

# Utjecaj višestruke potresne pobude oslonaca na ponašanje okvirnih konstrukcija velikih raspona

---

**Fabijan, Paolo**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:936725>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Paolo Fabijan**

**Utjecaj višestruke potresne pobude oslonaca na ponašanje okvirnih  
konstrukcija velikih raspona**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2023**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Diplomski sveučilišni studij  
građevinarstva  
Dinamika konstrukcija**

**Paolo Fabijan  
0114031702**

**Utjecaj višestruke potresne pobude oslonaca na ponašanje okvirnih  
konstrukcija velikih raspona**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 18. rujna 2023.**

## **IZJAVA**

Završni rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentoricom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Paolo Fabijan

U Rijeci, 18. rujna 2023.



## IZJAVA

Završni/Diplomski rad izrađen je u sklopu hrvatsko-kineskog bilateralnog projekta  
**Experimental study of bridge structures considering the asymmetric effect under  
multiple support excitation**

Voditelj projekta                      Nina Čeh  
Financijer projekta                    MZO RH i Ministarstvo znanosti i tehnologije Narodne Republike  
Kine

Diplomski rad uključuje eksperimentalni program za koji su izrađeni modeli dijelom financirani iz  
studentskog znanstvenog fonda **SIZIF**

Šifra projekta                            N-SZF 2/2021  
Financijer projekta                    Studentski zbor Sveučilišta u Rijeci, Zaklada Sveučilišta u Rijeci

U Rijeci, 18. 9. 2023

Mentor:



---

## SAŽETAK

U područjima gdje su potresi česta pojava, vrlo je bitno razumijeti kako se konstrukcije ponašaju prilikom njihovog djelovanja kako bismo na adekvatan način projektirali i izveli konstrukcije otporne na potresno djelovanje. Naglasak na tome je još veći kada se radi o infrastrukturnim objektima, poput mostova koji povezuju mjesta ili regije velikih važnosti te na kojima se odvija velika količina prometa. Kod takvih konstrukcija je poznavanje dinamičkog odgovora prilikom djelovanja višestruke pobude oslonaca od velike važnosti. Iz tog su razloga u ovome radu provedena eksperimentalna ispitivanja na dva različita okvirna modela te je paralelno s njima razvijan numerički model, temeljen na metodi konačnih elemenata. Cilj je na temelju postojećih eksperimentalnih ispitivanja izraditi i validirati numerički model, te koristeći se eksperimentalno i numerički dobivenim rezultatima doći do novih saznanja o dinamičkom odgovoru konstrukcija izloženih višestrukoj pobudi oslonaca.

**Ključne riječi:** dinamička analiza, višestruka pobuda oslonaca, numerički model, metoda konačnih elemenata, eksperimentalna ispitivanja

## **ABSTRACT**

In regions where earthquakes are a common occurrence, it is very important to have a good understanding of the behaviour of structures during an earthquake so that we could design and build new structures in such a way that they are more resilient to earthquake excitation. The emphasis is even greater when it comes to infrastructural objects, such as bridges that connect places or regions of great importance and on which large amounts of traffic takes place every day. Therefore, understanding the dynamic response of structures subjected to multiple support excitation, is of great importance. For this reason in this work, experimental tests were carried out on two different frame models and in parallel with that a numerical model, based on finite element method, was developed. The goal is to develop and validate the numerical model against the experimental tests, that were carried out beforehand, and to use the numerically and experimentally obtained results to gain new knowledge about the dynamic response of structures subjected to multiple support excitation.

**Keywords:** dynamic analysis, multiple support excitation, numerical model, finite element method, experimental investigation

# Sadržaj

<b>Popis slika</b>	<b>iii</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>x</b>
<b>1 UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2 MOTIVACIJA I PREGLED PODRUČJA</b>	<b>2</b>
<b>3 UTJECAJ VIŠESTRUKHE POBUDE OSLONACA</b>	<b>4</b>
<b>4 TEORIJSKA OSNOVA</b>	<b>6</b>
4.1 Vrste dinamičkih opterećenja . . . . .	6
4.2 Metoda konačnih elemenata . . . . .	8
4.3 Sustav s jednim stupnjem slobode (SDOF) . . . . .	11
4.3.1 Utjecaj pobude oslonaca . . . . .	12
4.4 Sustav s više stupnjeva slobode (MDOF) . . . . .	15
4.4.1 Utjecaj višestruke pobude oslonaca . . . . .	17
4.4.2 Matrica krutosti . . . . .	19
4.4.3 Matrica masa . . . . .	20
4.4.4 Matrica prigušenja . . . . .	22
4.5 Vrste vibracija . . . . .	26
4.5.1 Slobodne neprigušene vibracije . . . . .	26
4.5.2 Slobodne prigušene vibracije . . . . .	27
4.5.3 Prisilne prigušene vibracije . . . . .	27
4.6 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori . . . . .	29
<b>5 EKSPERIMENTALNA ISPITIVANJA</b>	<b>32</b>
5.1 Eksperimentalni modeli . . . . .	33
5.2 Mjerna oprema i potresni stolovi . . . . .	35
5.3 Rezultati eksperimentalnih ispitivanja . . . . .	37
5.3.1 Okvir s krutim stupovima . . . . .	37
5.3.2 Okvir s mekim stupovima . . . . .	44

<b>6</b>	<b>NUMERIČKI MODEL</b>	<b>53</b>
6.1	Newmarkova metoda . . . . .	54
6.1.1	Stabilnost Newmarkove metode . . . . .	55
6.2	Geometrija modela . . . . .	58
6.3	Diskretizacija modela . . . . .	63
6.4	Fizičko - mehanička svojstva modela . . . . .	72
6.4.1	Matrica krutosti . . . . .	72
6.4.2	Matrica masa . . . . .	74
6.4.3	Vlastite vrijednosti i oblici osciliranja . . . . .	75
6.4.4	Matrica prigušenja . . . . .	79
6.4.5	Utjecajna matrica . . . . .	80
6.5	Progušćivanje podataka iz ispitivanja . . . . .	82
6.6	Programski jezik <i>Python</i> . . . . .	85
6.7	Rezultati numeričke analize . . . . .	87
6.7.1	Okvir s krutim stupovima . . . . .	87
6.7.2	Okvir sa stupovima manje krutosti . . . . .	93
<b>7</b>	<b>VALIDACIJA NUMERIČKOG MODELA</b>	<b>113</b>
7.1	Okvir s krutim stupovima . . . . .	114
7.2	Okvir sa stupovima manje krutosti . . . . .	116
<b>8</b>	<b>PROCJENA ODGOVORA KONSTRUKCIJE NA MSE</b>	<b>126</b>
8.1	Utjecaj višestruke pobude oslonaca na pomake konstrukcije . . . . .	126
8.2	Utjecaj kašnjenja potresne pobude na pomake konstrukcije . . . . .	134
<b>9</b>	<b>ZAKLJUČAK</b>	<b>146</b>
	<b>Literatura</b>	<b>169</b>

