

Eksperimentalna validacija teorijskih predikcija za izvijanje vitkih štapova

Šuput, Nikola

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:170018>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

Sveučilište u Rijeci

Građevinski fakultet

Nikola Šuput

**EKSPERIMENTALNA VALIDACIJA TEORIJSKIH
PREDIKCIJA ZA IZVIJANJE VITKIH ŠTAPOVA**

Završni rad

Rijeka, 2021.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET
Preddiplomski sveučilišni studij
Otpornost materijala I

Nikola Šuput

JMBAG: 0082055195

Eksperimentalna validacija teorijskih predikcija za izvijanje vitkih štapova

Završni rad

Rijeka, lipanj 2021.

Naziv studija: **Sveučilišni preddiplomski studij Građevinarstvo**

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Temeljne tehničke znanosti

Znanstvena grana:

Tema završnog rada

EKSPERIMENTALNA VALIDACIJA TEORIJSKIH PREDIKCIJA ZA IZVIJANJE VITKIH ŠTAPOVA

EXPERIMENTAL VALIDATION OF THEORETICAL PREDICTIONS FOR BUCKLING OF SLENDER COLUMNS

Kandidat: **NIKOLA ŠUPUT**

Kolegij: **OTPORNOST MATERIJALA 1**

Završni rad broj: **21-P-71**

Zadatak:

Izvesti izraze za kritičnu silu ravnog tlačno opterećenog štapa uz pretpostavku malih pomaka i zaokreta za četiri različita slučaja oslanjanja štapa: (a) zglob-zglob, (b) upeto-slobodno, (c) upeto-zglob i (d) upeto-upeto. Izvesti izraze za silu u štapu u post-kritičnoj fazi uz pretpostavku velikih pomaka i zaokreta za slučajeve (a) i (b).

Provesti eksperimente s ciljem validacije analitičkih rješenja za slučajeve (a) i (b) i to u sljedećim fazama: (i) odrediti sve relevantne geometrijske osobine poprečnog presjeka štapa, (ii) eksperimentalno odrediti modul elastičnosti štapa, (iii) iz eksperimenata s izvijanjem štapa odrediti silu u štapu u različitim stadijima, (iv) pomoću opreme za optička mjerenja u svim stadijima snimiti kompletno polje pomaka štapa i obraditi rezultate optičkih mjerenja. Konačno, potrebno je usporediti rezultate eksperimenata s analitičkim rješenjima, ocijeniti točnost teorijskog pristupa te dati smjernice za nastavak istraživanja i uklanjanje uočenih nedostataka.

Tema rada je uručena: 24. veljače 2021.

Komentorica:

doc. dr. sc. Nina Čeh

dipl. ing. građ.

Mentor:

doc. dr. sc. Leo Škec

dipl. ing. građ.

IZJAVA

Završni rad sam izradio samostalno, u suradnji s mentorom i komentoricom uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Nikola Šuput

Nikola Šuput

U Rijeci, 20. rujna 2021.

Završni/Diplomski rad sadrži eksperimentalna ispitivanja provedena na laboratorijskoj opremi nabavljenoj u okviru projekta

Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci

Voditelj projekta prof. dr. sc. Nevenka Ožanić
Šifra projekta RC.2.2.06-0001
Financijer projekta Europski fond za regionalni razvoj (EFRR)
 Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH
Pravna nadležnost Republika Hrvatska

U Rijeci, 20. rujna 2021.

Mentor:

doc. dr. sc. Leo Škec

Zahvala

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Leu Škec na velikom trudu, strpljenju i pomoći pri izradi završnog rada. Također, zahvaljujem se komentorici dr. sc. Nini Čeh na pomoći pri dobivanju i analiziranju podataka bitnih za ovaj rad.

Eksperimentalna validacija teorijskih predikcija za izvijanje vitkih štapova

Sažetak:

Opterećenjem štapa centričnom tlačnom silom može doći do gubitka stabilnosti te pojave izvijanja. Sila pri kojoj dolazi do izvijanja naziva se kritična sila i ovisi o materijalu od kojeg je izrađen, geometrijskim karakteristikama i načinu oslanjanja. Prikazani su matematički izvodi za kritičnu silu (Eulerovi izrazi) za četiri najčešća načina oslanjanja štapa. Nadalje, za dva slučaja oslanjanja (zglob-zglob i upeto-slobodno) izvedeni su izrazi za silu u post-kritičnoj fazi uzimajući u obzir velike pomake i zaokrete. Za ta dva slučaja provedena su i eksperimenti s optičkim mjerenjima te je konačno dana usporedba teorijskih vrijednosti i rezultata koji su dobiveni kroz eksperimente.

Ključne riječi: izvijanje, Eulerovi izrazi, kritična sila, elastična linija nosača, veliki pomaci i zaokreti

Experimental validation of theoretical predictions for buckling of slender columns

Abstract:

Loading a slender column with a centric compressive force can lead to loss of stability and buckling. The force at which buckling occurs is called the critical force, which depends on the material from which the column is made, its geometric properties and the type of supports at the ends. Mathematical expressions for the critical force (Euler's formulae) are presented for the four most common support combinations. Furthermore, mathematical expression for the post-critical force for two support combinations (hinged-hinged and clamped-free) are derived by accounting for large displacements and rotations. For these two cases, experiments with optical measurements were performed and, finally, a comparison of the theoretical values and experimental results is given.

Keywords: buckling, Euler's formulae, critical load, elastica, large displacements and rotations

Sadržaj

1. UVOD	1
2. OSNOVE TEORIJE ELASTIČNE STABILNOSTI	2
2.1. Izvodi izraza za kritičnu silu kod elastičnog izvijanja ravnih štapova	2
2.1.1. Štap sa zglobovima na oba kraja	2
2.1.2. Štap upet na jednom kraju, a na drugom slobodan.....	6
2.1.3. Štap upet na jednom kraju, a na drugom u pomičnom osloncu.....	8
2.1.4. Štap upet na oba kraja.....	11
2.2. Teorija elastičnog izvijanja ravnih štapova pri velikim pomacima i rotacijama	15
2.2.1. Izvijanje konzolne grede.....	15
2.2.2. Izvijanje proste grede.....	18
3. EKSPERIMENTALNA MJERENJA	19
3.1. Određivanje geometrijskih osobina poprečnog presjeka	19
3.2. Određivanje modula elastičnosti.....	22
3.3. Postupak mjerenja.....	23
3.3.1. Prvi eksperiment – Izvijanje štapa upetog na jednom kraju.....	24
3.3.2. Drugi eksperiment – Izvijanje štapa zglobno oslonjenog na oba kraja	25
3.4. Rezultati	26
3.4.1. Prvi eksperiment – Izvijanje štapa upetog na jednom kraju.....	26
3.4.2. Drugi eksperiment – Izvijanje štapa zglobno oslonjenog na oba kraja	31
4. ZAKLJUČAK.....	34
5. LITERATURA	35

Slika 1: Štap učvršćen zglobno u oba ležaja: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1].....	2
Slika 2: Rješenja diferencijalne jednačbe elastične linije i linearne diferencijalne jednačbe [1]	5
Slika 3: Štap upet u jednom kraju, a u drugom slobodan: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1].....	6
Slika 4: Štap upet u jednom ležaju, a pomičan u drugom: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1].....	8
Slika 5: Grafičko rješenje jednačbe (32) [1].....	10
Slika 6: Štap upet u oba ležaja: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1]	11
Slika 7: Osnovni načini učvršćivanja štapa na krajevima s njihovim duljinama izvijanja [1]	14
Slika 8: Izvijanje štapa uslijed sile veće od kritične [2]	15
Slika 9: Poprečni presjek štapa.....	19
Slika 10: Poprečni presjek štapa s prikazom osi težišta	20
Slika 11: Provjera rezultata u programu AutoCAD.....	21
Slika 12: Pokus za izračun Young-ovog modula elastičnosti	22
Slika 13: Dobivene vrijednosti za modul elastičnosti	23
Slika 14: Sustav kamera za 3D optičko mjerenje [7]	23
Slika 15: Prvi eksperiment.....	24
Slika 16: Drugi eksperiment.....	25
Slika 17: Posljednji stadij štapa s maksimalnim pomacima	26
Slika 18: Nulti stadija štapa bez pomaka.....	26
Slika 19: Prikaz pomaka točke 1 u odnosu na opterećenje.....	27

Slika 20: Usporedba pomaka u x smjeru modela i eksperimenta	28
Slika 21: Usporedba pomaka u y smjeru modela i eksperimenta	29
Slika 22: Usporedba sile u osloncu modela i eksperimenta	29
Slika 23: Usporedba elastične linije modela i eksperimenta	30
Slika 24: Očitavanje uzdužnog pomaka u osloncu i poprečnog pomaka u sredini štapa u programu GOM Correlate	31
Slika 25: Usporedba poprečnog pomaka sredine štapa modela i eksperimenta	32
Slika 26: Usporedba uzdužnog pomaka oslonca modela i eksperimenta	32
Slika 27: Usporedba sile u osloncu modela i eksperimenta	33
Slika 28: Usporedba elastične linije modela i eksperimenta	33

1. UVOD

Izvijanje je pojava gubitka stabilnosti koja se javlja kada ravan štap biva opterećen centričnom tlačnom silom. Ukoliko neka sila nadmaši graničnu vrijednost do koje je ravan oblik ravnoteže štapa stabilan, dolazi do gubitka stabilnosti štapa te nastupa izvijanje. Ta se granična vrijednost naziva kritična sila i označava se s oznakom F_{kr} . Gubitak stabilnosti uzrokovan izvijanjem najčešća je pojava kod rešetkastih konstrukcija poput čeličnih mostova, stupova dalekovoda i dizalica, kod kojih jedan ili više štapova mogu izgubiti stabilnost pri prevelikom tlačnom opterećenju. Do izvijanja štapa dolazi zbog ekscentričnosti osnog opterećenja F kao i zbog početne zakrivljenosti i nehomogenosti štapa. Aksijalno opterećenje na koncu može uzrokovati lom štapa zbog povećanja momenta savijanja. Pri tom stanju, relativno mala opterećenja koja bi inače zadovoljavala uvjet čvrstoće mogu prouzročiti gubitak stabilnosti dijelova konstrukcija. Vrijednost kritične sile pri kojoj dolazi do izvijanja štapa ovisi o njegovoj vitkosti, materijalu od kojeg je načinjen, geometrijskim svojstvima i načinu na koji su učvršćeni njegovi krajevi.

Teorija koja dovodi do izraza za kritičnu silu je linearizirana, što znači da je bazirana na pretpostavci da su pomaci i zaokreti štapa relativno mali. Osim što takva pretpostavka ima smisla jer je u teoriji netom prije izvijanja štap savršeno ravan, pa će i izvijanje nastupiti pri vrlo malim pomacima i rotacijama, na taj se način izvod značajno pojednostavljuje s matematičkog aspekta. Međutim, takav pristup nije u stanju dati točno rješenje za deformiranu liniju nosača nakon što nastupi gubitak stabilnosti. To je moguće koristeći teoriju koja u obzir uzima velike pomake i rotacije, što će biti pokazano u ovom radu. Takva teorija uz to pokazuje da se nakon izvijanja štap nastavlja deformirati jedino uz daljnje povećanje sile iznad kritične vrijednosti.

U ovom radu će najprije biti izvedeni izrazi za kritičnu silu na standardni način (Eulerovi izrazi) za četiri različita načina oslanjanja štapa. Nakon toga će se za dva od ta četiri načina oslanjanja pokazati izvod za određivanje sile u štapu za post-kritičnu fazu (deformiranje nakon izvijanja) po teoriji koja u obzir uzima velike pomake i rotacije. U prvom je slučaju promatrani štap učvršćen u jednom kraju upeto, a slobodan u drugom kraju, dok je u drugom slučaju štap na oba kraja zglobno oslonjen. Za ta je dva slučaja provedeno eksperimentalno istraživanje s ciljem validacije analitičkih rješenja. U eksperimentima su pomaci štapa određeni optičkim mjerenjem, te je naposljetku provedena usporedba teorijskih vrijednosti s vrijednostima dobivenim kroz oba eksperimenta

2. OSNOVE TEORIJE ELASTIČNE STABILNOSTI

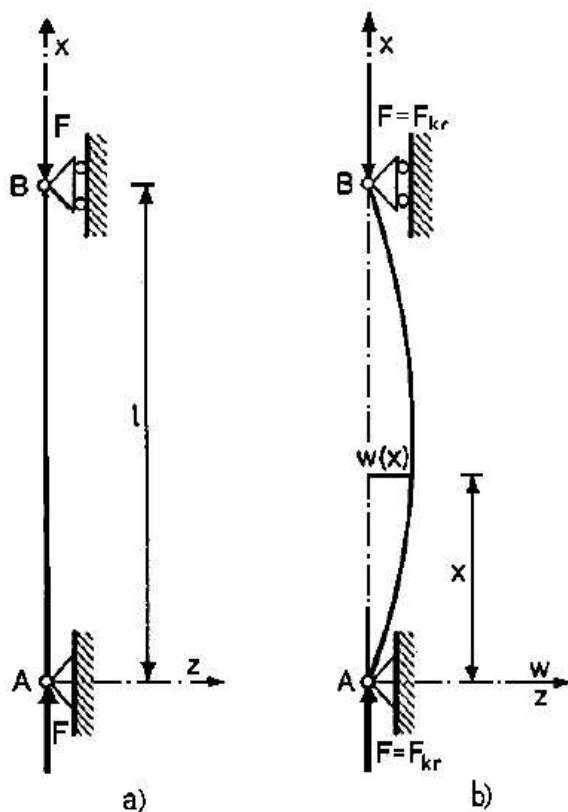
U ovom poglavlju su najprije analizirani najčešći slučajevi izvijanja ravnih štapova po klasičnoj teoriji elastične stabilnosti koja pretpostavlja da su pomaci i zaokreti štapa relativno mali. Nakon toga je objašnjeno kako se ukidanjem te pretpostavke može analizirati ravnoteža štapa nakon što nastupi izvijanje pri čemu pomaci i zaokreti štapa mogu biti veliki.

