Geometrijski točni 3D gredni element - SE(3) formulacija

Tomec, J.[1] i Jelenić, G.[2]

Sažetak
U ovome radu je kratko predstavljena geometrijski točna teorija greda, zapisana u Liejevi grupi pomaka krutog tijela $SE(3)$. Zapisane su jednadžbe za statičku ravnotežu i provedena je diskretizacija zapisa u konačni element. Na kraju je element testiran preko standardnog numeričkog primjera iz literature.

Ključne riječi: Statička analiza, nelinearna teorija greda, metoda konačnih elemenata, neograničeno velike 3D rotacije, SE(3) interpolacija

[1] **Jan Tomec, doktorand**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: jan.tomec@uniri.hr
[2] **Gordan Jelenić, profesor**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Geometrijsku točnu teoriju greda i njezin konačni element razvili su Simo [1] te Simo i Vu-Quoc [2]. Sonnevile et al. proširili su formulaciju na $SE(3)$ grupu, odnosno grupu pomaka krutog tijela. $SE(3)$ element ima nekoliko prednosti, koje su zanimljive iz teoretskog, a i numeričkog zornog kuta. Najviše se koristi element sa dva čvora, gdje ova interpolacija osigura da rješenje ostaje u grupi na cijeloj domeni elementa. Vektor zakrivljenosti je konstantan, što znači da se vektor unutarnjih sila i matrica krutosti mogu jednostavno integrirati analitički. Elementi višeg reda su, za sada, više-manje samo u domeni akademskog istraživanja.

2 Kinematika grede

Geometriju grede opisujemo pomoću deformabilne centralne linije i familije nedeformabilnih poprečnih prosjeka, kroz koje ta linija prolazi. Centralna linija ne mora predstavljati težišnu os nego može biti proizvoljno odabrana linija. Svakoj točki na centralnoj liniji pridružujemo dvije ortogonalne baze: prostornu bazu $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ i materijalnu bazu $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3]$. Duljina nedeformirane linije je L. Neka vektor $\boldsymbol{x}(\xi) \in \mathbb{R}^3, \xi \in [0, L]$ označava položaj centralne linije, a $\boldsymbol{R}(\xi) \in SO(3)$ orijentaciju presjeka. Položaj proizvoljno odabrane točke P na gredi je onda

$$\boldsymbol{x}_P(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{R}(\xi)\boldsymbol{y}(\eta, \zeta), \tag{1}$$

gdje je $\boldsymbol{y}(\eta, \zeta) = \eta\boldsymbol{E}_2 + \zeta\boldsymbol{E}_3 = \{0 \;\; \eta \;\; \zeta\}^T$ položaj točke na poprečnom prosjeku.

3 Liejeva grupa $SE(3)$

Liejeva grupa $SE(3)$ je grupa pomaka krutog tijela. Pomoću nje, okvir (položaj i orijentacija zajedno) centralne linije može se zapisati kao

$$\boldsymbol{H}(\xi) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\xi) & \boldsymbol{x}(\xi) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

a okvir točke P kao

$$\boldsymbol{H}_P(\xi) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\xi) & \boldsymbol{x}_P(\xi, \eta, \zeta) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}(\xi) \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{y}(\eta, \zeta) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}(\xi)\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{y}}(\eta, \zeta) \tag{3}$$

Derivaciju unutar $SE(3)$ grupe provodimo pomoću Liejeve algebre $\mathfrak{se}(3)$. Definirajmo operator $\widehat{(\cdot)}$, koji transformira vektor $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}_U^T \;\; \boldsymbol{a}_\Omega^T\}^T \in \mathbb{R}^6$ u Liejevu algebru

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{a}_\Omega} & \boldsymbol{a}_U \\ \boldsymbol{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3), \tag{4}$$

a gdje $\widehat{\boldsymbol{a}_\Omega}$ označava element Lijeve algebre $\mathfrak{so}(3)$, tako da je $\widehat{\boldsymbol{a}_\Omega}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_\Omega \times \boldsymbol{b}$ za proizvoljni vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Derivacija okvira centralne linije $\boldsymbol{H}(\xi)$ je $\boldsymbol{H}'(\xi) = \boldsymbol{H}(\xi)\widehat{\boldsymbol{f}(\xi)}$, a njegova varijacija je $\delta \boldsymbol{H}(\xi) = \boldsymbol{H}(\xi)\widehat{\delta \boldsymbol{h}(\xi)}$. Ostale jednadžbe, koje se koriste unutar grupe, nalaze se u radu [3].

4 Statička formulacija

Ravnotežne jednadžbe problema u materijalnim koordinatama glase [1]

$$\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{\kappa} + \bar{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{M}' - \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\kappa} + \bar{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

gdje su $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{M}$ te $\bar{\boldsymbol{N}}$ i $\bar{\boldsymbol{M}}$ unutarnje, odnosno vanjske sile i momenti, a $\boldsymbol{\gamma}$ i $\boldsymbol{\kappa}$ su deformacije. Sve veličine su u materijalnim koordinatama. Pomoću $SE(3)$ grupe i slijedećih novih varijabli $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{N}^T \ \ \boldsymbol{M}^T\}^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\gamma}^T \ \ \boldsymbol{\kappa}^T\}^T$ i $\bar{\boldsymbol{n}} = \{\bar{\boldsymbol{N}}^T \ \ \bar{\boldsymbol{M}}^T\}^T$, jednadžba (5) može se zapisati i kao

$$\boldsymbol{n}' - \check{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}, \qquad \check{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\kappa}} & \hat{\boldsymbol{\gamma}} \\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Poštujući Hookeov elastični zakon $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, gdje je $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(EA, GA_1, GA_2, GI_t, EI_1, EI_2)$ matrica materijalnih parametra, slabi (integralni) oblik ravnotežne jednadžbe (6) glasi

$$\delta W = \int_0^L \delta \boldsymbol{h}^T (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}' - \check{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{n}}) \, \mathrm{d}\xi = 0. \tag{7}$$