# Popis slika

3.1	Amplifikacija potresnog vala . . . . .	5
4.1	Periodična harmonijska pobuda [1] . . . . .	6
4.2	Periodična neharmonijska pobuda [1] . . . . .	7
4.3	Neperiodična kratkotrajna pobuda [1] . . . . .	7
4.4	Neperiodična dugotrajna pobuda [1] . . . . .	7
4.5	Primjeri 1D konačnih elemenata (modeliranje štapova i greda) [2] . . . . .	8
4.6	Primjeri 2D konačnih elemenata (određivanje plošnih naprezanja i deformacija) [2] . . . . .	8
4.7	Primjeri 3D konačnih elemenata (određivanje prostornog stanja naprezanja) [2] . . . . .	9
4.8	Primjer sustava s jednim stupnjem slobode . . . . .	11
4.9	Sile prisutne na SDOF sustavu sa slike (4.8) . . . . .	11
4.10	Primjer okvira s jednim stupnjem slobode . . . . .	13
4.11	Pomaci okvira izloženog pomacima tla . . . . .	13
4.12	Greda izložena općem opterećenju i prateća deformacijska linija [1] . . . . .	15
4.13	Okvir s razdvojenim stupnjevima slobode za oslonce i konstrukciju [3] . . . . .	17
4.14	Shematski prikaz stupnjeva slobode u matrici krutosti s 12 stupnjeva slobode . . . . .	20
4.15	Shematski prikaz stupnjeva slobode u matrici masa s 12 stupnjeva slobode . . . . .	21
4.16	Utjecaj koeficijenta prigušenja $\zeta$ na slobodne prigušene oscilacije [3] . . . . .	23
4.17	Slobodne prigušene oscilacije s označenim uzastopnim amplitudama [3] . . . . .	24
4.18	Slobodne neprigušene oscilacije . . . . .	26
4.19	Slobodne prigušene oscilacije . . . . .	27
4.20	Prisilne prigušene oscilacije . . . . .	28
4.21	Sustav s jednim stupnjem slobode . . . . .	30
4.22	Oblik osciliranje sustava s jednim stupnjem slobode . . . . .	30
4.23	Sustav s tri stupnja slobode . . . . .	30
4.24	Oblici osciliranja sustava s tri stupnja slobode . . . . .	31
5.1	Shematski prikaz rasporeda seizmografskih stanica u <i>SMART I</i> sustavu [4] . . . . .	33

5.2	Fizikalni model okvira s krutim stupovima . . . . .	33
5.3	Fizikalni model okvira sa stupovima manje krutosti . . . . .	34
5.4	Utezi težine $2 N$ [5] . . . . .	34
5.5	Potresni stol Quanser ST-III . . . . .	35
5.6	Optički mjerni sustav GOM Aramis 4M [5] . . . . .	36
5.7	Kalibracijski križ [5] . . . . .	36
5.8	Okvir s krutim stupovima - podjela pomaka masa po bojama . . . . .	37
5.9	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (test 1) . . . . .	37
5.10	Dijagram pomaka mase 1 - eksperimentalna ispitivanja (test 1) . . . . .	38
5.11	Dijagram pomaka mase 2 - eksperimentalna ispitivanja (test 1) . . . . .	38
5.12	Dijagram pomaka mase 3 - eksperimentalna ispitivanja (test 1) . . . . .	38
5.13	Amplitude pomaka korištene za izračun koeficijenta prigušenja . . . . .	39
5.14	Dijagram pomaka lijevog oslonca - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	40
5.15	Dijagram brzina lijevog oslonca - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	40
5.16	Dijagram ubrzanja lijevog oslonca - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	41
5.17	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	42
5.18	Dijagram pomaka mase 1 - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	42
5.19	Dijagram pomaka mase 2 - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	42
5.20	Dijagram pomaka mase 3 - eksperimentalna ispitivanja (test 2) . . . . .	43
5.21	Unutarnji prsten SMART 1 sustava . . . . .	44
5.22	Okvir s mekim stupovima - podjela pomaka masa po bojama . . . . .	45
5.23	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0C0) . . . . .	46
5.24	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0C0) . . . . .	46
5.25	Graf spektralne gustoće snage mase 2 za izračun koeficijenta prigušenja . . . . .	47
5.26	Graf spektralne gustoće snage mase 3 za izračun koeficijenta prigušenja . . . . .	47
5.27	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I3) . . . . .	49
5.28	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I3) . . . . .	49
5.29	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I6) . . . . .	50
5.30	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I6) . . . . .	50
5.31	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I9) . . . . .	51
5.32	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I9) . . . . .	51
5.33	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I12) . . . . .	52
5.34	Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I12) . . . . .	52
6.1	Primjer konstantnog prosječnog ubrzanja unutar vremenskog koraka [3] . . . . .	56
6.2	Primjer linearnog ubrzanja unutar vremenskog koraka [3] . . . . .	56
6.3	Model okvira s krutim stupovima s dimenzijama u [cm] . . . . .	58
6.4	Poprečni presjek stupa i grede okvira s 3 mase s dimenzijama u [mm] . . . . .	59
6.5	Tlocrt spoja stupa i grede (okvir sa krutim stupovima) . . . . .	60

6.6	Model okvira sa stupovima manje krutosti s dimenzijama u [cm] . . . . .	61
6.7	Poprečni presjek stupa i grede okvira s 4 mase s dimenzijama u [mm] . . . . .	61
6.8	Tlocrt spoja stupa i grede (okvir sa stupovima manje krutosti) . . . . .	62
6.9	Globalni koordinatni sustav . . . . .	63
6.10	Diskretizacija okvirnog modela (okvir s 3 mase) . . . . .	64
6.11	Diskretizacija okvirnog modela (okvir s 4 mase) . . . . .	64
6.12	Gredni konačni element u 3D prostoru . . . . .	65
6.13	Gredni roštiljni konačni element . . . . .	66
6.14	Stupnjevi slobode okvirnog modela s 3 mase . . . . .	66
6.15	Stupnjevi slobode okvirnog modela s 4 mase . . . . .	67
6.16	Stupnjevi slobode okvirnog modela s uvedenim rubnim uvjetima (okvir s 3 mase) . . . . .	67
6.17	Stupnjevi slobode okvirnog modela s uvedenim rubnim uvjetima (okvir s 4 mase) . . . . .	68
6.18	Točke mjerenja na okvirnom modelu s 3 mase . . . . .	69
6.19	Točke mjerenja na okvirnom modelu s 4 mase . . . . .	69
6.20	Jednostavna greda . . . . .	70
6.21	Oscilacije sredine grede i deformacijska linija za gredu s 4 konačna elementa i vremenskim korakom od 0.1s . . . . .	70
6.22	Oscilacije sredine grede i deformacijska linija za gredu s 8 konačnih elemenata i vremenskim korakom od 0.01s . . . . .	71
6.23	Shematski prikaz stupnjeva slobode u matrici krutosti s 6 stupnjeva slobode . . . . .	73
6.24	Primjer slaganja globalne matrice krutosti od lokalnih matrica krutosti s 6 stupnjeva slobode . . . . .	73
6.25	Izgled 1. oblika osciliranja - okvir s krutim stupovima . . . . .	75
6.26	Izgled 2. oblika osciliranja - okvir s krutim stupovima . . . . .	76
6.27	Izgled 3. oblika osciliranja - okvir s krutim stupovima . . . . .	76
6.28	Izgled 1. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti . . . . .	77
6.29	Izgled 2. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti . . . . .	78
6.30	Izgled 3. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti . . . . .	78
6.31	Izgled 4. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti . . . . .	78
6.32	Statički pomaci čvornih točaka na okviru s 4 mase za slučaj pomicanja samo lijevog oslonca sustava . . . . .	81
6.33	Primjer razlike u podacima zbog različitih vremenskih koraka . . . . .	82
6.34	Linearna aproksimacija pomaka između dva vremenska trenutka . . . . .	83
6.35	Primjer linearne aproksimacije postojećih pomaka . . . . .	83
6.36	Primjer linearne aproksimacije postojećih pomaka (uvećani prikaz) . . . . .	84



6.37	Primjer linearne aproksimacije postojećih pomaka (uvećani prikaz vrha brijega) . . . . .	84
6.38	Blok dijagram Newmarkove metode (linearna analiza) . . . . .	86
6.39	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (test 1) . . . . .	87
6.40	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (test 1) . . . . .	88
6.41	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (test 1) . . . . .	88
6.42	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (test 1) . . . . .	88
6.43	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (test 2) . . . . .	89
6.44	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (test 2) . . . . .	89
6.45	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (test 2) . . . . .	90
6.46	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (test 2) . . . . .	90
6.47	Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (test 2) . . . . .	91
6.48	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (test 2)	91
6.49	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; progušćeni podaci (test 2)	92
6.50	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; progušćeni podaci (test 2)	92
6.51	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE_C0C0) . . . . .	93
6.52	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE_C0C0) . . . . .	93
6.53	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE_C0C0) . . . . .	94
6.54	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE_C0C0) . . . . .	94
6.55	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE_C0C0) . . . . .	94
6.56	Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0C0) . . . . .	95
6.57	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0C0)	95
6.58	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0C0)	96
6.59	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0C0)	96
6.60	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0C0)	96
6.61	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE_C0I3) . . . . .	97
6.62	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE_C0I3) . . . . .	97
6.63	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE_C0I3) . . . . .	98
6.64	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE_C0I3) . . . . .	98
6.65	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE_C0I3) . . . . .	98
6.66	Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0I3) . . . . .	99
6.67	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0I3)	99
6.68	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0I3)	100
6.69	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0I3)	100
6.70	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; progušćeni podaci (SE_C0I3)	100
6.71	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE_C0I6) . . . . .	101

