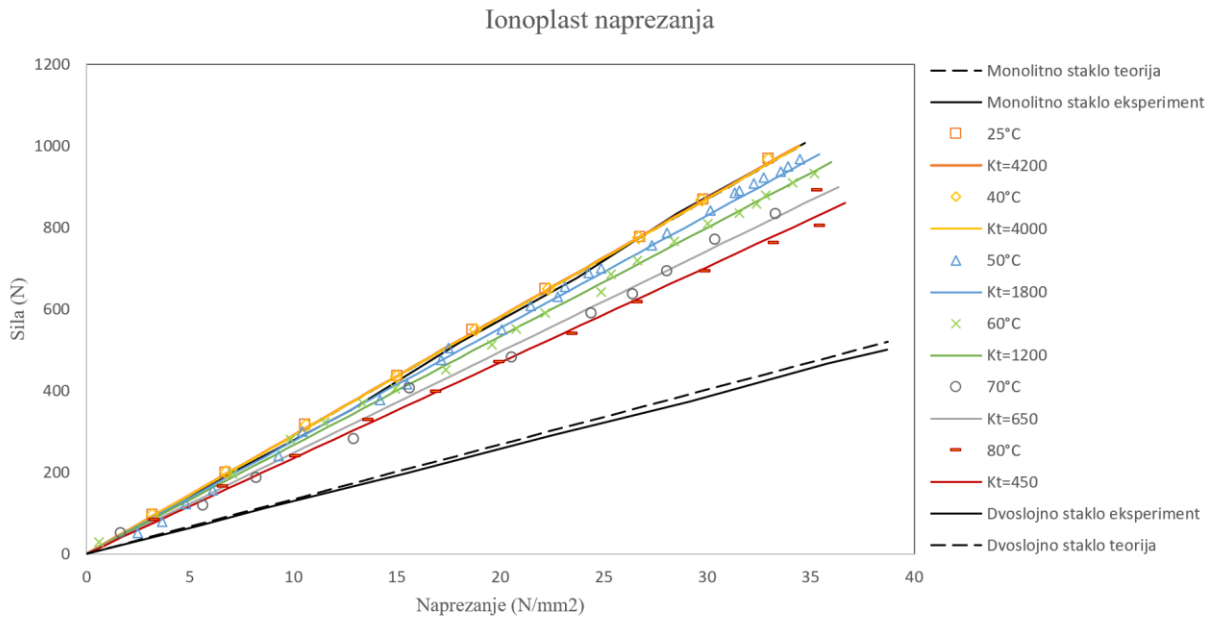
Slika 37: Usporedba rezultata sila-pomak PVB



Slika 38: Usporedba rezultata sila-naprezanje PVB

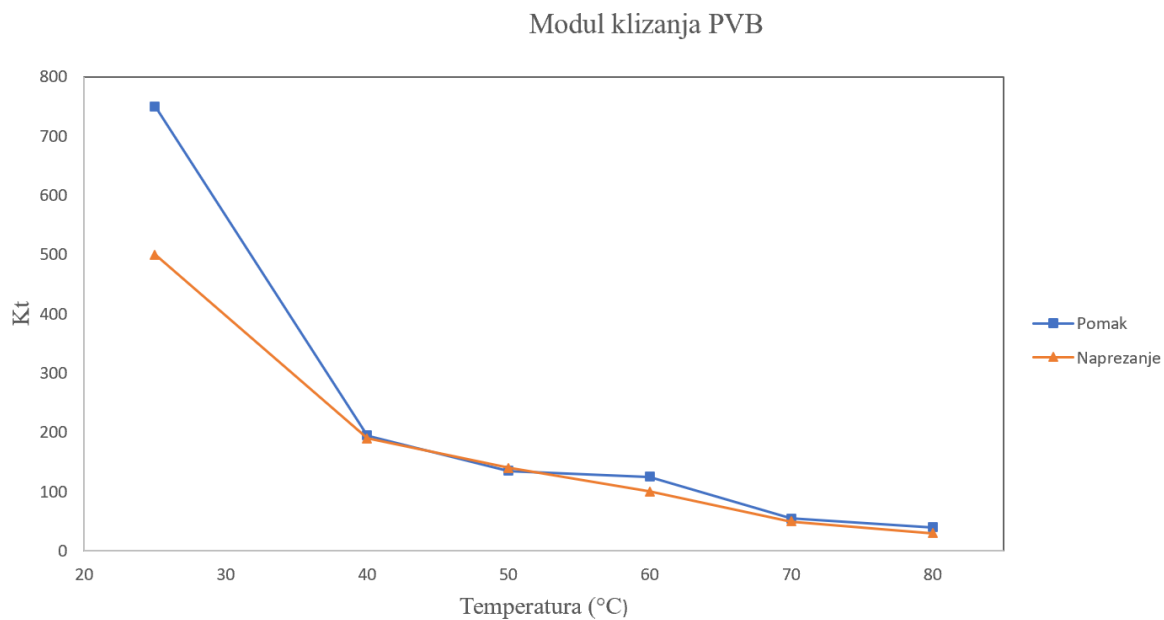


Slika 39: Usporedba rezultata sila-pomak Ionoplast

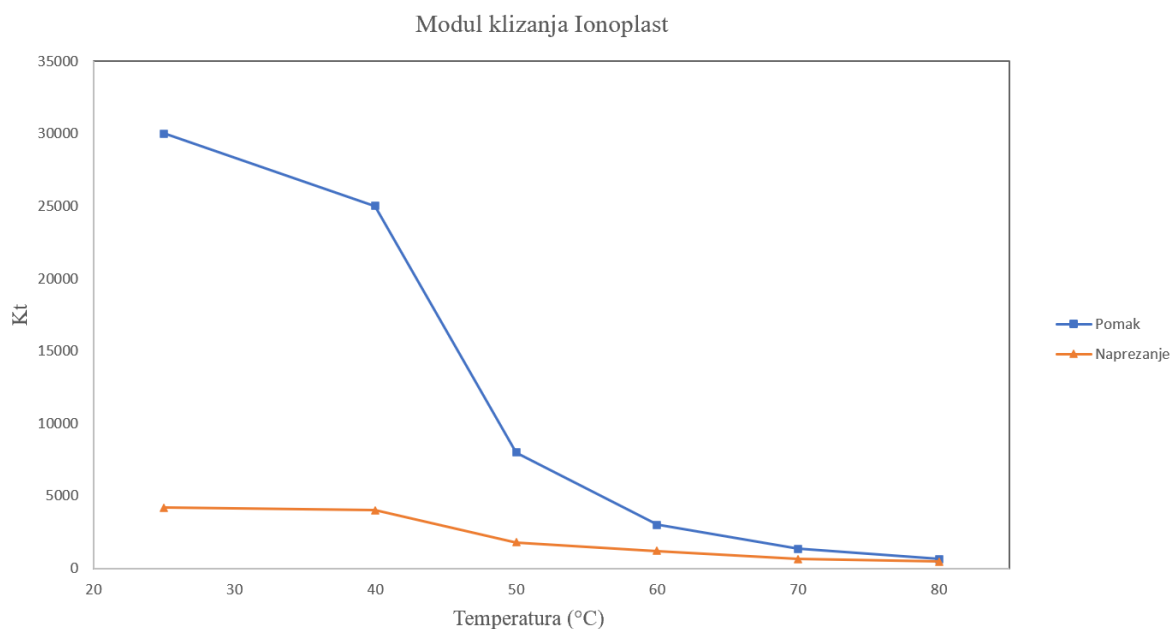


Slika 40: Usporedba rezultata sila-napreznaje Ionoplast

Na temelju ovih rezultata dolazimo do odgovarajućeg raspona modula klizanja  $K_t$  za međusloj PVB i Ionoplast.



Slika 41: Modul klizanja za PVB



Slika 42: Modul klizanja Ionoplast

U analitičkom modelu korištenom u ovom radu, modul klizanja  $K_t$  koristi se kao parametar koji određuje krutost međusloja stakla. Veće vrijednosti  $K_t$  ukazuju na veće sprezanje između slojeva stakla, dok manje vrijednosti  $K_t$  ukazuju na manju krutost i veće deformacije. Modul klizanja  $K_t$  može se usporediti s koeficijentom sprezanja ( $\Gamma$ ) koji je korišten u eksperimentalnom modelu (Slika 20). Vrijednost  $K_t$  može se kretati u rasponu od 0 do beskonačno, gdje vrijednost 0 odgovara dvoslojnom staklu (model ORR), beskonačno monolitnom staklu (model RRR). Povećanjem  $K_t$  povećava se sprezanje među slojevima stakla.

Za PVB, vrijednost modula klizanja  $K_t$  iznosi  $750 \text{ N/mm}^3$  na  $25^\circ\text{C}$ . Pri porastu temperature na  $40^\circ\text{C}$ ,  $K_t$  značajno opada na  $195 \text{ N/mm}^3$ , a zatim se postupno smanjuje s daljnjim porastom temperature.

S druge strane,  $K_t$  za Ionoplast je znatno veći nego za PVB. Na temperaturi od  $25^\circ\text{C}$ ,  $K_t$  iznosi  $30\,000 \text{ N/mm}^3$ . Ova vrijednost postepeno opada do  $40^\circ\text{C}$ , nakon čega značajno pada na  $8\,000 \text{ N/mm}^3$  pri temperaturi od  $50^\circ\text{C}$ . Potom se  $K_t$  nastavlja postepeno smanjivati s daljnjim porastom temperature.

Oba materijala pokazuju značajan pad  $K_t$  s porastom temperature, što znači da postaju manje kruti i manje otporni na deformacije pri višim temperaturama.

Na Slikama 41-42 vidimo usporedbu vrijednosti  $K_t$  dobivenih putem mjerenja naprezanja i progiba. Kod uzoraka s PVB međuslojem, odstupanja su uglavnom zanemariva. Međutim, kod uzoraka s Ionoplast međuslojem, razlike su značajno veće. Ova odstupanja mogu se pripisati različitim metodama mjerenja, naprezanja su mjerena mjernim trakama postavljenima na površinu uzoraka, kako je navedeno u izvornom radu [7], dok su progibi zabilježeni pomoću LVDT senzora. Riječ je o potpuno odvojenim mjerenjima koja moraju biti sinkronizirana s mjerenjima kidalice, što je vjerojatno kod uzoraka s Ionoplastom bilo izvedeno s manjom preciznošću, što objašnjava veća odstupanja.

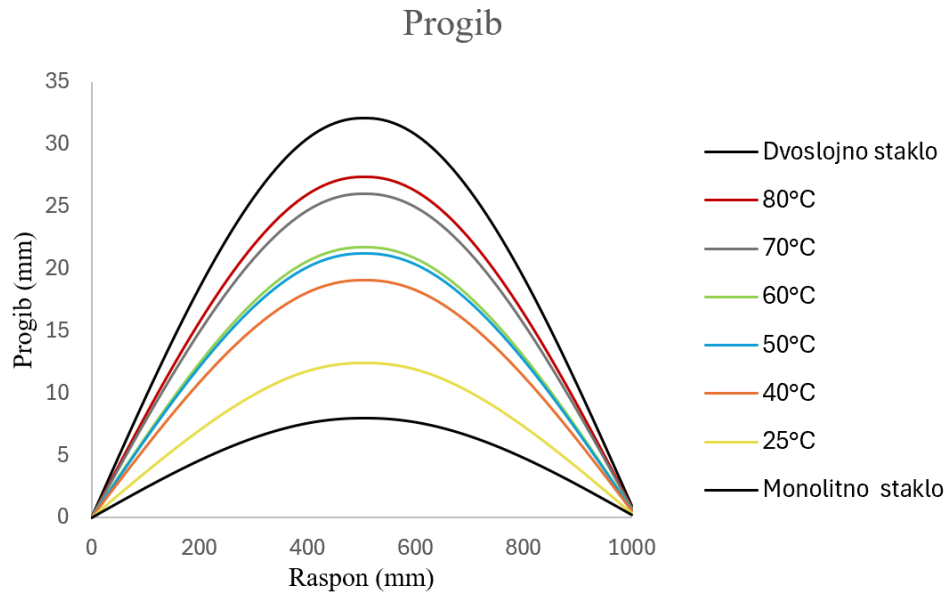
Stoga će se u nastavku analize koristiti vrijednosti  $K_t$  dobivene na temelju progiba uzoraka s PVB međuslojem, budući da su ti podaci pokazali veću pouzdanost.

