Proračun lančanice

Krivokuća, Patricia

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Patricia Krivokuća

Proračun lančanica

Završni rad

Rijeka, 2023.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Sveučilišni preddiplomski smjer
Mehanika I

Patricia Krivokuća
JMBAG: 0114035486

Proračun lančanice

Završni rad

Rijeka, rujan 2023.

IZJAVA

Završni/Diplomski rad izradio/izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom/mentoricom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Patricia Krivokuća

U Rijeci, 15.9.2023.

SAŽETAK

Ovaj rad prikazuje proračun lančanica koji je unatoč tome što su lančanice jednostavni konstrukcijski elementi vrlo složen. Oblik lančanica ovisi o progibu, rasponu i opterećenju koje može biti koncentrirano ili raspoređeno. Presječne sile koje se javljaju kod lančanice mogu biti samo uzdužne. Drugo poglavlje prikazuje proračun lančanica pod utjecajem koncentriranog opterećenja. Pod ovakvim opterećenjem, lančanica poprima oblik izlomljenih linija. U trećem poglavlju opisan je proračun uslijed raspoređenog opterećenja. Proračun lančanice koja uslijed raspoređenog opterećenja tvori oblik parabole opisan je u četvrtom poglavlju, te se u petom poglavlju opisuje hiperboličan oblik lančanice. Za koncentrirano opterećenje dan je primjer proračuna 2.1, a za hiperboličan oblik lančanice dan je primjer 5.1.

Ključne riječi: lančanica, progib, raspon, koncentrirano opterećenje, raspoređeno opterećenje, parabolična lančanica, hiperbolična lančanica.

ABSTRACT

This paper shows the analysis of cables, which even though cables are simple structural elements, is very complex. The shape of the cable depends on the sag, the span and the load, which can be concentrated or distributed. The load that the cable can transfer can only be longitudinal. The second chapter analyzes the calculation of cable influenced by concentrated load. With this type of loading, the cable takes on the form of broken lines. In the third chapter, the analysis under distributed load is described. The analysis of a cable forming a parabolic shape under distributed load is presented in the fourth chapter, while the hyperbolic shape of the cable is described in the fifth chapter. An example analysis for concentrated load is provided in section 2.1, and an example for the hyperbolic shape of the cable is provided in section 5.1.

Key words: cable, sag, span, concentrated load, distributed load, parabolic cable, hyperbolic cable.

SADRŽAJ

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

1. OPĆENITO O LANČANICAMA

Lančanice su konstrukcijski elementi koji služe za prijenos i raspodjelu opterećenja, a analiziramo ih kao idealno savitljive nosače. Najčešće ih koristimo za povezivanje i podupiranje konstrukcija.

Primjer upotrebe lančanica kod mosta; koristimo ih za povezivanje greda ili nosača mosta kako bi prenijeli opterećenje od prometa na temelje i stupove. Lančanice u mostovima mogu biti čelične ili od nekih drugih metalnih profila.

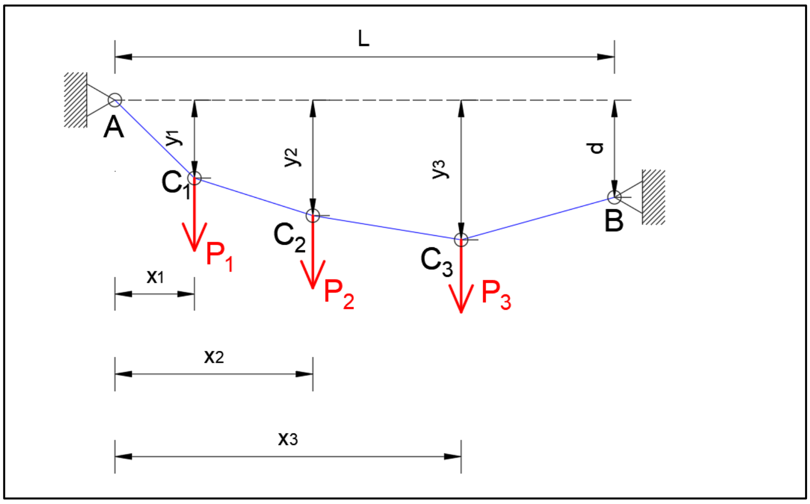
Uslijed vanjskog opterećenja, u lančanicama se mogu aktivirati samo uzdužne presječne sile koje smo u ovom radu označili sa silom T. Ravnotežu sila koje se javljaju pri prijenosu opterećenja prikazati ćemo na slici 11.

Dalekovodi su primjer lančanice kada je uže obješeno između dva nepomična oslonca, između dva stupa koji drži dalekovod . Uže koje drži brod, čamac ili barku isto je primjer lančanice, no ovdje je jedan kraj upet, a drugi kraj je pomičan. Zip-line i žičara isto su primjeri lančanice, no ovdje je proračun puno složeniji zato što je opterećenje pokretno.

Opterećenje koje djeluje na lančanicu može biti koncentrirano ili raspoređeno, a oblik koji uslijed opterećenja lančanica tvori može biti parabola, hiperbola ili izlomljene linije ako je opterećenje koncentrirano. U ovom radu prikazati ćemo proračun lančanica u ravnini i njihovo ponašanje uslijed koncentriranog i raspoređenog opterećenja. Također detaljnije ćemo opisati parabolične i hiperbolične lančanice kao i one koje su opterećene koncentriranim opterećenjem.

2. LANČANICE S KONCENTRIRANIM OPTEREĆENJEM

U ovom poglavlju je prikazano rastezanje užeta lančanice koja je pričvršćena točkama A i B te opterećena sa n vertikalnih koncentriranih sila $P_1, P_2, \dots P_n$ (Slika 1) .



Slika 1: Statička i dinamička analiza prostorne lančanice

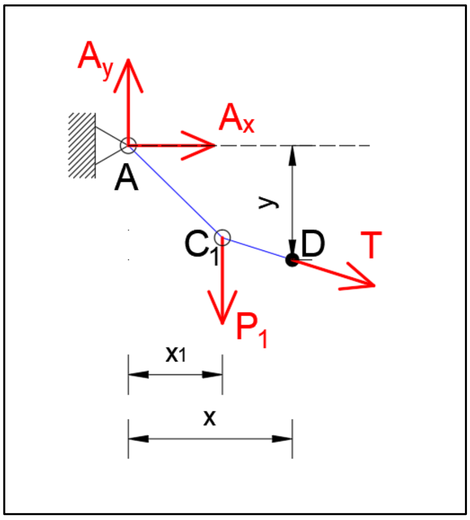
Pretpostaviti ćemo da je lančanica fleksibilna, otpor na savijanje je malen, a težina lančanice je zanemariva u usporedbi s opterećenjem koje djeluje na lančanicu.

Unutarnje sile u bilo kojoj točki lančanice mogu se prikazati kao sila napetosti T usmjerena duž lančanice (Slika 2).

Pretpostavimo da znamo vertikalnu (d) i horizontalnu (L) udaljenost između oslonca A i B i udaljenosti od oslonca A do točki C_1, C_2,…, C_n – x_1, x_2,…x_n. Pomoću tih udaljenosti želimo odrediti oblik lančanice tj. udaljenosti y_1,y_2,…,y_n i napetost T u bilo kojoj točki lančanice (Slika 1).