6.72	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE_C0I6) . . . . .	101
6.73	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE_C0I6) . . . . .	102
6.74	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE_C0I6) . . . . .	102
6.75	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE_C0I6) . . . . .	102
6.76	Dijagram pomaka svih masa - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I6) . . . . .	103
6.77	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I6)	103
6.78	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I6)	104
6.79	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I6)	104
6.80	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I6)	104
6.81	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE_C0I9) . . . . .	105
6.82	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE_C0I9) . . . . .	105
6.83	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE_C0I9) . . . . .	106
6.84	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE_C0I9) . . . . .	106
6.85	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE_C0I9) . . . . .	106
6.86	Dijagram pomaka svih masa - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I9) . . . . .	107
6.87	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I9)	107
6.88	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I9)	108
6.89	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I9)	108
6.90	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I9)	108
6.91	Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE_C0I12) . . . . .	109
6.92	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE_C0I12) . . . . .	109
6.93	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE_C0I12) . . . . .	110
6.94	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE_C0I12) . . . . .	110
6.95	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE_C0I12) . . . . .	110
6.96	Dijagram pomaka svih masa - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I12) . . . . .	111
6.97	Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I12)	111
6.98	Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I12)	112
6.99	Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I12)	112
6.100	Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE_C0I12)	112
7.1	Usporedba pomaka mase 1 - validacija (test 2) . . . . .	114
7.2	Usporedba pomaka mase 2 - validacija (test 2) . . . . .	114
7.3	Usporedba pomaka mase 3 - validacija (test 2) . . . . .	115
7.4	Unutarnji prsten SMART 1 sustava - izdvojene stanice . . . . .	116
7.5	Usporedba pomaka mase 1 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	117
7.6	Usporedba pomaka mase 2 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	117

7.7	Usporedba pomaka mase 3 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	118
7.8	Usporedba pomaka mase 4 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	118
7.9	Usporedba relativnih pomaka mase 1 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	119
7.10	Usporedba relativnih pomaka mase 2 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	119
7.11	Usporedba relativnih pomaka mase 3 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	120
7.12	Usporedba relativnih pomaka mase 4 - validacija (SE_C0C0) . . . . .	120
7.13	Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 1 - validacija (SE_C0C0) . .	121
7.14	Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 2 - validacija (SE_C0C0) . .	121
7.15	Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 3 - validacija (SE_C0C0) . .	122
7.16	Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 4 - validacija (SE_C0C0) . .	122
7.17	Usporedba pomaka mase 1 - validacija (SE_C0I3) . . . . .	123
7.18	Usporedba pomaka mase 2 - validacija (SE_C0I3) . . . . .	123
7.19	Usporedba pomaka mase 3 - validacija (SE_C0I3) . . . . .	124
7.20	Usporedba pomaka mase 4 - validacija (SE_C0I3) . . . . .	124
8.1	Unutarnji prsten SMART 1 sustava . . . . .	127
8.2	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0C0)	128
8.3	Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0C0) . . . . .	128
8.4	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I3)	129
8.5	Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I3) . . . . .	129
8.6	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I6)	130
8.7	Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I6) . . . . .	130
8.8	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I9)	131
8.9	Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I9) . . . . .	131
8.10	Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I12)	132
8.11	Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0I12) . . . . .	132
8.12	Dijagram relativnih pomaka mase 2 - eksperimentalna ispitivanja (SE_C0C0), (SE_C0I3), (SE_C0I6) . . . . .	133
8.13	Podjela pomaka masa po bojama - okvir s 4 mase . . . . .	135
8.14	Potresni zapis SE_C0C0 . . . . .	136
8.15	Graf spektralne analize - potresni zapis SE_C0C0 . . . . .	136
8.16	Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (SE_C0C0) . .	137
8.17	Potresni zapis Norridge 360 . . . . .	138
8.18	Graf spektralne analize - potresni zapis Norridge 360 . . . . .	138

8.19	Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (Norridge 360)	139
8.20	Potresni zapis El Centro 140 . . . . .	140
8.21	Graf spektralne analize - potresni zapis El Centro 140 . . . . .	140
8.22	Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (El Centro 140)	141
8.23	Potresni zapis Kobe 090 . . . . .	142
8.24	Graf spektralne analize - potresni zapis Kobe 090 . . . . .	142
8.25	Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (Kobe 090) . . .	143
8.26	Deformirani oblik grede za slučaj maksimalnih pomaka mase 2 i 3 - potresni zapis Kobe 090 . . . . .	143
9.1	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (SE_C0C0) . . . . .	148
9.2	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (SE_C0C0) . . . . .	148
9.3	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (Norridge 360) . . .	149
9.4	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (Norridge 360) . . .	149
9.5	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (El Centro 140) . . .	150
9.6	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (El Centro 140) . . .	150
9.7	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (Kobe 090) . . . . .	151
9.8	Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (Kobe 090) . . . . .	151

# Popis tablica

8.1 Pomaci mase 2 i 3 u [mm] za različite potresne pobude i zakašnjenja pobude između oslonaca . . . . .	144
---	-----

# 1. UVOD

Premoščivanjem sve većih raspona te izgradnjom sve dužih i viših građevina, nosivi konstruktivni sustavi, kao i same građevine, postaju sve više osjetljivi na dinamička opterećenja. Postoji mnogo vrsta dinamičkih opterećenja, ali ono što je svima zajedničko je da im je intenzitet te smjer djelovanja promjenjiv u vremenu.

U sklopu ovog rada se bavimo samo jednom vrstom dinamičkog opterećenja - potresima, koji djeluju na model okvirne konstrukcije koja predstavlja pojednostavljeni model mosta sa stupovima nezanemarive visine. Potresi su jedno od češćih i najopasnijih vrsta dinamičkog opterećenja te su iz tog razloga detaljnije objašnjena i korištena u sklopu ovog rada.

Naglasak rada je na utjecaju višestruke pobude oslonaca na dinamički odgovor konstrukcija s velikim razmacima između oslonaca. Zbog toga su dva okvirna modela različitih karakteristika eksperimentalno izložena višestrukoj pobudi oslonaca, koristeći se s dvije potresne platforme. Dinamički odgovor modela je mjereno zasebnim optičkim mjernim sustavom te su sva ispitivanja provedena u laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci, koji je jedan od rijetkih laboratorija koji posjeduju dvije potresne platforme. Spomenuta dva okvirna modela se razlikuju u krutosti stupova te po broju dodanih utega na gredi. Prvi model je okvir sa stupovima veće krutosti te tri utega, jednake težine, pričvršćenih na gredu. Drugi model je okvir sa stupovima manje krutosti te četiri dodana utega na gredi, također su svi utezi jednake težine.

Paralelno s time, izrađen je numerički model koristeći se metodom konačnih elemenata, te je zatim provedena linearna dinamička numerička analiza, koja se temelji na Newmarkovoj metodi. Na temelju usporedbe rezultata numeričke analize i eksperimentalnih ispitivanja, provedena je validacija izrađenog numeričkog modela. Analizom rezultata dobivenih iz provedenog eksperimentalnog programa i validirane numeričke procedure pokušati će se objasniti na koji način višestruka pobuda oslonaca utječe na dinamički odgovor okvirnih modela.

## 2. MOTIVACIJA I PREGLED PODRUČJA

Potresna djelovanja predstavljaju oblik dinamičkih opterećenja koja mogu uzrokovati katastrofalne posljedice. Predviđanje mjesta nastanka potresa je vrlo teško, ali predviđanje jačine te mogućeg oblika potresnog zapisa je nemoguće. Samim time vrlo je teško predvidjeti ponašanje konstrukcije prilikom djelovanja potresa. Naravno, na ponašanje konstrukcija izloženih potresnim djelovanjima direktno utječemo projektiranjem same nosive konstrukcije te njenim izvođenjem. To nas dovodi do sljedećeg pitanja: "Kako bolje razumijeti i predvidjeti ponašanje konstrukcije izložene potresnim djelovanjima?".