Temperatura	$K_t$ (N/mm <sup>3</sup> )
25° C	750
40°C	195
50°C	135
60°C	125
70°C	55
80°C	40

Tablica 1: Vrijednosti  $K_t$  korište u modelu CRR

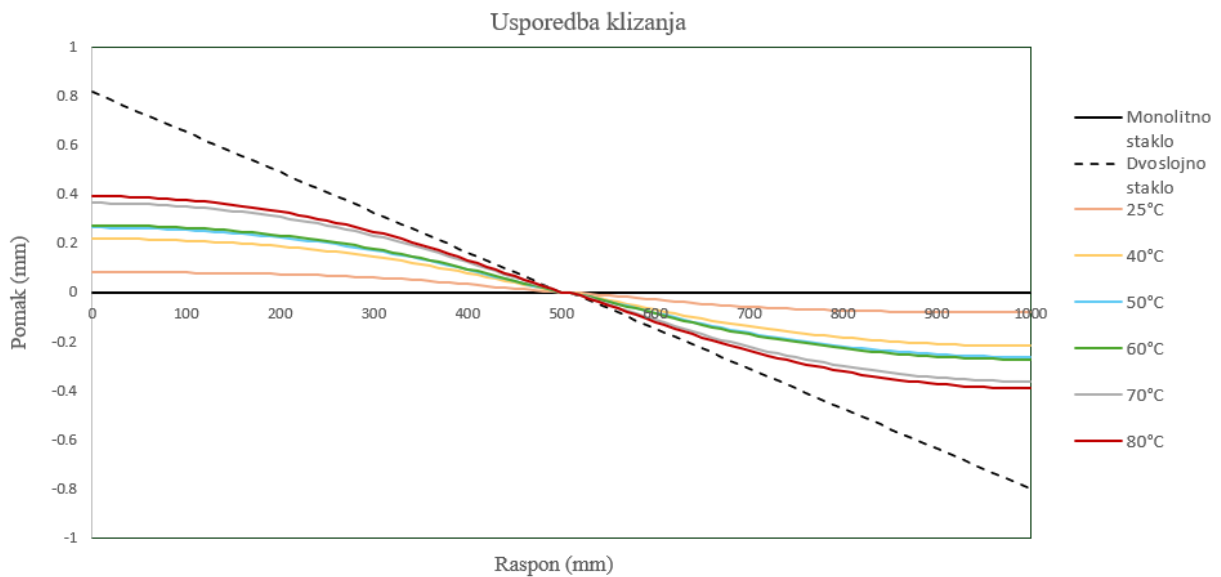
## 5.2. Utjecaj jednolike raspodjele temperature

U nastavku rada prikazana je usporedba progiba staklenih panela pri različitim temperaturama, koristeći se analitičkim rješenjima dobivenim pomoću softverskog alata *Wolfram Mathematica*. Najprije analiziran slučaj jednolike promjene temperature u oba sloja. Za promatrani slučaj, koji je statički određeni sustav, takva promjena temperature uzrokuje samo uzdužno deformiranje slojeva. Međutim, za svaku promjenu temperature korištene su odgovarajuće vrijednosti krutosti  $K_t$  čime se simulirao gubitak spreznja zbog povećanja temperature. Kako je bilo i očekivano, rezultati su pokazali da se s povećanjem temperature povećava i progib stakla (Slika 43), zato što se povećanje temperature smanjuje krutost međusloja, a time i krutost kompozitnog nosača koji se stoga lakše savija pod opterećenjem. Korištena sila iznosi 450 N, jer ta sila predstavlja najveće opterećenje primijenjeno tijekom eksperimenta.



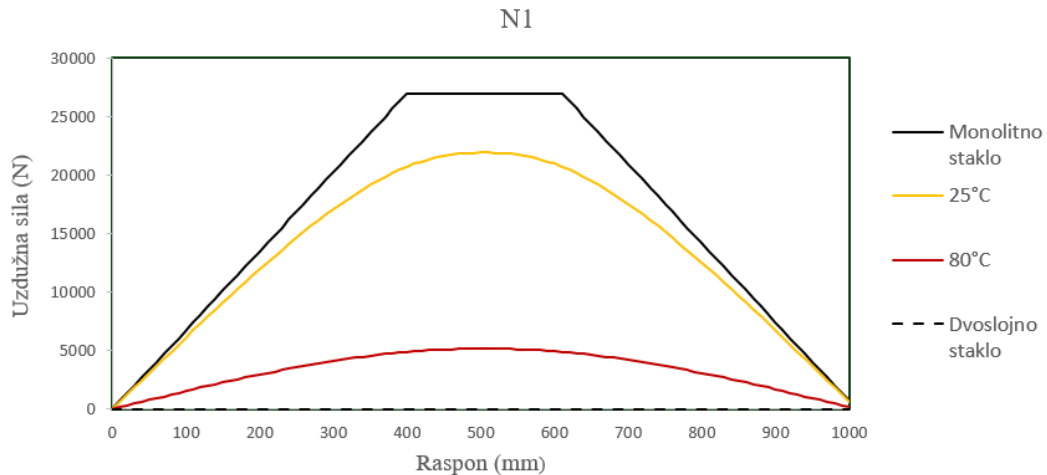
Slika 43: Usporedba progibnih linija dobivenih analitičkim rješenjem za razne temperature i granične slučajeve

Analiza rezultata klizanja pokazala je da je  $\Delta u$  između slojeva pri svim ispitanim temperaturama relativno malo, gotovo zanemarivo, što ukazuje na to da je vezni sloj efikasan (Slika 44).

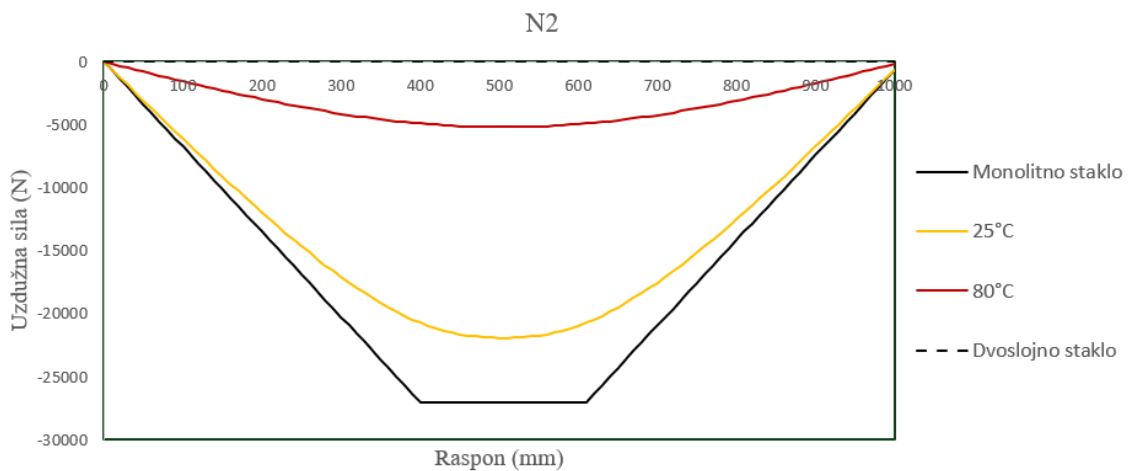


Slika 44: Usporedba klizanja između slojeva pri različitim temperaturama s graničnim slučajevima

Na slikama 45-46 prikazana je raspodjela uzdužnih sila u svakom sloju.



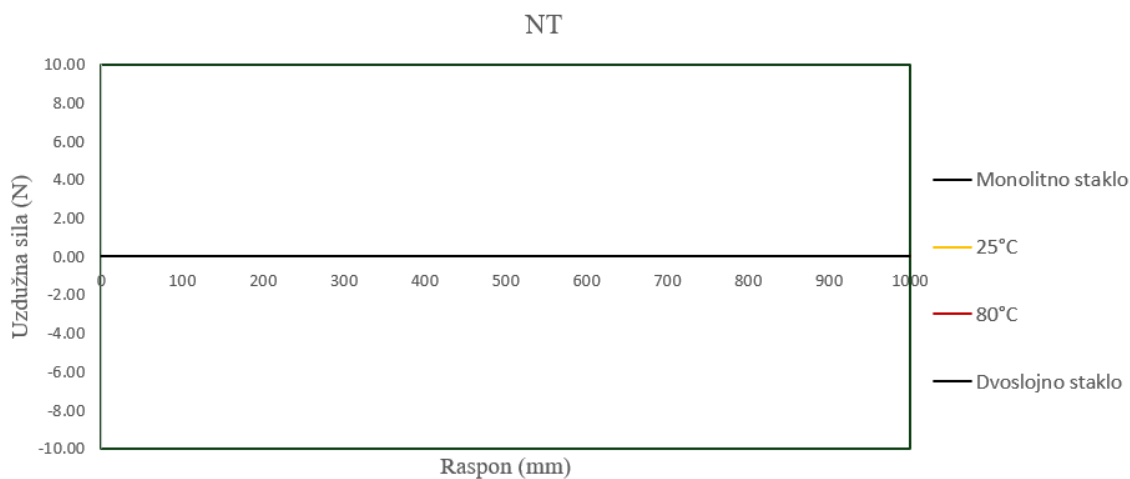
Slika 45: Raspodjela uzdužnih sila u sloju 1 za različite temperature i granične slučajeve



Slika 46: Raspodjela uzdužnih sila u sloju 2 za različite temperature i granične slučajeve

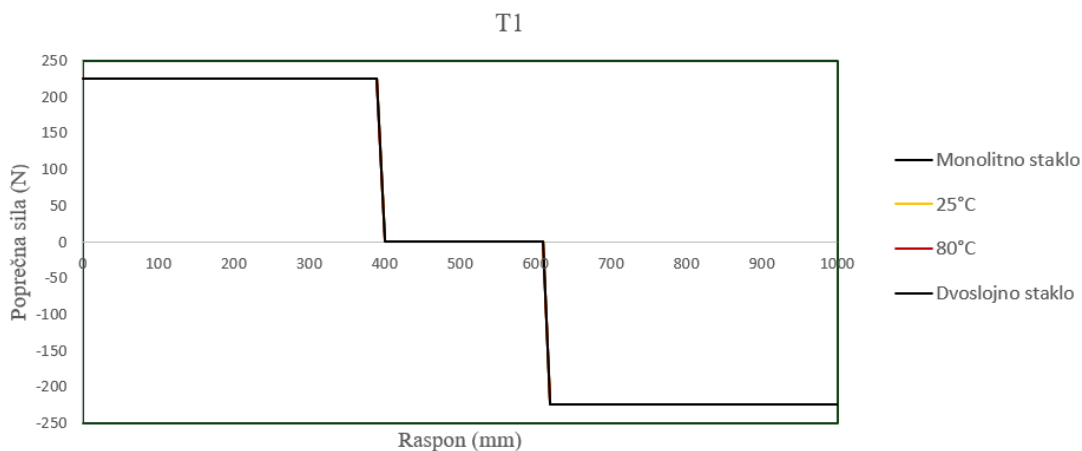
Dvoslojno staklo slobodno kliže između slojeva, što znači da se uzdužne sile ne javljaju jer međusloj ne pruža otpor klizanju. Zbog toga su uzdužne sile unutar dvoslojnog stakla nula, kao što je prikazano na Slikama 45-46. S druge strane, monolitno staklo se potpuno odupire klizanju, što rezultira pojavljivanjem uzdužnih sila unutar materijala. Lamelirano staklo, koje se sastoji od slojeva stakla povezanih međuslojem, pokazuje ponašanje koje je između ova dva granična stanja. Povećanjem temperature, uzdužne sile u lameliranom staklu se smanjuju jer kontaktna naprezanja popuštaju te dolazi do većeg stupnja klizanja između slojeva. Na taj način, lamelirano staklo se ponašanjem približava dvoslojnom staklu. Suprotno tome, snižavanjem temperature dolazi do povećanja krutosti međusloja, čime se povećavaju uzdužne sile, a

ponašanje lameliranog stakla postaje slično ponašanju monolitnog stakla. U skladu s očekivanjima, ukupna uzdužna sila je nula bez obzira na vrstu međusloja, kao što je to prikazano na Slici 47.



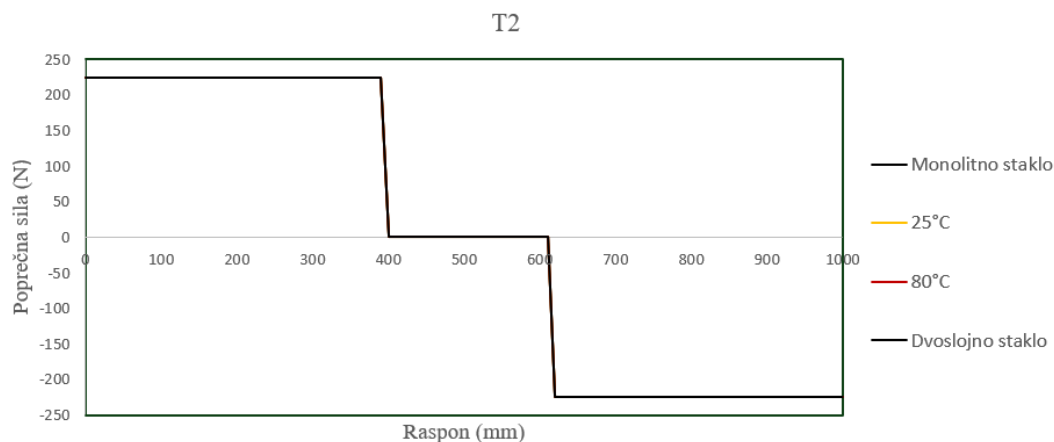
Slika 47: Ukupna uzdužna sila za različite temperature i granične slučajeve

Poprečna sila ostaje konstantna za sva stakla i različite temperature jer je uvjeti na međusloju utječu samo na promjenu uzdužnih sila i momenata. Poprečna sile se za sva stakla uravnotežuju sa zadanim vanjskim opterećenjem (sila od 450N) te se zbog toga što su jednake krutosti, svaki sloj preuzima pola ukupne poprečne sile, kao što je to prikazano na Slikama 48-50.