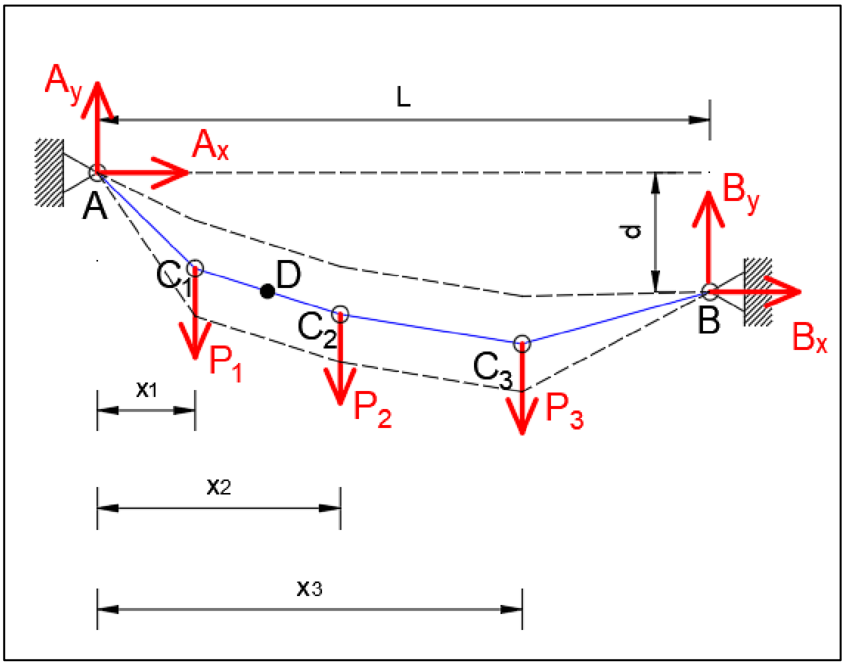
Prvo crtamo dijagram slobodnog tijela cijele lančanice (Slika 2). Budući da ne znamo nagibe između oslonca i lančanice pretpostavljamo reakcije A_x, A_y, B_x i B_y. Sada imamo 4 nepoznanice, a 3 reakcije ravnoteže pa nam je potrebna još jedna dodatna jednadžba. Dodatna jednadžba bit će ravnoteža u jednom dijelu lančanice (no to je moguće samo ako znamo koordinate x i y od proizvoljne točke D).

Nacrtamo dijagram slobodnog tijela za dio lančanice AD (Slika 2) te iz jednadžbe $\Sigma M_D = 0$ dobijemo omjer između reakcija A_x i A_y.



Slika 2: Dijagram slobodnog tijela za dio lančanice od oslonca A do proizvoljne točke D

Lančanica može zauzeti bilo koji položaj prikazan iscrtanim linijama na Slici 3. Položaj ovisi o rasponu i progibu lančanice, ali i o opterećenju koje djeluje na lančanicu.

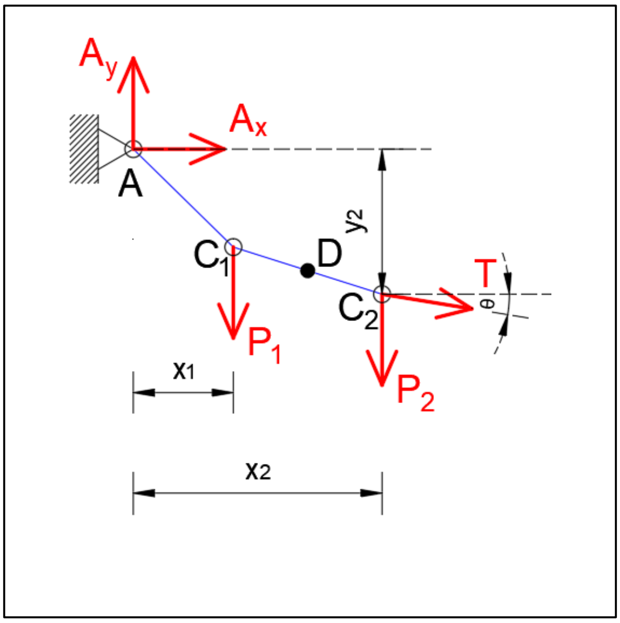


Slika 3: Dijagram slobodnog tijela za cijelu lančanicu

Tek kada odredimo reakcije A_x i A_y možemo naći vertikalne udaljenosti y_1, y_2,..y_n.

Primjer proračuna za točku C_2 (Slika 4). Prvo ćemo nacrtati dijagram slobodnog tijela od oslonca A do odabrane točke C_2. Za uvjet $\Sigma F_{C_2} = 0$ dobijemo udaljenost y_2, uvjetima $\Sigma F_x = 0$ i $\Sigma F_y = 0$ dobijemo komponente sile napetosti T u točki lančanice C_2. Zaključiti ćemo da je $T\ cos\theta = -A_x$ (horizontalna komponenta sile napetosti T jednaka je u bilo kojoj točki lančanice).

$$T\ cos\theta = -A_x \tag{2.1}$$



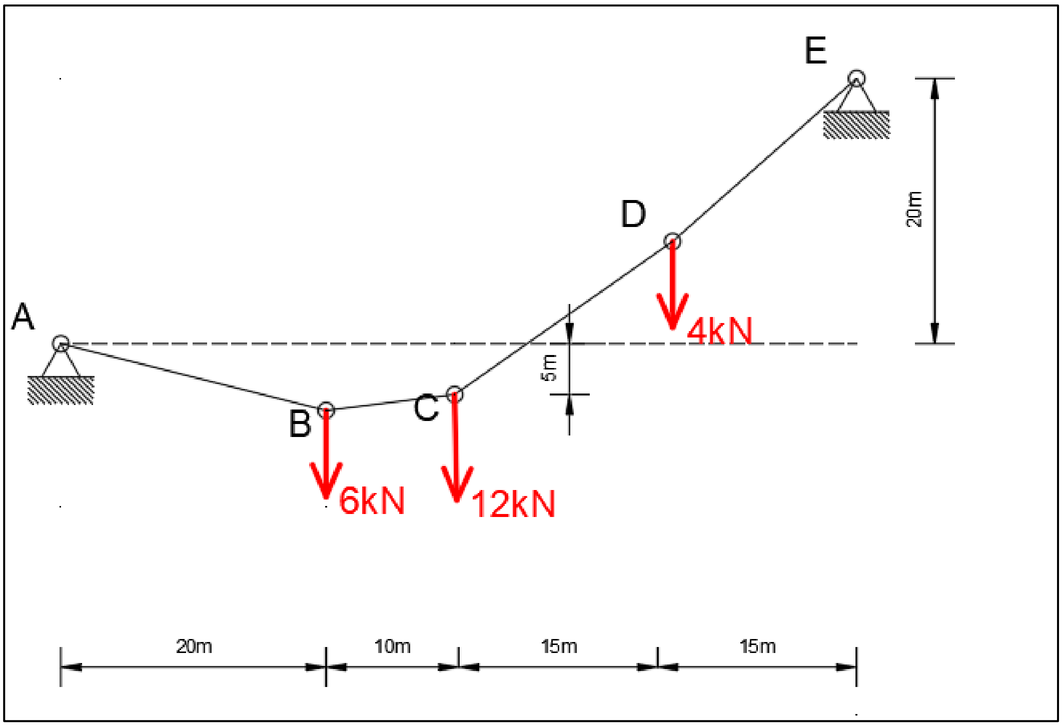
Slika 4: Dijagram slobodnog tijela za dio lančanice A-C2

Što je $cos\theta$ manji to je napetost T veća odnosno tamo gdje je najveći kut θ tamo je napetost T najveća (dio kraj oslonca).

2.1 Primjer zadatka kada je lančanica opterećena koncentriranim opterećenjem

Lančanica AE opterećena je sa 3 okomita opterećenja u danim točkama (Slika 5). Ako je točka *C* 5 m ispod lijevog oslonca:

a) Odrediti visine točke B i D
b) Maksimalan nagib i maksimalnu silu u lančanici



Slika 5: Lančanica opterećena s 3 okomita opterećenja u točkama B,C i D

Analiza:

Za određivanje sila u osloncu A, potreban je dijagram slobodnog tijela čitave lančanice ali i njegovih dijelova. Prvo ćemo napraviti presjek u točki C zato što znamo koordinate točke C. Zatim ćemo napraviti presjeke u točkama B i D i odrediti njihove visine. Rezultat je geometrija lančanice koja nam otkriva maksimalan nagib koji je tamo gdje se pojavljuje maksimalna sila (Beer, 2015.).