Jedno od mogućih rješenja za taj problem bi bilo da na objekte postavimo mjernu opremu koja bi kontinuirano pratila ponašanje konstrukcije, nakon čega bismo to ponašanje dobiveno trajnim monitoringom, povezali sa svojstvima same konstrukcije. Međutim, to je vrlo skup i u praksi vrlo nepraktičan način za mjerenje i predviđanje ponašanja konstrukcija.

Drugo moguće rješenje leži u razvoju numeričkih procedura koje bi simulirale dinamički odgovor konstrukcije izložene potresu. Numeričkim analizama je moguće model određene konstrukcije izložiti velikom broju različitih potresnih zapisa te kao rezultat dobiti ponašanje konstrukcije koje je vrlo blisko stvarnome. Upravo u tome leži najveća prednost numeričkih analiza. Međutim, kako bi neka numerička procedura bila prihvaćena, potrebno ju je validirati na temelju usporedbe sa stvarnim ili eksperimentalno dobivenim podacima. Laboratorijskim ispitivanjima umanjenih i pojednostavljenih modela konstrukcija na uređajima poput potresnih platformi najčešće dolazimo do podataka o odgovoru konstrukcije ili nekog njezinog dijela. Međutim, potresne platforme nisu vrsta opreme koja se često viđa, dok su potresne platforme koje su sposobne za višestruku pobudu oslonaca još rjeđe.

U Hrvatskoj, Laboratorij za potresna ispitivanja splitskog Fakulteta građevinarstva, arhitekture i geodezije je opremljen sa potresnom platformom tlocrtnih dimenzija  $4 \times 4$  m s nosivosti do 200 kN tj. 20 t. Korištenjem takve opreme moguće je ispitati skalirane modele stvarnih zgrada izloženih potresnom opterećenju [6]. Laboratorij za ispitivanje konstrukcija Građevinskog fakulteta u Zagrebu ima uređaj za generiranje kontroliranih

vibracija. Njime se mogu ispitati modeli maksimalne mase od 30 *kg*, ali višestruka pobuda nije moguća samo s jednom platformom [7]. Laboratorij za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci posjeduje sustav od dvije potresne platforme, kojima se model, maksimalne mase 130 *kg* po platformi, može izložiti višestrukoj pobudi oslonaca [8].

Ne postoji velik broj laboratorija koji imaju dvije ili više potresne platforme kojima bi se model dugačke konstrukcije, poput mosta, izložio višestrukoj pobudi oslonaca. To naravno nije idealno ako želimo razvijati numeričke modele i procedure, jer bez dokumentiranih eksperimentalnih ispitivanja validacija modela je nemoguća. Iz tog je razloga u ovom radu naglasak na validaciji izrađenog numeričkog modela, koristeći se eksperimentalnim podacima iz provedenih ispitivanja.



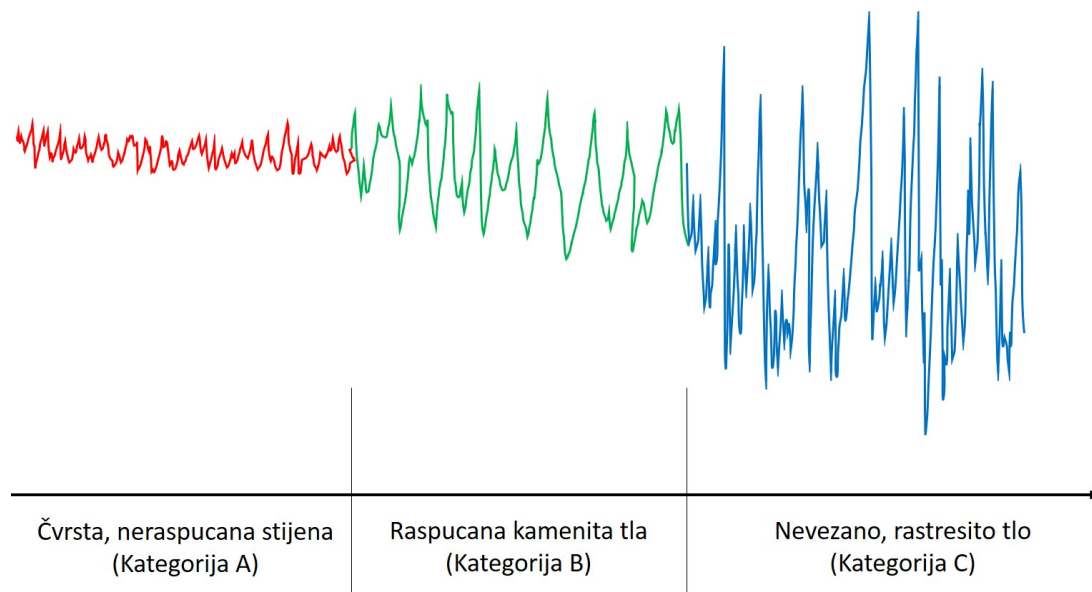
# 3. UTJECAJ VIŠESTRUKÉ POBUDE OSLONACA

"Multiple support effect/excitation (MSE)" ili efekti višestruke pobude oslonaca je termin koji se vrlo često pojavljuje kod analiza konstrukcija s osloncima na međusobno velikim razmacima. Najbolji i najčešći primjer konstrukcije kod kojeg je taj izraz bitan, su dugački mostovi čiji su oslonci na velikim razmacima. Međutim, to je pojava koja se često spominje i kod drugih konstrukcija, poput dugačkih cjevovoda primjerice.

Kada govorimo o višestrukoj pobudi oslonaca, samu pobudu predstavljaju opterećenja oslonaca koja nastaju kao posljedica djelovanja potresa. Na efekte višestruke pobude oslonaca osim potresnog vala utječe i medij kojime se potresni val širi. Glavni rezultat višestruke pobude oslonaca je da su oslonci opterećeni potresnim djelovanjem različite jačine i oblika iako su prouzročeni istim potresnim valom. To može dovesti do pojave asimetričnih oblika osciliranja koji mogu uzrokovati povećana naprezanja i deformacije konstrukcije.

Promjene u jačini i obliku potresnog vala su najčešće uzrokovane prolazom vala kroz medij različite gustoće. Ono što je poznato je da se brzina širenja vala mijenja ovisno o gustoći materijala kroz koji putuje, pa se tako potresni valovi šire brže kroz medij veće gustoće (stijene) a sporije kroz sredstva manje gustoće (tla). Što je vrijeme širenja vala kroz materijal duže, veća je vjerojatnost da će se jačina i oblik vala promijeniti dok dođe do sljedećeg oslonca dugačke konstrukcije. Drugi problem koji se javlja je duže zadržavanje vala u mediju kroz koji prolazi (zbog manje brzine kretanja u materijalu manje gustoće), što znači da su sve konstrukcije na površini duže izložene potresu.