2.1. Izvodi izraza za kritičnu silu kod elastičnog izvijanja ravnih štapova

Leonhard Euler 1774. godine prvi je izveo izraz za kritičnu silu i dokazao ovisnost vrijednosti kritične sile o načinu na koji su učvršćeni krajevi štapa. Krajnji cilj metode je pronalazak sile uslijed koje je jednako moguć ravan i krivocrtan oblik štapa.

Nadalje, navedena su četiri osnovna slučaja kojima se može dobiti izvijanje štapa ovisno o načinu učvršćivanja krajeva štapa.

2.1.1. Štap sa zglobovima na oba kraja



Slika 1: Štap učvršćen zglobovima u oba ležaja: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1]

Pri zglobovnom učvršćivanju štapa na oba kraja on zadržava svoj ravan oblik (Slika 1.a) ukoliko je centrična tlačna sila F manje vrijednosti od kritične sile F_{kr} . U trenutku kada sila

F postigne jednaku vrijednost kao sila F_{kr} , moguća su oba oblika štapa, ravan i krivocrtan (Slika 1.b).

U presjeku štapa na nekoj udaljenosti x od donjeg oslonca dolazi do pojave momenta savijanja:

$$M = F * w$$

gdje je w progib štapa koji je ovisan o položaju x . Diferencijalna jednadžba elastične linije nosača daje:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI_{min}} = -\frac{F * w}{EI_{min}} \quad (1)$$

gdje je EI_{min} minimalna krutost na savijanje štapa. Izvijanje štapa pojavljuje se u ravnini u kojoj je fleksijska krutost štapa najmanja. Iz tog se razloga u izraz uvodi I_{min} koji predstavlja minimalni moment inercije poprečnog presjeka štapa. Prethodna jednadžba se može zamijeniti približnom linearnom diferencijalnom jednadžbom budući da se pretpostavljaju vrlo mali progibi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F * w}{EI_{min}} \quad (2)$$

Negativan predznak na desnoj strani jednadžbe uveden je zato što su predznaci veličina w i $\frac{d^2w}{dx^2}$ suprotni, neovisno o izboru pozitivnog smjera koordinate osi z .

Dodavanjem oznake:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (3)$$

Jednadžba (2) postaje homogena diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0 \quad (4)$$

Njeno opće rješenje je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (5)$$

Iz rubnih uvjeta se određuju konstante integracije A i B:

$$w(0) = 0 \quad i \quad w(l) = 0 \quad (6)$$

Da je B jednako nuli saznaje se iz prvog uvjeta čime se jednačba (5) svodi na:

$$w = A \sin \alpha x \quad (7)$$

Iz drugog se uvjeta tada može zaključiti:

$$A \sin \alpha l = 0 \quad (8)$$

Rješenje $w(x) = 0$ za $A = 0$ pokazuje da je štap ravnog oblika, što je jedna od mogućih opcija. Druga opcija, tj. krivocrtan oblik štapa nastaje ako je $A \neq 0$, što uvjetuje:

$$\sin \alpha l = 0 \quad (9)$$

Iz čega se izvlači uvjet za štap u kritičnom stanju:

$$\alpha l = n\pi \quad ili \quad \alpha = \frac{n\pi}{l}, n = 1,2,3, \dots \quad (10)$$

Jednačba elastične linije:

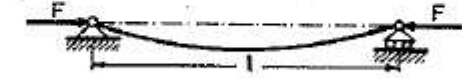
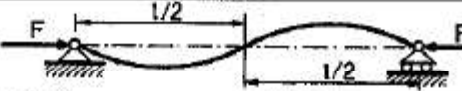
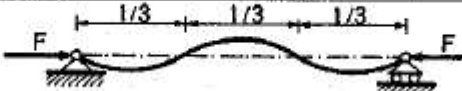
$$w = A \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (11)$$

Koristeći prethodne izraze (3) i (9) dolazimo do vrijednosti sile pri čijem će djelovanju nastupiti izvijanje štapa.

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (12)$$

Tablica 1. prikazuje oblike elastične linije štapa pri odgovarajućoj vrijednosti kritične sile za $n = 1, 2$ i 3 .

Tablica 1: Oblici elastičnih linija štapa za $n = 1, 2$ i 3 [1]

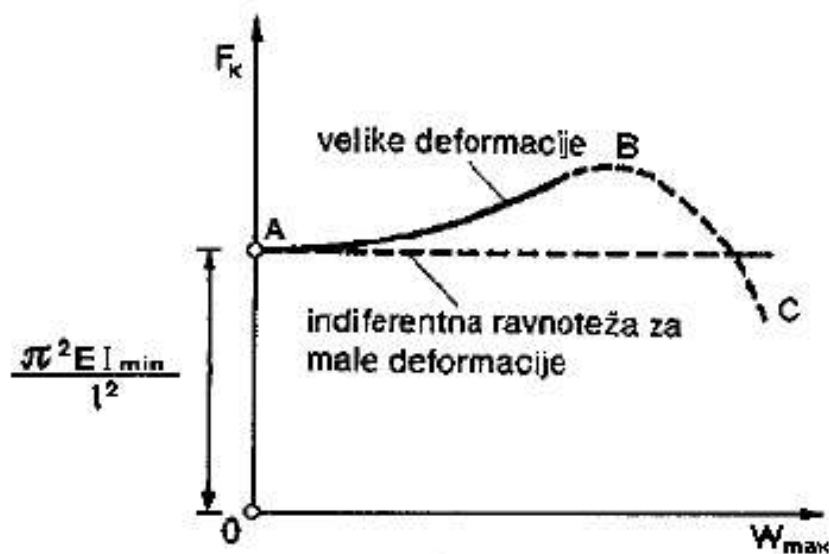
n	Jednadžba elastične linije	Oblik elastične linije	F
1	$w = A \sin \frac{\pi x}{l}$		$\frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$
2	$w = A \sin \frac{2\pi x}{l}$		$\frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}$
3	$w = A \sin \frac{3\pi x}{l}$		$\frac{9\pi^2 EI_{min}}{l^2}$

Iz tablice proizlazi da n predstavlja broj poluvalova sinusoide položenih po dužini izvijenog štapa. Budući da se traži najmanja vrijednost kritične sile pri kojoj može doći do izvijanja štapa, uzima se vrijednost kritične sile $n = 1$ koja iznosi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (13)$$

To je vrijednost Eulerove kritične sile ukoliko je štap oslonjen zgloбно u oba kraja.

Oblik elastične linije izvijenog štapa dobivamo iz jednadžbe (11), dok progib ostaje neodređen.



Slika 2: Rješenja diferencijalne jednadžbe elastične linije i linearne diferencijalne jednadžbe [1]

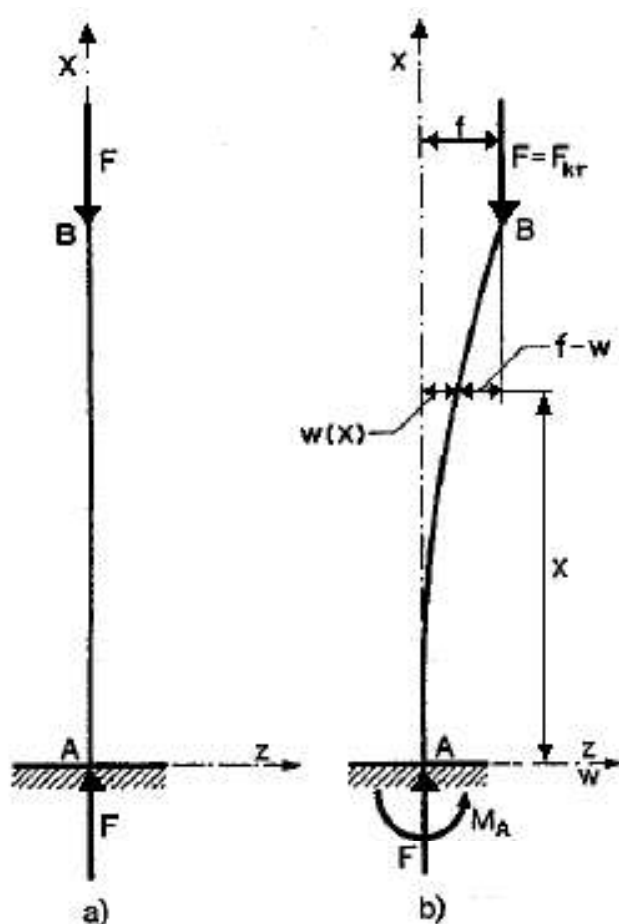
To je zato što je zakrivljenost elastične linije izražena približnim izrazom $\frac{d^2w}{dx^2}$ i promatrana je linearna diferencijalna jednačba (2) koja zbog teorije drugog reda vrijedi za male pomake. Ukoliko se želi dobiti veličina progiba, mora se riješiti nelinearna diferencijalna jednačba (1) uzevši točan izraz za zakrivljenost.

Slika 2 prikazuje rješenje jednačbe (1) krivuljom AB, dok crtkana krivulja BC predstavlja izvijanje u plastičnom području. Tangenta krivulje AB u točki A je horizontalna što predstavlja rješenje linearne diferencijalne jednačbe (2). Točno rješenje se podudara s približnim ukoliko su mali pomaci.

2.1.2. Štap upet na jednom kraju, a na drugom slobodan

Progib na gornjem kraju štapa je nepoznanica koja se označava sa oznakom f , a moment savijanja se javlja u nekom presjeku izvijenog štapa (Slika 3.b) :

$$M = -F(f - w)$$



Slika 3: Štap upet u jednom kraju, a u drugom slobodan: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1]

Diferencijalna jednačina elastične linije:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{F}{EI_{min}}(f - w) \quad (14)$$

koja se također može zapisati:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \alpha^2 f \quad (15)$$

za koju vrijedi:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (16)$$

Jednačina (15) je nehomogena diferencijalna jednačina 2. reda s konstantnim koeficijentima. Njeno opće rješenje glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f$$

Vrijede rubni uvjeti za štap na slici 3.b:

$$w(0) = 0 \quad i \quad w'(0) = 0 \quad (17)$$

dok u slobodnom kraju vrijedi:

$$w(l) = f \quad (18)$$

Iz uvjeta (17) se može zaključiti da je $B = -f$, $A = 0$, pa je:

$$w = f(1 - \cos \alpha x) \quad (19)$$

što prema uvjetu (18) nalaže:

$$\cos \alpha l = 0 \quad (20)$$

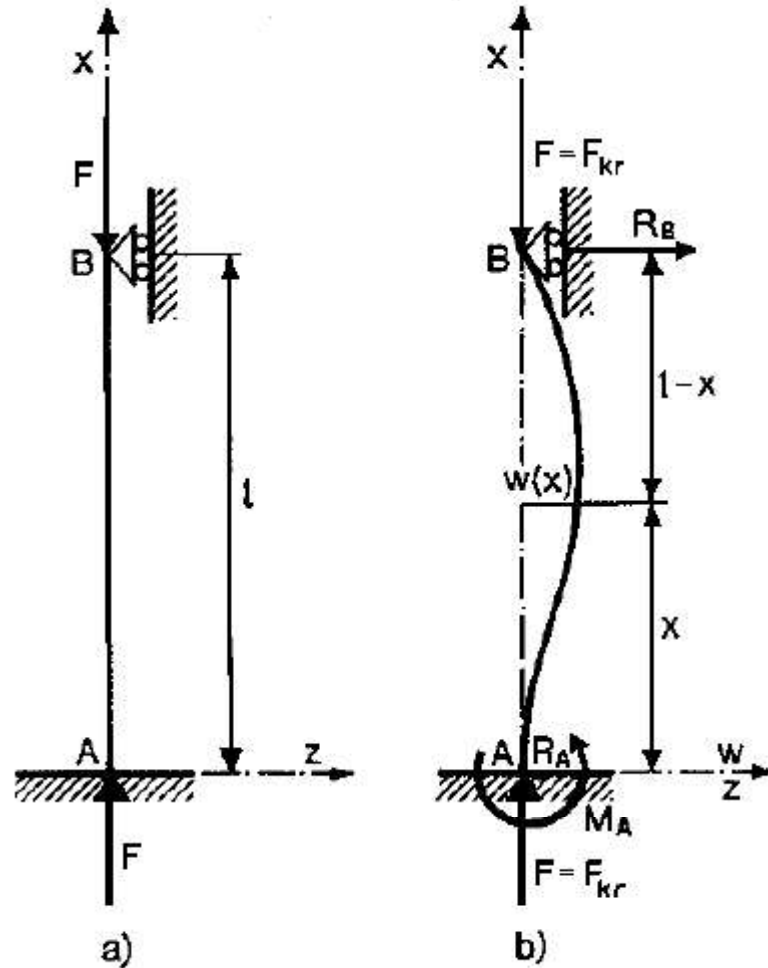
iz čega se naposljetku dolazi do uvjeta za kritično stanje štapa:

$$\alpha l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Najmanja vrijednost kritične sile ovog slučaja vrijedit će ako je $n = 1$, to jest $\alpha l = \frac{\pi}{2}$:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2} \quad (22)$$

2.1.3. Štap upet na jednom kraju, a na drugom u pomičnom osloncu



Slika 4: Štap upet u jednom ležaju, a pomičan u drugom: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1]

U trenutku kada sila F postigne kritičnu vrijednost, jednako su mogući ravan i krivocrtan oblik štapa (Slika 4.b). U ležajevima se pojavljuju reakcije $R_A = R_B$ i reaktivni moment M_A prilikom izvijanja štapa.