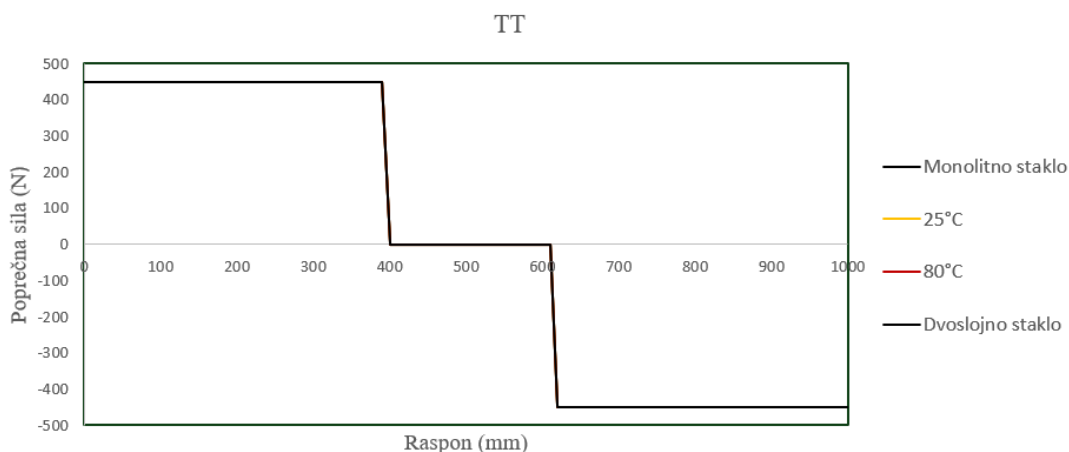


Slika 48: Raspodjela poprečnih sila u sloju 1





Slika 49: Raspodjela poprečnih sila u sloju 2

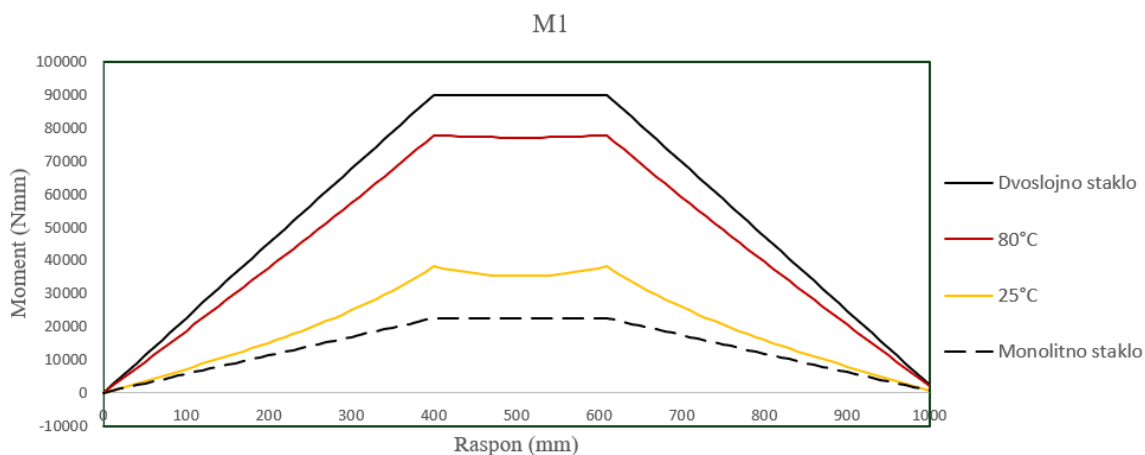


Slika 50: Ukupna ukupnih poprečnih sila

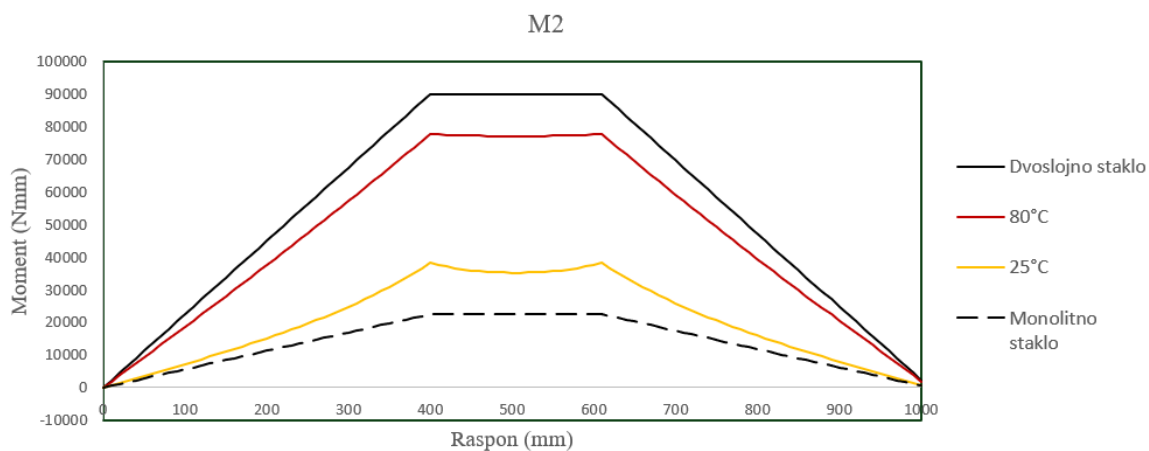
Na Slikama 51-53 prikazani su momentni dijagrami za različite jednolike temperature. Oblik tih dijagrama ovisi o utjecaju poprečne i uzdužne sile u staklu, uzimajući u obzir različite temperaturne uvjete.

Poprečna sila, kao što je ranije spomenuto, ostaje konstantna bez obzira na vrstu stakla ili temperaturu. Međutim, osim poprečne sile, moment ovisi i o uzdužnoj sili. Veći moment savijanja rezultat je gubitka sprezanja pri čemu dolazi do smanjenja uzdužnih sila, a uzdužne sile se smanjuju jer se smanjuje krutost međusloja povećanjem temperature. Kako ukupni moment mora biti uvijek isti (bez obzira na temperaturu i uvjete na međusloju), povećanje uzdužnih sila u slojevima zbog boljeg sprezanja dovodi do smanjenja momenata savijanja u

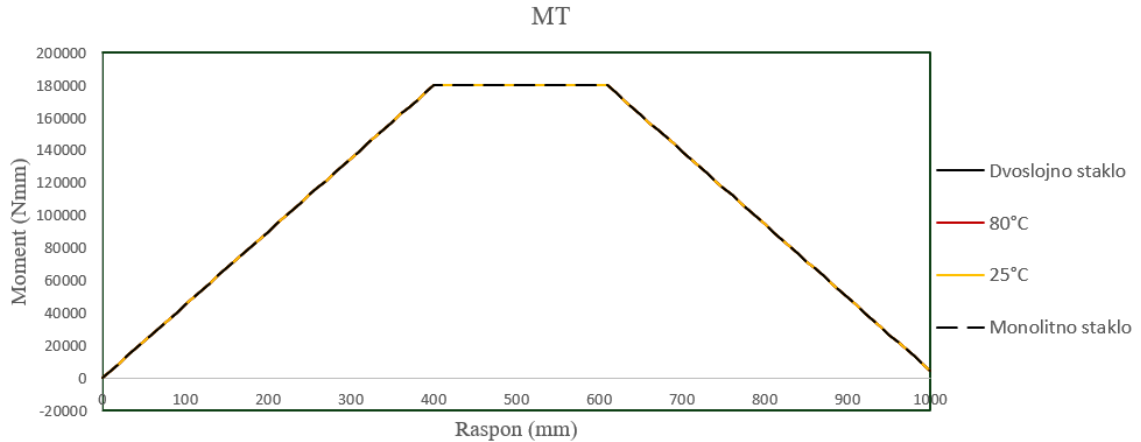
svakom sloju. Manji momenti u slojevima znače manje progibe. Najveće momente u slojevima dobivamo za slučaj bez sprezanja kada je  $M_T = M_1 + M_2$ .



*Slika 51: Momentni dijagram sloja 1*

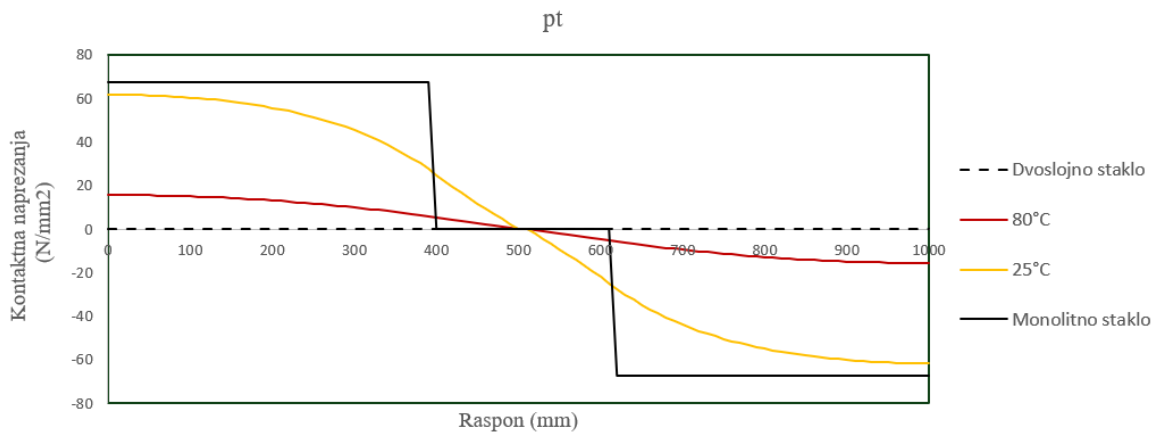


*Slika 52: Momentni dijagram sloja 2*



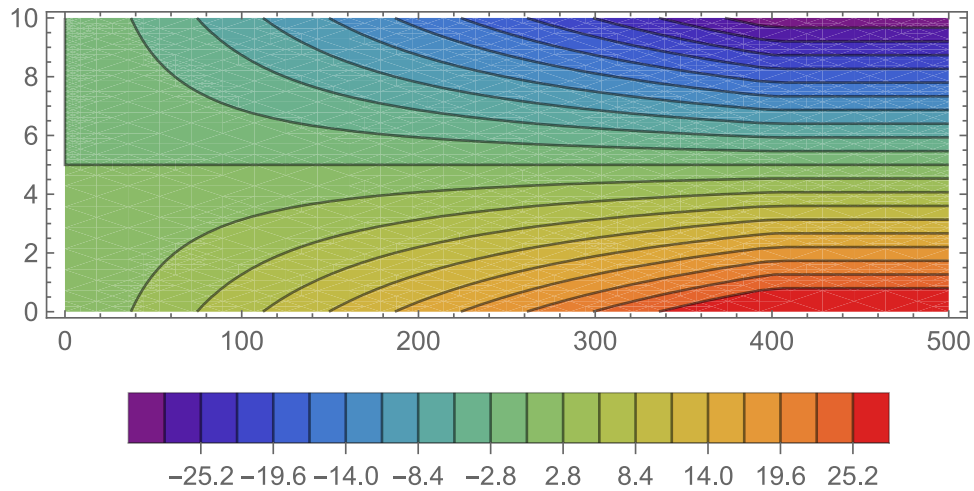
Slika 53: Ukupni momentni dijagram

Kontaktna naprežanja ( $p_t$ ) pokazuju jasnu ovisnost o promjeni temperature. Primjećujemo da se s povećanjem temperature kontaktna naprežanja smanjuju, što je u skladu s promjenama uzdužnih sila unutar stakla koje smo ranije pokazali (Slika 54). Povećanje temperature uzrokuje smanjenje kontaktnih naprežanja u međusloju, pa samim time i smanjenje uzdužne sile koja im se odupire.



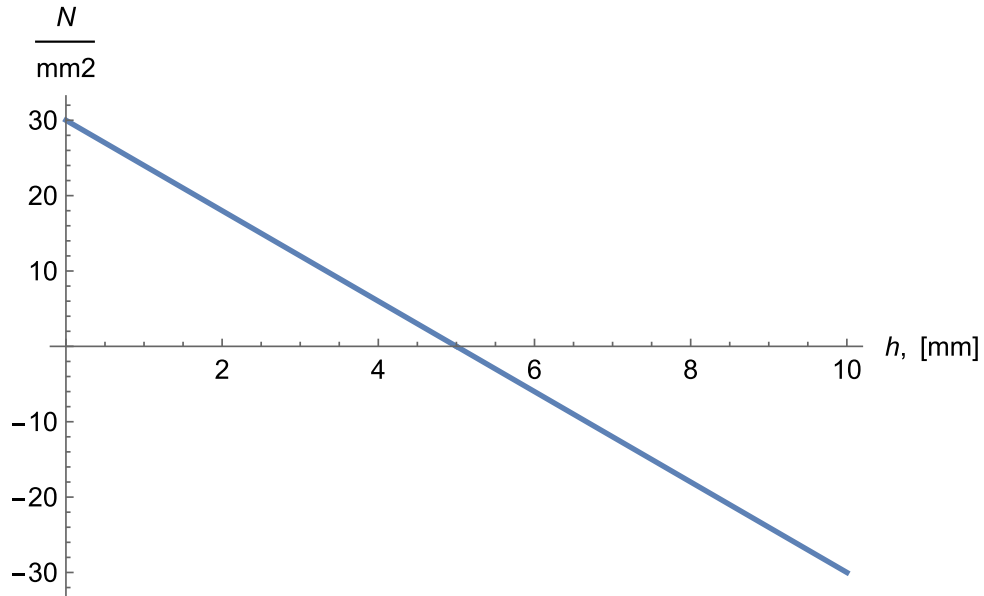
Slika 54: Kontaktna naprežanja,  $p_t$

Raspodjela naprežanja kod monolitnog stakla (model RRR) prikazana je na Slici 55. Vidimo da u zoni čistog savijanja (od 400 do 500 mm) nema promjene raspodjele normalnih naprežanja te se u toj zoni ujedno pojavljuju i maksimalna naprežanja na rubovima presjeka.