Međutim, brzina širenja vala nije jedina promjena koju seizmički val doživljava prilikom promjene gustoće materijala kroz koji prolazi. Kada potresni val prijeđe iz medija veće gustoće, poput stijene, u medij manje gustoće, kao što je tlo, brzina širenja mu se smanji ali se u isto vrijeme amplituda poveća. Povećanje amplitude potresnog vala zbog prijelaza iz jednog materijala u drugi, se naziva amplifikacija (Slika 3.1)



Slika 3.1: Amplifikacija potresnog vala

Primjerice, oslonci mosta temeljenog na dva vrlo različita temeljna tla će prilikom nailaska potresnog vala biti opterećeni vrlo različitim potresnim djelovanjima. Proračunski kodovi, poput Eurokoda 8, u obzir uzimaju različitu pobudu oslonaca ovisno o udaljenosti između oslonaca te kategoriji tla u kojima se nalaze. Pa se tako pobuda između oslonaca smatra nepovezanim ako je razmak između oslonaca veći od  $600\text{ m}$  za kategoriju tla A,  $500\text{ m}$  ako se radi o kategoriji tla B ili  $400\text{ m}$ , ako je u pitanju kategorija tla C [9]. Dosadašnja istraživanja su pokazala da i kod konstrukcija manjeg raspona višestruka pobuda oslonaca može rezultirati bitno drukčijim ponašanjem konstrukcije nego što bi to bilo da je pobuda jednolika [10]

# 4. TEORIJSKA OSNOVA

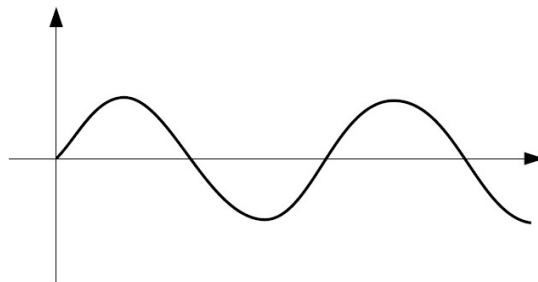
## 4.1 Vrste dinamičkih opterećenja

U sklopu ovoga rada biti će analiziran dinamički odgovor konstrukcije koja je izložena dinamičkoj pobudi. Izraz "dinamički" možemo opisati kao nešto što je vremenski promjenjivo. Dinamička pobuda je prema tome bilo koje opterećenje čija snaga ili veličina, smjer djelovanja te položaj variraju s vremenom. Na sličan način možemo opisati i dinamički odgovor konstrukcije tj. možemo reći da su naprezanja i deformacije vremenski promjenjiva. Općenito, odgovor konstrukcije, koja je izložena dinamičkoj pobudi, je izražen preko ostvarenih pomaka konstrukcije.

Dinamičku pobudu možemo podijeliti u dvije kategorije:

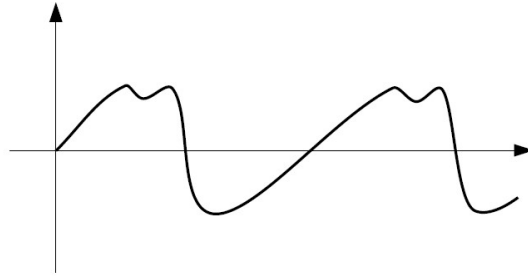
- Periodična pobuda
- Neperiodična pobuda

Periodična pobuda je vrsta pobude ili opterećenja koje se ponavlja, po veličini i obliku, u jednakim vremenskim intervalima. Primjer periodične pobude je pobuda koja nastaje zbog oscilacija određenih strojeva unutar objekata. Nastalo opterećenje može biti opisano sinusoidnom funkcijom te se u tom slučaju radi o harmonijskom, periodičnom opterećenju (Slika 4.1).



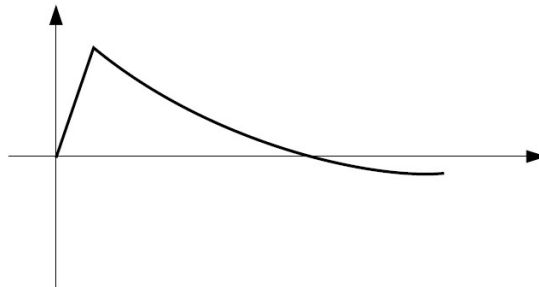
Slika 4.1: Periodična harmonijska pobuda [1]

Najčešće se u stvarnosti ne pojavljuje periodična harmonijska pobuda, već je češća pojava periodična neharmonijska pobuda. Prilikom rada propelera na brodu, udara valova na platformu, rada stroja gdje je došlo do oštećenja jednog dijela ili iz nekog drugog razloga, doći će do periodične neharmonijske pobude (Slika 4.2).



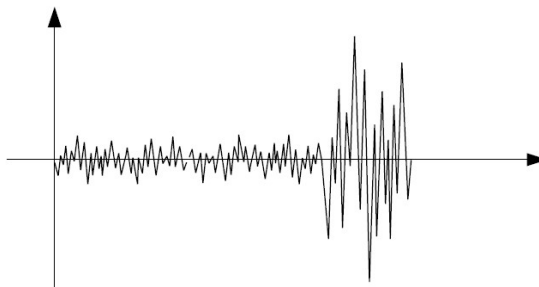
Slika 4.2: Periodična neharmonijska pobuda [1]

Neperiodična pobuda je svaka pobuda koja se nemože svrstati u kategoriju periodične pobude. Drugim riječima, neperiodična pobuda je svako opterećenje čije se ponašanje, po obliku i veličini, ne ponavlja tijekom vremena i samim time nemože biti pretpostavljeno kako će izgledati. Može biti kratkotrajnog ili impulzivnog karaktera te najčešće u tu kategoriju spadaju udari i eksplozije (Slika 4.3).



Slika 4.3: Neperiodična kratkotrajna pobuda [1]

Osim kratkotrajne pobude postoji i neperiodična dugotrajna pobuda te je najbolji i inženjerima najbitniji primjer takve pobude potres ili potresna pobuda (Slika 4.4).



Slika 4.4: Neperiodična dugotrajna pobuda [1]

U ovome radu će najviše biti promatrana neperiodična dugotrajna pobuda tj. potresna pobuda te će u manjoj mjeri biti promatrana periodična harmonijska pobuda.

## 4.2 Metoda konačnih elemenata

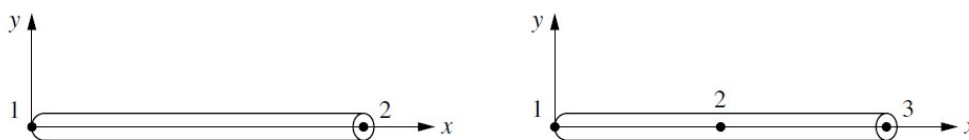
Metoda konačnih elemenata je jedna od najčešće korištenih metoda za analizu raznih sustava te je zbog sve većeg korištenja računala te razvoja istih, postala neizostavan dio u inženjerskoj praksi te znanstveno-istraživačkom radu. Većina računalnih programa današnjice temelji se na metodi konačnih elemenata te nam pomoću toga omogućavaju analizu složenih problema kao što su:

- Analiza naprezanja i deformacija
- Analiza vibracija
- Prijenos topline
- Ponašanje fluida

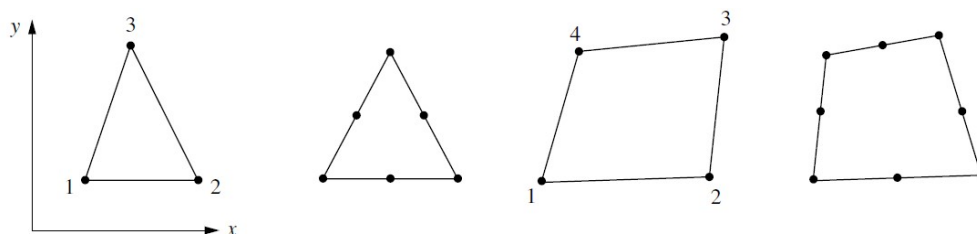
U nastavku su navedeni osnovni koraci kod korištenja metode konačnih elemenata te su detaljnije objašnjeni:

### 1) Diskretizacija modela i odabir vrste konačnih elemenata

Odabir vrste konačnih elemenata ovisi o obliku stvarnog modela te koliko blizu stvarnome rješenju želimo doći. Slike (4.5), (4.6) i (4.7) prikazuju neke od najčešće korištenih konačnih elemenata.

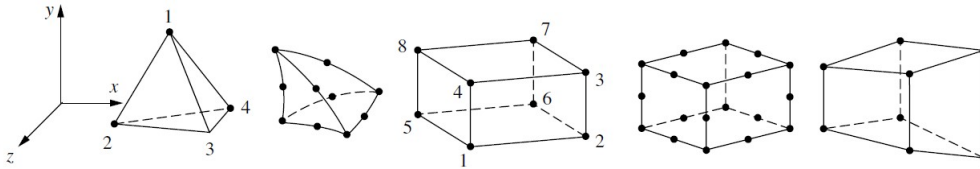


Slika 4.5: Primjeri 1D konačnih elemenata (modeliranje štapova i greda) [2]



Slika 4.6: Primjeri 2D konačnih elemenata (određivanje plošnih naprezanja i deformacija) [2]

Izbor konačnih elemenata i diskretizacija modela ovisi o osobi koja provodi analizu te je na njoj da odabere elemente koji će najbolje modelirati stvarni sustav.