U nekom presjeku štapa vrijednost momenta savijanja je:

$$M = Fw - R_B(l - x)$$

dok diferencijalna jednačba elastične linije iznosi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{Fw}{EI_{min}} = \frac{R_B}{EI_{min}}(l - x) \quad (23)$$

Uvođenjem oznake:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (24)$$

se dobiva:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{R_B}{F} \alpha^2 (l - x) \quad (25)$$

Opće rješenje nehomogene jednadžbe (25) glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R_B}{F} (l - x) \quad (26)$$

Primjer zadatka je jedanput statički neodređen s konstantama integracije A i B, dok je ležajna reakcija R_B nepoznanica. U tom slučaju rubni uvjeti su sljedeći:

$$w(0) = 0 \quad (a)$$

$$w'(0) = 0 \quad (b) \quad (27)$$

$$w(l) = 0 \quad (c)$$

Derivacijom tih izraza (27) dolazi se do:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x - \frac{R_B}{F} \quad (28)$$

Pomoću rubnog uvjeta (27.a) može se zaključiti:

$$B = -\frac{R_B l}{F} \quad (29)$$

Iz rubnog uvjeta (27.b) dolazi se do:

$$\alpha A = \frac{R_B}{F} \quad (30)$$

Uvrste li se dobivene vrijednosti konstanti A i B u izraz (26) dobiva se jednadžba elastične linije oblika:

$$w = \frac{R_B}{F} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x + (l - x) \right] \quad (31)$$

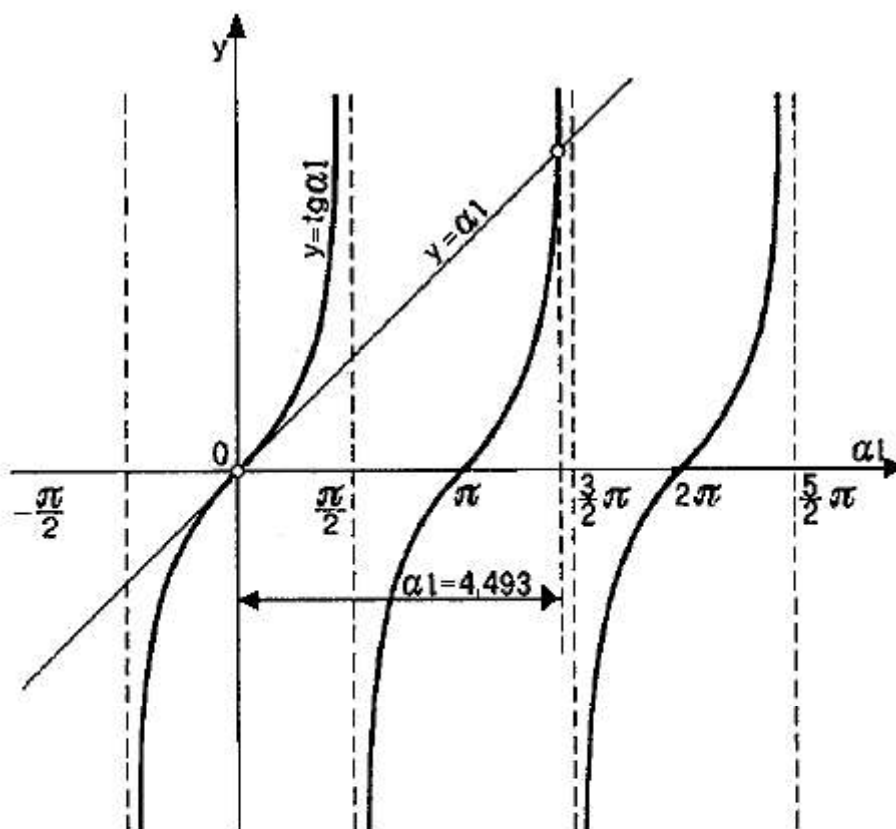
Iz posljednjeg rubnog uvjeta (27.c) dolazi se do:

$$\frac{R_B}{F} \left(\frac{1}{\alpha} \sin \alpha l - l \cos \alpha l \right) = 0$$

Znajući da je $\frac{R_B}{F} \neq 0$, izraz se može zapisati:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l \quad (32)$$

Do rješenja ove jednačbe može se doći i grafičkom metodom:



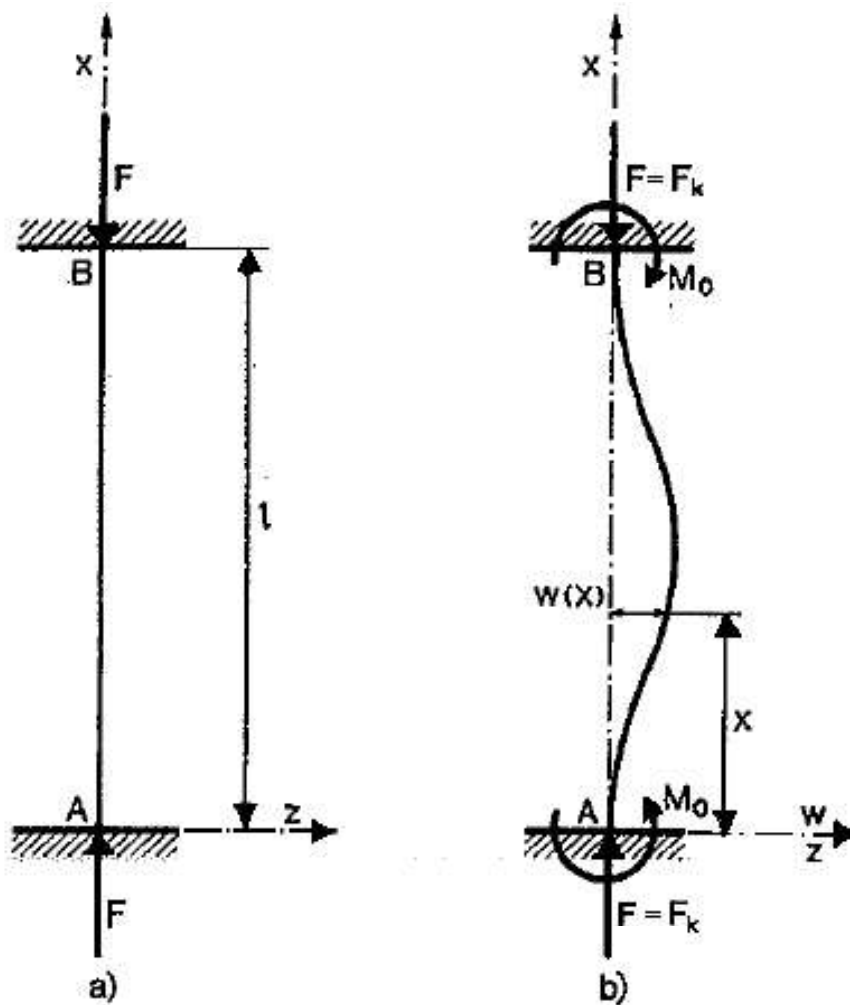
Slika 5: Grafičko rješenje jednačbe (32) [1]

Apscise sjecišta pravca $y = \alpha l$ i funkcije $y = \operatorname{tg} \alpha l$ odgovaraju korijenima jednačbe (32). Vrijednost najmanjeg korijena te jednačbe iznosi $\alpha l = 4,493$.

Izraz za kritičnu silu izvijanja u ovom slučaju glasiće:

$$F_{kr} = \alpha^2 E I_{min} = \frac{4,493^2 E I_{min}}{l^2} = \frac{20,187 E I_{min}}{l^2} \approx \frac{2\pi E I_{min}}{l^2} \quad (33)$$

2.1.4. Štap upet na oba kraja



Slika 6: Štap upet u oba ležaja: a) oblik za $F < F_{kr}$ i b) za $F = F_{kr}$ [1]

Pretpostavlja se da je oblik izvijenog štapa simetričan (Slika 6.b), u tom slučaju su momenti jednaki na oba kraja štapa. Moment savijanja koji se javlja u nekom presjeku tog štapa iznosi:

$$M = Fw - M_0$$

Diferencijalna jednadžba elastične linije je:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}}w = \frac{M_0}{EI_{min}} \quad (34)$$

Uvođenjem oznake:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad (35)$$

dolazi se do:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{M_0}{F} \alpha^2 \quad (36)$$

Opće rješenje te jednačbe jest:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{M_0}{F} \quad (37)$$

Rubni uvjeti glase:

$$w(0) = 0 \quad (a)$$

$$w'(0) = 0 \quad (b)$$

$$w(l) = 0 \quad (c) \quad (38)$$

$$w'(l) = 0 \quad (d)$$

Derivacijom izraza (37) dolazi se do:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x \quad (39)$$

Iz rubnog uvjeta (38.a) može se zaključiti:

$$B = -\frac{M_0}{F} \quad (40)$$

Iz (38.b) slijedi da je $A = 0$.

Jednačba (37) se sada može prikazati u obliku:

$$w = \frac{M_0}{F} (1 - \cos \alpha x) \quad (41)$$

također:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{F} \alpha \sin \alpha x$$

Rubni uvjet (38.c) daje:

$$w(l) = \frac{M_0}{F} (1 - \cos \alpha l) = 0 \quad (42)$$

S time da je $\frac{M_0}{F} \neq 0$, dobiva se:

$$\cos \alpha l = 1 \quad (43)$$

Iz rubnog uvjeta (38.d), dolazi se do:

$$w'(l) = \frac{M_0}{F} \alpha \sin \alpha l = 0$$

skraćeno:

$$\sin \alpha l = 0 \quad (44)$$

Jednadžbe (43) i (44) su zadovoljne ako su:

$$\alpha l = 2n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Za $n = 1$ vrijedi najmanja vrijednost kritične sile koja glasi:

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (45)$$

Ako se usporedi izraze kritičnih sila za sve slučajeve (13), (22), (33) i (45) može se primijetiti da je u svakom slučaju moguće kritičnu silu prikazati u općem obliku koji glasi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} \quad (46)$$

μ – koeficijent duljine izvijanja štapa

$$\mu = \frac{1}{n} \quad (47)$$

n – broj poluvalova sinusoide elastične linije izvijena štapa

Ako se označi:

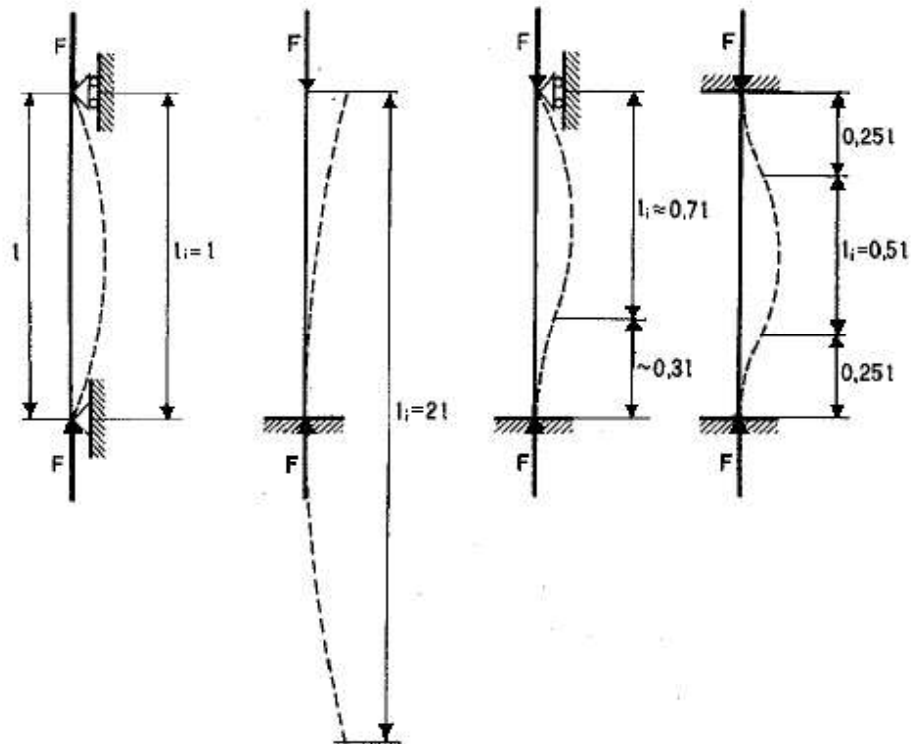
$$l_i = \mu l \quad (48)$$

izraz za kritičnu silu se može zapisati u novom obliku:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} \quad (49)$$

u kojem je l_i duljina izvijanja. Duljina izvijanja predstavlja duljinu između dvije susjedne točke infleksije elastične linije izvijenog štapa, tj. dio štapa na kojem se javlja jedan polual sinusoida.