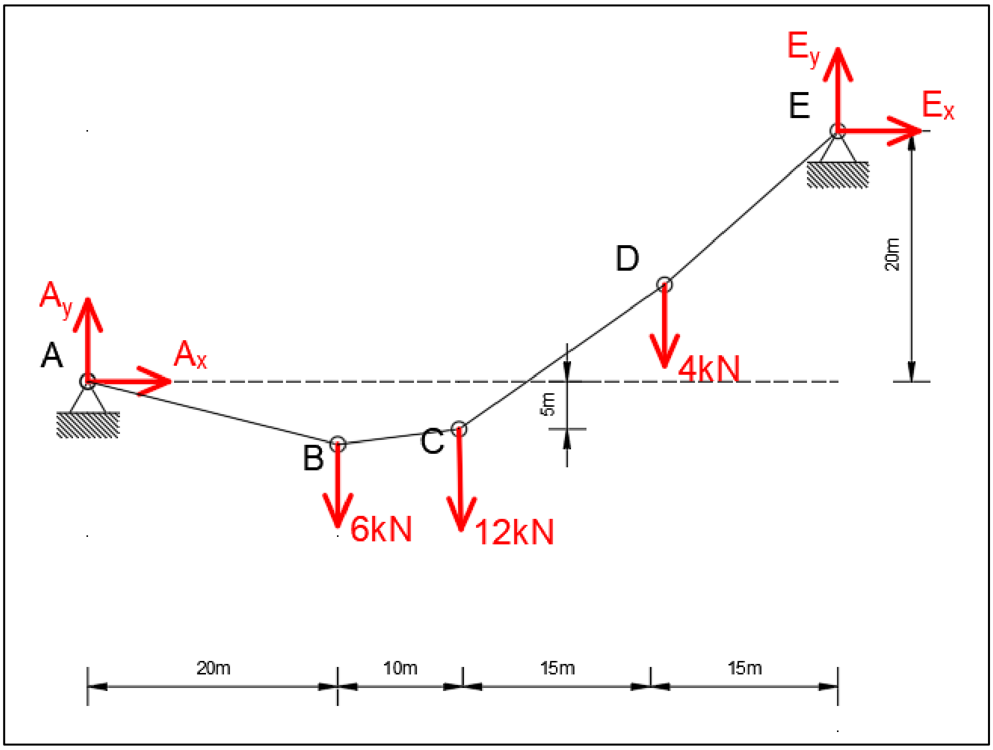
Dijagram slobodnog tijela za cijelu lančanicu (Slika 6)

Određuju se komponente reakcije A_x i A_y.

$$\sum M_E = 0;$$

$$A_x * 20m - A_y * 60m + 6kN * 40m + 12kN * 30m + 4kN * 15m = 0$$

$$20A_x - 60A_y + 660 = 0 \qquad (2.P.1)$$



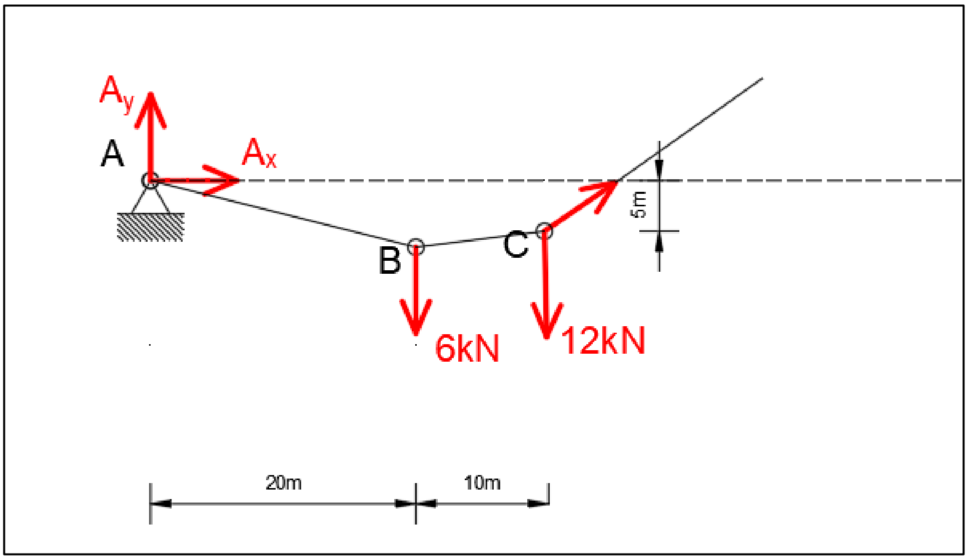
Slika 6: Dijagram slobodnog tijela za cijelu lančanicu

Dijagram slobodnog tijela za dio ABC (Slika 7)

$$\sum M_C = 0;$$

$$-A_x * 5m - A_y * 30m + 6kN * 10m = 0$$

$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0 \qquad (2.P.2)$$



Slika 7: Dijagram slobodnog tijela za dio ABC

Rješavajući jednadžbe (2.P.1) i (2.P.2) dobiti ćemo vrijednosti A_x i A_y:

$$A_x = -18kN$$

$$A_y = +5kN$$

(a) Određivanje visine točke B i D

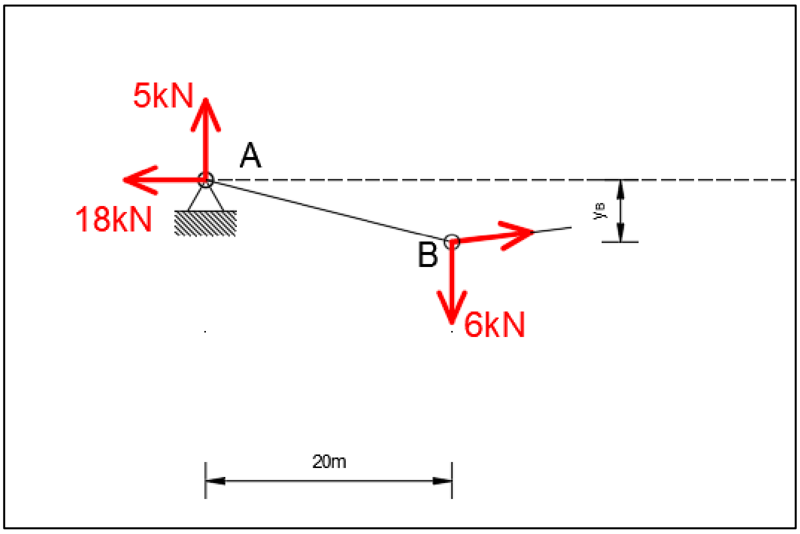
Dijagram slobodnog tijela za dio AB (Slika 8)

Suma momenata oko točke B mora biti jednaka nuli. Budući da je jedina nepoznanica visina točke B, y_B, dobiti ćemo njen iznos.

$$\sum M_B = 0;$$

$$18kN * y_B - 5kN * 20m = 0$$

$$y_B = 5.56\ m \quad \text{(iznad točke A)}$$



Slika 8: Dijagram slobodnog tijela za dio AB

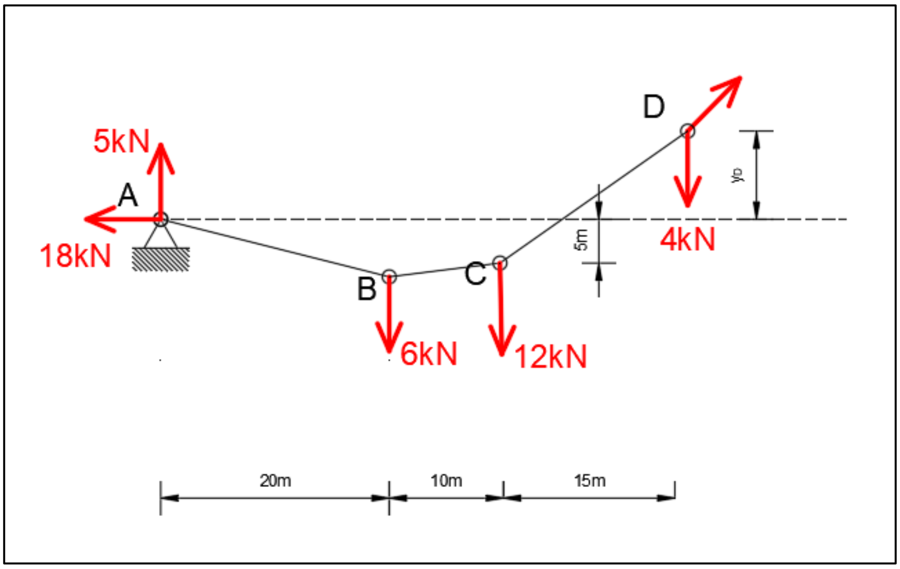
Dijagram slobodnog tijela za dio ABCD (Slika 9)

Suma momenata oko točke D mora biti jednaka nuli. Budući da je jedina nepoznanica visina točke D, y_D, dobiti ćemo njen iznos.

