

Eksperimentalna i teorijska analiza koncepta ovješnih grednih nosača

Frlan, Ana

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:316474>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

Ana Frlan

**Eksperimentalna i teorijska analiza koncepta ovješnih
grednih nosača**

Završni rad

Rijeka, 2023.

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Stručni prijediplomski studij
Tehnička mehanika II**

**Ana Frlan
JMBAG: 0069050360**

**Eksperimentalna i teorijska analiza koncepta ovješnih
grednih nosača**

Završni rad

Rijeka, srpanj 2023.

IZJAVA

Završni rad izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Ana Frlan

U Rijeci, 04.07.2023.

Sažetak:

U predmetnom završnom radu prikazana je eksperimentalna i teorijska analiza zadanog ovješnog grednog nosača. Na predmetnoj gredi određeni su progibi na tri unaprijed određene pozicije koje odgovaraju točkama u kojima je greda ovješena. Metode korištene za proračun su metoda jedinične sile i analitička metoda pomoću kojih su izvedene jednadžbe za izračun progiba. Nakon teorijskog dijela, odnosno izvršenog proračuna navedenim metodama, izvedena su eksperimentalna mjerenja na stvarnom modelu ovješene grede.

Jednadžbe dobivene metodom jedinične sile i analitičkom metodom daju identične rezultate. Detaljna usporedba rezultata pokazuje određena odstupanja progiba dobivenih teorijskim metodama u odnosu na rezultate eksperimentalnih mjerenja te su napravljene dodatne analize rezultata. Pokazano je da je do odstupanja došlo jer se sustav u stvarnosti nije ponašao linearno elastično te su navedeni uzroci za koje se pretpostavlja da su doveli do tih odstupanja.

Ključne riječi:

Ovješena greda, statički neodređen sustav, zatega, progib, metoda sila, metoda jedinične sile, analitička metoda

Abstract:

This thesis presents an experimental and theoretical analysis of a given suspended beam. On the beam in question, deflections are determined at three predetermined positions that correspond to the points where the beam is suspended. The methods used for the calculation are the unit force method and the analytical method, which were used to derive the equations for the deflection calculation. After the theoretical part, i.e. the calculations performed using the mentioned methods, experimental measurements were performed on the actual model of the suspended beam.

The equations obtained by the unit force method and the analytical method give identical results. A detailed comparison of the results shows certain deviations of the deflections obtained by theoretical methods in relation to the results of experimental measurements, and additional analyzes of the results were made. It is shown that the deviations occurred because the system in reality did not behave linearly elastically, and the causes that are assumed to have led to these deviations are listed.

Key words:

Suspended beam, statically indeterminate structure, tensioner, deflection, force method, unit force method, analytical method

Sadržaj

1. UVOD	1
2. KONCEPT OVJEŠENIH GREDNIH NOSAČA	2
2.1. O ovješnim gredama s primjerima iz prakse	2
2.2. Opis zadanog sustava – ovještene grede	4
3. PRORAČUN METODOM JEDINIČNE SILE	7
3.1. O metodi sila i postupku proračuna progiba metodom jedinične sile	7
3.2. Određivanje progiba na zadanom sustavu metodom jedinične sile	11
4. PRORAČUN ANALITIČKOM METODOM	14
4.1. O analitičkoj metodi i postupku proračuna progiba analitičkom	14
metodom	14
4.2. Određivanje progiba na zadanom sustavu analitičkom metodom	16
5. EKSPERIMENTALNA MJERENJA	19
6. USPOREDBA I ANALIZA REZULTATA	21
7. ZAKLJUČAK	25
8. LITERATURA	26

Popis tablica:

<i>Tablica 1: Parametri grede</i>	<i>5</i>
<i>Tablica 2: Konačni progib grede - usporedba teorije i eksperimenta</i>	<i>21</i>
<i>Tablica 3: Porast progiba grede povećanjem sile u zatezi - usporedba teorije i eksperimenta....</i>	<i>23</i>

Popis slika:

Slike 1;1a: Pelješki most; Kose zatege mosta [2]	2
Slika 2: Most dr. Franja Tuđmana [3]	3
Slika 3; 3a: Krovište Bazena Kantrida [foto autor]; Ovješena greda krovišta [4]	3
Slika 4: Zadani statički sustav	4
Slika 5: Pozicije traženih progiba na zadanom sustavu	6
Slika 6: Primjer određivanja stupnja statičke neodređenosti	7
Slika 7: Primjer pretvorbe neodređenog sustava u statički određen - osnovni sustav	8
Slika 8: Princip superpozicije.....	8
Slika 9: Tablica integrala [5].....	10
Slika 10: Osnovni sustav	11
Slika 11: Dijagram momenata – vlastita težina	11
Slika 12: Dijagram momenata – jedinično opterećenje.....	12
Slika 13: Nosač opterećen na savijanje [5].....	14
Slika 14: Deformirano stanje nosača [5]	15
Slika 15: Greda opterećena samo vlastitom težinom.....	16
Slika 16: Greda opterećena samo silom F	17
Slika 17: Zadani sustav postavljen za potrebe eksperimenta	19
Slika 18: Greda kada na istu djeluju sve tri zatege.....	20

1. UVOD

U ovom završnom radu provedena je eksperimentalna i teorijska analiza koncepta ovješanih grednih nosača. U prvom dijelu rada uz opis ovješanih greda dati su primjeri istih iz prakse koji su poslužili i kao motivacija za određivanje statičkog sustava na kojem su izvršeni proračuni i eksperimentalna mjerenja. Nakon navedenog slijedi detaljan opis zadanog statičkog sustava ovješanog grednog nosača. Na zadanoj gredi potrebno je odrediti progibe na unaprijed određenim pozicijama, a za različite vrijednosti opterećenja.

U drugom dijelu rada slijedi upoznavanje s metodama proračuna korištenim za određivanje progiba na zadanom grednom nosaču. Metode korištene za proračun su metoda jedinične sile i analitička metoda. Uz primjenu navedenih metoda izvedene su jednadžbe za proračun progiba koje su za potrebe bržeg rješavanja upisane u tablicama Microsoft® Excel programa.

Nakon teorijskog dijela rada, izvedena su eksperimentalna mjerenja na stvarnom modelu grednog nosača postavljenom u praktikumu fakulteta. Izmjereni progibi grede također su zabilježeni u Microsoft® Excel programu. Na kraju rada dana je usporedba i analiza rezultata dobivenih proračunskim metodama i eksperimentom što je ujedno i cilj ovog završnog rada.

2. KONCEPT OVJEŠENIH GREDNIH NOSAČA

2.1. O ovješanim gredama s primjerima iz prakse

Ovještene grede spadaju u grupu složenih konstrukcijskih sustava. Štapovi se u predmetnim sustavima nalaze iznad grede. Kod ovješanih greda uzdužne sile u štapovima su vlačne. Ovakvi konstrukcijski sustavi najčešću primjenu imaju u gradnji mostova te krovništa. U nastavku slijede primjeri ovješanih konstrukcija iz prakse koji su također poslužili kao motivacija za odabir zadanog statičkog sustava na kojem će se vršiti proračuni i analize.

Jedan primjer ovještene konstrukcije je Pelješki most smješten u Dubrovačko-neretvanskoj županiji u Hrvatskoj. Za predmetni most ukupne duljine 2404 m odabran je ovakav način gradnje obzirom da je ovještani tip mosta konstrukcijski najpovoljniji za velike raspone između potpornih konstrukcija. Ovještani most se sastoji od stupova, greda s prometnicom te greda za ukrućivanje (tornjeva) na koje su pričvršćene kose zatege od čeličnih žica. Kose zatege su jednim krajem usidrene u gredu za ukrućivanje, a drugim krajem usidrene u grede s prometnicom. Postavljanjem zatega na taj način, svaki element mosta stvara protutežu i dovodi cijelu konstrukciju u ravnotežu. [1]



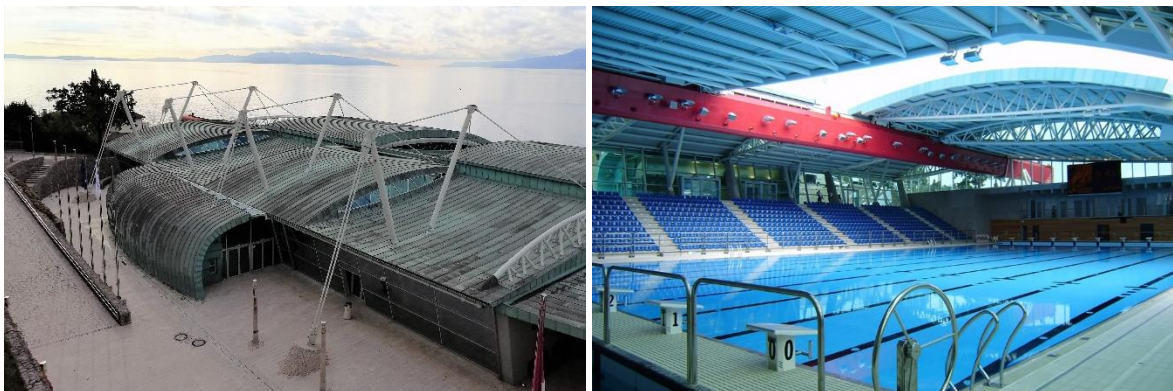
Slike 1;1a: Pelješki most; Kose zatege mosta [2]

Sljedeći primjer je most dr. Franja Tuđmana smješten kod grada Dubrovnika. Predmetni most ovješnog tipa sastoji se od dva dijela prednapetog grednog sklopa sa zapadne strane i glavnog nesimetričnog sklopa s ovješnom spregnutom gredom na istočnoj strani. Dužina samog mosta je 518 metara, a slobodna visina istog iznosi 50 m.