Slika 7 prikazuje četiri uobičajena načina učvršćivanja štapa na krajevima uz njihove duljine izvijanja l_i .



Slika 7: Osnovni načini učvršćivanja štapa na krajevima s njihovim duljinama izvijanja [1]

$$n = 1$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{3}{2}$$

$$n = 2$$

$$\mu = 1$$

$$\mu = 2$$

$$\mu = 0,7$$

$$\mu = 0,7$$

(50)

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,7l)^2}$$

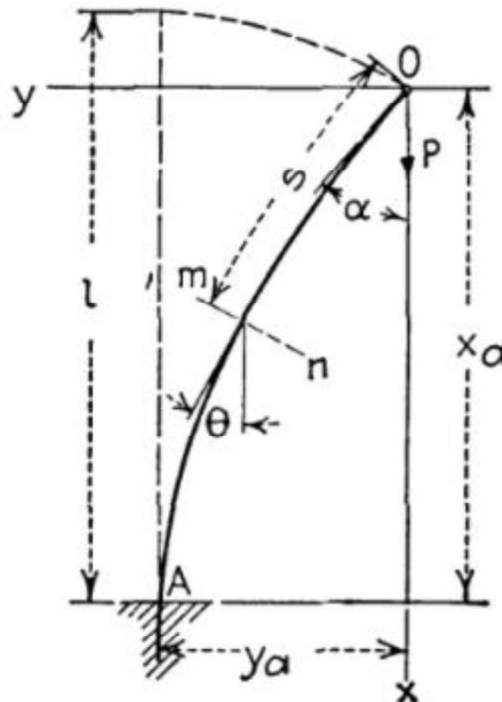
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,5l)^2}$$

Može se primijetiti da osobine štapa poput materijala, poprečnog presjeka, duljine kao i načina njegovog učvršćenja utječu na kritičnu silu.

2.2. Teorija elastičnog izvijanja ravnih štapova pri velikim pomacima i rotacijama

Kod ovog pristupa pretpostavlja se da će štap ostati savršeno ravan sve dok sila ne dosegne vrijednost Eulerove kritične sile nakon čega nastupa izvijanje te štap poprima novi (deformirani) oblik. Ključno je kod ove teorije da se pomaci i rotacije na štapu ne smatraju malima pa se, umjesto na početnoj konfiguraciji, ravnoteža uspostavlja na deformiranoj konfiguraciji (koja može značajno odstupati od početne). To znači da diferencijalne veze između deformacija i opterećenja više neće biti definirane obzirom na uzdužnu koordinatu štapa u početnoj (nedeformiranoj) konfiguraciji, nego obzirom na lučnu koordinatu koja opisuje položaj na deformiranom štapu.

2.2.1. Izvijanje konzolne grede



Slika 8: Izvijanje štapa uslijed sile veće od kritične [2]

Ako se po koordinatnim osima sa slike 8 mjeri udaljenost s po osi štapa kojoj je polazište u 0 dolazi se do zaključka da je izraz za zakrivljenost štapa jednaka $\frac{d\theta}{ds}$, gdje je θ kut zaokreta poprečnog presjeka na nekoj udaljenosti s po osi zakrivljenog štapa. Budući da je moment savijanja u štapu jednak njegovoj krutosti pomnoženoj sa zakrivljenošću, može se zaključiti diferencijalna jednadžba krivulje izvijanja, koja glasi:

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -Py \quad (51)$$

Promjena duljine štapa uzrokovana tlačenjem može se zanemariti. Deriviranjem prethodne jednačbe po s -u i korištenjem:

$$\frac{d\theta}{ds} = \sin\theta$$

dolazi se do:

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -P \sin\theta \quad (52)$$

Za rješavanje jednačbe (52) potrebno ju je pomnožiti s $d\theta$ te integrirati:

$$\int \frac{d^2\theta}{ds^2} \frac{d\theta}{ds} ds = -k^2 \int \sin\theta d\theta$$

u kojoj je $k^2 = \frac{P}{EI}$. Nakon integriranja jednačba glasi:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = k^2 \cos\theta + C$$

gdje je C konstanta integracije. Ona je određena stanjem gornjeg kraja štapa. Na vrhu štapa vrijedi $\frac{d\theta}{ds} = 0$ zato što je moment savijanja jednak nuli te je također $\theta = \alpha$, zbog čega glasi:

$$C = -k^2 \cos\alpha$$

i dolazi se do:

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm k\sqrt{2\sqrt{\cos\theta} - \cos\alpha}$$

Pozitivan znak se može maknuti iz jednačbe zato što je $\frac{d\theta}{ds}$ uvijek negativan. Dobiva se:

$$ds = - \frac{d\theta}{k\sqrt{2\sqrt{\cos\theta} - \cos\alpha}}$$

i ukupna dužina štapa kada se postave granice integrala:

$$l = \int_0^l ds = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{k\sqrt{2\sqrt{\cos\theta} - \cos\alpha}} = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (53)$$

Integral se može pojednostaviti uvođenjem nove varijable φ i korištenjem $p = \sin \frac{\alpha}{2}$.

$$\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \varphi = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$$

Može se primijetiti da kada se θ kreće od 0 do α , $\sin \varphi$ se kreće od 0 do 1, što znači da se φ kreće od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Deriviranjem jednadžbe dolazi se do:

$$d\theta = \frac{2p \cos \varphi d\varphi}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{2p \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}$$

Te supstituiranjem u jednadžbu (53):

$$\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} = p \cos \varphi$$

Dobiva se:

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k} K(p) \quad (54)$$

Integral iz jednadžbe (54) naziva se potpuni eliptični integral prve vrste i označava se s $K(p)$. Vrijednost integrala K ovisi samo o p i obično se očitava iz tablica u kojima su danje njegove vrijednosti za različite vrijednosti p . U ovom radu korišten je softver Wolfram Mathematica kojima ima ugrađene funkcije za eliptičke integrale pa su svi proračuni napravljeni tamo. Ukoliko je izvijanje štapa vrlo malo, α i p će također biti mali, onda se izraz $p^2 \sin^2 \varphi$ može zanemariti u jednadžbi (54). Jednadžba tada glasi:

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{P}}$$

odnosno jednadžba kritične sile:

$$P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

što u potpunosti odgovara rješenju (22). Ukoliko vrijednost kuta α raste, vrijednosti sile P i integrala K također rastu.

Treba naglasiti da je na ovaj način moguće odrediti koordinate točke O (koja se pomiče u x i y smjeru) za bilo koju vrijednost kuta θ . Isto tako, moguće je dobiti koordinate bilo koje točke na osi štapa i time reproducirati kompletnu elastičnu liniju deformiranog nosača. Svi detalji dani su u [2], a ovdje su izostavljeni s ciljem ograničavanja ukupne duljine rada.

2.2.2. Izvijanje proste grede

Usporedbom slika 1.b i 2.b može se primijetiti da je progib proste grede na sredini duljine štapa jednak progibu konzolne grede na kraju štapa. Budući da su im za slučaj da se promatra samo pola proste grede i granični uvjeti jednaki, proračun izvijanja biti će identičan sve do trenutka odabira granica integrala u jednadžbi:

$$l = \int_0^{\frac{l}{2}} ds = \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{k\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}} = \frac{2}{k} K(p)$$

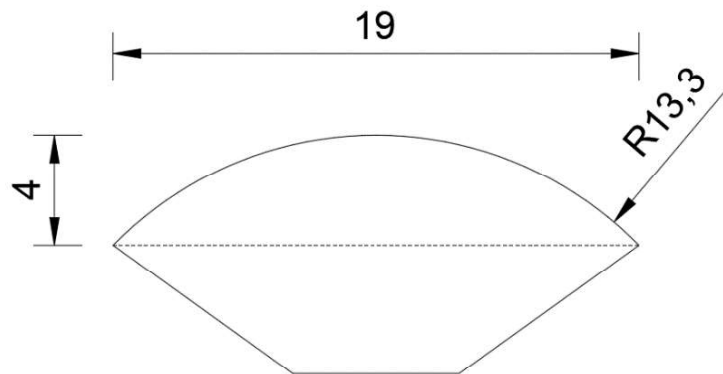
zbog simetrije, kut θ je na polovici grede jednak nuli. Iz tog se razloga integrira samo polovica duljine grede. Elastična linija nosača može se odrediti na vrlo sličan način onome spomenutom u poglavlju 2.2.1. i detaljno objašnjen u [2].

3. EKSPERIMENTALNA MJERENJA

Prije samih mjerenja određene su sve relevantne geometrijske i materijalne osobine štapa.

3.1. Određivanje geometrijskih osobina poprečnog presjeka

Tijekom eksperimenta korišten je štap od bukve omotan tankim plastičnim slojem, tako da se, striktno govoreći, radi o kompozitnom presjeku. Poprečni presjek štapa prikazan je na slici 9 gdje je plastični omot zapravo linija koja omeđuje presjek, dok se drvo nalazi s unutarnje strane. Sa slike 9 očitane su i izračunate sljedeće dimenzije:



Slika 9: Poprečni presjek štapa

Duljinu tetive $s = 19mm$ i visinu kružnog odsječka $h = 4mm$ očitava se na štapu i koristi kako bi se izračunao radijus kružnog odsječka R :

$$(R - h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = R^2$$

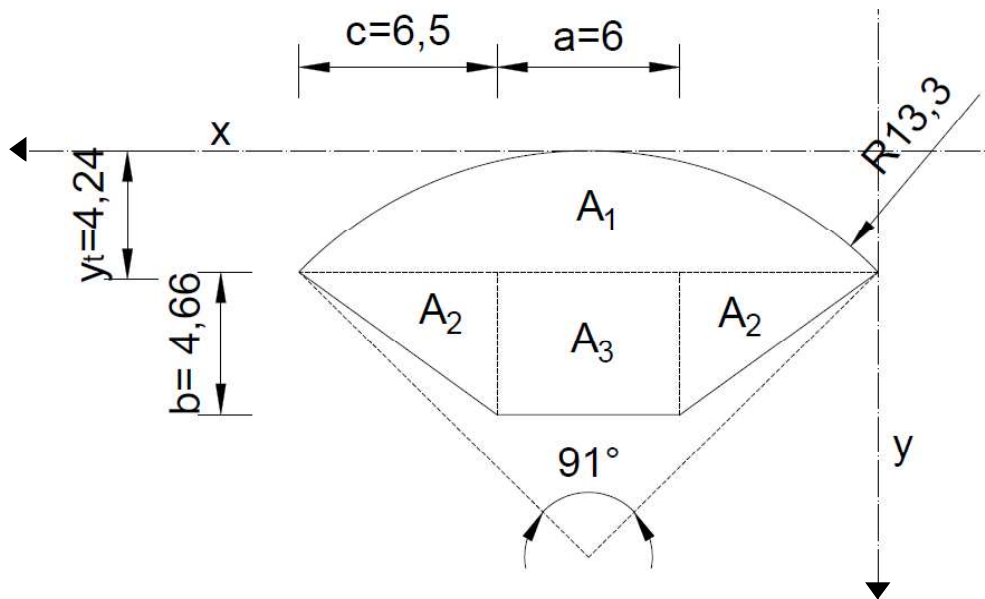
$$R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{s^2}{4} = R^2$$

$$R = \frac{1}{2h} \left(h^2 + \frac{s^2}{4} \right)$$

$$R = \frac{1}{2 * 4} \left(4^2 + \frac{19^2}{4} \right)$$

$$R = 13,3mm$$

Nadalje se traži težište y_t :



Slika 10: Poprečni presjek štapa s prikazom osi težišta

Za izračun površine kružnog odsječka koristi se radijus R i kut θ u radijanima prema formuli danoj u [5]. Nakon izračuna svih površina presjeka, težište y_t se izračunava i postavlja od vrha presjeka.