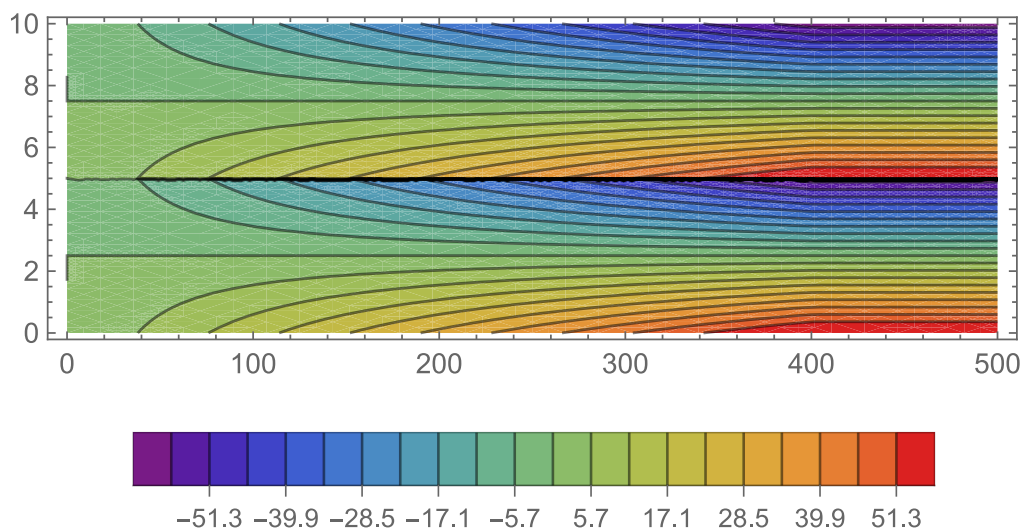
Slika 55: Raspodjela naprezanja za monolitno staklo

Na Slici 56 prikazan je profil naprezanja na sredini grede. Os  $x$  predstavlja visinu presjeka, a na osi  $y$  dane su vrijednosti naprezanja. Možemo primjetiti da smo dobili oblik grafa za potpuno spregnuti presjek, predstavljen u uvodnom djelu radu. Oba elementa ponašaju kao jedinstven presjek, bez relativnog horizontalnog pomaka između elemenata, te je raspodjela normalnih naprezanja linearna po visini kompozitnog presjeka.

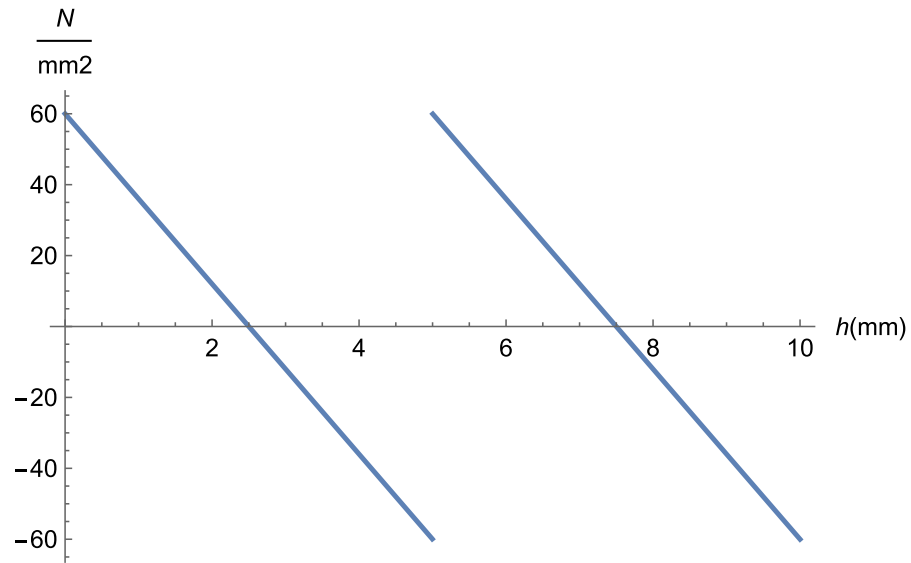


Slika 56: Profil naprezanja na sredini grede za monolitno staklo

Kod dvoslojnog stakla (model ORR), naprezanja se javljaju i u međusloju, tj. svaki sloj djeluje zasebno (Slika 57-58). Postoji relativni pomak između slojeva, nosač se deformira nezavisno od susjednog elementa, što rezultira pojavom vlačnih i tlačnih naprezanja u oba sloja. Također možemo primjetiti da je profil naprezanja dobiven kao što je predstavljeno na početku rada, za nespregnuto djelovanje. Naprezanja u tlaku i vlaku u svakom sloju su jednaka po iznosu. Može se primijetiti kako su naprezanja na rubovima dvoslojnog stakla (nespregnutni presjek) dvostruko veća nego u slučaju monolitnog stakla. To znači da će pri istom opterećenju monolitno staklo doživjeti i manje deformacije te da, u odnosu na dvoslojno staklo, ima puno veću nosivost.

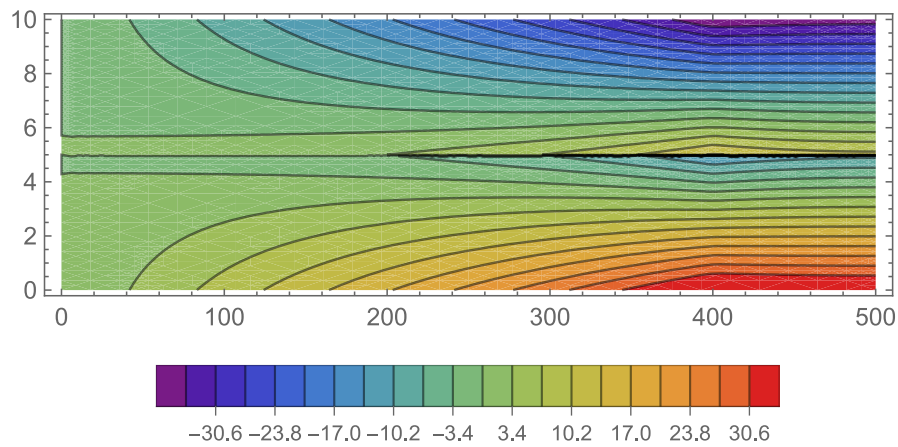


Slika 57: Raspodjela naprezanja za dvoslojno staklo



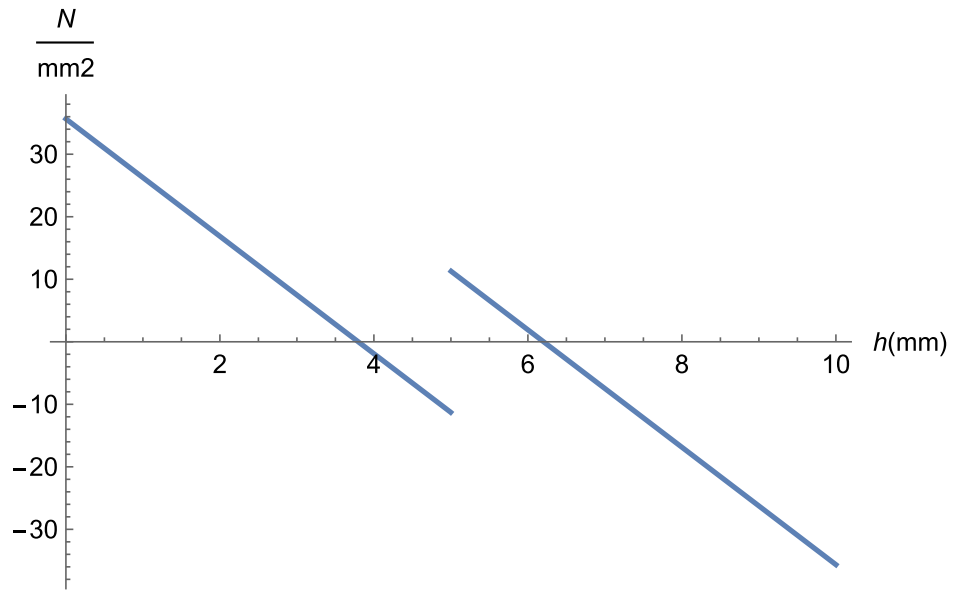
Slika 58: Profil naprezanja na sredini grede za dvoslojno staklo

Za lamelirano staklo (model CRR) promatran je slučaj pri 25 °C i 80°C. Kod 25°C je uočeno ponašanje slično kao kod monolitnog stakla, s relativno malim naprezanjima na kontaktnom sloju i naprezanjima nešto većim nego kod monolitnog stakla na rubovima. Kod 80 °C vidimo povećanje naprezanja kako u međusloju (zbog smanjenja krutosti istog) tako i na rubovima te se ponašanje približava dvoslojnom staklu (Slika 61-62).

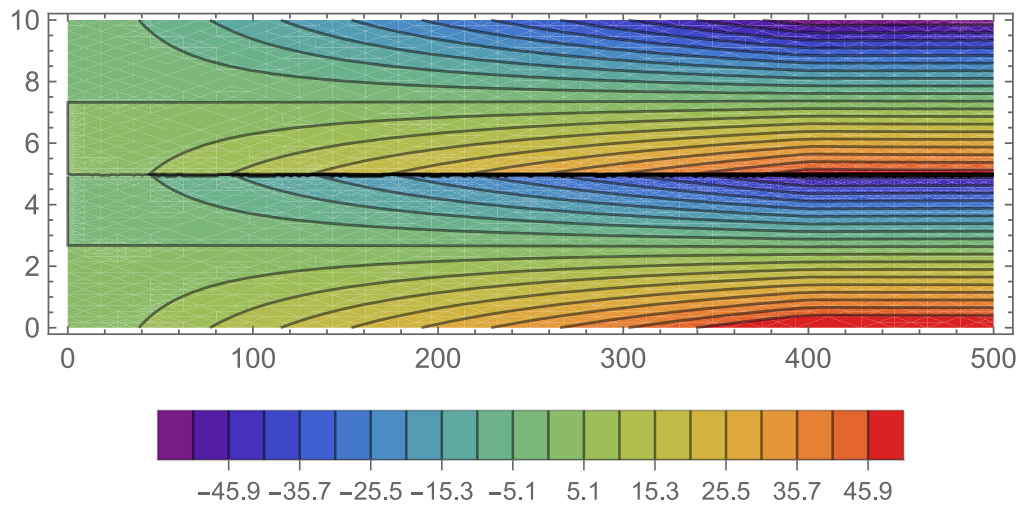


Slika 59: Naprezanja kod jednolike temperature za 25 °C

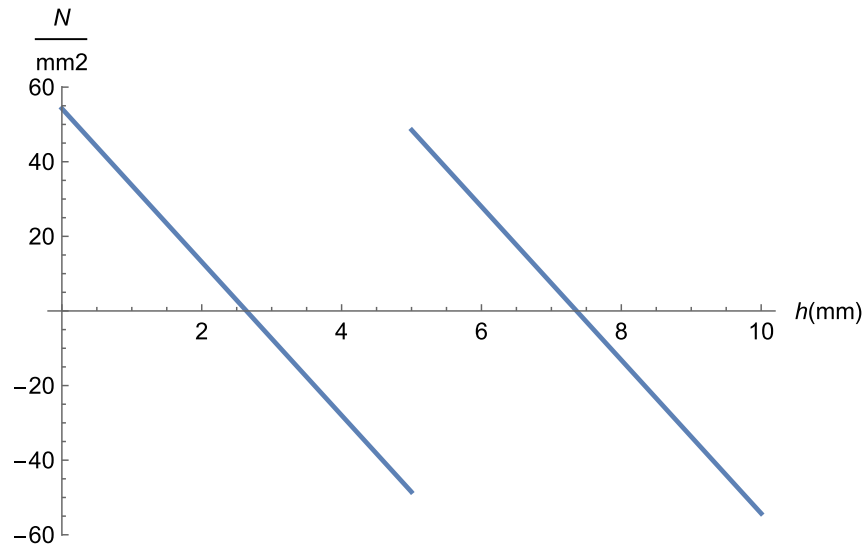
Profil naprezanje odgovara djelomično spregnutom nosaču (Slika 60).