Slika 2: Most dr. Franja Tuđmana [3]

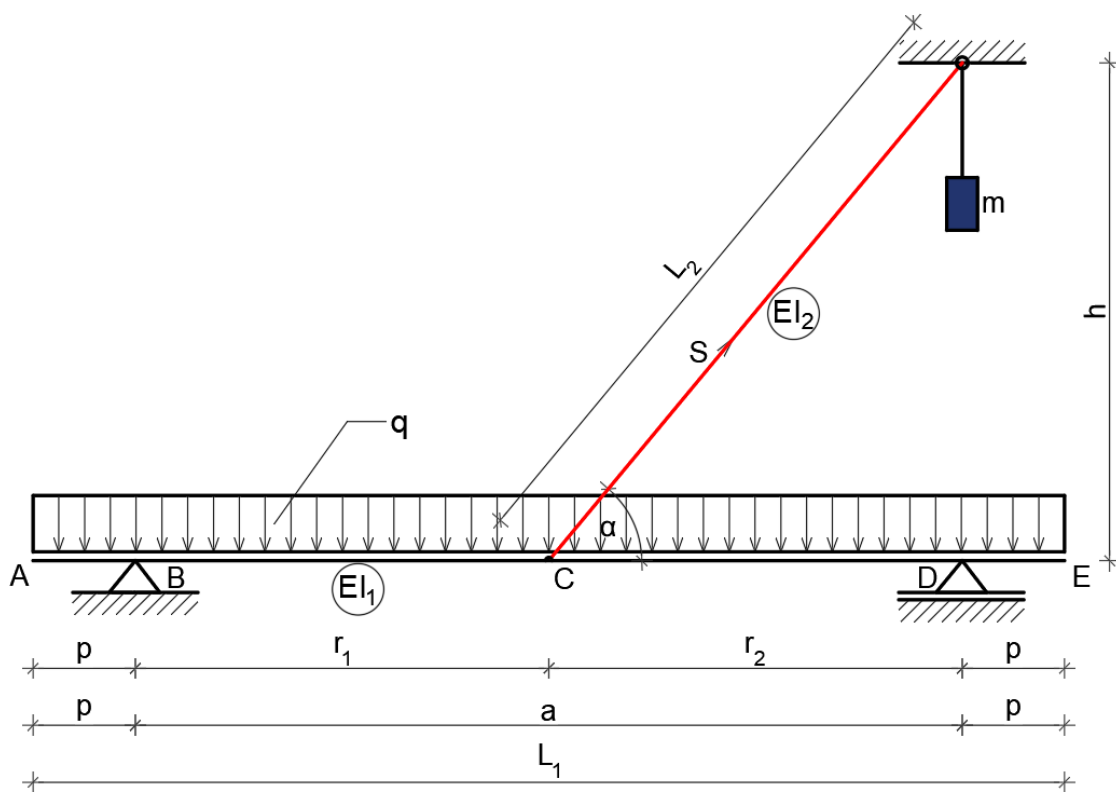
Nakon ovješnih mostova, u nastavku slijedi primjer ovješnog krovišta. Radi se o krovištu kompleksa Bazeni Kantrida smještenog u Gradu Rijeci. Kao što je vidljivo na sljedećim slikama, glavni nosač krovne konstrukcije olimpijskog bazena (duljina nosča je veća od 50 m) na kojem se nalaze šine po kojima klizi pokretni krov je dodatno pridržan sustavom stupova i zatega koje su usidrene u temelje.



Slika 3; 3a: Krovšte Bazena Kantrida [foto autor]; Ovješena greda krovišta [4]

2.2. Opis zadanog sustava – ovještene grede

Zadani sustav je jedanput statički neodređen ovješeni gredni nosač. Sustav se sastoji od grede sa dva prepusta p te od kosog štapa, odnosno zatege. Jedino opterećenje grede je njezina vlastita težina q . U slučaju kada je sila u zatezi poznata, kao što je to slučaj u ovom radu, problem više nije statički neodređen jer se reakcije u osloncima mogu odrediti iz jednadžbi ravnoteže u koje ulaze vlastita težina grede q te sila u zatezi S . Progibi grede mogu se dobiti uzimajući u obzir kombinirani utjecaj progiba od vlastite težine te (u suprotnom smjeru) progiba od sile u zatezi.



Slika 4: Zadani statički sustav

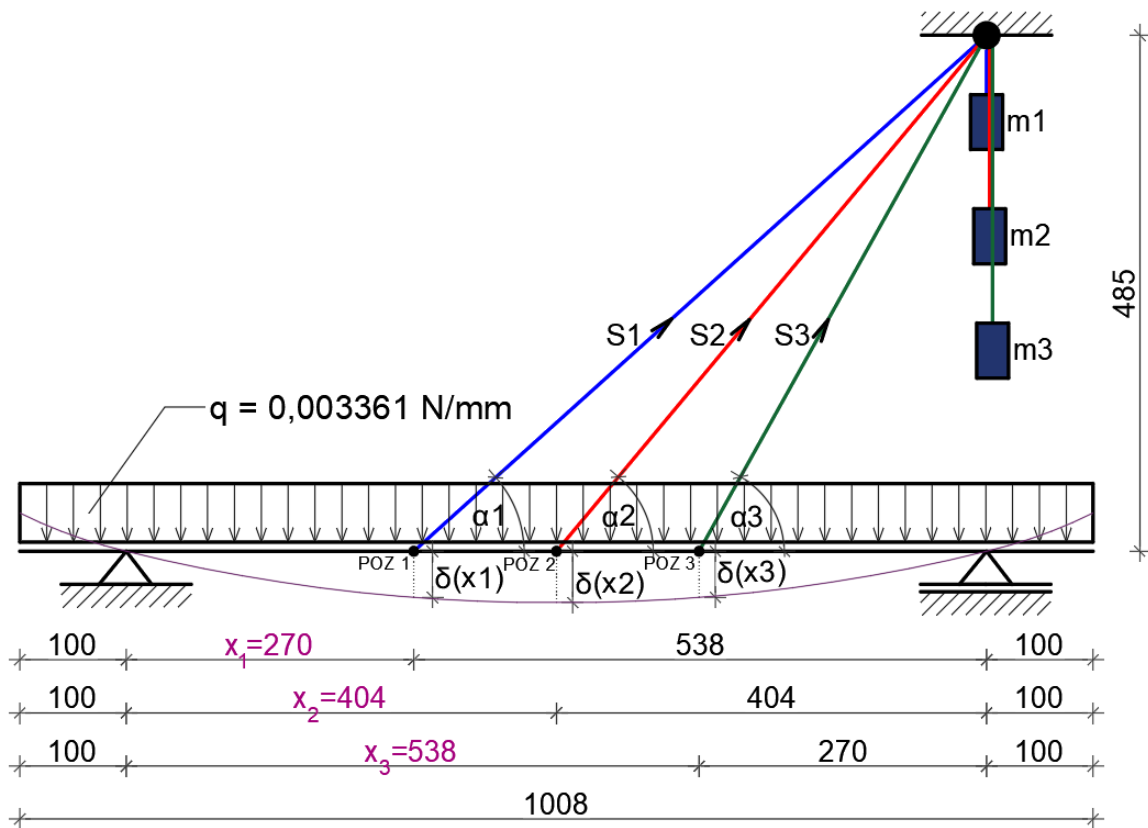
U tablici u nastavku prikazani su parametri grede.

Tablica 1: Parametri grede

PARAMETRI GREDE			
širina	b=	18	mm
visina	h=	2	mm
duljina prepusta	p=	100	mm
duljina između oslonaca	a=r ₁ +r ₂ =	808	mm
ukupna duljina grede	L ₁ =2p+a=	1008	mm
modul elastičnosti	E ₁ =	155000	N/mm ² (Mpa)
moment tromosti oko osi y	I _y =	12	mm ⁴
krutost	EI _y =	1860000	N*mm ²
masa	m=	0,3453	kg
vlastita težina grede	q=m*g/L	0,0033605	N/mm

Modul elastičnosti nije određen eksperimentalno već je odabrana vrijednost koja daje približno najbolje podudaranje teorijskih predikcija i mjerenja.