$$A_1 = \frac{R^2}{2} (\theta - \sin\theta) = 52,18 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{b * c}{2} = 15,15 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = a * b = 27,96 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + 2 * A_2 + A_3 = 110,56 \text{ mm}^2$$

$$y_t = \frac{A_1 * d_1 + 2 * A_2 * d_2 + A_3 * d_3}{A} =$$

$$= \frac{52,18 * 2,37 + 2 * 15,15 * 5,55 + 27,96 * 6,33}{110,56} =$$

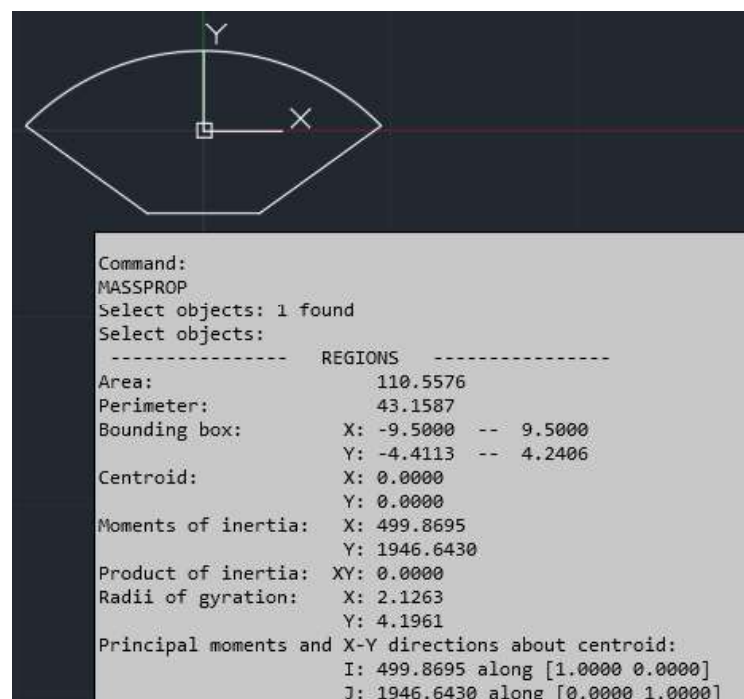
$$= 4,24 \text{ mm}$$

te minimalni i maksimalni moment površine drugog reda (I_{min} i I_{max}) poprečnog presjeka štapa s korištenim formulama danima u [5] i [6] :

$$I_x = \left(\frac{a*b^3}{12} + a * b * d_3^2 \right) + 2 * \left(\frac{c*b^3}{36} + \frac{c*b}{2} * d_2^2 \right) + \frac{R^4}{8} \left(\theta - \sin\theta + 2\sin\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - (A_1 d^2) + \frac{R^2}{2} (\theta - \sin\theta) * d_1^2 = \left(\frac{6*4,66^3}{12} + 6 * 4,66 * 2,09^2 \right) + 2 * \left(\frac{6,5*4,66^3}{36} + \frac{6,5*4,66}{2} * 1,31^2 \right) + \frac{13,3^4}{8} \left(1,59 - \sin 1,59 + 2 \sin 1,59 \sin^2 \frac{1,59}{2} \right) - (52,18 * 10,93^2) + \frac{13,3^2}{2} (1,59 - \sin 1,59) * 1,87^2 = 171,72 + 87,73 + 6303,42 - 6245,96 + 182,51 = 499,43 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \left(\frac{b * a^3}{12} \right) + 2 * \left(\frac{b * c^3}{36} + \frac{b * c}{2} * d_2^2 \right) + \frac{R^4}{24} \left(3\theta - 3\sin\theta - 2\sin\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{4,66 * 6,5^3}{12} \right) + 2 * \left(\frac{4,66 * 6,5^3}{36} + \frac{4,66 * 6,5}{2} * 5,17^2 \right) + \frac{13,3^4}{24} \left(3 * 1,59 - 3 \sin 1,59 - 2 \sin 1,59 \sin^2 \frac{1,59}{2} \right) = 83,88 + 879,67 + 983,12 = 1946,67 \text{ mm}^4$$

Dobiveni parametri se uspoređuju s parametrima koji se iščitavaju iz programa AutoCAD za taj poprečni presjek uz korištenje naredbe MASSPROP, slika 11:



Slika 11: Provjera rezultata u programu AutoCAD

3.2. Određivanje modula elastičnosti

Budući da je Young-ov modul elastičnosti E štapa nepoznat, može ga se odrediti koristeći eksperiment u kojem se unaprijed zna koja je veza opterećenja i progiba za linearno-elastično ponašanje. Odabrana je konzola opterećena poprečnom silom na slobodnom kraju za koju se progib δ može izračunati koristeći jednadžbu:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI_{min}}$$

gdje je L 10 cm duljina konzole, minimalni moment površine II. reda I_{min} je prethodno izračunat, a sila F je zapravo težina utega kojom se konzola opterećuje na slobodnom kraju. Pomak δ dobiva se preko mikroure koja prati progib štapa (Slika 12). Modul elastičnosti ostaje jedina nepoznanica:

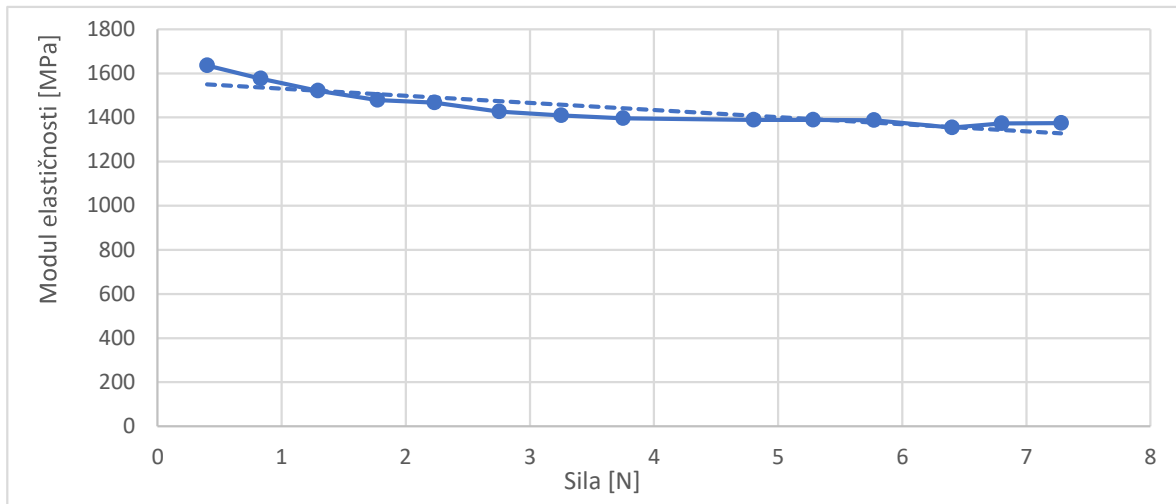
$$E = \frac{FL^3}{3\delta I_{min}}$$



Slika 12: Pokus za izračun Young-ovog modula elastičnosti

Radi preciznosti, kroz jednadžbu se provlači nekoliko različitih pomaka δ s pripadajućim silama. Iz dobivenih rezultata se izračuna prosječna vrijednost koja se koristi kao modul elastičnosti štapa u nadolazećim eksperimentima. Dobivena vrijednost E je 1441.1972 N/mm².

Iz slike 13 treba primijetiti da modul elastičnosti na početku nešto strmije, a kasnije relativno blago kontinuirano opada što upućuje da ponašanje ovakvog štapa u domeni malih pomaka i zaokreta nije idealno linearno elastično.



Slika 13: Dobivene vrijednosti za modul elastičnosti

3.3. Postupak mjerenja

Za 3D beskontaktno optičko mjerenje pomaka i deformacija navedenog štapa postavljenog na metalni okvir za statičke eksperimente koristio se sustav GOM mbH PONTOS (slika 14).



Slika 14: Sustav kamera za 3D optičko mjerenje [7]

3.3.1. Prvi eksperiment – Izvijanje štapa upetog na jednom kraju

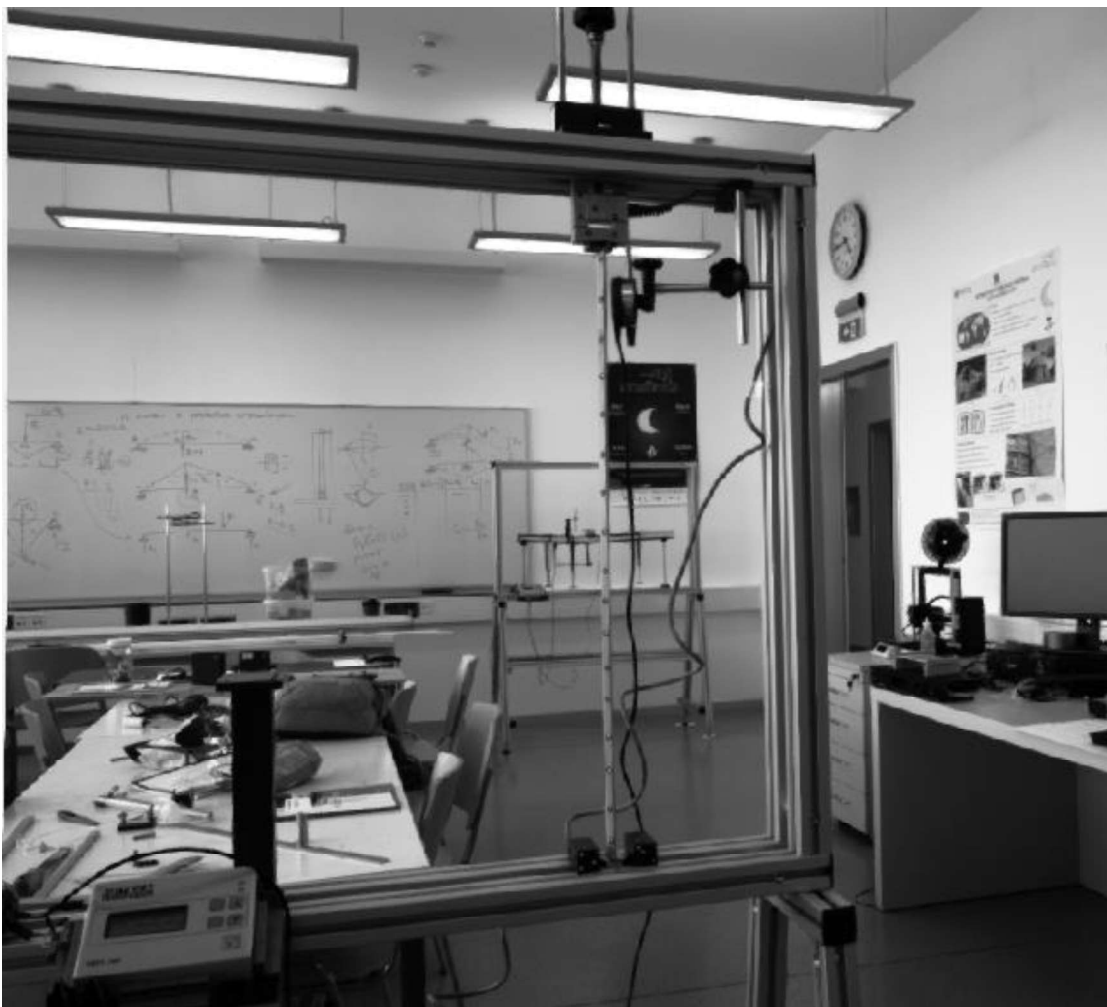
Prilikom prvog eksperimenta, štap duljine 37.6 centimetara vertikalno je postavljen na statički okvir na način da je na jednom kraju upet, a u drugom slobodan (Slika 15). Na vrhu slobodnog kraja štapa postavljena je plastična kapica koja omogućava vezanje plosnate daščice pomoću tanke niti konca za pecanje. Nit i daščica su postavljene tako da se nalaze direktno ispod upetog ležaja, a sila koja djeluje na štap uvijek usmjerena vertikalno prema dolje. Funkcija drvene daščice je olakšano postavljanje utega, tj. izbjegavanje doticaja sa štapom. Nit konca za pecanje obješena je na plastičnu kapicu. Tijekom eksperimenta naizmjenično se dodaju utezi na plosnatu daščicu i kamerama slika cijeli sustav te bilježi količina i vrsta utega koji u tom trenutku opterećuju štap. Kasnije se različiti utezi i daščica važu pomoću digitalne vage i dobiva se točna sila pri kojoj štap popušta. Uslijed inkrementalnog povećanja opterećenja štap se kontinuirano savijao, ali pri određenoj vrijednosti opterećenja više nije mogao zadržati stabilnu ravnotežu. Ručno smo zaustavili daljnje savijanje štapa kako ne bi došlo do loma. Očito se tu radilo o labilnoj ravnoteži koja je vodila u kolaps.



Slika 15: Prvi eksperiment

3.3.2. Drugi eksperiment – Izvijanje štapa zglobno oslonjenog na oba kraja

U drugom eksperimentu koristi se štap duljine 68.4 centimetara koji je također vertikalno postavljen na okvir, ali u ovom slučaju je na oba kraja postavljen u zglobnom ležaju. Na donjem ležaju nalazi se utor u kojeg se polaže donji kraj štapa koji je prethodno oblikovan po obliku ležaja. Na gornjem kraju štapa napravljen je kanalić u kojeg se postavlja čavlič koji omogućava zaokret. Štap opterećujemo kontroliranim pomakom preko navoja na gornjem osloncu, dok je donji oslonac nepomičan, ali se na njemu nalazi mjerna doza pomoću koje mjerimo vrijednost sile na digitalnom mjerачu. Mjerач također pokazuje veličinu vertikalnog pomaka gornjeg oslonca uhvaćenog pomoću digitalne mikro ure. Pri dodavanju sile, bilježe se pomak i sila dok se kamerama slika sustav za daljnju analizu. Slično kao i u prethodnom eksperimentu, ovdje je došlo do kontinuiranog savijanja štapa pri svakom novom inkrementu pomaka na gornjem osloncu. Eksperiment je završen kada se gornji oslonac više nije mogao pomicati (kraj navoja), a ravnoteža je u svim koracima bila stabilna.