Slika 60: Profil naprezanja na sredini grede za 25°C



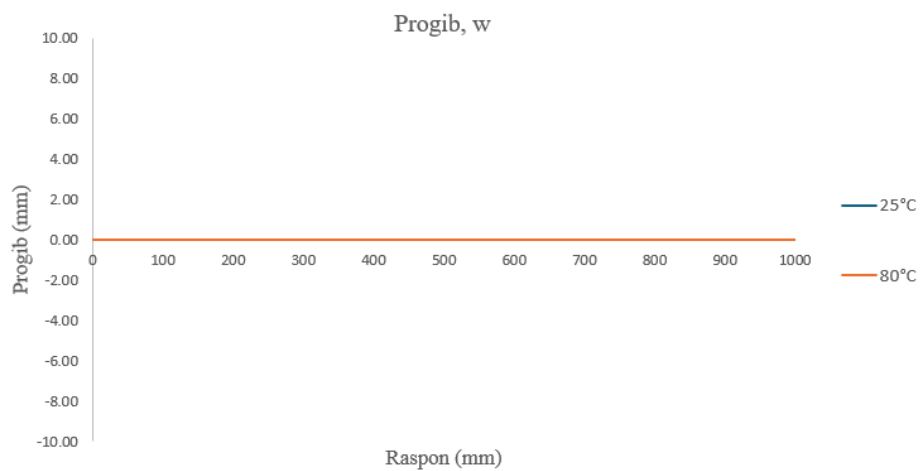
Slika 61: Naprezanja kod jednolike temperature za 80 °C



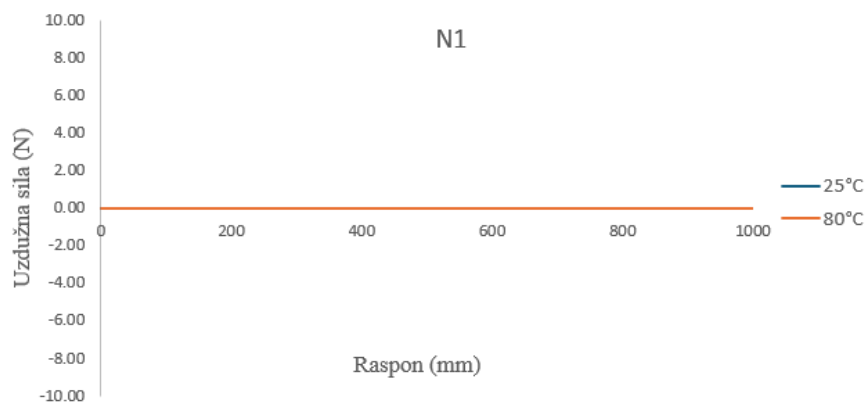
Slika 62: Profil naprezanja na sredini grede za 80°C

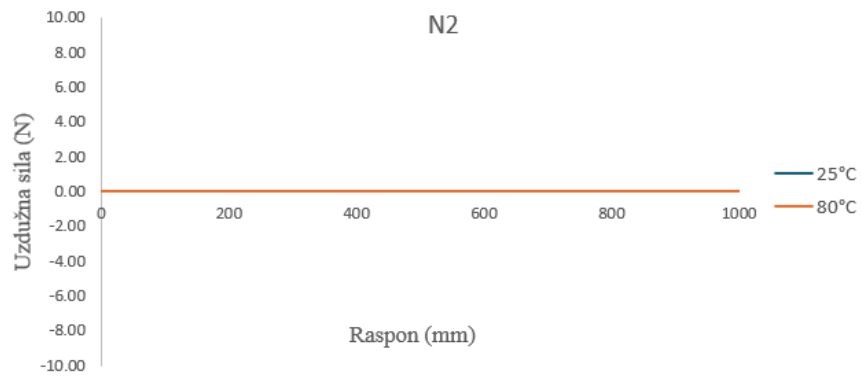
Nadalje bitno je istaknuti kako jednolika temperatura sama po sebi ne utječe na progib stakla, kao ni na unutrašnje sile i naprezanja koja se u njemu javljaju. Kada je temperatura jednoliko raspoređena po cijelom uzorku, svi dijelovi stakla jednako se zagrijavaju ili hlade, što rezultira samo promjenom duljine uzorka. Na slikama 63-67 dokazali smo tu tvrdnju.



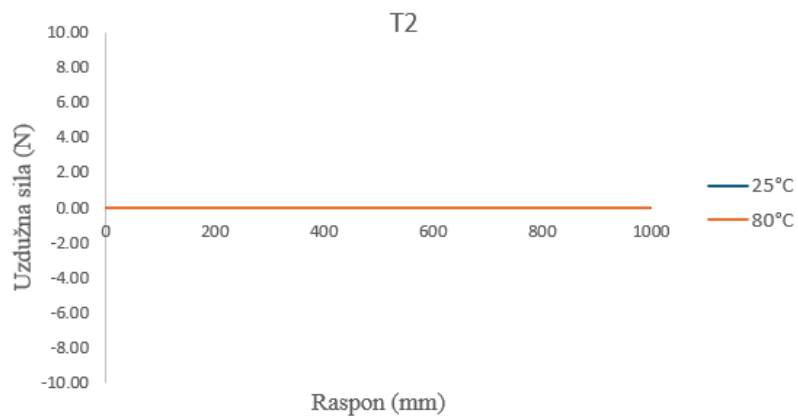
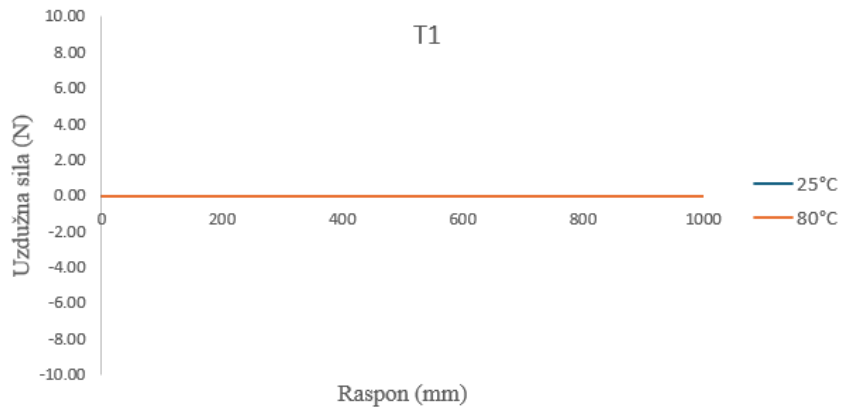


Slika 63: Progib nosača pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile

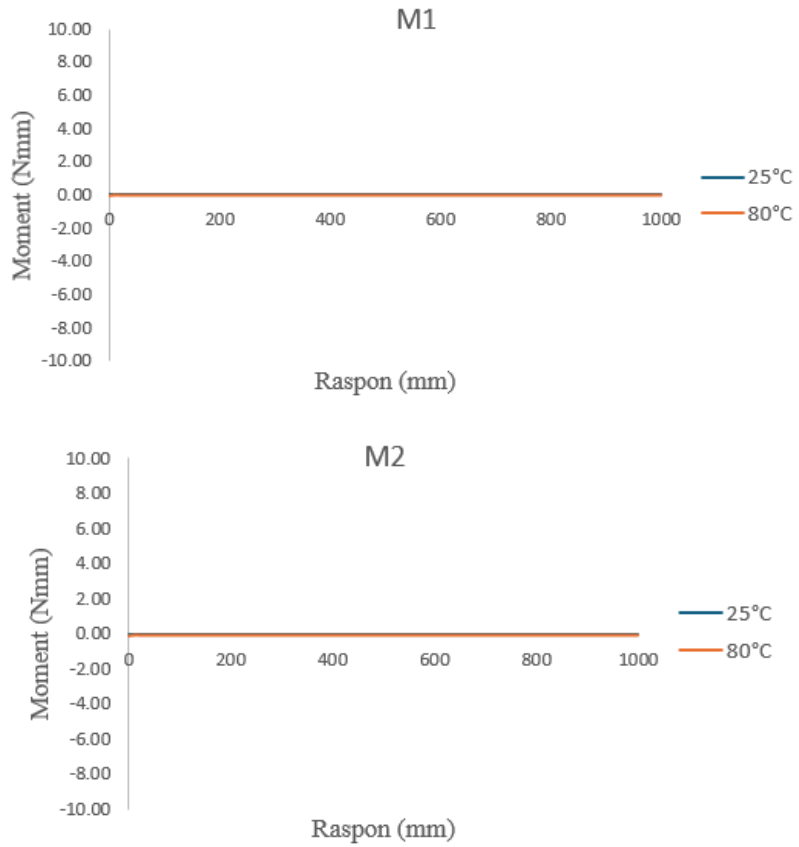




Slika 64: Uzdužne sile u slojevima 1 i 2 pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile



Slika 65: Poprečna sile u slojevima 1 i 2 pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile

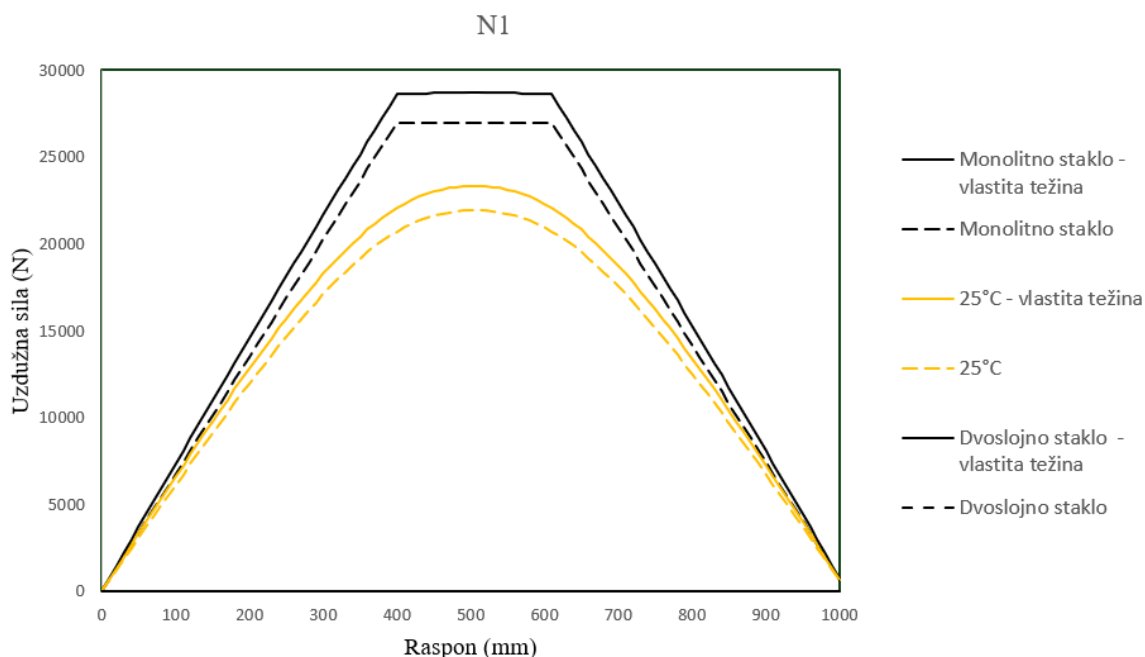


Slika 66: Moment savijanja sile u slojevima 1 i 2 pri jednolikoj promjeni temperature bez djelovanja sile

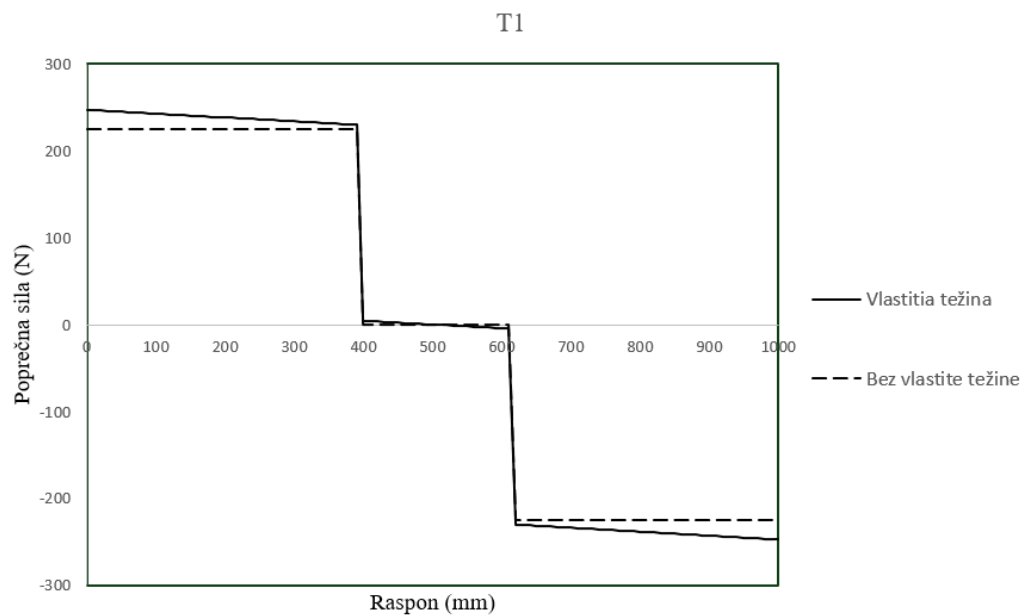


Slika 67: Izduženje (horizontalni pomak) slojeva 1 i 2 uzrokovan promjenom temperature