Za različite vrijednosti sile u zatezi i za različite položaje zatege na gredi, potrebno je odrediti progibe grede na određenim pozicijama, točnije u trećinama raspona a te u sredini grede. Dakle, za različite vrijednosti sile u zatezi potrebno je odrediti progibe $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$ i $\delta(x_3)$ kada se zatega nalazi na poziciji 1, kada se nalazi na poziciji 2 te kada je zatega smještena na poziciji 3, kao što je označeno na Slici 5. Također je potrebno odrediti progibe na navedenim pozicijama kada na gredu djeluju sve tri zatege istodobno, što se može jednostavno dobiti po principu superpozicije kada su poznati progibi za pojedinačne zatege.



Slika 5: Pozicije traženih progiba na zadanom sustavu

Neovisno na kojoj poziciji na gredi je smještena zatega, njen krajnji rub je fiksiran i nalazi se 485 mm iznad drugog oslonca. Kut α pod kojim je zatega položena, ovisno na kojoj se poziciji grede nalazi, iznosi:

$$\alpha_1 = 42,03^\circ$$

$$\alpha_2 = 50,20^\circ$$

$$\alpha_3 = 60,89^\circ$$

Izrazi za progibe ovještene grede određeni su metodom jedinične sile i analitičkom metodom, čime je potvrđeno da niti u jednoj metodi nije napravljena greška prilikom izvoda. Pri proračunu progiba grede korištena je teorija malih pomaka te sukladno tome utjecaj uzdužne sile nije uzet u obzir.

3. PRORAČUN METODOM JEDINIČNE SILE

U slučaju da sila u zatezi nije poznata, sustav prikazan na Slici 4 predstavlja statički neodređeni sustav kojeg se može riješiti metodom sila. Pritom je potrebno definirati koliki je progib u točki u kojoj se zatega spaja na gredu. Tu postoje dvije opcije: (a) zatega s beskonačnom aksijalnom krutošću i (b) zatega s konačnom aksijalnom krutošću. Za slučaj (a) progib u točki u kojoj je zatega spojena na gredu biti će nula, dok za slučaj (b), pod uvjetom da je poznata aksijalna krutost zatega, možemo dovesti u vezu silu u zatezi i progib grede u točki u kojoj je zatega spojena na gredu. Oba spomenuta slučaja te slučaj kada je sila u zatezi poznata biti će analizirani u nastavku.

3.1. O metodi sila i postupku proračuna progiba metodom jedinične sile

Metoda sila često je korištena metoda za rješavanje statički neodređenih sustava. Sustav je statički neodređen ukoliko je broj nepoznatih veličina (reakcija, sila u zglobovima, sila u štapovima) veći od broja jednadžbi ravnoteže ($\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$, $\sum M=0$) koje je moguće postaviti na sustavu. [5]

Statička neodređenost može se odrediti pomoću formule:

$$n = R - 3 - z \quad (1)$$

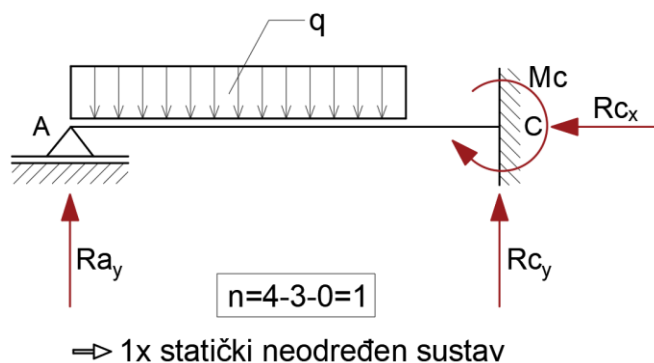
gdje je:

n – stupanj statičke neodređenosti

R – broj reakcija na sustavu

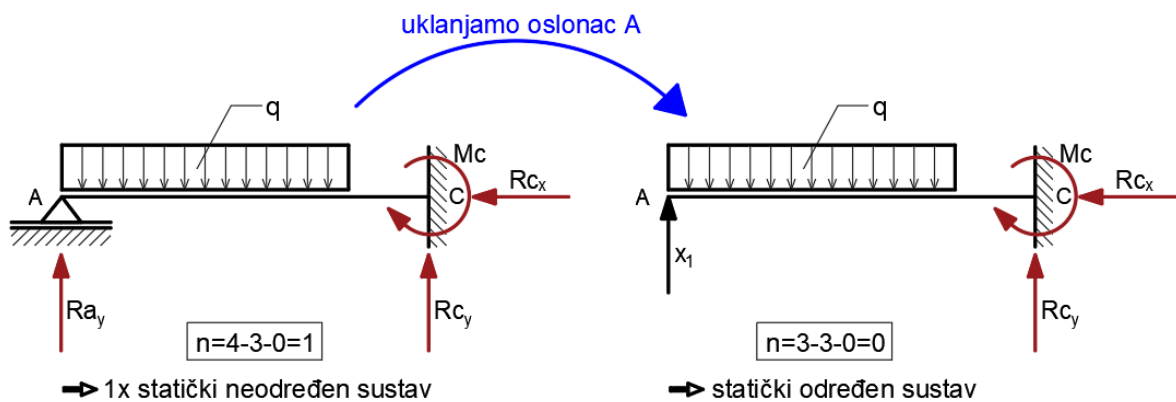
3 – broj jednadžbi ravnoteže koje možemo postaviti na sustavu

z – broj zglobova



Slika 6: Primjer određivanja stupnja statičke neodređenosti

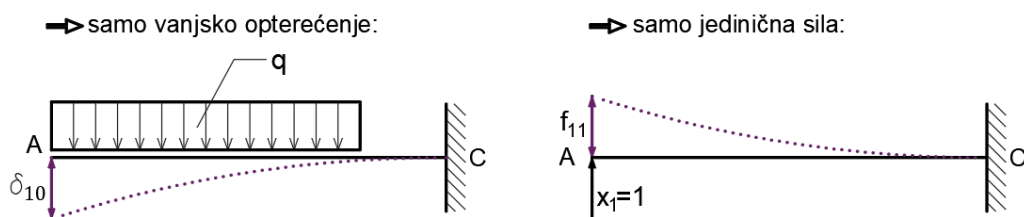
Obzirom da uvjeti ravnoteže nisu dovoljni za proračun nepoznatih veličina, postavljaju se dodatni rubni uvjeti koji se izražavaju jednadžbama. Ove jednadžbe predstavljaju superpoziciju pomaka nastalih od djelovanja zadanog opterećenja i nepoznatih sila i nazivaju se jednadžbama kompatibilnosti ili kontinuiteta. Temelj metode sila je pretvorba zadanog neodređenog sustava u statički određen sustav koji nazivamo osnovni sustav. Osnovni sustav nastaje tako što se zadanom sustavu ukloni određen broj veza koje se nadomještaju odgovarajućim silama ili momentima. U navedenom postupku potrebno je voditi računa da se prilikom uklanjanja veza sustav ne pretvori u mehanizam ili novi statički neodređen sustav. [6]



Slika 7: Primjer pretvorbe neodređenog sustava u statički određen - osnovni sustav

Prilikom uklanjanja veze, vanjsko će opterećenje na sustavu proizvesti novi pomak na mjestu na kojem ranije nije postojao i njega se na osnovnom sustavu označava s δ_{10} . Koristeći metodu jedinične sile, progib se računa na način da se na mjesto uklonjene reakcije, odnosno na mjestu i u smjeru traženog pomaka postavlja jedinična sila \overline{X}_1 . Pomak uzrokovan jediničnom silom nije pravi pomak, naziva se fleksija i označava se sa f_{11} . Obzirom da jedinična sila \overline{X}_1 stvara pomak f_{11} , onda prava sila X_1 na istom mjestu stvara pomak $f_{11} X_1$.

PRINCIP SUPERPOZICIJE



Slika 8: Princip superpozicije

Konačni progib u točki C (Slika 8) možemo zapisati koristeći jednadžbu kompatibilnosti:

$$\delta_c = \delta_{10} + f_{11} X_1 = 0 \quad (2)$$

gdje je:

δ_{10} – pomak na mjestu jedinične sile od vanjskog opterećenja na osnovnom sustavu

f_{11} – pomak na mjestu jedinične sile od jedinične sile na osnovnom sustavu

X_1 – jedinična sila

$f_{11} X_1$ – pomak od uklonjene reakcije

Kombiniranjem momentnog dijagrama od vanjskog opterećenja (M_0) i momentnog dijagrama od jediničnog opterećenja (\overline{M}_1) dobiva se pomak od vanjskog opterećenja δ_{10} po metodi jedinične sile. Navedeno se izvodi koristeći metodu Vereščagin koja kaže:

$$\delta = \frac{1}{EI_y} P(M) \overline{M}(x_T) \quad (3)$$

gdje je:

δ – pomak

$P(M)$ – površina momentnog dijagrama na osnovnom sustavu

$\overline{M}(x_T)$ – vrijednost momenta od jedinične sile na mjestu težišta površine dijagrama momenata na osnovnom sustavu

EI_y – krutost na savijanje

Na sličan se način računa fleksija f_{11} , ali se u ovom slučaju momentni dijagram od jedinične sile (\overline{M}_1) kombinira sam sa sobom.