$$\sum M_D = 0;$$

$$-18kN * y_D - 5kN * 45m + 6kN * 25m + 12kN * 15m = 0$$

$$y_D = 5.83\ m \ \text{ (iznad točke A)}$$

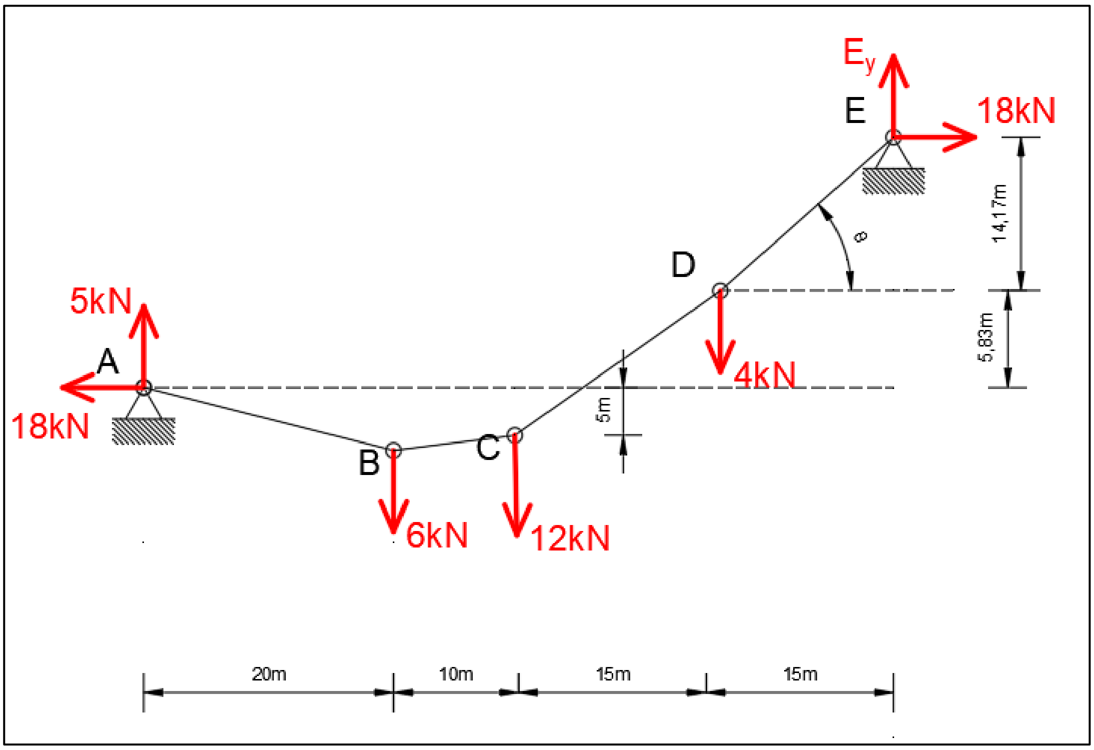


Slika 9: Dijagram slobodnog tijela za dio ABCD

Primijetimo da je maksimalan nagib u dijelu DE. Budući da je horizontalna komponenta sile konstanta i jednaka 18 kN, onda imamo (Slika 10):

$$tan\,\theta = \frac{14.17}{15m} \quad \rightarrow \theta = 43.4°$$

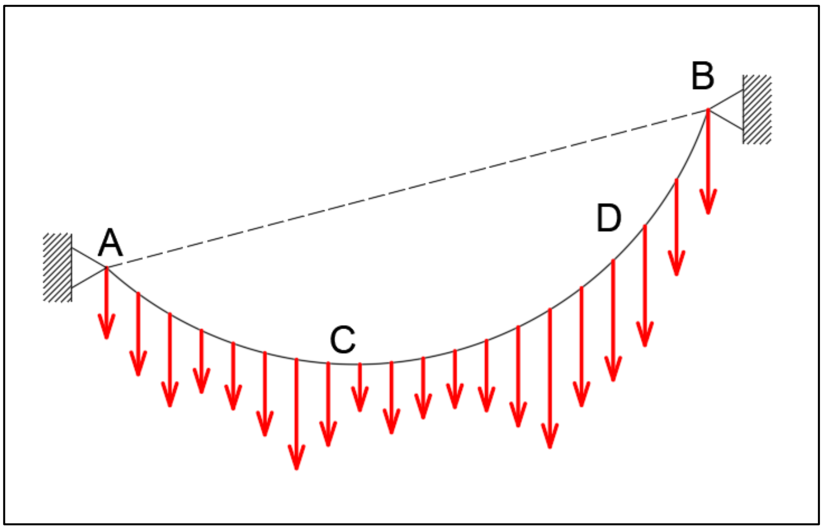
$$T_{max} = \frac{15kN}{cos\theta} = 24.8\;kN$$



Slika 10: Određivanje maksimalnog nagiba i maksimalne sile

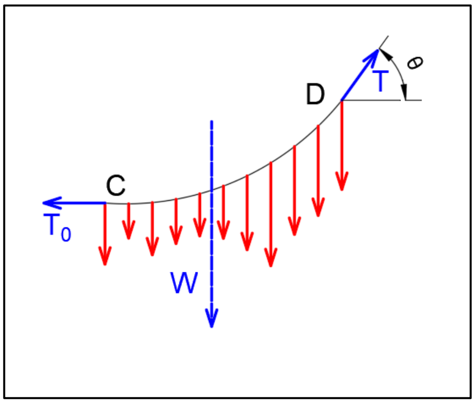
3. LANČANICE S RASPOREĐENIM OPTEREĆENJEM

U ovom poglavlju promatramo lančanicu pričvršćenu u osloncima A i B koja je opterećena raspodijeljenim opterećenjem (Slika 11). Primjer raspoređenog opterećenja može biti vlastita težina lančanice, kao na primjer kod dalekovoda. Kod mostova, raspoređeno opterećenje je osim vlastite težine i težina kolničke konstrukcije.



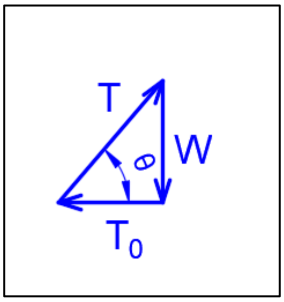
Slika 11: Lančanica s raspoređenim opterećenjem

Lančanica visi u obliku krivulje, a unutarnja sila napetosti T usmjerena je duž tangente. Nacrtati ćemo dijagram slobodnog tijela od najniže točke C do bilo koje točke D (Slika 12).



Slika 12: Dijagram slobodnog tijela od C do D

Iz dijagrama slobodnog tijela možemo primijetiti da djeluju tri sile; T_0 (horizontalna sila napetosti u točki C), T (sila napetosti u točki D usmjerena duž tangente) i W (rezultanta raspodijeljenog opterećenja koje nosi dio lančanice CD) (Slika 12).



Slika 13: Poligon sila koje se javljaju pri raspoređenom opterećenju

Izdvojiti ćemo trokut (Slika 13) koji zatvaraju te tri sile i dobiti ćemo njihov međusobni odnos.

Zaključak je da je horizontalna komponenta točke T jednaka u bilo kojoj točki, a vertikalna komponenta točke T jednaka je W ukoliko se mjeri od najniže točke krivulje C do odabrane točke D. To znači da je napetost T minimalna u najnižoj točki, a maksimalna u osloncima (Beer, 2015.).