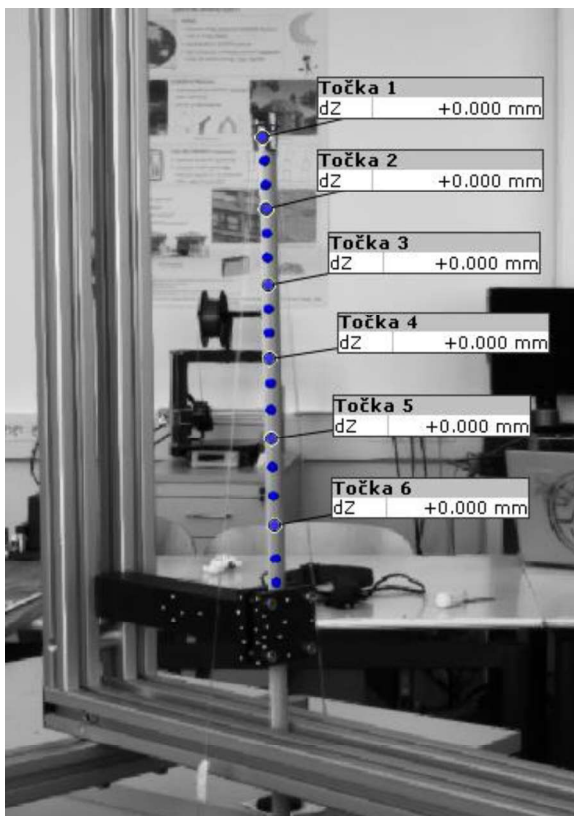


Slika 16: Drugi eksperiment

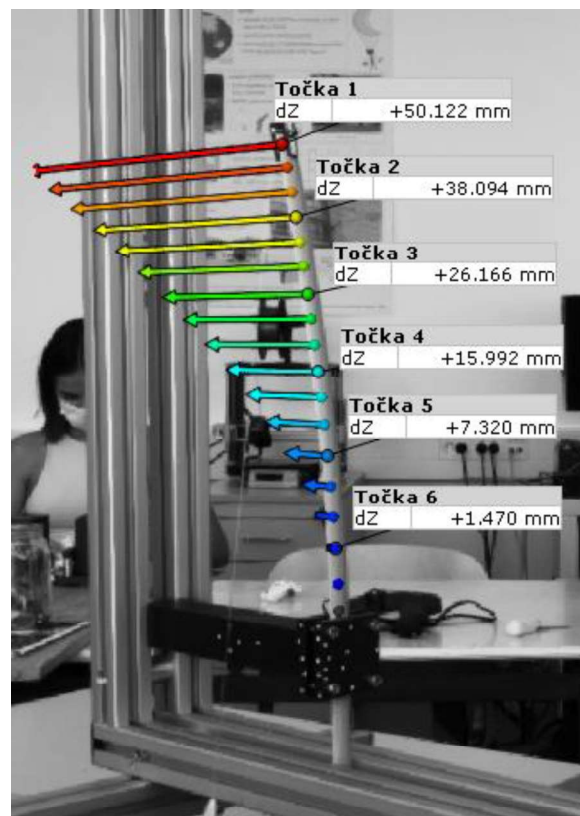
3.4. Rezultati

3.4.1. Prvi eksperiment – Izvijanje štapa upetog na jednom kraju

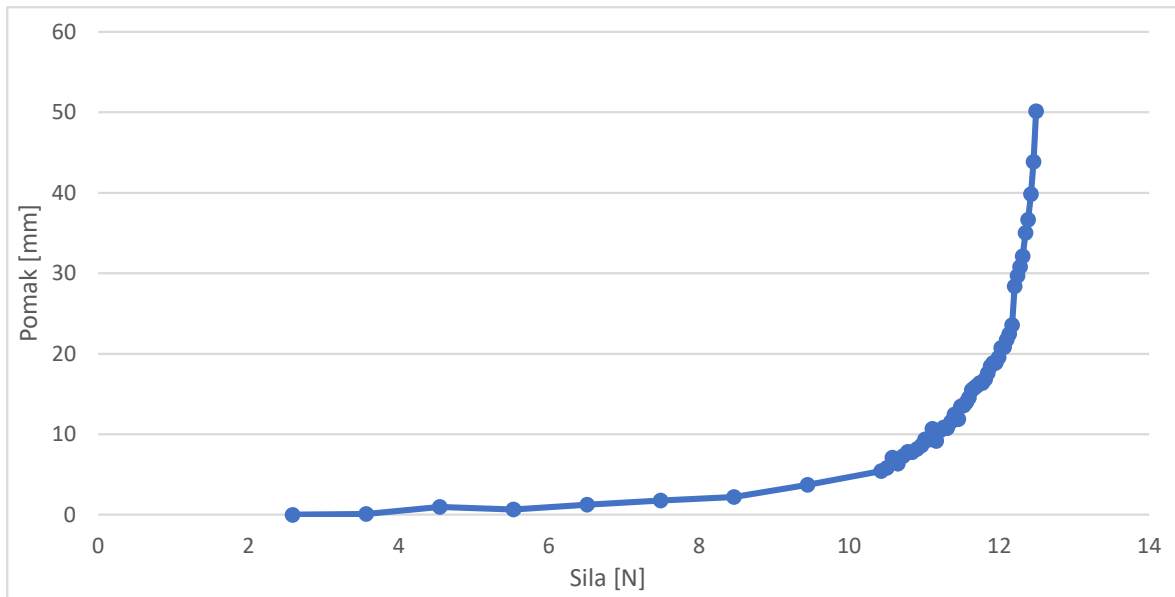
Rezultati eksperimenata dobiveni su analizom pomaka točaka u programu GOM Correlate, prethodno slikanih sustavom kamera za 3D optičko mjerenje pomaka i deformacija. Dobiveni podaci za kut rotacije točke na slobodnom kraju štapa u različitim stadijima su zatim ubačeni u algoritam zapisan u programu Wolfram Mathematica koji za svaki od njih izbacuje elastičnu liniju nosača te vrijednost sile u štapu. To se radi s ciljem uspoređivanja teorijskih predikcija s eksperimentima. Slika 17 prikazuje štap u mirovanju, opterećenog samo s težinom daščice privezane koncem za pecanje za čiju je težinu od 2,59N program kalibriran kao početni stadij s pomacima točaka od nula milimetara. Slika 18 pak pokazuje maksimalni pomak točaka štapa u zadnjem stadiju prije potpunog gubitka stabilnosti. Izmjereni su pomaci štapa u ukupno 56 stadija. Točke od 1 do 6 raspoređene su po štapu od vrha do dna i pomoću njih se određuje pomak štapa u uzdužnom i poprečnom smjeru u svakom stadiju. Detaljno se promatra točka 1 koja se nalazi na samom vrhu štapa. Pomaci su ostvareni dodavanjem utega različitih masa (100g, 7.45g, 6.2g, 5g i 3.65g) od većih prema manjim.



Slika 18: Nulti stadija štapa bez pomaka



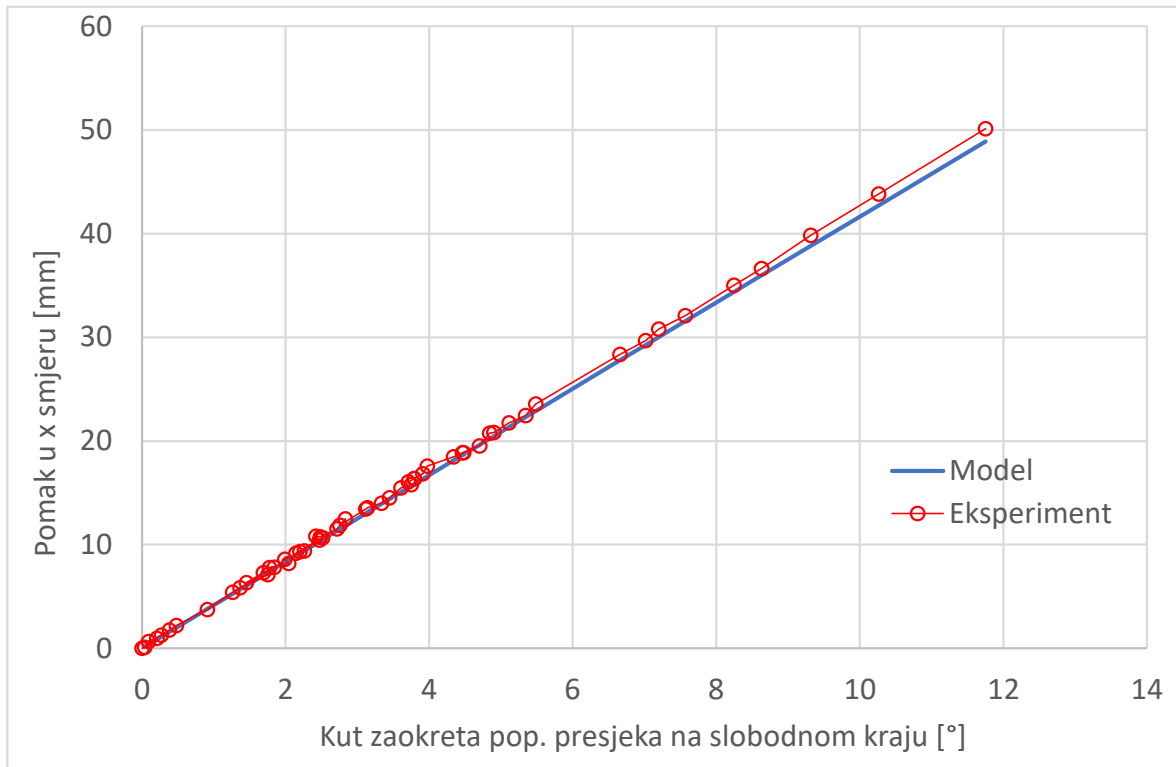
Slika 17: Posljednji stadij štapa s maksimalnim pomacima



Slika 19: Prikaz pomaka točke 1 u odnosu na opterećenje

Grafički prikaz pomaka točke 1 kroz stadije prvog eksperimenta pri opterećenju nalazi se u slici 19. Radi bržeg približavanja kritičnoj sili, u prvih 8 stadija koristili su se utezi od 100 grama nakon čega se prešlo na manje utege, od 7.45 grama do 3.65 grama kroz preostale stadije. Štap potpuno gubi stabilnost pri sili od 12.5 N.

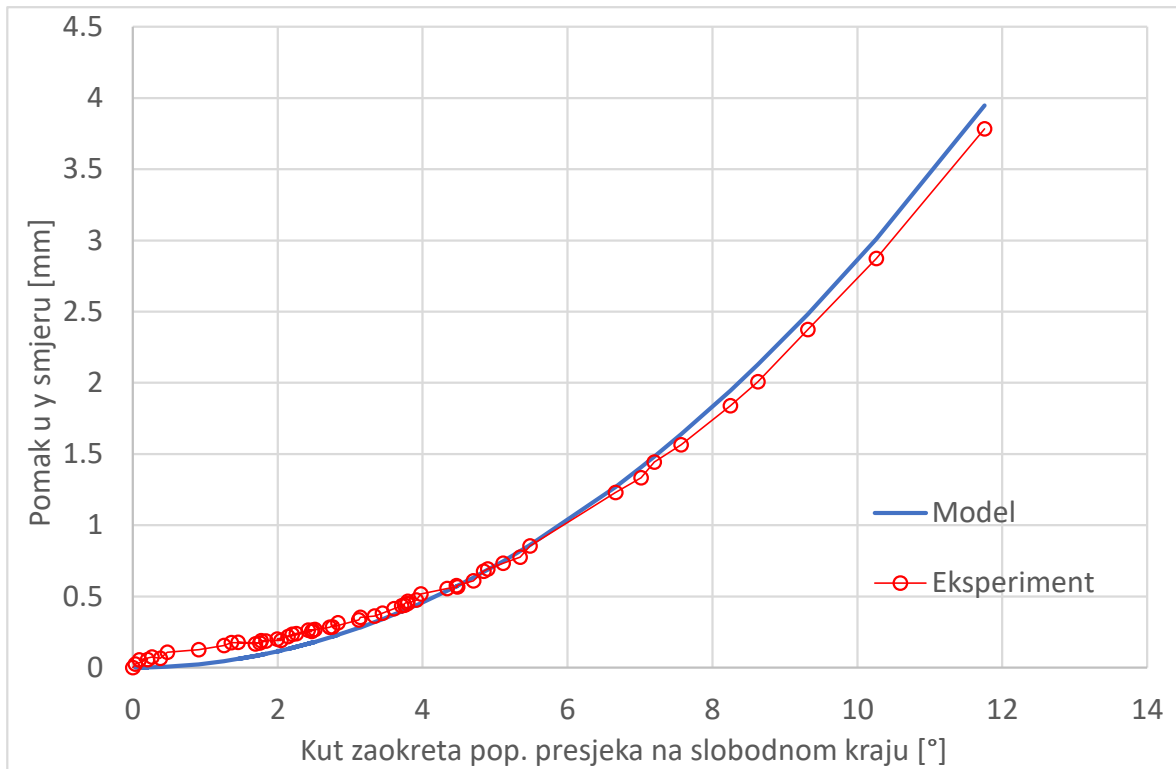
Poznati parametri su maksimalna izmjerena rotacija točke na slobodnom kraju $\alpha = 11.754^\circ$, duljina štapa l 37.6cm i krutosti materijala EI 720410.5N/mm². Ti se parametri uvrštavaju u program Wolfram Mathematica, pripremljen za izračun opterećenja i pomaka teorijskog modela štapa za svaku izmjerenu vrijednost kuta zaokreta slobodnog kraja. Uspoređuju se teorijski model i podaci dobiveni analizom u programu GOM Correlate:



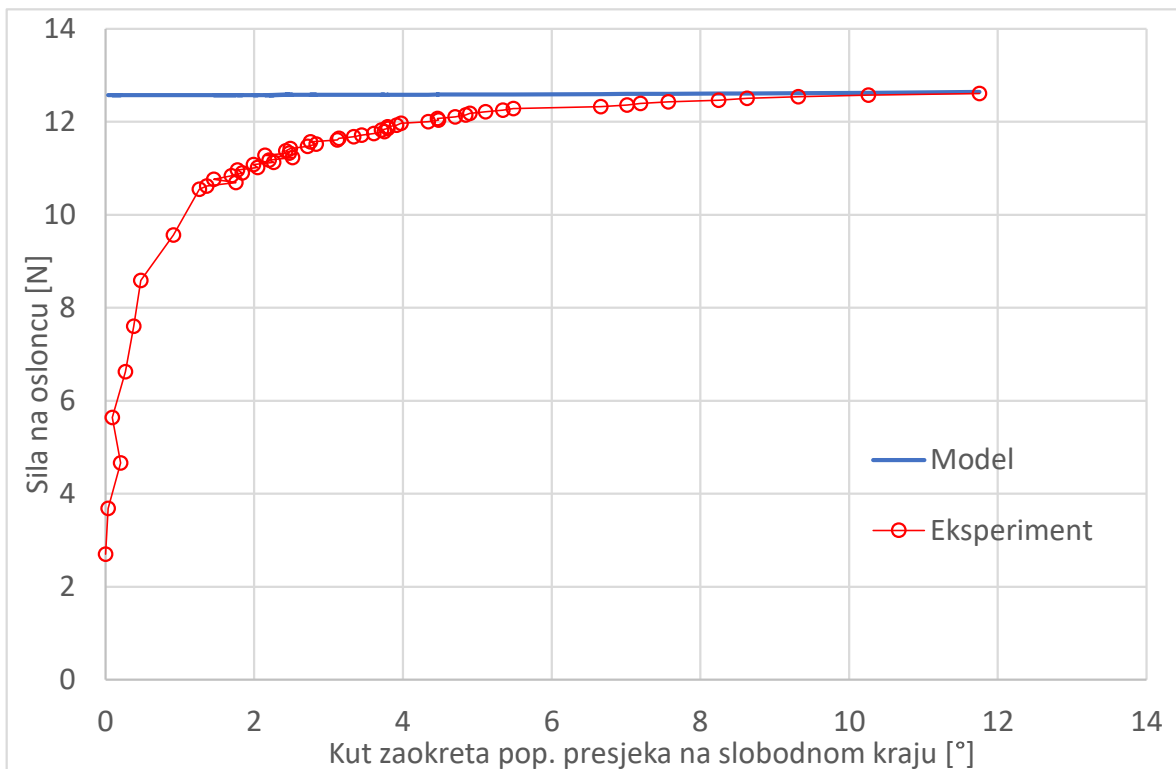
Slika 20: Usporedba pomaka u x smjeru modela i eksperimenta

Slike 20 i 21 crvenom linijom prikazuju pomak točke na vrhu štapa u x i y smjeru, pri čemu treba naglasiti da je x smjer okomit na os štapa, a y je smjer uzduž početne osi štapa. Plavom linijom prikazan je teorijski pomak točke za štap iste duljine i krutosti. Vidljivo je dobro poklapanje rezultata u oba slučaja.

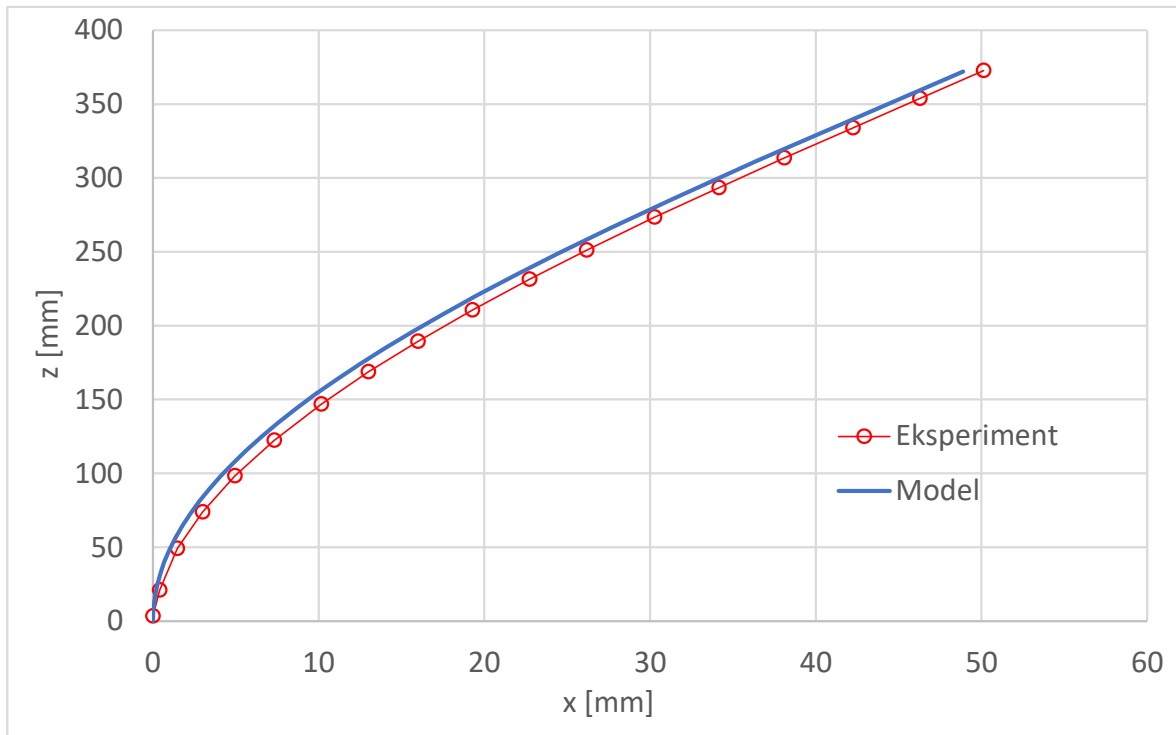
Iz slike 22 može se primijetiti da se sila u osloncu eksperimenta teži približiti k teorijskoj sili za taj kut zaokreta. U teoriji, štap se ne deformira dok nije dosegnuta vrijednost Eulerove kritične sile, a nakon toga sila nastavlja rasti uz povećanje pomaka i zaokreta. Dobivena vrijednost Eulerove kritične sile za ovaj slučaj iznosi $F_{kr} = 12.04 N$ i na slici 21 predstavlja sjecište plave linije s vertikalnom osi (što odgovara pomaku nula). U eksperimentu se vidi da zbog početnih imperfekcija (neravnost štapa, ekscentricitet sile i sl.) i relativno male krutosti štapa dolazi do savijanja štapa pri vrijednostima sile znatno manjima od F_{kr} . Ipak, vidi se da eksperiment, jednom kada je štap dovoljno savinut, konvergira teorijskim rezultatima.



Slika 21: Usporedba pomaka u y smjeru modela i eksperimenta



Slika 22: Usporedba sile u osloncu modela i eksperimenta

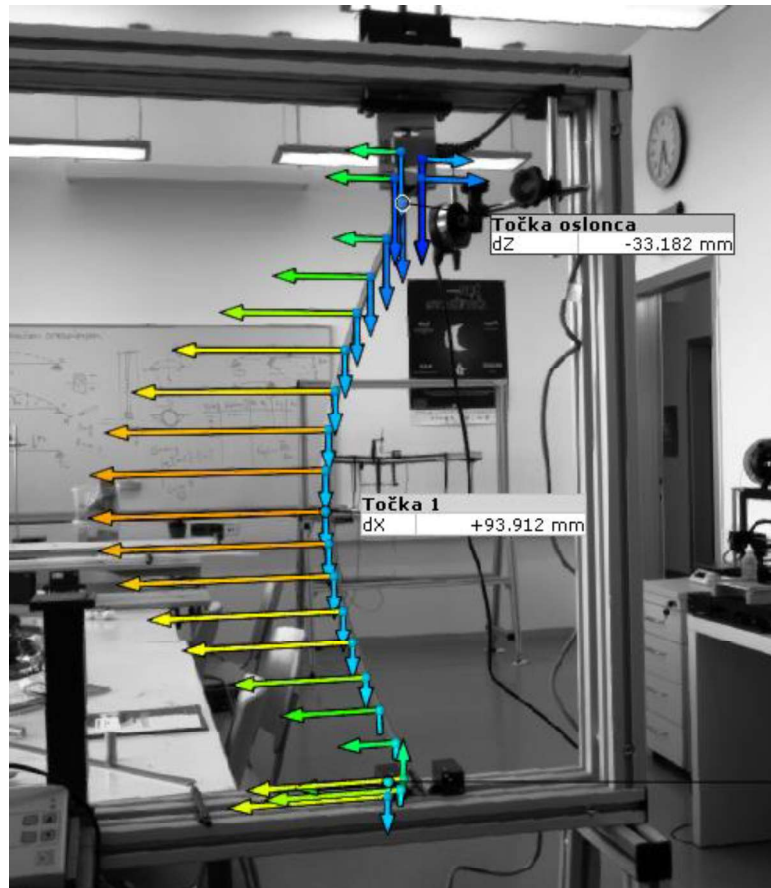


Slika 23: Usporedba elastične linije modela i eksperimenta

Usporedba elastičnih linija modela i eksperimenta prikazana je na slici 23. Određeni su položaji svih točaka na štapu u x i z smjeru za jedan stadij, u ovom slučaju posljednji. Jasno je vidljivo podudaranje krivulja modela i eksperimenta.

3.4.2. Drugi eksperiment – Izvijanje štapa zglobno oslonjen na oba kraja

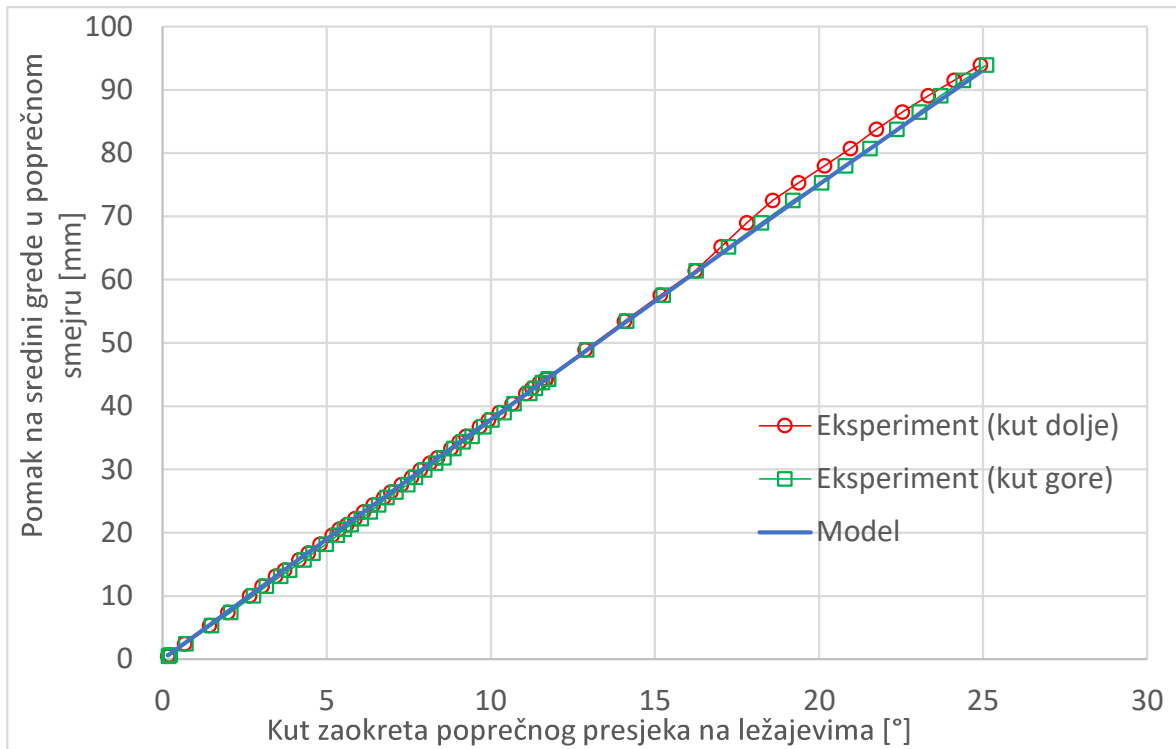
Na sličan način kao u prvom eksperimentu se dobivaju podaci za štap oslonjen zglobno u oba kraja.