Za potrebe bržeg rješavanja metodom jedinične sile može se koristiti Tablica integrala u kojoj su dane razne kombinacije oblika momentnih dijagrama od vanjskog i od jediničnog opterećenja. Za svaku je kombinaciju navedena formula s pripadajućom detaljno opisanom skicom.

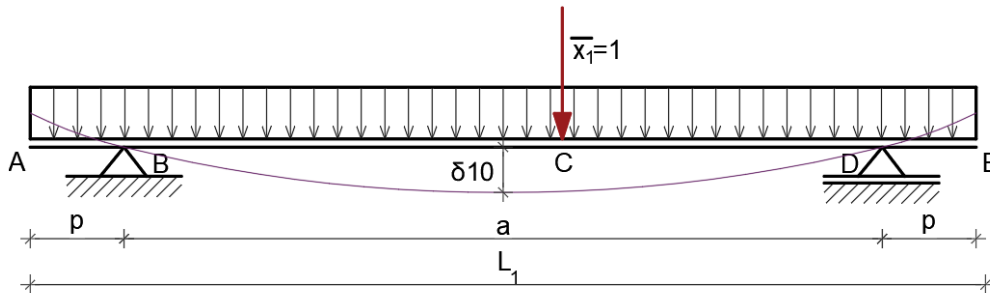
Kada ima složeniji oblik, momentni dijagram se rastavlja na jednostavnije dijelove (pravokutnici, trokuti, kvadratne parabole) te se za svaki dio posebno koristi metoda Vereščagin. [5]

TABLICA INTEGRALA ZA METODU VEREŠČAGIN – Rješenje integrala $\int M(x)\bar{M}(x)dx$							
	$\bar{M}(x)$	a	b	c	e	f	g
1		ajk	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{2}j(k_1 + k_2)$
2		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{6}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \gamma)$	$\frac{a}{6}j(k_1 + 2k_2)$
3		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{6}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \delta)$	$\frac{a}{6}j(2k_1 + k_2)$
4		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{12}jk \frac{3 - 4\gamma^2}{\delta}$ za $\gamma \leq \delta$	$\frac{a}{4}j(k_1 + k_2)$
5		$\frac{a}{2}jk$	$\frac{a}{6}jk(1 + \alpha)$	$\frac{a}{6}jk(1 + \beta)$	$\frac{a}{12}jk \frac{3 - 4\alpha^2}{\beta}$ za $\alpha \leq \beta$	$\frac{a}{6}jk \frac{2\alpha - \alpha^2 - \gamma^2}{\alpha\delta}$ za $\alpha \geq \gamma$	$\frac{a}{6}j[k_1(1 + \beta) + k_2(1 + \alpha)]$
6		$\frac{a}{2}(j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{6}(j_1 + 2j_2)k$	$\frac{a}{6}(2j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{4}(j_1 + j_2)k$	$\frac{a}{6}[j_1(1 + \delta) + j_2(1 + \gamma)]k$	$\frac{a}{6}[j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)]$
7		$\frac{2a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{3}jk$	$\frac{5a}{12}jk$	$\frac{a}{3}jk(1 + \gamma\delta)$	$\frac{a}{3}j(k_1 + k_2)$
8		$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{a}{12}jk$	$\frac{7a}{48}jk$	$\frac{a}{12}jk(1 + \gamma + \gamma^2)$	$\frac{a}{12}j(k_1 + 3k_2)$
9		$\frac{a}{3}jk$	$\frac{a}{12}jk$	$\frac{a}{4}jk$	$\frac{7a}{48}jk$	$\frac{a}{12}jk(1 + \delta + \delta^2)$	$\frac{a}{12}j(3k_1 + k_2)$
10		$\frac{a}{6}(j_1 + 4j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}(2j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}(j_1 + 2j_2)k$	$\frac{a}{24}(j_1 + 10j_2 + j_3)k$	$\frac{a}{6}[j_1\delta^2 + 2j_2(1 + \gamma\delta) + j_3\gamma^2]k$	$\frac{a}{6}[j_1k_1 + 2j_2(k_1 + k_2) + j_3k_2]$

Slika 9: Tablica integrala [5]

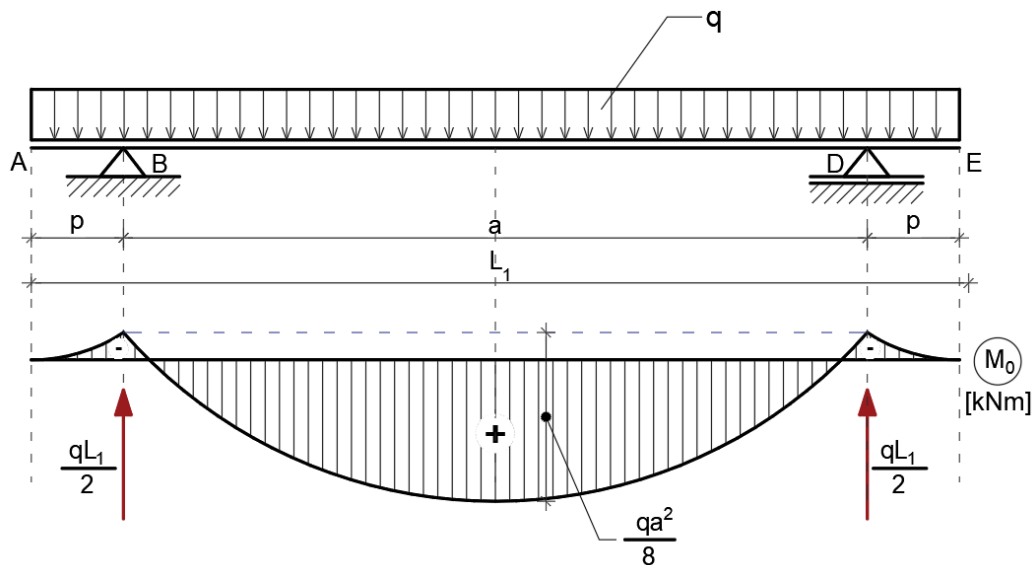
3.2. Određivanje progiba na zadanom sustavu metodom jedinične sile

Zadani sustav pretvara se u osnovni sustav kako slijedi (uklanja se veza grede sa zategom u točki C).



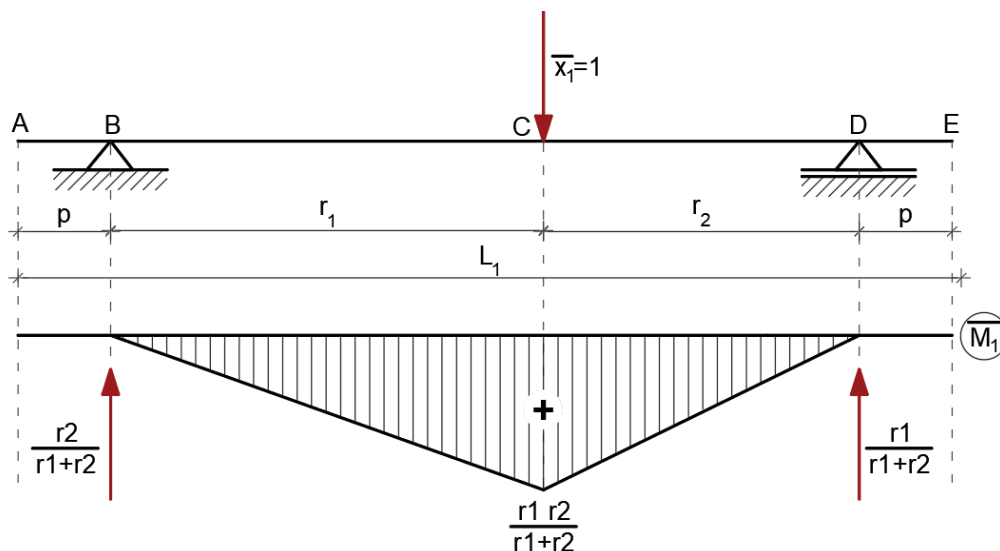
Slika 10: Osnovni sustav

Najprije promatramo gredu bez zatege, odnosno kada na istu djeluje samo vlastita težina te crtamo dijagram momenata (M_0).



Slika 11: Dijagram momenata – vlastita težina

Zatim promatramo gredu kada na istu djeluje samo jedinična sila \bar{X}_1 na mjestu i u smjeru uklonjene zatege uzimajući u obzir samo vertikalnu komponentu koja može stvoriti momentni dijagram te crtamo dijagram momenata (\bar{M}_1).



Slika 12: Dijagram momenata – jedinično opterećenje

Kombiniranjem dijagrama (M_0) i (\bar{M}_1) dobiva se pomak δ_{10} , a kombinacijom dijagrama (\bar{M}_1) samog sa sobom dobiva se fleksija f_{11} . Koristeći Tablicu integrala, izvedene su jednačbe u nastavku.