Formule koje dobijemo iz poligona sila (Slika 12) su sljedeće:

$$T\, cos\, \theta = T_0 \qquad T\, sin\, \theta = W \tag{3.1}$$

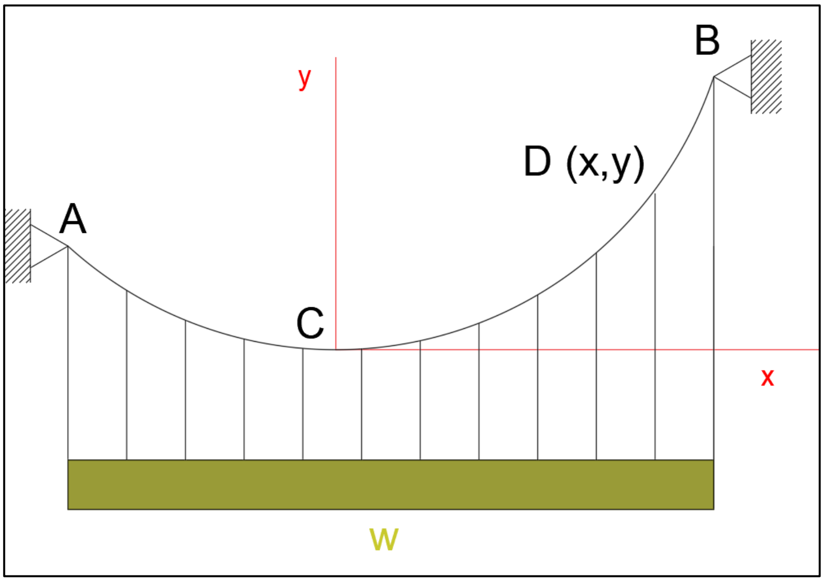
$$T = \sqrt{T_o^2 + W^2} \qquad tan\, \theta = \frac{W}{T_0} \tag{3.2}$$

4. PARABOLIČNE LANČANICE

Pretpostavimo da je lančanica pridržana u točkama A i B opterećena ravnomjerno po horizontali. Na primjer viseći most je opterećen kolničkom konstrukcijom (Slika 14 i 15).

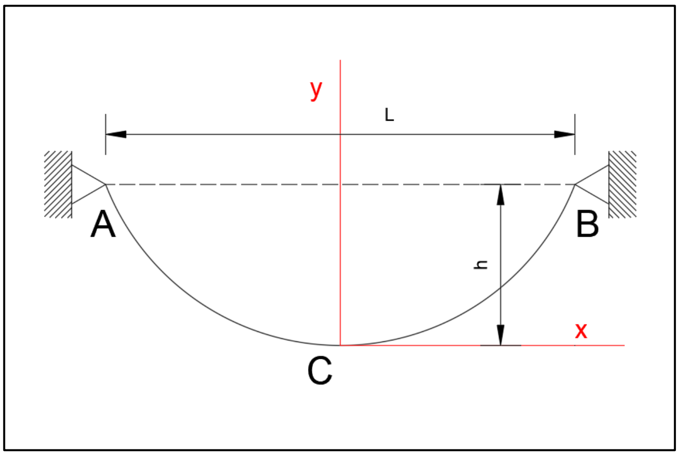
Slika 14: Primjer parabolične lančanice - Golden Gate Bridge (preuzeto iz [5])

Opterećenje u lančanicama možemo približno odrediti zato jer je težina samih lančanica znatno manja u odnosu na težinu kolnika.



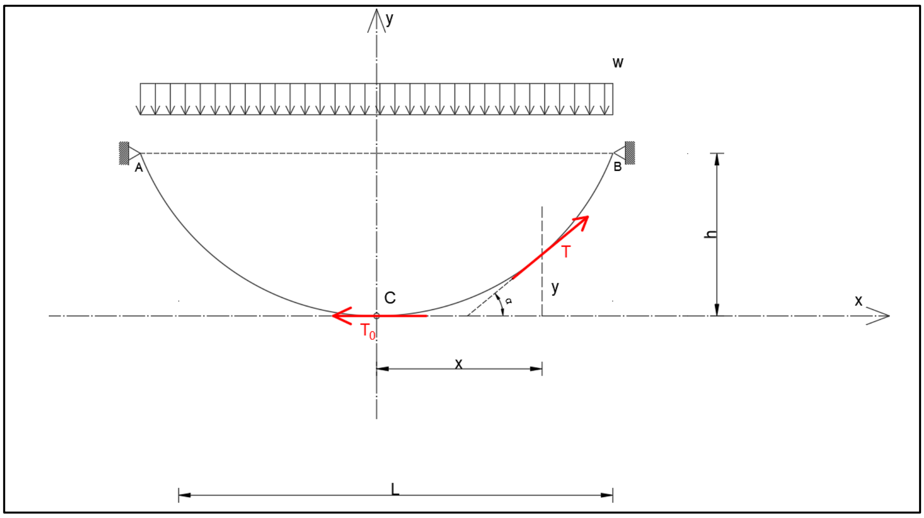
Slika 15: Lančanica prenosi ravnomjerno raspoređeno opterećenje

Opterećenje po jedinici duljine označiti ćemo sa w [N/m]. Ishodište koordinatnih osi postaviti ćemo u najnižu točku C i pomoću toga odrediti rezultantu silu W (ukupno opterećenje od dijela lančanice koji promatramo C-D) iz čega slijedi $W = wx$(Slika 15).



Slika 16: Oblik parabolične lančanice ovisi o rasponu i progibu

Zamislimo da u proizvoljnoj točki D(x,y) izrežemo dio lančanice. Dio od ishodišta do odabrane točke biti će u ravnoteži uslijed djelovanja tri sile; jednoliko kontinuirano opterećenje w i vlačne sile T i T_0 koje su u smjeru tangente na krivulju (Slika 17).



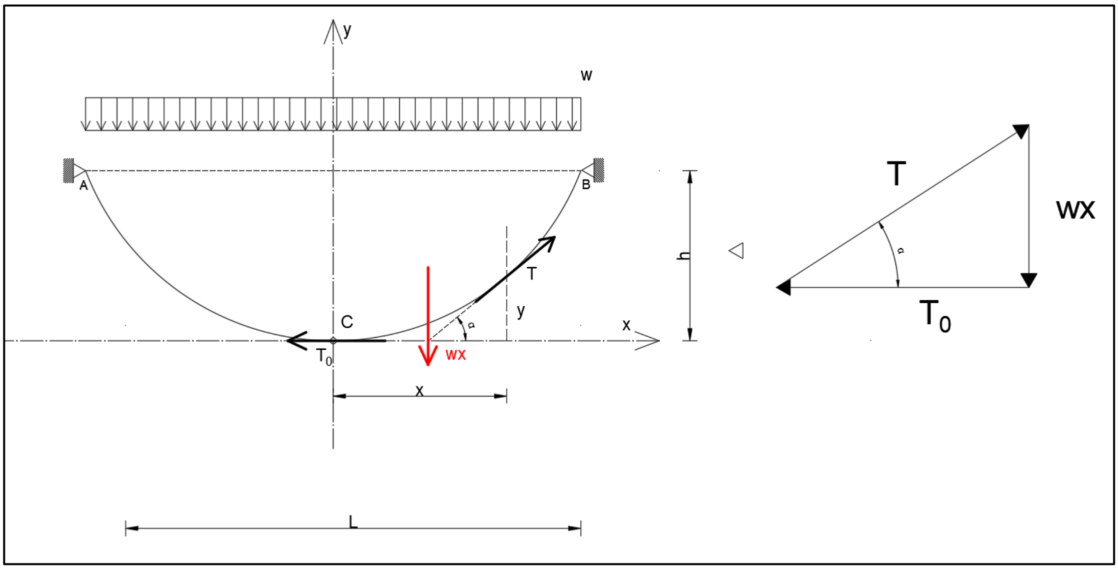
Slika 17: Sile koje djeluju pri rastezanju lančanice

Pomoću uvjeta ravnoteže horizontalnih sila $\sum F_x = 0$ dobijemo sljedeće:

$$T \cdot \cos a - T_0 = 0$$

tj. $$T_0 = T \cdot \cos a \tag{4.1}$$

Napetost užeta, sila T_0 jednaka je horizontalnoj projekciji zatezne sile T u svim presjecima užeta (Slika 18).



Slika 18: Jednoliko kontinuirano opterećenje wx koje djeluje na lančanicu i ravnoteža sila

Pomoću uvjeta ravnoteže vertikalnih sila $\sum F_y = 0$ dobijemo:

$$T \cdot \sin a - w \cdot x = 0$$

$$w \cdot x = T \cdot \sin a \tag{4.2}$$

Podijeliti ćemo jednadžbu (4.2) sa (4.1):

$$\frac{T \cdot sin\, a}{T \cdot cos\, a} = \frac{w \cdot x}{T_0}$$

$$tga = \frac{w \cdot x}{T_0} \tag{4.3}$$

Budući da je $tg\,a = \frac{dy}{dx}$, vrijedi da je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w \cdot x}{T_0} \tag{4.4}$$

Odnosno: $\frac{w}{T_0} = konst.$

Jednadžba (4.4) je diferencijalna jednadžba krivulje koju ima lančanica uslijed djelovanja opterećenja u ravnotežnom položaju.