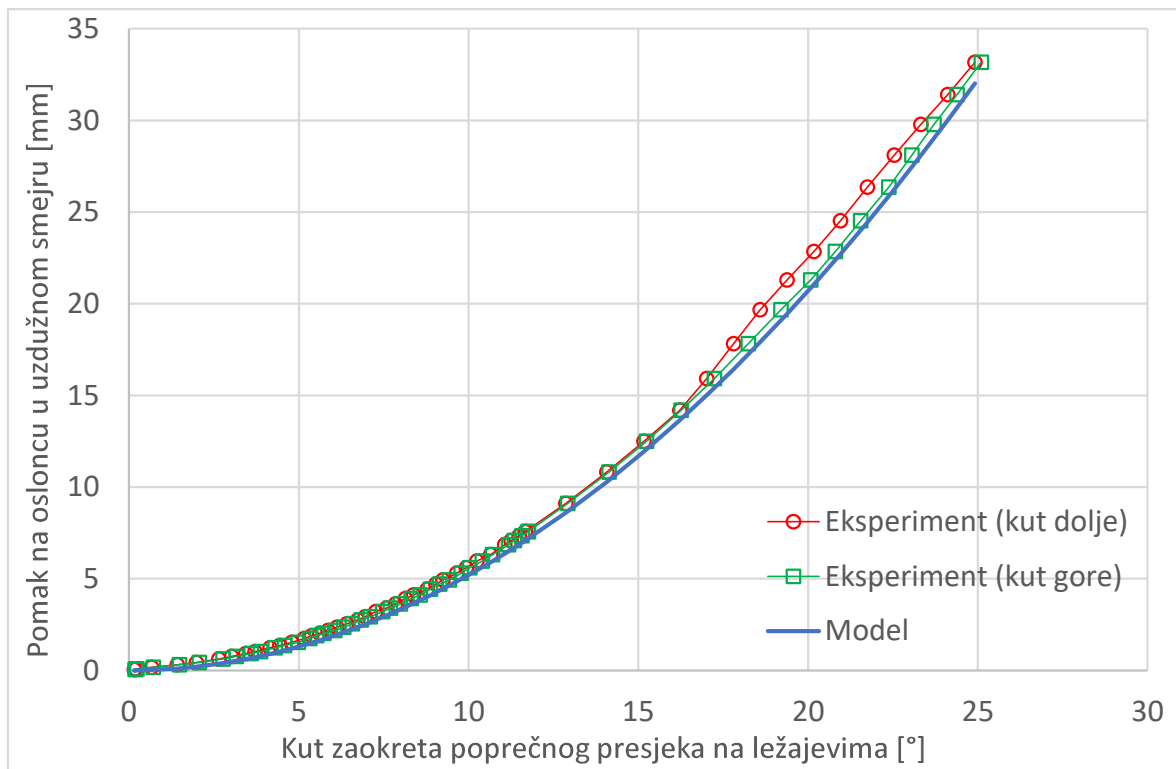
Slika 24: Očitavanje uzdužnog pomaka u osloncu i poprečnog pomaka u sredini štapa u programu GOM Correlate

Iz programa GOM Correlate iščitavaju se potrebni podaci za usporedbu s teorijskim modelom poput poprečnog pomaka točke na sredini štapa, uzdužnog pomaka točke na pomičnom osloncu, dok se sila mjeri na donjem osloncu. Za različite vrijednosti kuta zaokreta točke najbliže gornjem osloncu. U programu Wolfram Mathematica se dobivaju rezultati koji se mogu uspoređivati s podacima iz eksperimenta.

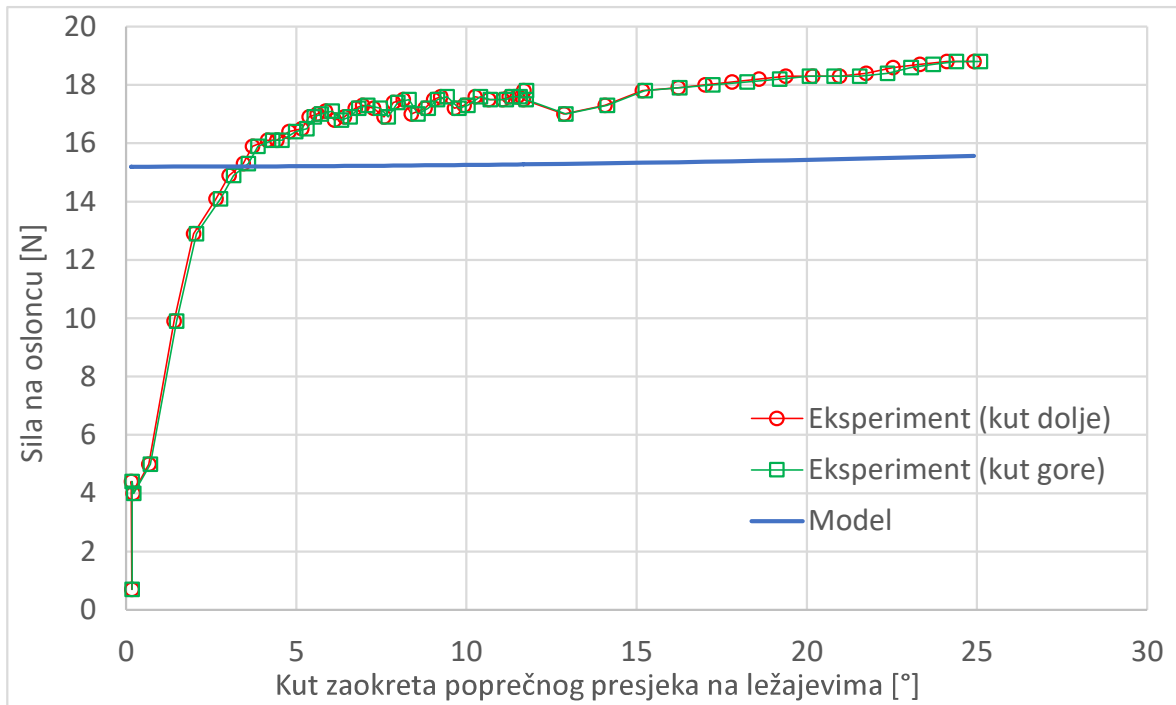
Slike 25 i 26 prikazuju preklapanje stvarnih pomaka štapa iz eksperimenta s njihovim teorijskim vrijednostima modela. Podudarnost oba dijagrama je visoka, a manja odstupanja se mogu pripisati nedostatku mogućnosti mjerenja kuta zaokreta iz dodirne točke štapa i ležaja. Mjerenje kuta zaokreta se vršilo na označenim točkama udaljenim 1 mm od gornjeg oslonca i 21 mm od donjeg.



Slika 25: Usporedba poprečnog pomaka sredine štapa modela i eksperimenta



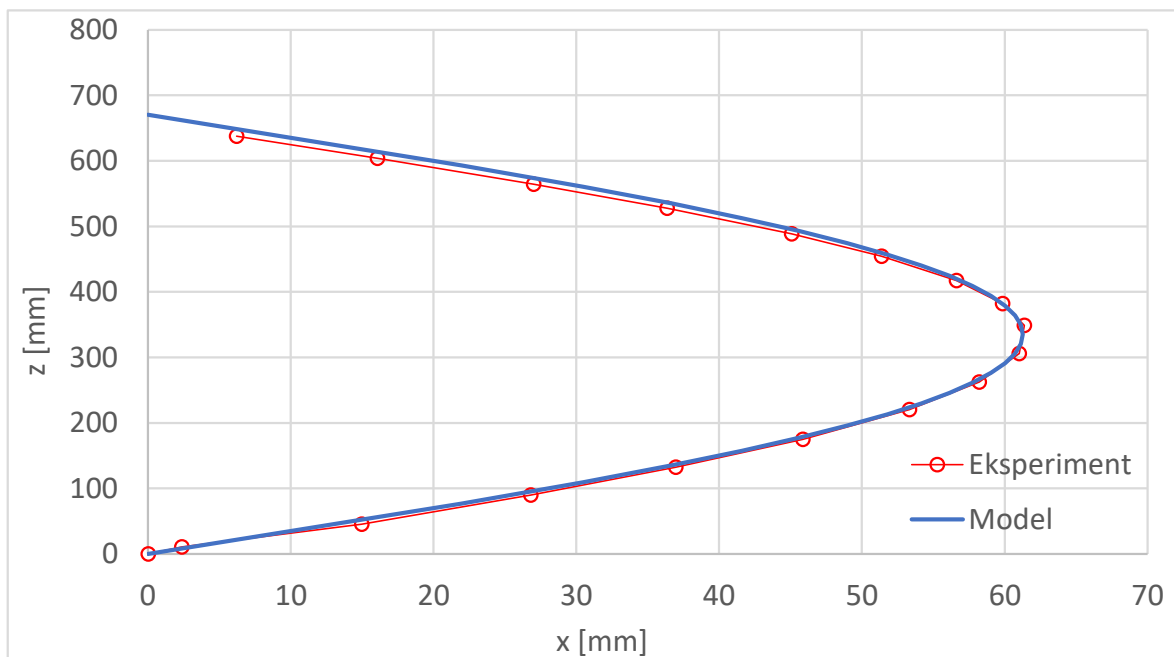
Slika 26: Usporedba uzdužnog pomaka oslonca modela i eksperimenta



Slika 27: Usporedba sile u osloncu modela i eksperimenta

Na slici 27 primjećuje se odstupanje stvarne sile u osloncu od vrijednosti modela. Moguće je da je do nepreciznosti došlo zbog nedostatka boljeg ležaja na gornjem osloncu te je između pločice za dodavanje sile i improviziranog zgloba došlo do sile trenja koje je otežavalo zaokret u zglobnom ležaju i izazvalo povećanje sile.

Podudaranje elastičnih linija modela i eksperimenta vidljivo je na slici 28.



Slika 28: Usporedba elastične linije modela i eksperimenta

4. ZAKLJUČAK

U ovom radu izvedeni su matematički izrazi za Eulerovu kritičnu silu za 4 uobičajena uvjeta oslanjanja te su dodatno, uzimajući u obzir velike pomake i rotacije, izvedeni izrazi koji daju elastičnu liniju nosača i odgovarajuću silu nakon izvijanja. Ti su teorijski rezultati verificirani na način da se uspoređuju deformacije štapa teorijskog modela s vrijednostima dobivenim kroz eksperimente kao i sile pri kojima su one nastale. Prije svega, za pretpostavku ponašanja nekog materijala potrebno je znati njegove materijalne i geometrijske karakteristike. Budući da se u eksperimentima koristio štap čija je krutost bila nepoznata, trebalo ju je odrediti eksperimentalno.

Specifični poprečni presjek štapa zahtijevao je izračun momenta tromosti te određivanja slabije osi. Young-ov modul elastičnosti je izračunat jednostavnim pokusom na konzoli mjereći silu i progib.

Nakon određivanja krutosti štapa, izvedena su dva eksperimenta. U prvom eksperimentu štap se postavlja u upeti ležaj u jednom kraju, a slobodan u drugom, dok je u drugom eksperimentu štap zglobno oslonjen na oba kraja. Pri završetku mjerenja prikupljeni podaci se obrađuju i sistematiziraju u programu GOM Correlate.

Usporedbom tih podataka s vrijednostima teorijskog modela izvijanja štapa koje je moguće dobiti pomoću programa Wolfram Mathematica dobiveno je zadovoljavajuće podudaranje. Iz grafova se može vidjeti jasno preklapanje krivulja pomaka za x i y smjer u oba eksperimenta. U prvom eksperimentu krivulja sile prilazi vrijednosti modela, ali u drugom je stvarna sila oko 20% veća od teorijske. Takvo nepodudaranje je moglo nastati zbog ne idealnih uvjeta oslanjanja štapa u zglobni ležaj koje je izazvalo trenje između vrha štapa i ležaja. Sila trenja je mogla izazvati otežani zaokret štapa te pridonijeti vrijednosti sile koja je izmjerena. Kako bi se otklonili takvi problemi u budućim eksperimentima trebalo bi posebno pripaziti na izvođenje oslonaca te podmazivanjem osigurati da trenje bude minimalno.

5. LITERATURA

- [1] Šimić V., Otpornost materijala II, 1. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [2] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, Dover Publications, New York, 2009.
- [3] Z. P. Bažant, L. Cedolin, Stability of Structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories, World Scientific Publishing, Singapore, 2010.
- [4] WP 120 Buckling behaviour of bars - Experiment instructions, GUNT, Hamburg
- [5] Geometrijske karakteristike kružnog odsječka:
https://structx.com/Shape_Formulas_003.html
- [6] Popis 2. momenata površina:
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_second_moments_of_area
- [7] Oprema za eksperimente:
https://www.gradri.uniri.hr/files/Katalog_laboratorijske_i_terenske_opreme_GF_Rijeka.pdf