Progib grede u točki C od vlastite težine:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_1} \left\{ \left[\frac{a}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \left(1 + \frac{r_1}{a} \cdot \frac{r_2}{a} \right) \right] - \left[\frac{a}{2} \cdot \frac{qp^2}{2} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right] \right\} \quad [\text{mm}] \quad (4)$$

Progib grede u točki C od jedinične sile – fleksija:

$$f_{11} = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{a}{6} \cdot \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)^2 \cdot \frac{2 \frac{r_1}{a} - 2 \left(\frac{r_1}{a} \right)^2}{\frac{r_1}{a} \cdot \frac{r_2}{a}} \right] \quad (5)$$

Konačni progib grede u točki C

$$\delta_c = \delta_{10} - \delta_{1S} = \delta_{10} - (S \sin \alpha f_{11}) \quad [\text{mm}] \quad (6)$$

gdje je δ_{1S} progib od sile u zatezi ispred kojeg je korišten predznak minus jer vertikalna komponenta sile u zatezi djeluje suprotno od sile $\overline{X_1}$, a α je kut zatege u odnosu na horizontalu.

U slučaju kada je sila S u zatezi poznata, na desnoj strani jednadžbe (6) je sve poznato te se lako određuje δ_c . Za taj slučaj zapravo nije ni potrebno koristiti metodu sila (i tretirati sustav kao statički neodređen), već se progibi od vlastite težine i sile u zatezi mogu jednostavno odvojeno izračunati metodom jedinične sile te na kraju pribrojiti. Takav slučaj imamo u ovom radu.

Kada ne znamo silu u zatezi, kao što je ranije rečeno, možemo pretpostaviti da zatega ima beskonačnu (a) ili konačnu (b) aksijalnu krutost. U slučaju (a) bi u jednadžbi (6) stavili da je $\delta_c = 0$ i na taj bi način jedina nepoznanica ostala S , što je lako odrediti. Ako bi pak krutost bila konačna, koristeći plan pomaka za rješavanje statički neodređenih štapnih problema (vidi [7] za više detalja), može se pokazati da je

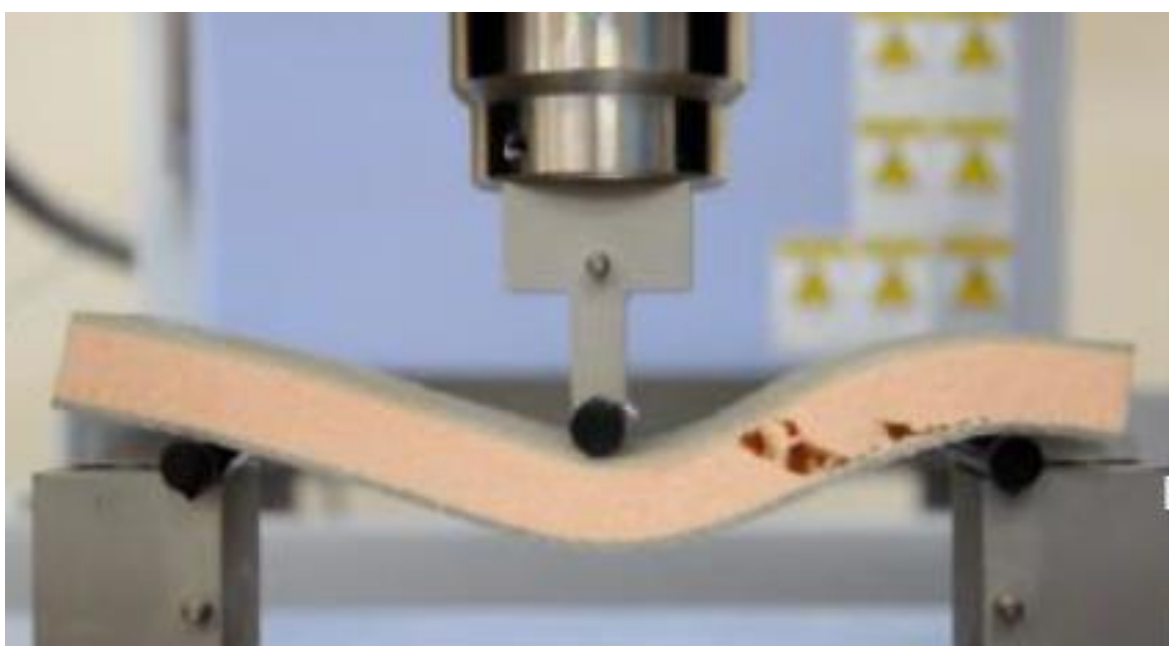
$$\delta_c = \frac{S \cdot L}{EA \sin \alpha} \quad (7)$$

gdje je EA aksijalna krutost štapa, a L je duljina štapa. Uvrštavanjem (7) u (6) dobije se jednadžba u kojoj je jedina nepoznanica S , a konačni progib točke C dobije se uvrštavanjem dobivene sile S u (7).

4. PRORAČUN ANALITIČKOM METODOM

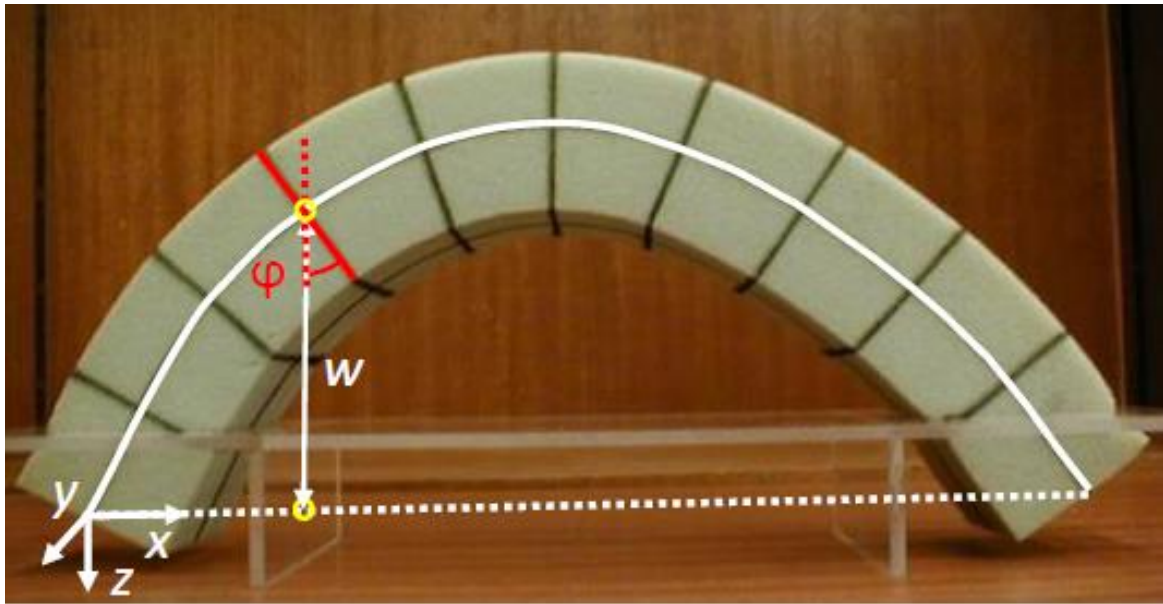
4.1. O analitičkoj metodi i postupku proračuna progiba analitičkom metodom

Grede su linijski nosači opterećeni na savijanje koje uzrokuju momenti savijanja. Pri djelovanju opterećenja na nosač, uzdužna se os nosača deformira u osi djelovanja opterećenja, pri čemu se poprečni presjeci pomiču i istodobno zaokreću oko neutralne osi, ostajući pritom okomiti na savijenu os nosača. Ta savijena os nosača naziva se progibna ili elastična linija nosača pomoću koje se određuju deformacije istog.