Iz trokuta sila (Slika 18) prema Pitagorinom poučku slijedi:

$$T^2 = {T_0}^2 + (w \cdot x)^2 \quad /^{\sqrt{}}$$

$$T = \sqrt{{T_0}^2 + w^2 \cdot x^2} \tag{4.5}$$

Dakle, pomoću jednadžbe (4.5) možemo odrediti veličinu zatezne sile T u bilo kojem položaju tj. presjeku lančanice.

Ukoliko integriramo jednadžbu (4.4) dobijemo sljedeće:

$$y = \int \frac{w \cdot x}{T_0} dx$$

$$y = \frac{w}{T_0} \int x\,dx$$

$$y = \frac{w}{T_0} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} + C, C \in R \tag{4.6}$$

Ravnotežni oblik lančanice je kvadratna parabola dana izrazom $y = \frac{wx^2}{2T_0}$ (4.6).

Krivulja koju čine lančanice jednoliko opterećene duž horizontalne osi je parabola. Ako su oslonci na istoj visini, vrijedi da je L raspon lančanice i h progib lančanice. Ukoliko znamo raspon, progib i raspoređeno opterećenje w lančanice, onda možemo odrediti minimalnu napetost T_0 tako što ćemo uvrstiti u jednadžbu (4.6) $x = \frac{L}{2}, y = h$.

$$h = \frac{w\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2T_0}$$

$$h = \frac{w \cdot \frac{l^2}{4}}{2T_0}$$

$$h = \frac{wl^2}{8T_0} \tag{4.7}$$

$$T_0 = \frac{wl^2}{8h} \tag{4.7.a}$$

Dakle, ako znamo opterećenje w i napetost užeta T_0 pomoću jednadžbe (4.7) možemo odrediti progib h, a ukoliko znamo opterećenje w i progib h pomoću jednadžbe (4.7.a) možemo odrediti napetost užeta T_0.

Iz jednadžba (4.1) i (4.5) možemo zaključiti da se zatezna sila T povećava od najniže točke do točka učvršćenja A i B gdje postiže najveću vrijednost. Budući da se povećava udaljenost x, povećava se i vrijednost pod korijenom.

$$T = \sqrt{{T_0}^2 + w^2 \cdot x^2}, \qquad x_{MAX} = \frac{l}{2}$$

$$T_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{wl^2}{8h}\right)^2 + \left(\frac{wl}{2}\right)^2} = \frac{wl^2}{8h} \cdot \sqrt{1 + 16\left(\frac{h}{l}\right)^2} = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{16h^2}{l^2}} \tag{4.8}$$

Pri malom progibu h korijen u jednadžbi (4.8) ima vrijednost <<1 pa se u praksi uzima da je zatezna sila u lančanici T konstantna i po veličini jednaka horizontalnoj sili T_0 te se proračun čvrstoće najčešće obavlja prema upravo toj vrijednosti T_0.

Uvjet čvrstoće je:

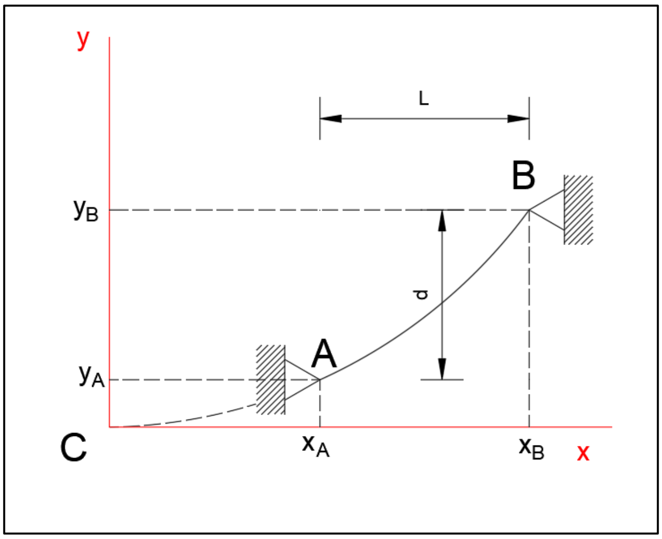
$$\sigma = \frac{T_0}{A} \leq \sigma_{dop} \quad , A - površina\ presjeka\ užeta \tag{4.9}$$

Za horizontalnu silu T_0 uvrstimo podatke iz izraza (4.7.a) i dobijemo:

$$\sigma = \frac{\frac{wl^2}{8h}}{A} \leq \sigma_{dop}$$

$$\sigma = \frac{wl^2}{8hA} \leq \sigma_{dop} \qquad (4.9.a)$$

Ako su oslonci na različitim visinama onda ne znamo položaj najniže točke pa moramo odrediti horizontalne i vertikalne komponente oslonaca x_A, y_A, x_B i y_B (Slika 19).



Slika 19: Raspon i vertikalni razmak između osloncima ovisi o visinama na kojima se nalaze oslonci

Uočimo sa slike 19 da je $L = x_B - x_A$ i $d = y_B - y_A$.

Duljinu lančanice od najniže točke C do oslonca B možemo izračunati pomoću formule (4.10).

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, d_x \tag{4.10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0}$$

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\, d_x$$

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\, d_x$$

$$\sqrt{1+a} = (1+a)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 + \frac{7}{256}a^5 - \cdots$$

$$a = \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{T_0}\right)^2 x^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{w}{T_0}\right)^4 x^4$$

$$s_B = \int_0^{x_B} [1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{T_0}\right)^2 x^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{w}{T_0}\right)^4 x^4]\, d_x$$

Primijeniti ćemo pravilo $\int f(x) \pm g(x)\mathrm{dx} = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

$$s_B = \int_0^{x_B} 1dx + \int_0^{x_B} \frac{1}{2}\left(\frac{w}{T_0}\right)^2 x^2 dx - \int_0^{x_B} \frac{1}{8}\left(\frac{w}{T_0}\right)^4 x^4 dx$$

$$s_B = \left[x + \frac{w^2x^3}{6To^2} - \frac{w^4x^5}{40T_0^4}\right]\Bigg|_0^{x_B}$$

$$s_B = x_B + \frac{1}{6}\left(\frac{w}{T_0}\right)^2 x_B^3 - \frac{1}{40}\left(\frac{w}{T_0}\right)^4 x_B^5$$

Iz jednadžbe (4.7a) izrazimo da je $T_0 = \frac{w x_B 2}{2y}$

$$s_B = x_B + \frac{1}{6}\left(\frac{w}{\frac{w x_B 2}{2y}}\right)^2 x_B^3 - \frac{1}{40}\left(\frac{w}{\frac{w x_B 2}{2y}}\right)^4 x_B^5$$

$$s_B = x_B + \frac{1}{6}\left(\frac{2\cancel{w}y}{\cancel{w}x_B^2}\right)^2 x_B^3 - \frac{1}{40}\left(\frac{2\cancel{w}y}{\cancel{w}x_B^2}\right)^4 x_B^5$$

$$s_B = x_B + \frac{1}{6}\left(\frac{2y}{x_B^2}\right)^2 x_B^3 - \frac{1}{40}\left(\frac{2y}{x_B^2}\right)^4 x_B^5$$