Slika 4.7: Primjeri 3D konačnih elemenata (određivanje prostornog stanja naprezanja) [2]

## 2) Odabir funkcije pomaka

Potrebno je odrediti funkciju pomaka unutar svakog elementa koristeći se vrijednostima u čvornim točkama konačnog elementa. Linearna, kvadratna i kubna jednačba su najčešće korištene funkcije jer je s njima lako raditi unutar konačnih elemenata [2].

## 3) Definiranje odnosa *naprezanje - deformacija* i *pomak - deformacija*

Definiranje navedenih odnosa je potrebno kako bi jednačbe konačnih elemenata bilo moguće izvesti. Preciznim određivanjem ponašanja materijala utječemo na točnost dobivenih rezultata.

## 4) Određivanje matrica krutosti, mase i prigušenja te pratećih jednačbi koje ih povezuju

Postoji više različitih postupaka za određivanje izraza kojima možemo opisati krutost i masu sustava, pa i prigušenje, ali ovdje nisu prikazani izvodi; konačni izrazi prikazani su u poglavlju 4.

## 5) Slaganje jednačbi kako bismo formirali globalne jednačbe sustava

Jednačbe koje su dobivene na temelju ravnoteže su definirane za svaki konačni element tj. za čvorove koji ga definiraju. Te jednačbe je potrebno sve složiti unutar matrica kako bismo formirali globalnu jednačbu sustava (npr. globalna jednačba dinamičke ravnoteže sustava).

## 6) Uvođenje rubnih uvjeta u globalne jednačbe sustava

Uvođenjem rubnih uvjeta definiramo ponašanje točno određenih dijelova modela. Primjerice, ako modeliramo konzolnu gredu, nakon što su sve jednačbe postavljene potrebno je na neki način modelirati upetost. To radimo tako da uklonimo stupnjeve slobode koji se tiču pomaka i rotacija u čvorovima koji predstavljaju mjesta upetosti konzolne grede. Ovaj korak je ujedno i zadnji korak koji se tiče modeliranja sustava.

## 7) Pronalazak rješenja za definirane stupnjeve slobode

Računalo će, koristeći se metodom "korak po korak", odrediti pomake u svim definiranim točkama na sustavu u svakom vremenskom trenutku (ako se radi o dinamičkom problemu). Rješenje problema bi u tom slučaju značilo da su pomaci u svim točkama uspješno pronađeni, a njihova točnost će biti određena kasnije.

#### **8) Pronalazak naprezanja i deformacija konačnih elemenata**

Naprezanja i deformacije u svakoj točki moguće je odrediti na temelju dobivenih pomaka, koristeći se odnosima *naprezanje - deformacija* te *pomak - deformacija*, koji su postavljeni u 3. koraku.

#### **9) Analiza rezultata**

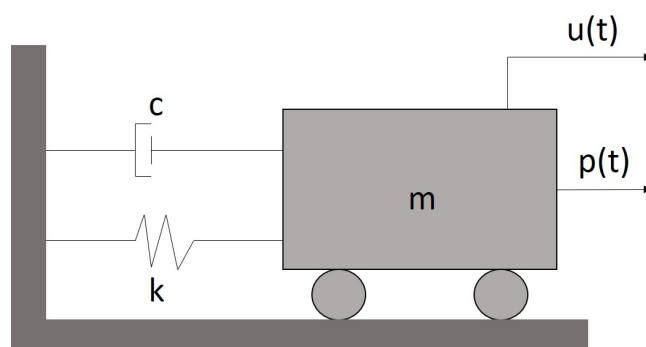
U zadnjem koraku naravno treba interpretirati dobivene rezultate, usporediti ih sa onima iz eksperimentalnih ispitivanja (ako postoje) ili sa teorijskim rješenjima. Nakon toga se ocjenjuje točnost rješenja na temelju usporedbe te se rezultati zajedno s modelom prihvaćaju ili odbacuju nakon čega se kreće u izmjenu parametara postavljenog modela.

Metoda konačnih elemenata nam omogućuje modeliranje tijela nepravilnih oblika, modeliranje tijela korištenjem više različitih vrsta materijala, uključivanje dinamičkih efekata te modeliranje nelinearnog ponašanja gdje se pojavljuju vrlo velike deformacije zajedno s nelinearnim materijalima. Naravno, metoda konačnih elemenata je korištena u sklopu ovog rada jer je neizostavan dio dinamičke analize bilo kojeg sustava.

### 4.3 Sustav s jednim stupnjem slobode (SDOF)

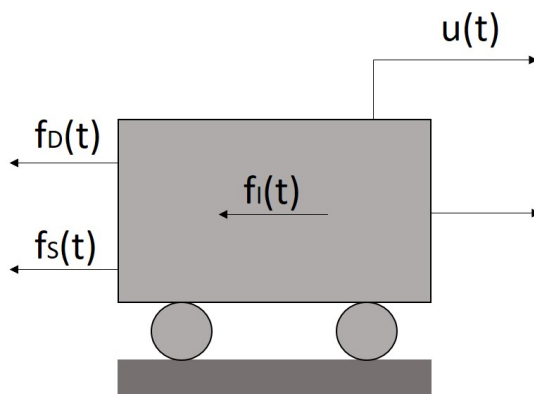
Osnovne fizičke značajke bilo kojeg linearno elastičnog sustava, koji je podvrgnut nekakvoj vanjskoj pobudi ili dinamičkom opterećenju, su njegova masa, elastična svojstva (elastičnost ili krutost) te prigušenje.

Ono što je karakteristično za sustave s jednim stupnjem slobode je da je potrebno poznavati pomak (stupanj slobode) samo u jednoj točki da bi se odredili pomaci svih ostalih točaka sustava. Druga specifičnost sustava s jednim stupnjem slobode je da su ranije spomenute fizičke karakteristike sustava u cijelosti koncentrirane u jednoj točki.



Slika 4.8: Primjer sustava s jednim stupnjem slobode

Na slici 4.8 je prikazan primjer sustava s jednim stupnjem slobode. Masa cijelog sustava  $m$  je sadržana u težištu tijela, krutost sustava  $k$ , ili otpornost na deformacije, u opruzi te prigušenje  $c$  u prigušivaču. Na sustav djeluje vanjska sila  $p(t)$  koja je promjenjiva u vremenu i izbacuje ga iz stanja mirovanja. Kruto tijelo leži na dva valjka ili kotača čija je uloga da dopuštaju pomak samo u jednom smjeru, u ovom slučaju u horizontalnom smjeru te da eliminiraju trenje. Dakle pomak bilo koje točke na promatranom sustavu je moguće odrediti na temelju pomaka  $u(t)$ .