Slika 13: Nosač opterećen na savijanje [5]

Kada je greda u deformiranom stanju, os grede se krivi i njezini presjeci se zaokrenu za određen kut φ koji se naziva kut zaokreta. Veličina w naziva se progib grede i predstavlja pomak u smjeru osi z . Kut zaokreta i progib u potpunosti definiraju deformirano stanje grede. Pretpostavlja se da su progibi i rotacije nosača relativno male veličine. [5]



Slika 14: Deformirano stanje nosača [5]

Za određivanja progiba na bilo kojem presjeku grede u deformiranom stanju koristi se diferencijalna jednačba elastične linije nosača koja glasi:

$$w'''' = -\frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (8)$$

gdje su:

$M_y(x)$ - momentna funkcija

EI_y - krutost na savijanje oko osi y

Nakon određivanja momentne funkcije $M_y(x)$, progib se računa na način da se jednačba (8) integrira dva puta kao što slijedi:

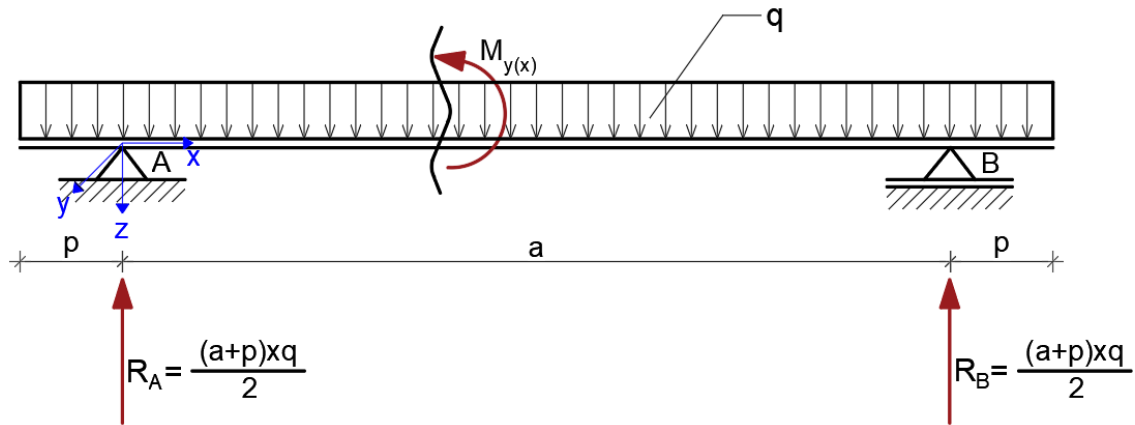
$$w' = -\int \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + c_1 \quad (9)$$

$$w = -\int \int \frac{M_y(x)}{EI_y} d^2x + c_1x + c_2 \quad (10)$$

Prilikom svakog integriranja pojavljuju se konstante integracije koje se određuju iz rubnih uvjeta. [5]

4.2. Određivanje progiba na zadanom sustavu analitičkom metodom

Greda opterećena samo vlastitom težinom:



Slika 15: Greda opterećena samo vlastitom težinom

Kada je greda opterećena samo vlastitom težinom momentna funkcija $M_y(x)$ glasi:

$$M_y(x) = -q \frac{(x+p)^2}{2} + R_A x + R_B (x-a) \quad (11)$$

pri čemu je x , kao što se vidi na Slici 15, udaljenost promatranog presjeka od oslonca A. Izraz se sastoji od tri člana koji redom predstavljaju doprinos vlastite težine, reakcije u osloncu A te reakcije u osloncu B na moment savijanja u presjeku na poziciji x . Prvi član vrijedi kada je $(x+p) \geq 0$, drugi kada je $x \geq 0$, a treći kada je $(x-a) \geq 0$. Obzirom da nas zanimaju progibi $\delta_q(x)$ samo na rasponu a , član $R_B(x-a)$ možemo zanemariti jer je u tom slučaju $(x-a) < 0$.

Za izračun progiba koristi se diferencijalna jednadžba elastične linije nosača (8). Nakon što se ista dva puta integrira, izvedeni izraz za progib grede na poziciji x od vlastite težine glasi:

$$\delta_q(x) = \frac{1}{EI_1} \left[q \frac{(x+p)^4}{24} - \left(\frac{(a+2p)q}{2} \cdot \frac{x^3}{6} \right) + c_1 x + c_2 \right] \text{ [mm]} \quad (12)$$

Rubni uvjeti za promatrani problem (Slika 15) glase:

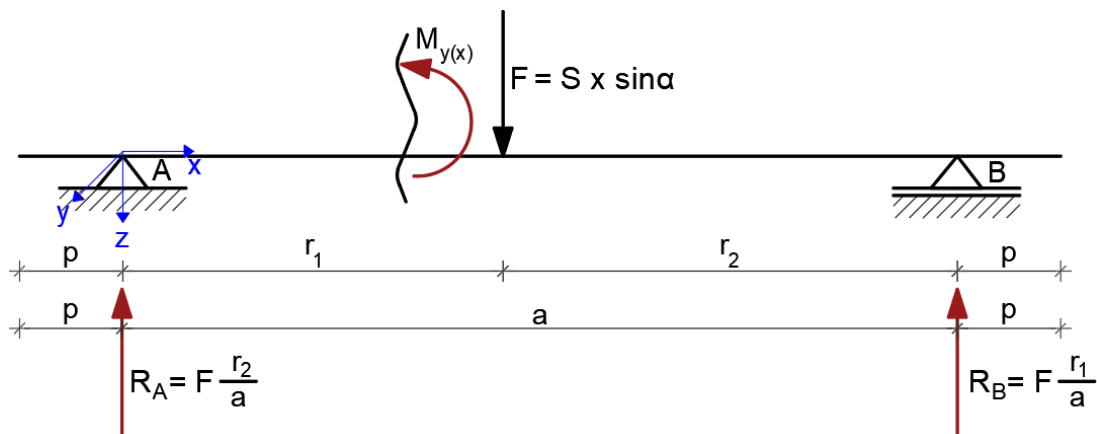
- 1) $w_A = 0$
- 2) $w_B = 0$

Konstante integracije određuju se iz rubnih uvjeta, a u predmetnom slučaju one glase:

$$c_1 = q \frac{p^4}{24a} - q \frac{(p+a)^4}{24a} + \left(\frac{(a+2p)q}{2} \cdot \frac{a^2}{6} \right) [\text{N} \cdot \text{mm}^2] \quad (13)$$

$$c_2 = -q \frac{p^4}{24} [\text{N} \cdot \text{mm}^3] \quad (14)$$

Greda opterećena samo silom F na mjestu spoja zatege na gredu:



Slika 16: Greda opterećena samo silom F

Kada je greda opterećena samo silom F momentna funkcija $M_y(x)$ glasi:

$$M_y(x) = R_A x - F(x - r_1) \quad (15)$$

uz uvjet da je $(x - r_1) \geq 0$.

Progib grede od sile F:

$$\delta_F(x) = \frac{1}{EI_1} \left[\left(-\frac{Fr_2}{a} \cdot \frac{x^3}{6} \right) + F \frac{(x - r_1)^3}{6} + c_1 x \right] [\text{mm}] \quad (16)$$

Član $F \frac{(x-r_1)^3}{6}$ vrijedi kada je $(x-r_1) \geq 0$, što znači da se zanemaruje na prvom dijelu raspona (r_1), a uzima u obzir u drugom dijelu raspona (r_2).

Rubni uvjeti isti su kao za gredu opterećenu vlastitom težinom:

- 1) $w_A = 0$
- 2) $w_B = 0$

Konstante integracije slijede iz rubnih uvjeta:

$$c_1 = F \frac{r_2 a}{6} - F \frac{r_2^3}{6a} \quad [\text{N} \cdot \text{mm}^2] \quad (17)$$

$$c_2 = 0 \quad (18)$$

Konačni progib grede na poziciji traženog progiba x

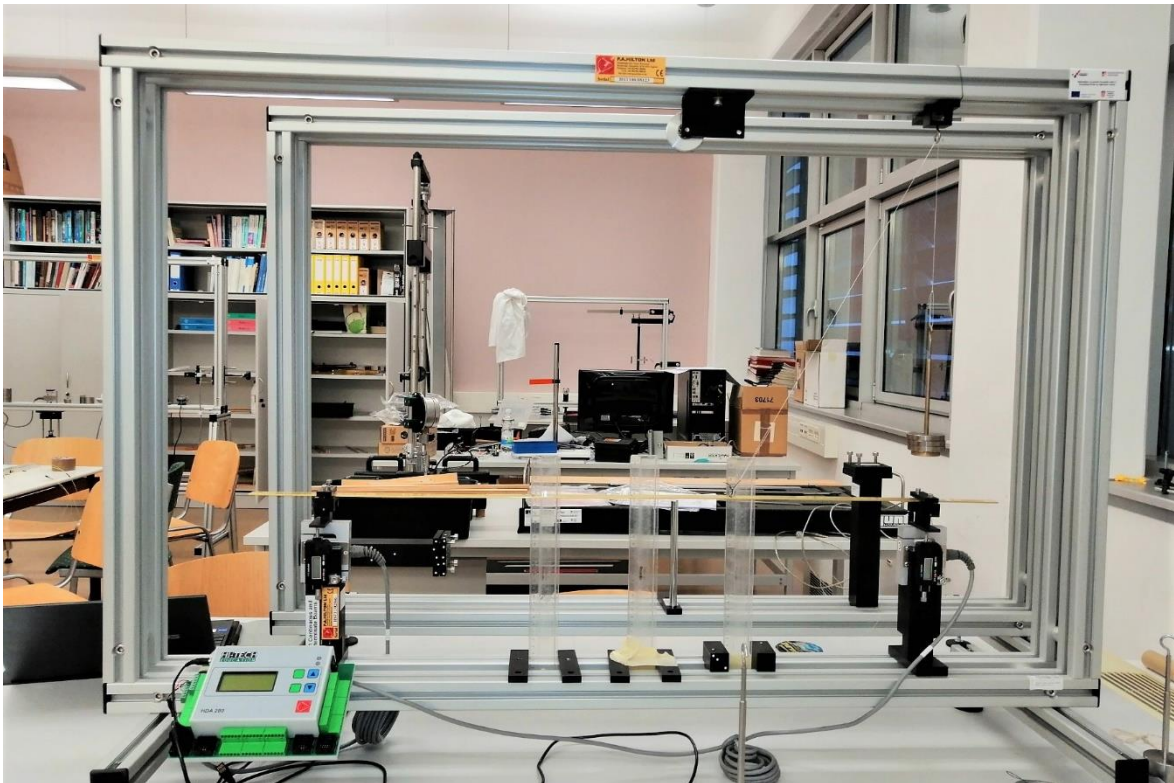
$$\delta(x) = \delta_q(x) - \delta_F(x) \quad [\text{mm}] \quad (19)$$

gdje se minus pojavljuje zato što je sila F na Slici 16 zadana suprotno od smjera u kojem vertikalna komponenta sile S u zatezi djeluje na gredu.