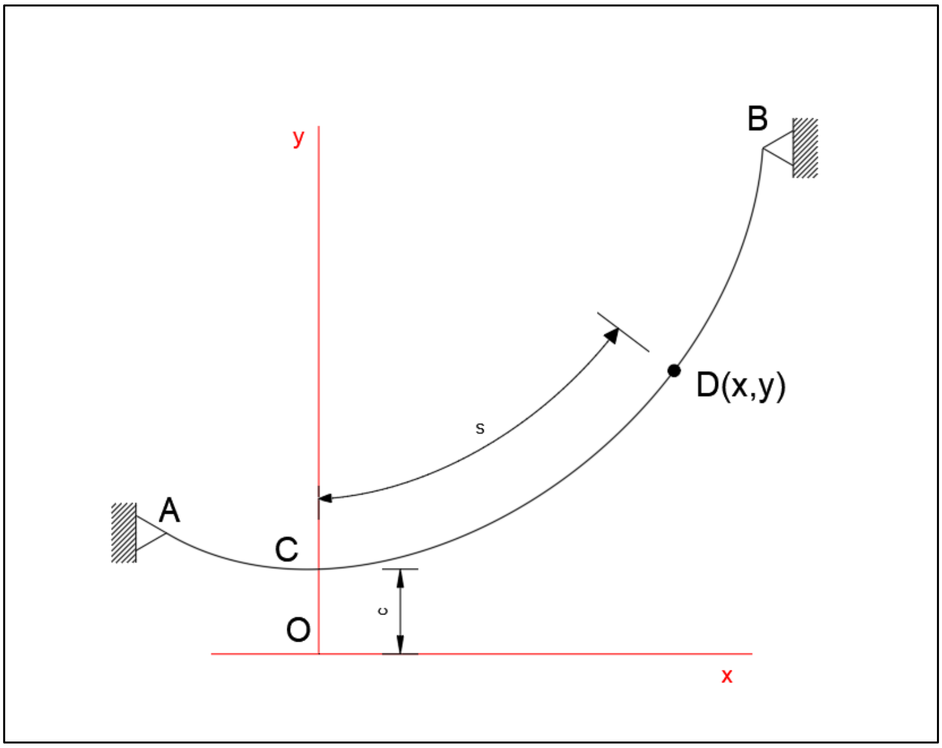
$$s_B = x_B + \frac{1}{6} * \frac{4y^2}{\cancel{x_B^4}} \cancel{x_B^3} - \frac{1}{40} * \frac{16y^4}{\cancel{x_B^8}} \cancel{x_B^5}$$

$$s_B = x_B + \frac{4y^2}{6x_B} - \frac{16y^4}{40{x_B}^3}$$

$$s_B = x_B + \frac{2y^2}{3x_B} - \frac{2y^4}{5{x_B}^3} \qquad (4.10.a)$$

5. HIPERBOLIČNE LANČANICE

U ovom poglavlju promatramo lančanicu AB koja je opterećena ravnomjerno po svojoj dužini tj. nosi vlastitu težinu (Slika 20). U praksi, primjer ovakve lančanice su dalekovodi.

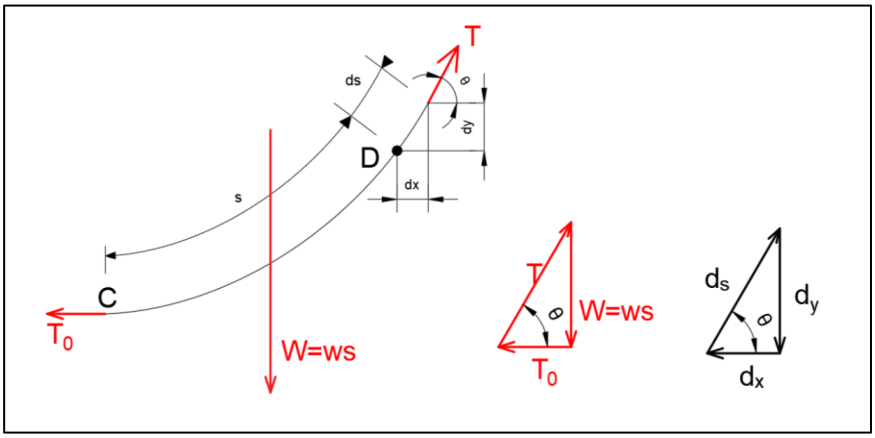


Slika 20: Hiperbolična lančanica

Definirati ćemo da je s duljina lančanice, w opterećenje po jedinici dužine i W ukupno opterećenje lančanice duljine s koji se pruža od naniže točke C do neke proizvoljne točke D. Slijedi da je ukupno opterećenje lančanice W jednako umnošku opterećenju po jedinici dužine w i duljini s.

$$W = w \cdot s \tag{5.1}$$

Prikazat ćemo to na dijagramu slobodnog tijela (Slika 21).



Slika 21: Dijagram slobodnog tijela i poligoni sila

U jednadžbi (3.2) definiramo W iz jednadžbe (5.1) i dobijemo napetost u točki D (5.2).

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2} \tag{5.2}$$

Za lakše (pojednostavljeno) računanje uvodimo konstantu $c = \frac{T_0}{w}$ i imamo sljedeće:

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \tag{5.3}$$

Ne možemo koristiti dijagram slobodnog tijela jer ne znamo horizontalnu udaljenost od D do linije djelovanja rezultante W (Slika 21).

Da bi dobili tu jednadžbu , definiramo iz poligona sila (Slika 21) da je horizontalna projekcija dijela lančanice duljine ds jednaka $dx = ds \cdot cos\theta$. Promatrajući sa slike 21 dobiti ćemo da je $cos\,\theta = \frac{To}{T}$. Pomoću tog izraza i jednadžbe (5.3) dobiti ćemo novi izraz (5.4).

$$dx = ds\cos\theta = \frac{To}{T}ds = \frac{wc \cdot ds}{w\sqrt{c^2+s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{s^2}{c^2}}} \tag{5.4}$$

Odabirom ishodišta O s koordinatama na udaljenosti c, odmah ispod točke C te integriranjem od C (0, c) do D (x, y), dobiti ćemo jednadžbu (5.5).

$$x = \int_0^s \frac{d_s}{\sqrt{1+\frac{s^2}{c^2}}} = c\left[sinh^{-1}\frac{s}{c}\right]_0^s = csinh^{-1}\frac{s}{c} \tag{5.5}$$

Jednadžba (5.5) povezuje duljinu lančanice s od C do D i horizontalnu udaljenost x, to možemo zapisati i na drugi način (5.5.a)

$$s = c\,sinh\frac{x}{c} \tag{5.5.a}$$

Sada možemo dobiti odnos između koordinata x i y pomoću $dy = dx \cdot tan\theta$. Sa slike 21 zaključimo da je $tan\,\theta = \frac{W}{T_o}$, pa pomoću toga i jednadžba 5.3 i 5.5.a dobiti ćemo izraz (5.6).

$$d_y = dx\,tan\,\theta = \frac{W}{T_o}dx = \frac{s}{c}dx = sin\frac{x}{c}d_x \tag{5.6}$$

Integriranjem od C do D dobijemo jednadžbu (5.7) koja se svodi na jednadžbu hiperbolične lančanice (5.8).

$$y - c = \int_0^x sinh\frac{x}{c}dx = c\left[cosh\frac{x}{c}\right]_0^x = c(cosh\frac{x}{c} - 1) \tag{5.7}$$

$$y - c = c\,cosh\frac{x}{c} - c$$

Jednadžba hiperbolične lančanice:

$$y = \ c\,cosh\frac{x}{c} \tag{5.8}$$

To je jednadžba hiperbolične lančanice s okomitom osi. Ordinata c od najniže točke C naziva se parametar hiperbolične lančanice. Kvadriranjem jednadžbi (5.5.a) i (5.8) s obje strane, uzimanjem u obzir formulu $cos\,h^2 a - sinh^2\,a = 1$, dobiti ćemo odnos između y i s (5.9).

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{5.9}$$

Rješavanjem jednadžbe (5.9) i ubacivanjem iste u (5.3) dobiti ćemo novi izraz za napetost T (5.10).

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{5.10}$$

Iz jednadžbe (5.10) možemo zaključiti da je napetost T u bilo kojoj točki D hiperbolične lančanice proporcionalna okomitoj udaljenosti od D do osi x odnosno y.

Ovaj tip proračuna koristi se za lančanice koje nose samo vlastitu težinu npr. dalekovodi.

Kada su oslonci lančanice na istoj visini, tada se udaljenost L između oslonaca naziva raspon lančanice, a okomita udaljenost između oslonca i najniže točke C, h, naziva se progib lančanice.