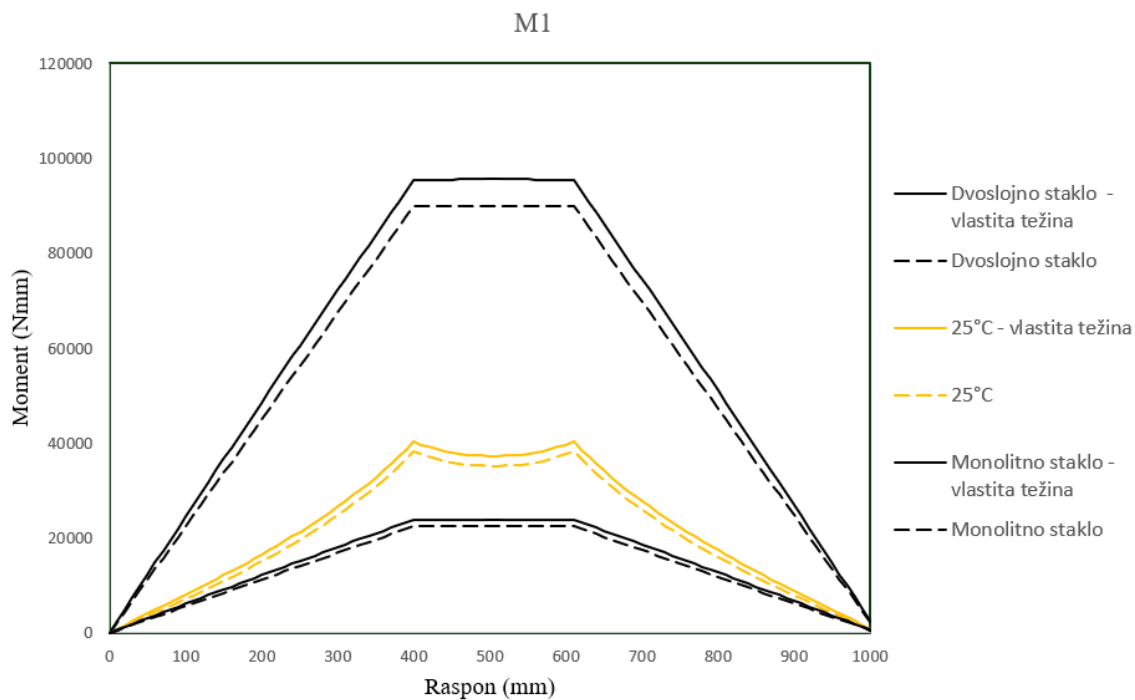
U sljedećem dijelu analize uz vanjsku silu dodali smo i utjecaj vlastite težine lameliranog stakla. Promatrali smo samo ponašanje pri 25°C jer tada nema efekata uzrokovanih promjenom temperature. Vlastitu težinu modelirali smo kao kontinuirano opterećenje koje djeluje na svaki sloj stakla. Pri izračunu smo uzeli u obzir gustoću stakla od 2500 kg/m<sup>3</sup> te dimenzije uzorka, čime smo dobili vrijednosti opterećenja za svaki sloj,  $q_1 = q_2 = 0.045$  N/mm. Iako je ovaj utjecaj relativno mali, njegov značaj varira s obzirom na veličinu uzorka, s mogućim doprinosom do 10% u ukupnim rezultatima. Na Slikama 68-71 vidimo da je doprinos vlastite težine oko 6%. Rezultati su prikazani samo za jedan sloj, jer simetrično vrijedi i za drugi.



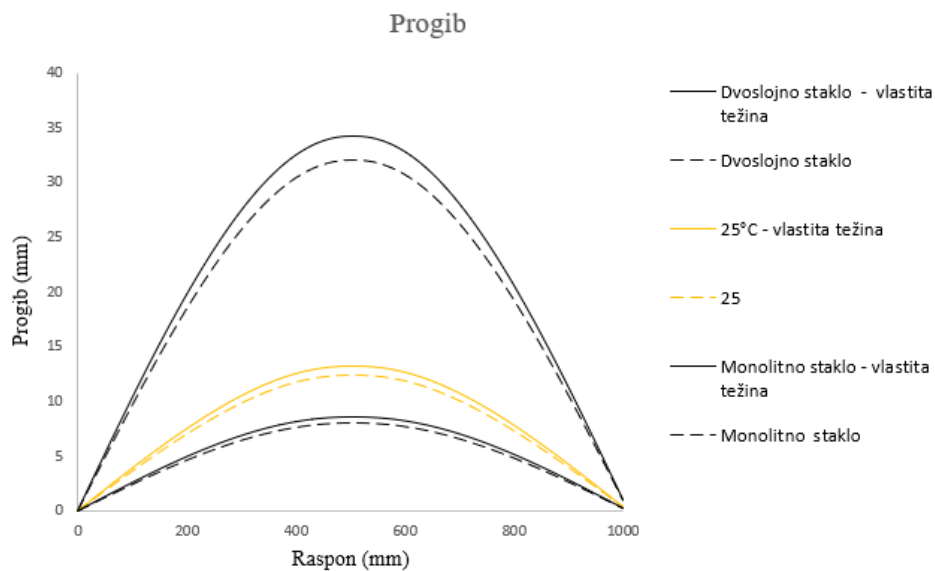
Slika 68: Usporedba uzdužne sile u sloju 1 sa i bez vlastite težine



*Slika 69: Usporedba poprečne sile u sloju 1 sa i bez vlastite težine*



*Slika 70: Usporedba momenta savijanja u sloju 1 sa i bez vlastite težine*

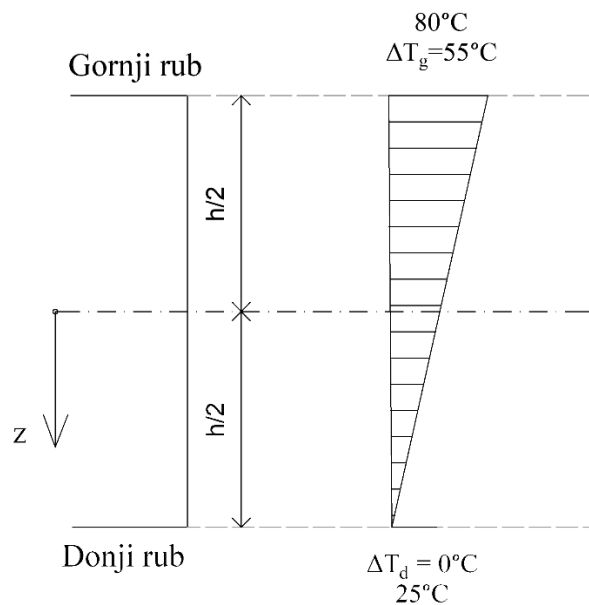


Slika 71: Usporedba progibne linije nosača sa i bez vlastite težine

Međutim, kako bismo pojednostavili daljnje analize u nastavku ćemo zanemariti utjecaj vlastite težine stakla

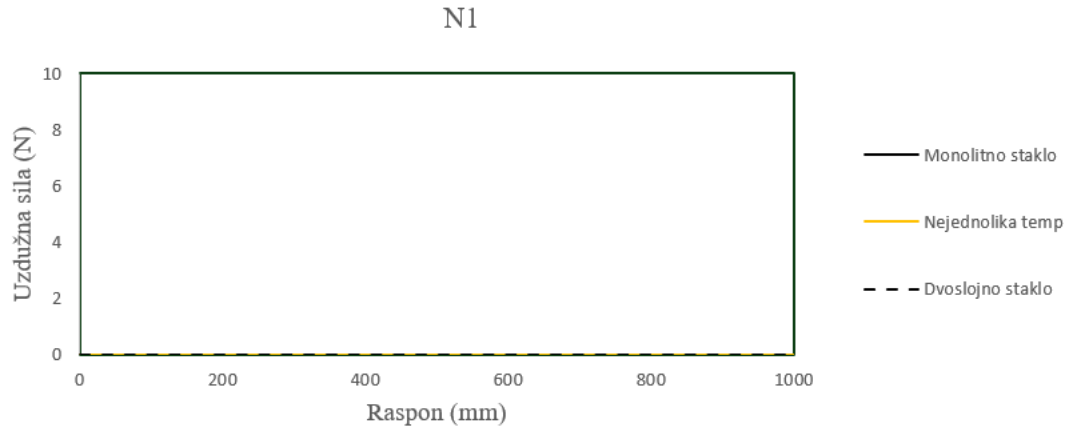
### 5.3. Utjecaj nejednolike raspodjele temperature

U sljedećem koraku analizirali smo nejednoliku raspodjelu temperature bez sile. Uzeli smo da na gornjem rubu sloja 2 djeluje  $80^{\circ}\text{C}$ , a na donjem rubu sloja 1,  $25^{\circ}\text{C}$ . Temperatura u sredini je zadana kao srednja vrijednost od  $52.5^{\circ}\text{C}$ .

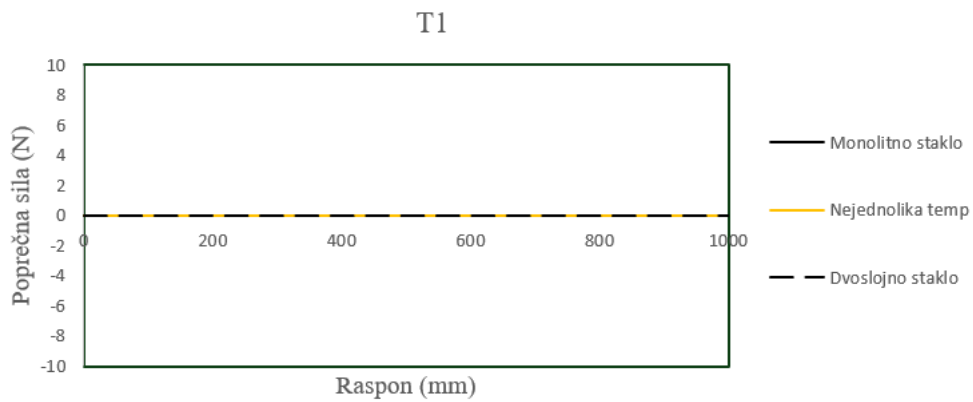


Slika 72: Nejednolika promjena temperature po visini presjeka

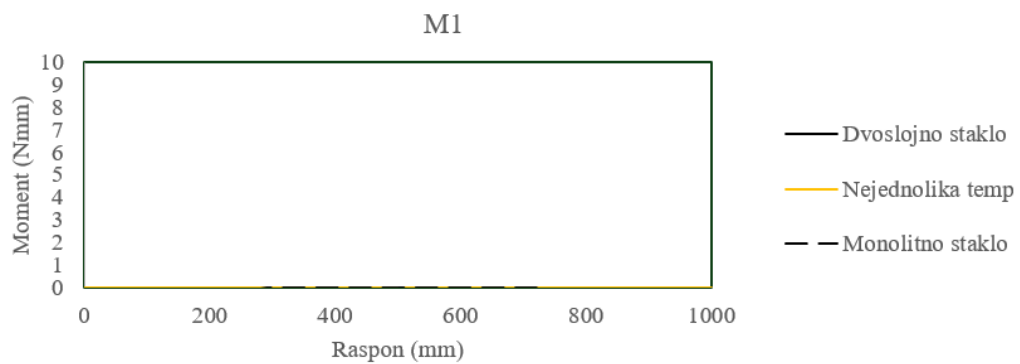
Na Slikama 73-75 možemo primijetiti da se ne javljaju unutrašnje sile i naprezanja iako je zadana nejednolika temperatura. Razlog tome je što je svaki sloj podvrgnut istoj razlici temperature jer u sredini zadana srednja vrijednost temperature, što znači da unutar slojeva dolazi do jednolikog širenja materijala. Zbog toga nema različitog rastezanja ili skupljanja slojeva, koje bi inače uzrokovalo kontaktna naprezanja i unutrašnje sile u slojevima.