Izrazi za progibe dobiveni metodom jedinične sile i analitičkom metodom daju identične rezultate, što potvrđuje da prilikom izvođenja istih nije došlo do pogreške. Konkretni rezultati proračuna prikazani su u Tablici 2 te su uspoređeni s rezultatima dobivenim eksperimentalnim mjerenjima.

5. EKSPERIMENTALNA MJERENJA

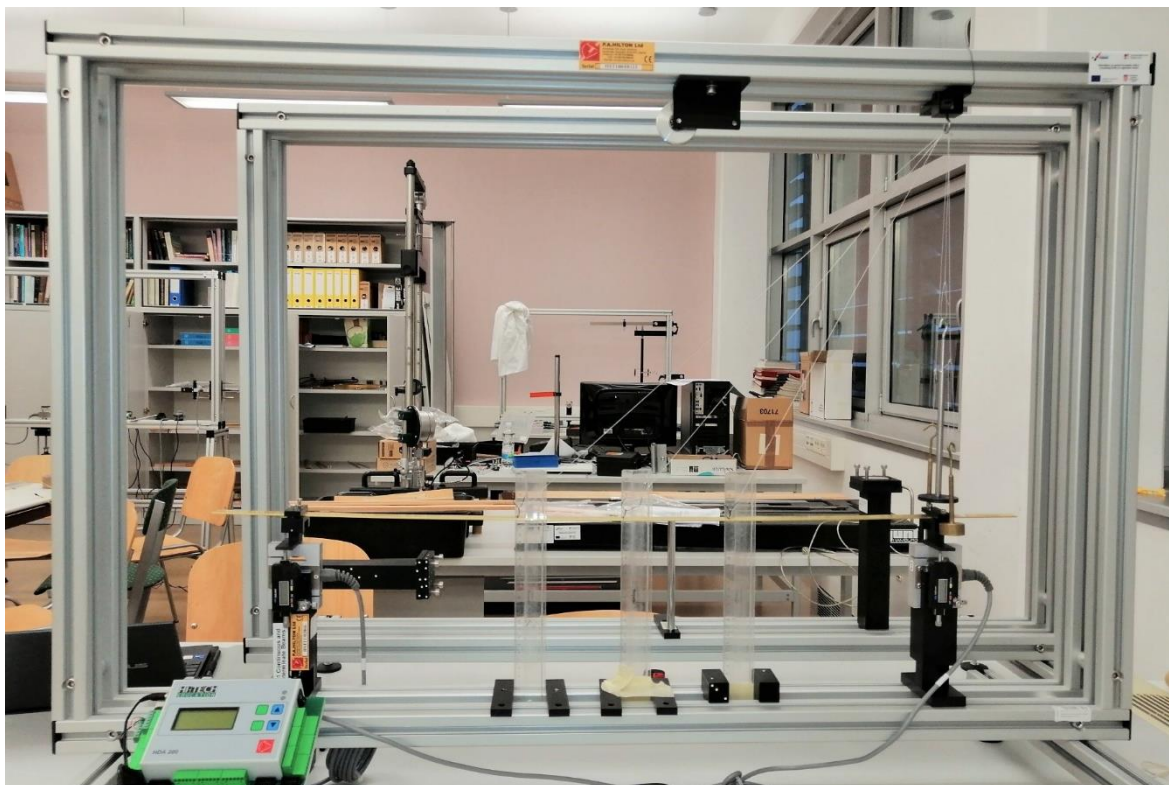
U praktikumu Katedre za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta u Rijeci provedena su eksperimentalna mjerenja na postavljenom zadanom sustavu. Ulogu grede na sustavu preuzela je letva od mesinga, a ulogu kosog štapa, odnosno zatege, dobila je najlonska nit. Dimenzije i masa grede izmjereni su u laboratoriju za materijale fakulteta. U laboratoriju za konstrukcije su izbušene rupe na gredi na pozicijama gdje je mjerjen progib. Kroz rupe je provučena najlonska nit te je prebačena preko fiksirane koloture. Na prebačeni kraj niti pričvršćeni su utezi određenih težina čime se kontroliraju sile u zategama. Uz gredu, na pozicijama gdje je potrebno mjeriti progib, postavljena su ravnala pomoću kojih su očitani traženi progibi.



Slika 17: Zadani sustav postavljen za potrebe eksperimenta

Na postavljenom zadanom sustavu izvršena su mjerenja progiba za slučajeve opisane u nastavku. Prvo su na traženim pozicijama izmjereni progibi od vlastite težine grede. Zatim su izmjereni progibi kada na gredu djeluje i zatega, u slučajevima kada se zatega nalazi na poziciji 1, kada se nalazi na poziciji 2 te kada je zatega smještena na poziciji 3. Vrijednosti sile u zatezi zadane su preko utega. Težine korištenih utega iznose 1, 2, 3 i 4 N.

Nakon izmjerenih progiba grede na sve tri pozicije uz zasebno postavljene zatege, uslijedilo je mjerenje progiba kada na gredu djeluju sve tri zatege istodobno, a za vrijednosti sile u zatezi od 1 i 2 N. Sva mjerenja zapisana su u tablicama programa Microsoft® Excel.



Slika 18: Greda kada na istu djeluju sve tri zatege

Rezultati mjerenja prikazani su u Tablici 2 u sljedećem poglavlju predmetnog rada. Isti su uspoređeni s teorijski dobivenim rezultatima te detaljno analizirani.

6. USPOREDBA I ANALIZA REZULTATA

U nastavku slijedi tablica s usporedbom teorijski i eksperimentalno dobivenih rezultata.

Tablica 2: Konačni progib grede - usporedba teorije i eksperimenta

KONAČNI PROGIB GREDE $\delta(x)$ [mm]							
Sila u zatezi	Zatega na	Progib $\delta(x1)$		Progib $\delta(x2)$		Progib $\delta(x3)$	
		TEORIJA	EKSPE-RIMENT	TEORIJA	EKSPE-RIMENT	TEORIJA	EKSPE-RIMENT
1 N	POZ 1	4,94	4,5	5,91	7	5,33	6
	POZ 2	4,20	4	4,75	6	4,20	5
	POZ 3	4,49	5	4,89	7	3,98	5,5
2 N	POZ 1	1,80	2	2,54	4	2,58	4
	POZ 2	0,32	1	0,21	3	0,32	2
	POZ 3	0,91	2,5	0,48	4	-0,11	3
3 N	POZ 1	-1,33	-1	-0,84	1	-0,16	1,5
	POZ 2	-3,55	-3	-4,33	-2	-3,55	-2,5
	POZ 3	-2,67	-1	-3,92	0	-4,20	-1
4 N	POZ 1	-4,46	-4,5	-4,21	-3	-2,91	-2
	POZ 2	-7,42	-10	-8,87	-11	-7,42	-9,5
	POZ 3	-6,26	-5	-8,33	-5	-8,28	-5,5
1 N	sve tri POZ	-2,51	0	-3,03	1	-2,63	0,5
2 N	sve tri POZ	-13,11	-7	-15,35	-7	-13,35	-6

Kao što je već navedeno u predmetnom radu, teorijski dobiveni izrazi, odnosno izrazi dobiveni metodom jedinične sile i analitičkom metodom daju identične rezultate. Teorijski progibi označeni crvenom bojom dobiveni su isključivo analitičkom metodom, obzirom da je u metodi jedinične sile korištena Tablica integrala pomoću koje se na ovim konkretnim pozicijama ne mogu izračunati konačni progibi. Razlog tome je što se pomoću Tablice integrala može proračunati samo progib od vlastite težine δ_{10} dobivenom jednadžbom (4), no pomoću jednadžbe (5) ne može se proračunati fleksija f_{11} na predmetnim pozicijama grede obzirom na uvjet iz Tablice integrala koji glasi $\alpha \geq \gamma$.

Fleksija f_{11} koja se računa kombinacijom momentnog dijagrama od jednične sile (\overline{M}_1) samog sa sobom, može se dobiti tako da se dijagram rastavi na jednostavnije dijelove te se za svaki dio posebno koristi metoda Vereščagin. Za potrebe ovog rada navedeno nije urađeno obzirom da su progibi dobiveni analitičkom metodom mjerodavni.