Budući da smo izabrali koordinatni sustav kao i kod paraboličnih lančanica, izrazi su isti, pa progib h možemo definirati jednadžbom (5.11)

$$h = y_A - c \tag{5.11}$$

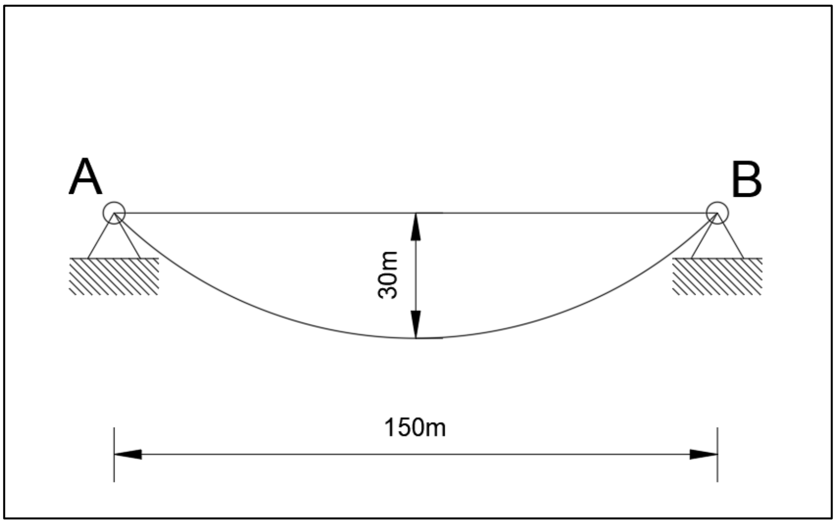
Ukoliko je lančanica malo više zategnuta, onda možemo pretpostaviti da je opterećenje ravnomjerno raspoređeno po horizontali i zamijeniti hiperboličnu lančanicu s paraboličnom, a to nam itekako pojednostavljuje rješavanje problema (Beer, 2015.).

5.1 Primjer uzastopnih aproksimacija

Jednolika lančanica težine 44,15 N/m je ovješena između točaka A i B (Slika 22).

a) Odredi maksimalne i minimalne vrijednosti sile u lančanici
b) Odredi duljinu lančanice

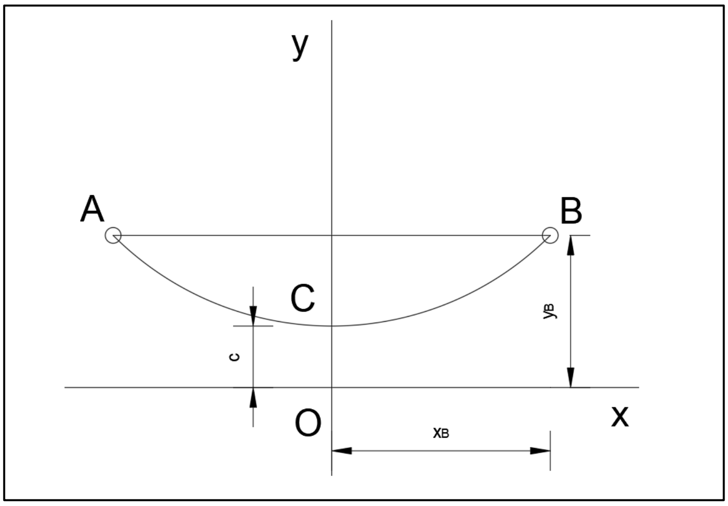
Metoda koju ćemo koristiti je ta da ova lančanica nosi samo svoju težinu koja je pridržana na njezinim krajevima(u osloncima A i B) na istoj visini.



Slika 22: Jednolika lančanica ovješena u osloncima A i B koji su na istoj visini

Ishodište koordinatnog sustava staviti ćemo na udaljenost c ispod najniže točke lančanice (Slika 23).

Jednadžba lančanice je dana kao $y = c\, cosh\frac{x}{c}$. (5.P.1)



Slika 23: Geometrija lančanice

Koordinate točke B (Slika 23) su: $x_B = 75m$ i $y_B = 30 + c$

Ukoliko koordinate točke B uvrstimo u jednadžbu (5.P.1), dobiti ćemo sljedeće:

$$30 + c = c \cosh \frac{75}{c}$$

$$\frac{30}{c} + 1 = \cosh \frac{75}{c} \qquad (5.P.2)$$

Vrijednost c odrediti ćemo uzastopnim aproksimacijama dok se lijeva i desna strana jednadžbe (5.P.2) ne izjednače. Dakle prvo ćemo odrediti vrijednost c, zatim izračunati vrijednosti $\frac{75}{c}$ i $\frac{30}{c}$. Nakon toga ćemo u predzadnjem stupcu izračunati vrijednost lijeve strane jednadžbe (5.P.2), $\frac{30}{c} + 1$, a u zadnjem vrijednost desne strane iste jednadžbe, $\cosh\left(\frac{75}{c}\right)$. Iterativni postupak završava kada vrijednosti zadnja dva stupca budu jednake. Primjer takvog rješavanja prikazan je u Tablici 1.

Tablica 1: Uzastopne aproksimacije

c	$\frac{75}{c}$	$\frac{30}{c}$	$\frac{30}{c}+1$	$\cosh\left(\frac{75}{c}\right)$
90	0,833	0,333	1,333	1,368
105	0,714	0,286	1,286	1,266
99	0,758	0,303	1,303	1,301
98,4	0,762	0,305	1,305	1,305

Ukoliko uzmemo da je $c = 98{,}4$ dobit ćemo $y_B = 30 + c = 128{,}4\ m$

a) Maksimalne i minimalne vrijednosti sila u lančanici

Iz jednadžbe (6.10) dobiti ćemo sljedeće vrijednosti:

$$T_{min} = T_0 = wc = \left(44{,}15\frac{N}{m}\right)(98{,}4\ m) \rightarrow\ T_{min} = 4344{,}36\ N$$

$$T_{max} = T_B = wy_B = \left(44{,}15\frac{N}{m}\right)(128{,}4m) \rightarrow T_{max} = 5668{,}86\ N$$

b) Duljina lančanice

Možemo naći sredinu duljine lančanice rješavajući jednadžbu (5.9):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2$$

$$s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = 128{,}4^2 - 98{,}4^2 = 6804 \rightarrow s_{CB} = 82{,}49\ m$$

Budući da je dobiveni rezultat duljina samo pola lančanice, ukupna duljina s_{AB} je dva puta veća.

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2 * 82{,}49 = 164{,}98\ m$$

U ovom primjeru progib lančanice je 1/5 ukupne duljine lančanice, tako da nije jako zategnuta. Težina lančanice je $ws = \left(44{,}15\,\frac{N}{m}\right) * (164{,}98m) = 7283{,}87\,N$, a maksimalna sila $T_{max} = 5668{,}86\,N$. To nam demonstrira da ukupna težina lančanice ws može biti veća od maksimalne sile T_{max} koje se javlja u lančanici.

ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazan je složen proračun lančanica koji se razlikuje ovisno o opterećenju. Ukoliko je opterećenje koncentrirano, oblik lančanice je izlomljena linija, pa se proračun provodi pomoću momentne jednadžbe s obzirom na točku čije koordinate znamo. Primjer takvog proračuna prikazan je u poglavlju 2.1. Ako je riječ o raspoređenom opterećenju, oblik može biti parabola ili hiperbola. Kod raspoređenog opterećenja proračun se provodi pomoću dijagrama slobodnog tijela. Dijagram slobodnog tijela možemo nacrtati za bilo koji presjek zato što lančanica može prenositi samo uzdužno opterećenje, odnosno sila napetosti uvijek je usmjerena duž tangente na lančanicu. Iz dijagrama slobodnog tijela možemo pomoću poligona sila odrediti vrijednost sile napetosti T. U poglavlju 5.1 demonstriran je proračun pomoću uzastopnih aproksimacija, temeljen na unaprijed poznatim vrijednostima progiba, raspona i raspoređenog opterećenja koje djeluje na lančanicu. Ovaj primjer jasno pokazuje da su lančanice vrlo pogodni konstrukcijski elementi zbog njihove sposobnosti prenošenja velikih opterećenja preko velikih raspona.

6. LITERATURA

1. F. Beer; R. Johnston; D. Mazurek; P. Cornwell; B. Self, Vector Mechanics For Engineers Statics and Dynamics, 11. izdanje, McGraw Hill, New York, 2015.
2. Šimić Vice, Otpornost materijala I., Školska knjiga, Zagreb, 2002.
3. V. Travaš; I. Kožar, Statička i dinamička analiza prostorne lančanice, Građevinar, 2008.
4. J. Radnić; D. Matešan; D. Buklijaš-Kobojević, Numerički model za analizu prednapetih provješenih mostova, Građevinar, 2015.
5. Slika 14, preuzeto sa: https://www.history.com/topics/landmarks/golden-gate-bridge