Slika 4.9: Sile prisutne na SDOF sustavu sa slike (4.8)

Slika (4.9) prikazuje sve sile koje se pojavljuju na primjeru sustava s jednim stupnjem



slobode. Vanjsko opterećenje  $p(t)$  djeluje u smjeru kretanja tijela  $u(t)$ , a tri sile koje se suprotstavljaju kretanju tijela su:

- inercijalna sila  $f_I(t)$
- sila prigušenja  $f_D(t)$
- elastična sila  $f_S(t)$

Ako zapišemo sumu svih sila u horizontalnom smjeru i na jednu stranu stavimo sile reakcije, a na drugu sile akcije (opterećenja), dobivamo jednadžbu kretanja:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (4.1)$$

Svaka sila na lijevoj strani jednakosti je funkcija pomaka  $u(t)$ , brzine  $\dot{u}(t)$  ili ubrzanja  $\ddot{u}(t)$ . Prema d'Alembertovom teoremu, inercijalna sila je umnožak mase i ubrzanja [1]:

$$f_I(t) = m * \ddot{u}(t) \quad (4.2)$$

Pretpostavimo li viskozno prigušenje, silu prigušenja možemo izraziti kao umnožak konstante prigušenja i brzine [1]:

$$f_D(t) = c * \dot{u}(t) \quad (4.3)$$

I na kraju, elastičnu silu možemo zapisati kao umnožak krutosti opruge i pomaka [1]:

$$f_S(t) = k * u(t) \quad (4.4)$$

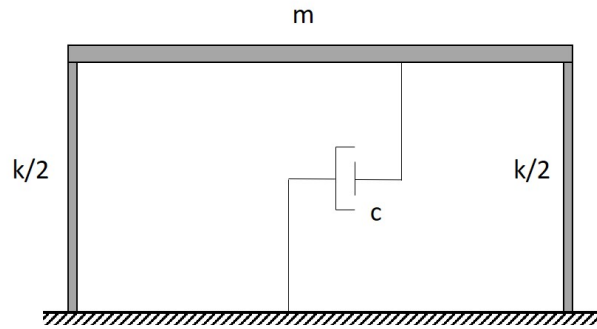
Ako izraze (4.2), (4.3) i (4.4) uvrstimo u jednadžbu (4.1), dobivamo jednadžbu kretanja za sustav s jednim stupnjem slobode [1]:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = p(t) \quad (4.5)$$

### 4.3.1 Utjecaj pobude oslonaca

Osim vremenski promjenjivih opterećenja koja djeluju na konstrukciju, opterećenje konstrukcije može biti izazvano i pomakom oslonaca koji mogu nastati zbog djelovanja potresa. U ovom poglavlju je objašnjeno na koji način pomake oslonaca, nastale zbog potresnog djelovanja, možemo izraziti kao vanjsko opterećenje koje djeluje na konstrukciju.

Uzmimo kao primjer okvir gdje je sva masa sadržana u gredi, krutost u stupovima te prigušenje u prigušivaču (Slika 4.10)



Slika 4.10: Primjer okvira s jednim stupnjem slobode

Pošto na sustav ne djeluje nikakva vanjska sila ili opterećenje, ravnotežu svih sila možemo zapisati na sljedeći način:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (4.6)$$

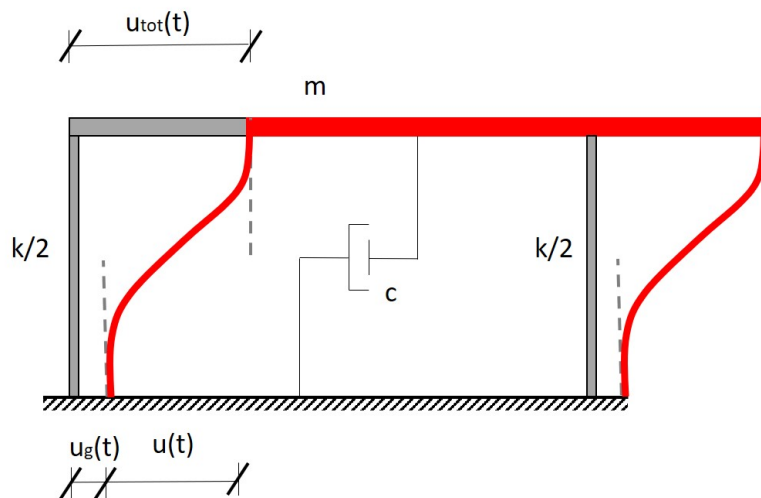
Elastična sila i sila prigušenja se mogu zapisati na isti način kao u izrazima (4.3) i (4.4). Međutim, inercijalna sila je dana izrazom [1]:

$$f_I(t) = m * \ddot{u}_{tot}(t) \quad (4.7)$$

gdje  $u_{tot}(t)$  predstavlja apsolutne pomake mase, a dvostrukom derivacijom po vremenu tih pomaka, dobivamo ubrzanje  $\ddot{u}_{tot}(t)$ . Jednadžba (4.6) sada poprima sljedeći oblik [1]:

$$m * \ddot{u}_{tot}(t) + c * \dot{u} + k * u(t) = 0 \quad (4.8)$$

Kako bismo riješili jednadžbu, potrebno je sve sile izraziti preko jedne varijable. To postizemo na način da ukupne (apsolutne) pomake izrazimo kao zbroj pomaka tla i pomaka nastalih zbog deformacije stupova (relativni pomak) [1].



Slika 4.11: Pomaci okvira izloženog pomacima tla

Sa slike 4.11 vidimo da vrijedi:

$$u_{tot}(t) = u(t) + u_g(t) \quad (4.9)$$

Izrazimo li sada inercijalnu silu pomoću dvije komponente ubrzanja, dobivene dvostrukim deriviranjem pomaka u vremenu, te ju ubacimo u izraz (4.8), dobivamo [1]:

$$m * \ddot{u}(t) + m * \ddot{u}_g(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = 0 \quad (4.10)$$

Ako sada ubrzanje tla predstavimo kao dinamičko opterećenje konstrukcije, izraz (4.10) možemo zapisati na sljedeći način [1]:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = -m * \ddot{u}_g(t) \equiv p_{eff}(t) \quad (4.11)$$

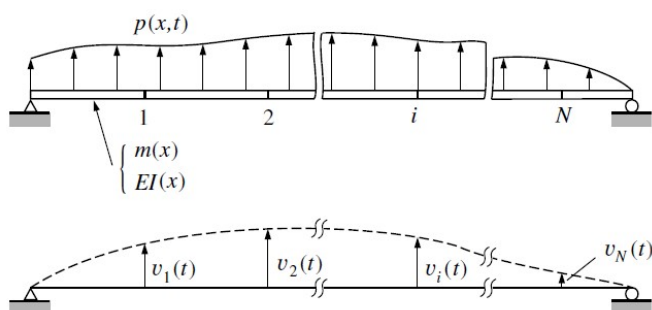
U izrazu (4.11)  $p_{eff}(t)$  predstavlja efektivno opterećenje tj. pobudu oslonaca. Drugim riječima, deformacije konstrukcije nastale djelovanjem ubrzanja tla  $\ddot{u}_g(t)$  su jednake deformacijama nastalim djelovanjem vanjskog opterećenja  $p_{eff}(t)$  koje je jednako  $-m * \ddot{u}_g(t)$  [1].

## 4.4 Sustav s više stupnjeva slobode (MDOF)

U prošlom poglavlju je prikazano kako konstrukciju možemo svesti na sustav s jednim stupnjem slobode, tj. ponašanje cijelog sustava može biti opisano rješavanjem samo jedne jednadžbe kretanja.

Međutim, u većini slučajeva dinamički odgovor stvarnih konstrukcija nije moguće na adekvatan način analizirati korištenjem sustava s jednim stupnjem slobode. Iz tog se razloga koriste sustavi s više stupnjeva slobode (MDOF), koji u obzir uzimaju više pomaka i rotacija tj. više stupnjeva slobode.

Sustav s više stupnjeva slobode te jednadžbu dinamičke ravnoteže možemo objasniti na primjeru jedne grede koja je izložena općem opterećenju koje je promjenjivo u vremenu i s obzirom na položaj na gredi (Slika 4.12)



Slika 4.12: Greda izložena općem opterećenju i prateća deformacijska linija [1]

Opterećenje će kao posljedicu na gredi izazvati deformacije tj. pomake promjenjive u vremenu. Pretpostavit ćemo da je deformacijska linija ove grede određena pomacima u diskretnim točkama na gredi:  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$ , ...,  $u_N(t)$ . Broj takvih točaka na sustavu može biti proizvoljan te položaj točaka može biti nasumičan. Međutim, preporučeno je da položaj točaka odgovara mjestima od interesa ili značaja te da su raspodijeljene po sustavu na način da dobijemo što bolji izgled deformiranog oblika sustava. Broj stupnjeva slobode u svakom čvoru je također proizvoljan, ali s povećanjem broja stupnjeva slobode dobivaju se bolje aproksimacije stvarnog ponašanja [1].