*Slika 73: Uzdužna sila u sloju I pri nejednolikoj promjeni temperature*



*Slika 74: Poprečna sila u sloju I pri nejednolikoj promjeni temperature*

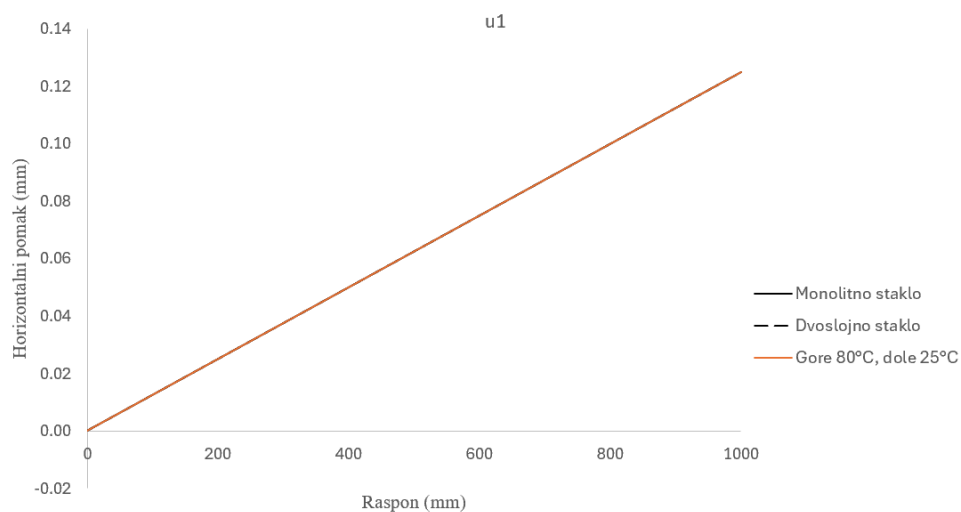


*Slika 75: Moment savijanja u sloju I pri nejednolikoj promjeni temperature*

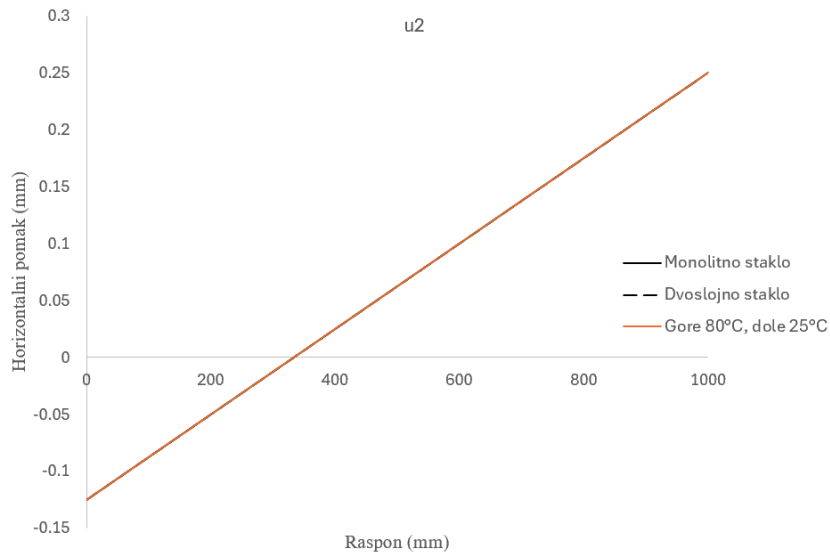


Međutim horizontalni pomak pojedinih slojeva i progib se javljaju pod utjecaj nejednolike temperature (Slike 76-79), ali su jednaki neovisno koji model koristimo, ORR, CRR ili RRR, imali ili nemali krutost na kontaktu. Naime, kada pogodimo ovakvu linearnu promjenu temperature koja jednako deformira oba sloja neće se aktivirati kontaktna naprezanja i zbog toga se neće niti aktivirati unutrašnje sile i momenti.

Slojevi se pod promjenom temperature jednako progibaju zato što su podvrnuti jednakoj razlici temperature, ali različito se rastežu, što u konačnici dovodi do savijanja monolitne grede.

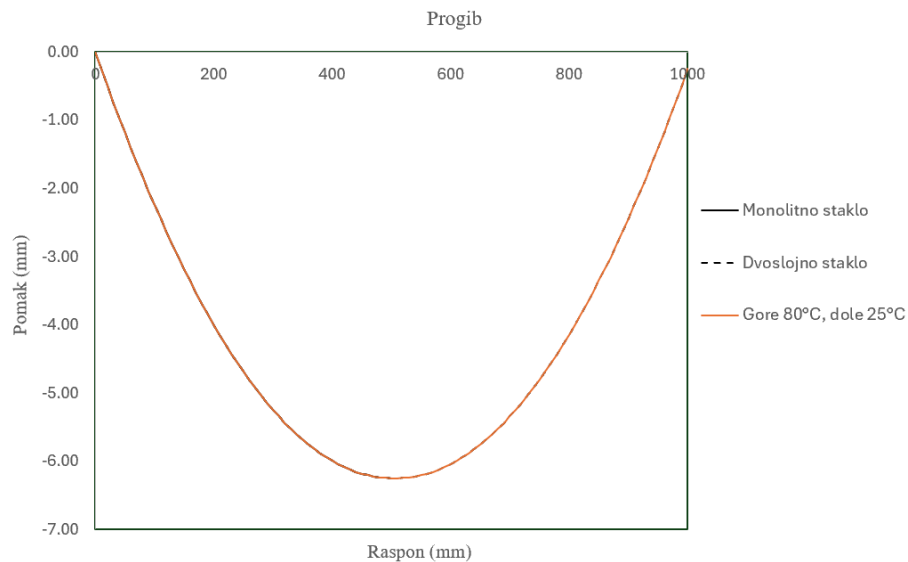


Slika 76: Horizontalni pomak sloja 1 pri nejednolikoj promjeni temperature



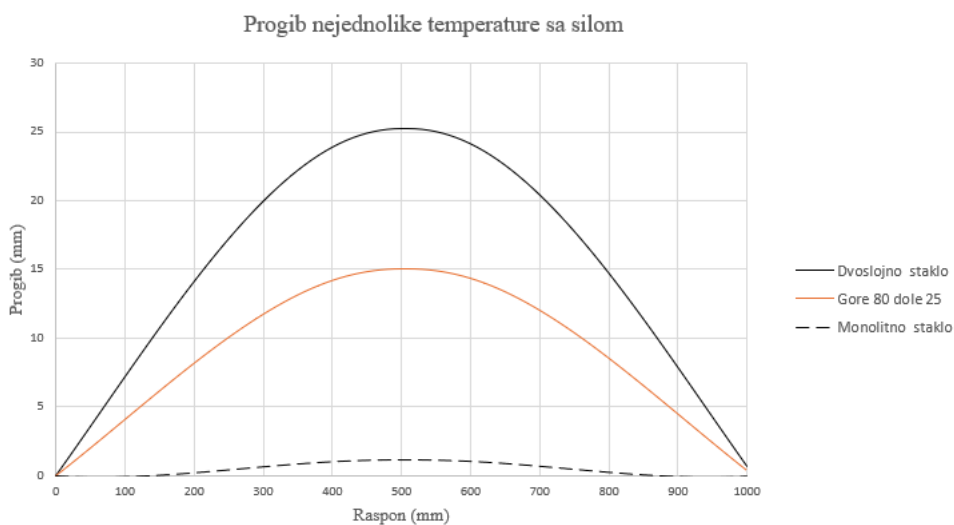
Slika 77: Horizontalni pomak sloja 2 pri nejednolikoj promjeni temperature

Na Slikama 76-77 vidimo da je sloju 1 spriječen horizontalni pomak u lijevom osloncu, a sloju 2 nije. Desni oslonac je klizni i oba sloju tu mogu imate horizontalne pomake. Što odgovara našem analitičkom modelu.



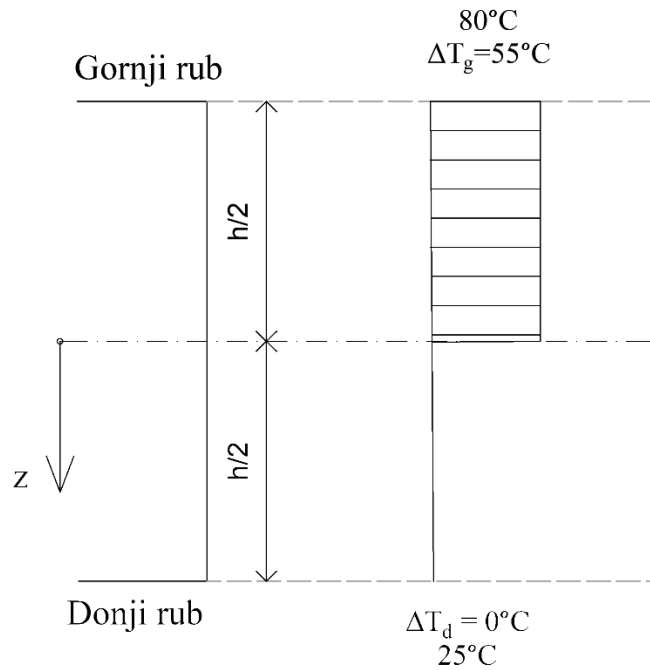
Slika 78: Progibna linija nosača pri nejednolikoj promjeni temperature

U sljedećem koraku kod nejednolike raspodjele temperature, dodali smo i utjecaj sile (Slika 79). Progib se znatno povećao, te je progib lameliranog stakla skoro jednak kao kod jednolike raspodjele temperature od 50 °C, što je očekivano, jer je temperatura koja je zadana u međusloju 52.5 °C.



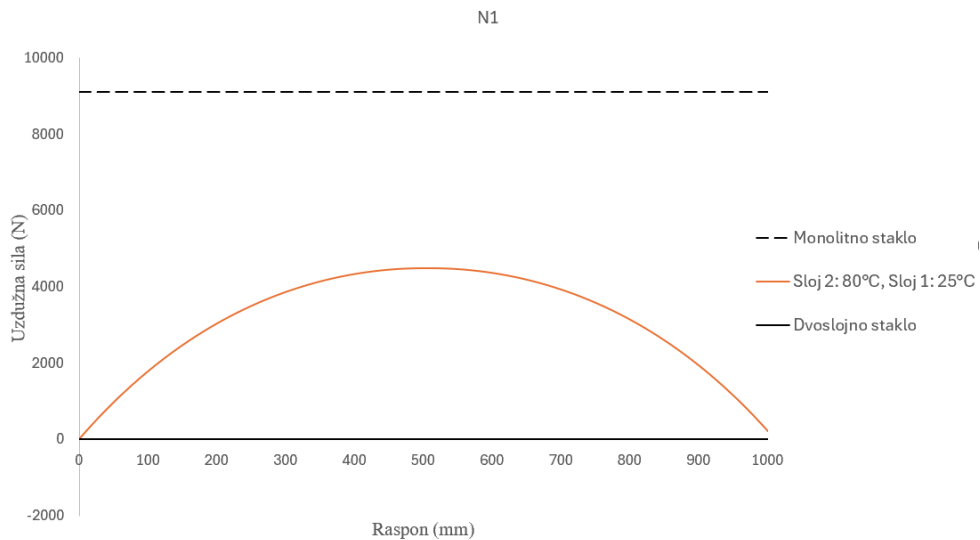
*Slika 79: Progib uslijed sile i nejednolike temperature*

Iz navedenog primjera možemo zaključiti da nejednolika raspodjela temperature između slojeva ne uzrokuje unutrašnje sile. Međutim, ako pretpostavimo diskontinuitetnu temperaturu, da kroz cijeli prvi sloj djeluje temperatura od 25°C, a kroz cijeli drugi sloj temperatura od 80°C (Slika 80), doći će do pojave unutrašnjih sila i naprezanja.

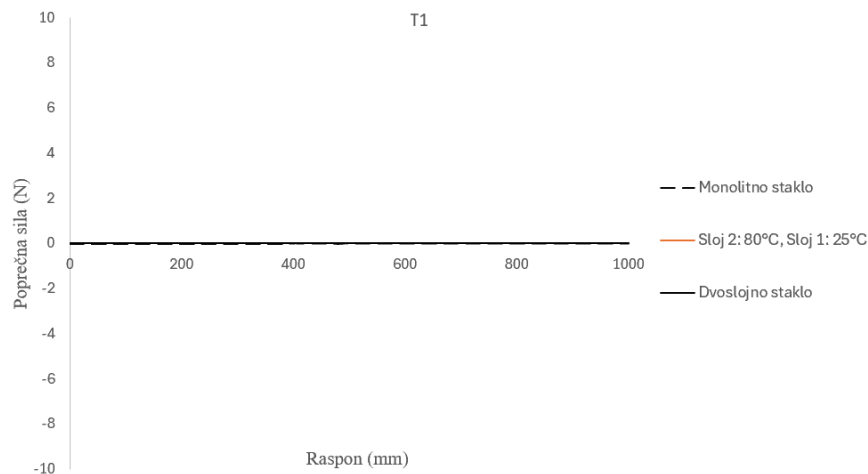


Slika 80: Diskontinuitetna promjena temperature po visini presjeka

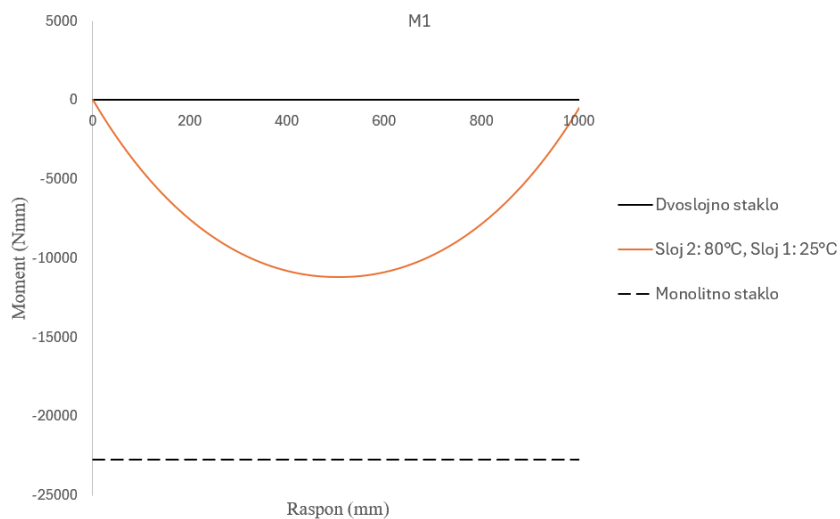
Javljaju se uzdužne sile i momenti, a poprečne sile nema budući da promjena temperature nema utjecaja na nju (Slika 81-83).