Usporedbom rezultata prikazanih u Tablici 2 vidljiva su određena odstupanja teorijski dobivenih progiba u odnosu na one dobivene eksperimentalnim mjerenjima. Odstupanja u vrijednostima nisu toliko značajna u slučaju kada je zatega smještena na poziciji 1, no za ostale dvije pozicije vidljivo je povećanje odstupanja. Navedeno se odnosi na slučajeve kada su zatege postavljane na svakoj poziciji posebno, a u slučaju kada sve tri zatege djeluju na gredu istodobno, odstupanja u dobivenim vrijednostima su najznačajnija.

Iz prikazanih rezultata vidljivo je da je progib grede u stvarnosti veći nego što to predviđa teorija. Također, teorija garantira da mora postojati proporcionalnost između progiba i opterećenja, a analizom razlika u rezultatima vidljivo je da kod eksperimentalnih mjerenja takve proporcionalnosti nema. O razlozima radi kojih je došlo do odstupanja u rezultatima može se samo nagađati. Neki od mogućih razloga su sljedeći:

- rupe izbušene na gredi za potrebe eksperimenta relativno su velike u odnosu na njezin poprečni presjek te je na tim mjestima presjek oslabljen; radi oslabljenja poprečnog presjeka deformacije grede su značajnije (moguća je i djelomična plastifikacija) i time dolazi do povećanja progiba grede
- letva od mesinga koja je preuzela ulogu grede u eksperimentu geometrijski je nepravilna (neravna)
- nedovoljno precizno određivanje modula elastičnosti grede pomoću kojeg se određuje potrebna krutost grede

Iako rezultati nisu u potpunosti zadovoljavajući, u nastavku slijedi dublja analiza kojom će se prikazati usporedba rezultata teorije i eksperimenta promatranih kroz opterećenje. U sljedećoj tablici uspoređeni su teorijski i eksperimentalni porasti progiba povećanjem sile u zatezi, pri čemu su zanemareni progibi grede od vlastite težine.

Tablica 3: Porast progiba grede povećanjem sile u zatezi - usporedba teorije i eksperimenta

PORAST PROGIBA GREDE POVEĆANJEM SILE U ZATEZI [mm]									
Sila u zatezi	Očitanje na POZ x1 [mm]	Porast progiba povećanjem sile u zatezi za 1 N [mm]		Očitanje na POZ X2 [mm]	Porast progiba povećanjem sile u zatezi za 1 N [mm]		Očitanje na POZ X3 [mm]	Porast progiba povećanjem sile u zatezi za 1 N [mm]	
ZATEGA NA POZ 1									
	EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA	
0 N	246			243			246		
1 N	249,5	3,5		247	4		248	2	
2 N	252	2,5		250	3		250	2	
3 N	255	3		253	3		252,5	2,5	
4 N	258,5	3,5		257	4		256	3,5	
		Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost	
		3,125	3,13		3,5	3,38		2,75	2,74
ZATEGA NA POZ 2									
	EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA	
0 N	246			243			246		
1 N	250	4		248	5		249	3	
2 N	253	3		251	3		252	3	
3 N	257	4		256	5		256,5	4,5	
4 N	264	7		265	9		263,5	7	
		Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost	
		4,5	3,87		5,5	4,54		4,375	3,87
ZATEGA NA POZ 3									
	EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA	
0 N	246			243			246		
1 N	249	3		247	4		248,5	2,5	
2 N	251,5	2,5		250	3		251	2,5	
3 N	255	3,5		254	4		255	4	
4 N	259	4		259	5		259,5	4,5	
		Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost	
		3,25	3,58		4	4,40		3,375	4,09
ZATEGA NA SVE TRI POZICIJE									
	EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA		EKSPERIMENT	TEORIJA	
0 N	246			243			246		
1 N	254	8		253	10		253,5	7,5	
2 N	261	7		261	8		260	6,5	
		Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost			Prosječna vrijednost	
		7,5	10,59		9	12,32		7	10,71

Povećavanjem sile u zatezi progib grede se u teoriji treba povećavati istim intenzitetom i za istu vrijednost što je proračunom i dokazano. U eksperimentu se navedeno nije ostvarilo, odnosno porast vrijednosti progiba nije proporcionalan povećanju opterećenja. Obzirom na navedeno, promatrane su prosječne vrijednosti porasta progiba pri povećanju sile u zatezi. Osim za slučaj kada imamo sve tri zatege, vidljivo je da se prirast progiba povećava kako se povećava sila u zatezi, a u teoriji bi trebao biti konstantan. To je najizraženije za zategu na poziciji 2 i zato rezultati vezani za tu zategu najviše odstupaju od teorijskih predikcija. U ovoj fazi istraživanja nije moguće objasniti zašto među različitim pozicijama zatega postoji tolika razlika u ponašanju (proporcionalnost progiba i opterećenja je donekle postignuta samo za zategu na poziciji 1). Očito je da se sustav u stvarnosti ne ponaša linearno elastično te je moguće da je, osim gubitka linearnosti, došlo i do gubitka elastičnosti.

U Tablici 3 prikazana je usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih prosječnih vrijednosti porasta progiba pri povećanju sile u zatezi za po 1 N te je utvrđeno da su vrijednosti približno iste. Ponovno, najveće razlike u vrijednostima pojavljuju se u slučaju kada na gredu djeluju sve tri zatege istodobno. Zanimljivo, za tu je situaciju primijećeno da prirast progiba opada s povećanjem opterećenja, iako je dostupno premalo mjerenja da bi se donijeli neki konkretniji zaključci. Eksperimentalni rezultati ukazuju na to da bi u slučaju kada postoji interakcija sve tri zatege, njihova efikasnost mogla biti manja nego u teoriji.

7. ZAKLJUČAK

U prvom dijelu rada detaljno je prikazan postupak određivanja progiba na ovješenoj gredi s jednom zategom metodom jedinične sile te analitičkom metodom. Korištenjem ovih metoda izvedeni su izrazi za proračun traženih progiba na zadanom problemu. Izvedeni izrazi dali su identične rezultate, što potvrđuje da prilikom izvođenja istih nije došlo do pogreške. Time je dokazano da se sustav može riješiti na više načina, ali krajnji rezultat mora ostati nepromijenjen.

Nakon obavljenog proračuna, odnosno nakon teorijskog dijela, na postavljenom zadanom sustavu obavljena su eksperimentalna mjerenja progiba. Usporedbom rezultata vidljivo je da teorijski dobiveni progibi odstupaju u odnosu na one dobivene eksperimentalnim mjerenjima, no razlike su djelomično prihvatljive. Progib grede je u stvarnosti veći nego što to predviđa teorija. Zaključuje se da je do odstupanja došlo, između ostalog, iz razloga što su za potrebe eksperimenta na gredi izbušene rupe koje su relativno velike u odnosu na njezin poprečni presjek te je na tim mjestima presjek oslabljen. Radi oslabljenja poprečnog presjeka deformacije grede su značajnije i time dolazi do povećanja progiba grede. Također, greda korištena u eksperimentu geometrijski je nepravilna, a i određivanje modula elastičnosti grede nije bilo dovoljno precizno.

Daljnim proučavanjem dobivenih rezultata ustanovljeno je da su teorijski i eksperimentalno dobivene prosječne vrijednosti porasta progiba pri povećavanju opterećenja približno iste. Ipak, u eksperimentalnim rezultatima može se uočiti da za zatege 2 i 3 prirast progiba nije proporcionalan povećanju opterećenja, što upućuje na to da se sustav u stvarnosti ne ponaša linearno elastično. Kako bi se izbjegli ovakvi problemi bilo bi bolje koristiti grede veće krutosti, ali bi u tom slučaju progib od vlastite težine bio manji (i teže mjerljiv) te bi potreba za zategama kao dodatnim ojačanjem bila manja.

8. LITERATURA

- [1] *Specifikacija i analiza Pelješkog mosta*, <https://baustela.hr/gradiliste/tehnicke-informacije-mostu-peljesac/>, pristup 20.05.2023.
- [2] *Pelješki most*, https://hr.wikipedia.org/wiki/Pelje%C5%A1ki_most, pristup 25.05.2023.
- [3] *Most dr. Franja Tuđmana*, https://hr.wikipedia.org/wiki/Most_dr._Franja_Tu%C4%91mana, pristup 25.05.2023.
- [4] Ri Portal, *Bazeni Kantrida*, <https://riportal.net.hr/rijeka/bazeni-kantrida-od-ponedjeljka-dostupni-za-treninge-korisnicima-svih-dobnih-skupina/226579/>, pristup 25.05.2023.
- [5] Škec Leo, *Materijali sa predavanja – Tehnička mehanika II*, Građevinski fakultet u Rijeci, 2020.
- [6] Akmadžić Vlaho, Trogrić Boris, Prusac Kristina, *Građevna statika II - Metoda sila kroz primjere*, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 2016.
- [7] Vice Šimić, *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.