5 Diskretizacija

U metodi konačnih elemenata kontinuum, odnosno gredu razdijelimo na konačne elemente. Nepoznate veličine definiramo u čvorovima na rubu elementa, a u samom elementu provodimo interpolaciju. Dobra interpolacija ima slijedeća svojstva:

- poštuje prostor, u kojem se nalazi rješenje,
- poštuje invarijatnost obzirom na kretanje krutog tijela i
- poštuje invarijatnost obzirom na odabir referentne točke.

U $SE(3)$ postoji takva interpolacija samo između dva čvora. Nazovimo ih čvor A i čvor B i definirajmo okvir centralne linije kao

$$\boldsymbol{H}(\xi) = \boldsymbol{H}_A \exp(\xi / L \, \boldsymbol{d}), \qquad \boldsymbol{d} = \log(\boldsymbol{H}_A^{-1} \boldsymbol{H}_B). \tag{8}$$

Derivacija se može sada izračunati kao $\boldsymbol{H}'(\xi) = \boldsymbol{H}(\xi) \left[\boldsymbol{T}\left(\frac{\xi}{L}\boldsymbol{d}\right) \frac{\boldsymbol{d}}{L} \right]^{\wedge} = \boldsymbol{H}(\xi) \frac{\hat{\boldsymbol{d}}}{L}$, gdje zadnji rezultat slijedi iz svojstva vektorskog produkta $\hat{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$. Iz toga dalje slijedi $\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{d}}{L}$, a deformacija je definirana kao $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_0 = \frac{\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}_0}{L}$, gdje indeks 0 označava početno stanje. Kako se vidi iz jednadžbe, deformacija je konstantna.

Varijaciju $\delta \boldsymbol{d}$ jednostavno izrazimo iz jednadžbe (8) kao $\delta \boldsymbol{d} = \boldsymbol{P} \delta \boldsymbol{h}_{AB}$, gdje je $\delta \boldsymbol{h}_{AB}$ objedinjeni vektor virtualnih pomaka u čvorovima A i B, a matrica $\boldsymbol{P} =$

$[-\boldsymbol{T}^{-1}(-\boldsymbol{d}) \quad \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{d})]$. Varijacija deformacije glasi $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\boldsymbol{h}' + \breve{\boldsymbol{\varepsilon}}\delta\boldsymbol{h} = \delta\boldsymbol{f} = \frac{1}{L}\delta\boldsymbol{d} = \frac{1}{L}\boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{h}_{AB}$. Ovaj izraz se pojavljuje u virtualnom radu (7) u integralnom obliku, zato ga integriramo znajući da varijacija nestaje na rubu $\int_0^L \delta\boldsymbol{h}' + \breve{\boldsymbol{\varepsilon}}\delta\boldsymbol{h}\, \mathrm{d}\xi = \int_0^L \breve{\boldsymbol{\varepsilon}}\delta\boldsymbol{h}\, \mathrm{d}\xi$,

$$\int_0^L \breve{\boldsymbol{\varepsilon}}\delta\boldsymbol{h}\, \mathrm{d}\xi = \boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{h}_{AB} \tag{9}$$

Iz (7) i (10) te činjenice da je u odabranoj interpolaciji deformacija konstantna, slijedi konačni oblik rezidualnog vektora

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \int_0^L \boldsymbol{Q}^T\overline{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\xi = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

u kojom je korištena interpolacija varijacije okvira $\delta\boldsymbol{h}(\xi) = \boldsymbol{Q}(\xi)\delta\boldsymbol{h}_{AB}$, a interpolacijska matrica je definirana izrazom $\boldsymbol{Q}(\xi) = \left[\boldsymbol{I} - \frac{\xi}{L}\boldsymbol{T}\left(\frac{\xi}{L}\boldsymbol{d}\right)\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{d}) \quad \frac{\xi}{L}\boldsymbol{T}\left(\frac{\xi}{L}\boldsymbol{d}\right)\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{d})\right]$.

6 Numerički primjer i zaključak

Gore zapisane jednadžbe smo isprogramirali u istraživačkom kodu i primijenili na znanom testu savijanja konzole u krug [2]. Podaci su $(EA, GA_1, GA_2, GI_t, EI_1, EI_2, L) = (1, 1,1,1,1,2,1)$ a koristili smo 5 $SE(3)$ elemenata. Slobodni kraj grede je opterećen momentom 8π u jednom samom koraku. Analitičko rješenje ovog problema je dvostruki krug. Algoritam je iskonvergirao u 3 iteracije, što je očekivano [2].

U budućnosti želimo SE(3) formulaciju proširiti na dinamiku i mehaničke integratore.

Zahvale

Ovaj rad financiran je iz EU programa Horizon 2020 (ugovor br. 860124 – THREAD).

Literatura

[1] Simo, J. C.; A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I; 1986; 58; 79-116.

[2] Simo, J. C. i Vu-Quoc, L.; A three-dimensional finite-strain rod model. part II: Computational aspects; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1986; 58; 79-116.

[3] Sonnevile, V., Cardona, A. i Brüls, O.; Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidian group *SE(3)*; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2014; 268; 451-474.