Slika 81: Uzdužne sile uzrokovane diskontinuitetnom raspodjelom temperature



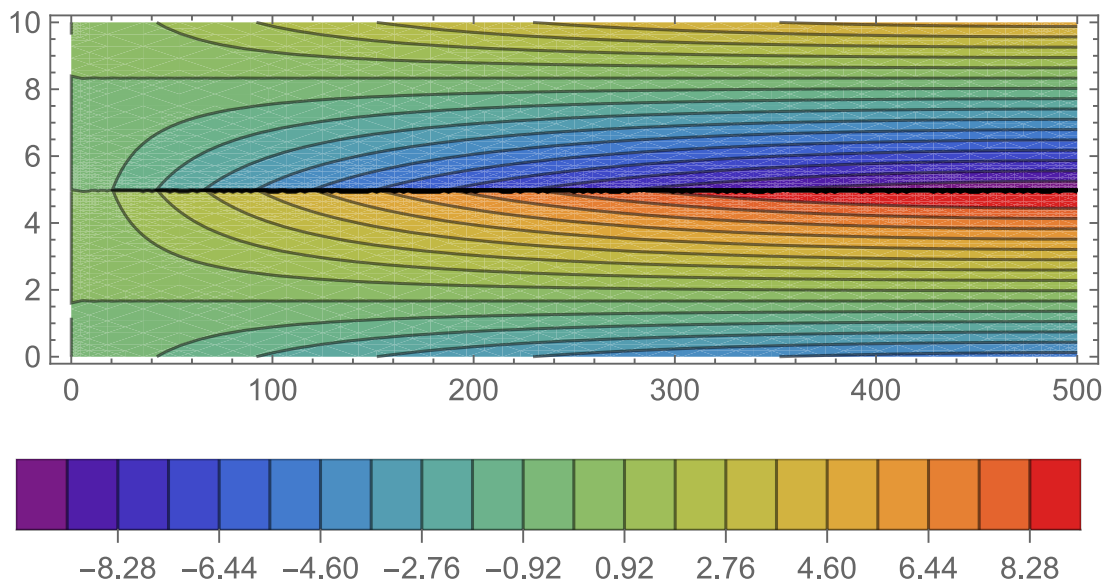
Slika 82: Poprečne sile uzrokovane diskontinuitetnom raspodjelom temperature



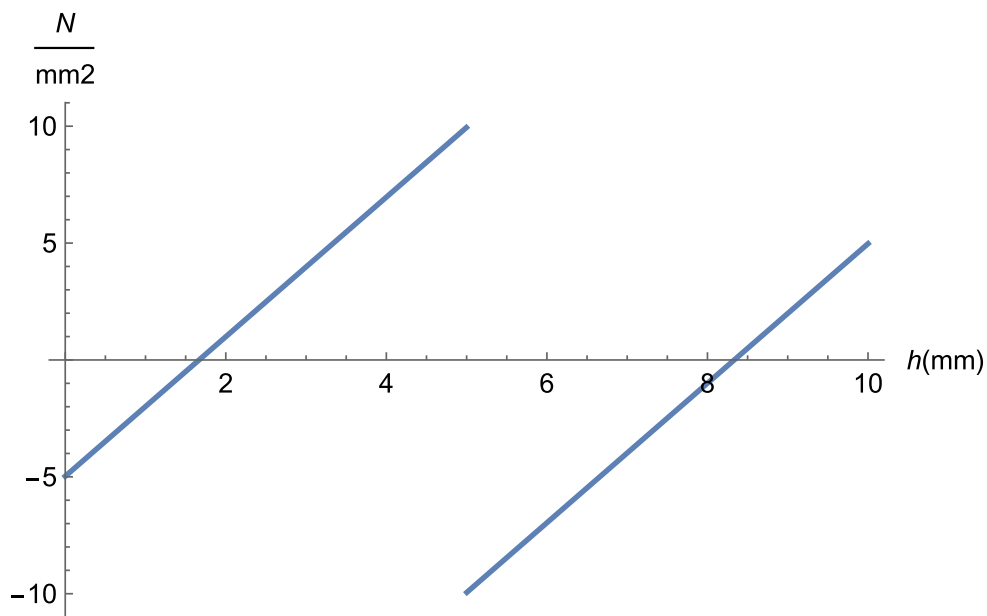
Slika 83: Momenti savijanja uzrokovani diskontinuitetnom raspodjelom temperature

Pri različitim temperaturama, materijal se širi ili skuplja. U ovom slučaju, prvi sloj (na 25°C) ne doživljava nikakvo širenje, s druge strane, drugi sloj (na 80°C) doživljava termičko širenje. Ova razlika u širenju dvaju slojeva dovodi do stvaranja unutarnjih naprezanja jer gornji sloj želi „razvući“ cijeli nosač, dok donji sloj ostaje nepromijenjen.

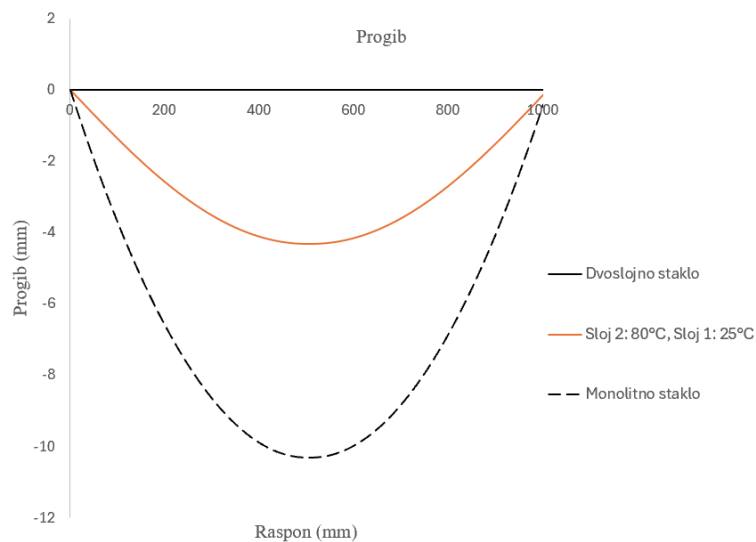
Različito širenje slojeva rezultira pojavom tangencijalnih naprezanja  $p_t$  na međusloju koja se odupiru relativnom pomicanju (klizanju) slojeva. Zbog kontaktnih naprezanja u svakom će sloju doći do pojave uzdužnih sila i momenata savijanja, što dovodi do linearne raspodjele normalnih naprezanja po visini presjeka (Slika 84-85) i savijanja (krivljenja) nosača (Slika 86).



Slika 84: Naprezanja uzrokovana diskontinuitetnom raspodjelom temperature



Slika 85: Profil naprezanja na sredini grede za diskontinuitetnu temperaturu

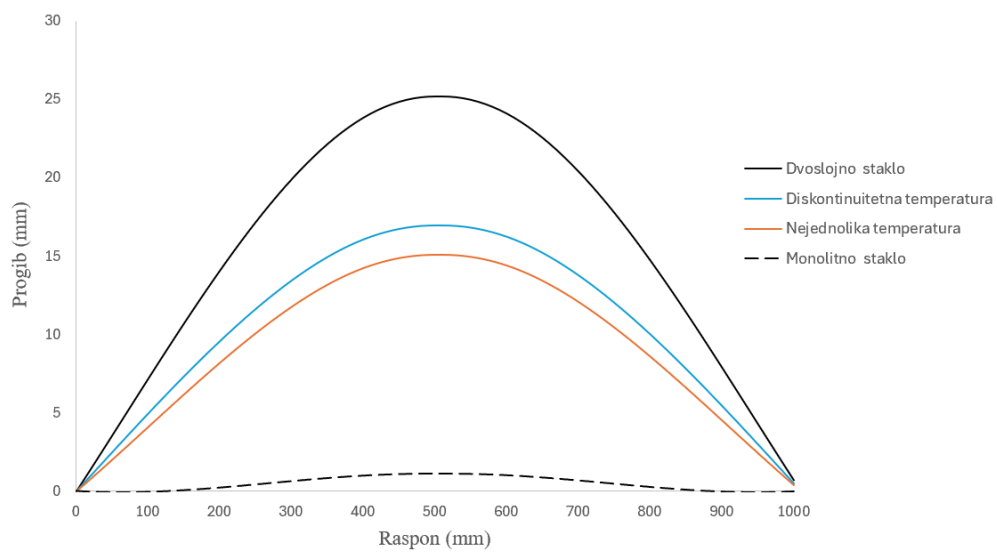


Slika 86: Progib nosača uzrokovan diskontinuitetnom temperaturom

Na Slici 86 vidimo da dvoslojno staklo nema progiba što je očekivano jer se događa da samo gornji sloj prilikom rastezanja slobodno kliže u odnosu na donji. Pri tome ne dolazi do nikakve interakcije među slojevima pa se ne pojavljuju ni kontaktne naprezanja  $p_t$ , a samim time nema ni unutrašnjih sila u slojevima za taj model.

Kada usporedimo rezultate progiba nejednolikih temperature (Slika 87), veći progib dobivamo u slučaju diskontinuitetne temperature, razlog tome je veća temperaturna razlika te različito širenje slojeva, što dovodi do većih naprezanja, pa samim time i većeg progiba.

Progib nejednolike temperature sa silom



Slika 87: Usporedba progiba nejednolikih temperatura



## 6. ZAKLJUČAK

Cilj ovog rada bio je istražiti utjecaj termalnih efekata na ponašanje kompozitnog spregnutog nosača, pri čemu je kao primjer kompozitnog nosača odabrano lamelirano staklo. Njegovo ponašanje uspoređivalo se s graničnim slučajevima, monolitnim staklom (savršeno spregnuti nosač) i dvoslojnim staklom (nespregnuti nosač). U tu svrhu izrađeno je analitičko rješenje koje obuhvaća tri spomenuta modela.

Na početku rada postavljena je teorijska osnova koja podupire svaki od ovih modela. Prikazane su tri osnovne skupine jednadžbi: kinematičke, konstitutivne i ravnotežne jednadžbe, te je izvršen njihov detaljan izvod uz uvođenje određenih pretpostavki, što je omogućilo dobivanje konačnih jednadžbi korištenih za analitičko rješenje.

Eksperimentalno ispitivanje, provedeno na lameliranom staklu od strane Huang, Xiaokun i suradnika, korišteno je za određivanje koeficijenta sprežanja, koji je bio ključan za daljnju analizu. Točnost analitičkog rješenja potvrđena je podudaranjem rezultata za monolitno i dvoslojno staklo u eksperimentu i analitičkom modelu.

Daljnja analiza rada bavila se termalnim efektima, pri čemu je pokazano da kod jednolike raspodjele temperature, povećanje temperature uzrokuje postupno popuštanje međusloja u lameliranom staklu. To dovodi do toga da se lamelirano staklo, koje je djelomično spregnuto, s porastom temperature sve više ponaša kao dvoslojno, nespregnuto staklo i obrnuto.

U završnom dijelu rada analizirani su učinci nejednolike raspodjele temperature unutar slojeva. Pokazalo se da temperaturne razlike unutar slojeva značajno utječu na unutarnje sile, naprezanja i progibe kompozitnih nosača. Ako je temperaturna razlika unutar svakog sloja jednaka, kao u slučaju kada temperature na krajevima iznose  $25^{\circ}\text{C}$  i  $80^{\circ}\text{C}$ , dolazi isključivo do horizontalnog pomaka bez pojave unutarnjih sila i naprezanja. Međutim, u situacijama kada temperaturne razlike između slojeva nisu jednake, dolazi do nejednolikog termičkog širenja ili skupljanja svakog sloja, što rezultira pojavom unutarnjih sila i naprezanja. Te se sile u tom slučaju javljaju kako bi spriječile relativno pomicanje slojeva.

Također, treba napomenuti da se analitički model, uz prilagodbu rubnih uvjeta, vrlo lako može primijeniti i za rješavanje statički neodređenih problema koji su poznati po tome da se prilikom

spriječenih termalnih deformacija javljaju unutrašnje sile i naprazanja. Takve primjere u radu nismo obradili, ali se u budućim istraživanjima analiza može relativno jednostavno proširiti i na takve probleme.

## Literatura

- [1] Kolegij Osnove spregnutih konstrukcija, predavanja: izv. prof. dr. sc. Mladen Bulić, 2023./2024.
- [2] Alfio Francesco Siciliano, Leo Škec, Gordan Jelenić: Closed-form solutions for modelling the rotational stiffness of continuous and discontinuous compliant interfaces in two-layer Timoshenko beams; *Acta mechanica*, 232 (2021), 2793-2824. doi: 10.1007/s00707-021-02958-x
- [3] Neven Crnobjna: Zagrebački savski mostovi; *građevinar* 57 (2005) 12, 977-985, doi: <https://hrcak.srce.hr/file/14234>
- [4] Kolegij Lagane konstrukcije, predavanja: dipl. ing. građ. Nebojša Buljan, 2023./2024.
- [5] Wikipedia. (n.d.). Plate theory (Slika). Wikipedia. Preuzeto 15. kolovoza 2024. s [https://bs.m.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Plate\\_theory.svg](https://bs.m.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Plate_theory.svg)
- [6] Kolegij Otpornost materijala II, predavanja: doc. dr. sc. Leo Škec, 2021./2022.
- [7] Xiaokun Huang , Gang Liu , Qiang Liu i Stephen J. Bennison; The flexural performance of laminated glass beams under elevated temperature; *Structural Engineering and Mechanics*, 52(3), 2014, 603-612, doi: <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2014.52.3.603>
- [8] Norma prEN16612 (2013.) doi: <https://www.scribd.com/document/444057392/215435586-prEN-16612-pdf-pdf>
- [9] Francesca Campi, Ilaria Monetto: Analytical solutions of two-layer beams with interlayer slip and bi-linear interface law. *International Journal of Solids and Structures*, 2013.