Jednadžbu kretanja sustava sa slike 4.12 možemo dobiti tako da zapišemo ravnotežu svih sila u svakoj točki sustava. Sile koje se javljaju na sustavu su iste kao i na primjeru sa slike 4.9 i pojavljuju se u svakoj  $i$ -toj točki sustava. Ravnoteža sila u svakoj točki  $i$

će sada izgledati ovako [1]:

$$\begin{aligned}f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \\f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} &= p_3(t) \\&\vdots \\f_{IN} + f_{DN} + f_{SN} &= p_N(t)\end{aligned}\tag{4.12}$$

a zapišemo li ih sve u matričnom obliku izgledaju ovako [1]:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)\tag{4.13}$$

Zbog matričnog zapisa izraz (4.2) pišemo u sljedećem obliku:

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m} * \ddot{\mathbf{u}}\tag{4.14}$$

gdje  $\mathbf{m}$  postaje matrica masa sustava, a  $\ddot{\mathbf{u}}$  vektor ubrzanja definiranih točaka na sustavu. Izraz (4.3) postaje:

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c} * \dot{\mathbf{u}}\tag{4.15}$$

gdje je  $\mathbf{c}$  sada matrica prigušenja sustava, a  $\dot{\mathbf{u}}$  vektor brzina svih točaka sustava. I na kraju jednažba (4.4) poprima oblik:

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k} * \mathbf{u}\tag{4.16}$$

gdje  $\mathbf{k}$  postaje matrica krutosti sustava, a  $\mathbf{u}$  vektor pomaka svih točaka određenih na sustavu. Supstitucijom izraza (4.14), (4.15) i (4.16) u jednažbu (4.13) dobivamo jednažbu dinamičke ravnoteže za sve stupnjeve slobode:

$$\mathbf{m} * \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c} * \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k} * \mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)\tag{4.17}$$

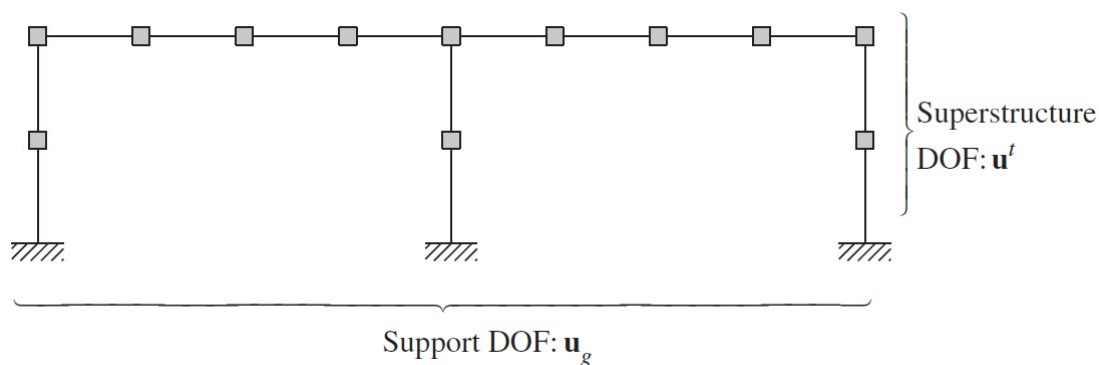
#### 4.4.1 Utjecaj višestruke pobude oslonaca

U povijesti se u analizama konstrukcija najčešće koristila pretpostavka da oslonci određene konstrukcije imaju istu pobudu oslonaca prilikom potresa. Međutim, ta pretpostavka je prihvatljiva kod konstrukcija čiji oslonci nisu na međusobno velikim razmacima, kao što su stambene zgrade. Većina mostova s druge strane, ne spada u tu kategoriju zbog toga što im se oslonci vrlo često nalaze na većim udaljenostima. Zbog tih razmaka možemo govoriti o višestrukoj pobudi oslonaca jer udaljenosti oslonaca, između ostalog, uzrok su zakašnjenja i promjene potresne pobude koja djeluje na susjedne oslonce. To dovodi do toga da u isto vrijeme, prilikom djelovanja istog potresa, oslonci nisu opterećeni na jednak način ili jednakim intenzitetom. U ovom je poglavlju prikazano kako je moguće modelirati takvo ponašanje.

Za početak, jednadžbu dinamičke ravnoteže možemo zapisati na način da pomake razdvojimo na pomake vezane uz oslonce te pomake svih ostalih točaka sustava:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_g \\ \mathbf{m}_g^T & \mathbf{m}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c}_g \\ \mathbf{c}_g^T & \mathbf{c}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Kao primjer je korišten okvirni sustav sa tri oslonca, koji je podijeljen na konačan broj elemenata i u ovom slučaju ima 15 čvorova u kojima se nalaze stupnjevi slobode (Slika 4.13). Prateći izraz (4.18) zaključujemo kako sustav s primjera ima 3 stupnja slobode koji su vezani za pomake oslonaca (*Support DOF:  $\mathbf{u}_g$* ) te 12 stupnjeva slobode koji se tiču pomaka same konstrukcije (*Superstructure DOF:  $\mathbf{u}^t$* ).



Slika 4.13: Okvir s razdvojenim stupnjevima slobode za oslonce i konstrukciju [3]

Na slici (4.13) možemo vidjeti da u čvorovima sustava nisu nanesena vanjska opterećenja tj. vanjske sile. Pomake iz jednadžbe (4.18) možemo dodatno razdvojiti:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

gdje  $\mathbf{u}^s$  predstavlja vektor pomaka konstrukcije nastalih zbog statičkog nanošenja pomaka oslonaca  $\mathbf{u}_g$  u svakom vremenskom trenutku i povezani su preko sljedećeg izraza [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_g^s \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

gdje je  $\mathbf{p}_g^s$  vektor sila na osloncu potrebnih da bi se izazvali pomaci  $\mathbf{u}_g$  koji su vremenski promjenjivi. Vektor  $\mathbf{u}^s$  je također promjenjiv u vremenu i naziva se vektor kvazi-statičkih pomaka, a vektor  $\mathbf{u}$  nazivamo vektor dinamičkih pomaka [3].

Izvučemo li sada prvu jednadžbu iz izraza (4.18):

$$\mathbf{m} * \ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{m}_g * \ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{c} * \dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{c}_g * \dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{k} * \mathbf{u}^t + \mathbf{k}_g * \mathbf{u}_g = 0 \quad (4.21)$$

te supstituiramo izraz (4.19) u nju i prebacimo sve članove koji uključuju  $\mathbf{u}_g$  i  $\mathbf{u}^s$  na desnu stranu, dolazimo do [3]:

$$\mathbf{m} * \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} * \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} * \mathbf{u} = \mathbf{p}_{eff}(t) \quad (4.22)$$

gdje je vektor efektivnih potresnih sila [3]:

$$\mathbf{p}_{eff}(t) = -(\mathbf{m} * \ddot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{m}_g * \ddot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{c} * \dot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{c}_g * \dot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{k} * \mathbf{u}^s + \mathbf{k}_g * \mathbf{u}_g) \quad (4.23)$$

Efektivni vektor opterećenja možemo zapisati u praktičnijem obliku. Zadnji dio u izrazu (4.23) nestaje zbog izraza (4.20):

$$\mathbf{k} * \mathbf{u}^s + \mathbf{k}_g * \mathbf{u}_g = 0 \quad (4.24)$$

Ovaj odnos nam dozvoljava da kvazi-statičke pomake  $\mathbf{u}^s$  izrazimo pomoću pomaka oslonaca  $\mathbf{u}_g$ :

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{i} * \mathbf{u}_g; \quad \mathbf{i} = -\mathbf{k}^{-1} * \mathbf{k}_g \quad (4.25)$$

Član  $\mathbf{i}$  nazivamo utjecajna matrica jer ona opisuje utjecaj pomaka oslonaca na pomake i kuteve zaokreta konstrukcije. Jednadžba (4.23), nakon supstitucije izraza (4.24) i (4.25), izgleda ovako:

$$\mathbf{p}_{eff}(t) = -(\mathbf{m} * \mathbf{i} + \mathbf{m}_g) * \ddot{\mathbf{u}}_g(t) - (\mathbf{c} * \mathbf{i} + \mathbf{c}_g) * \dot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (4.26)$$

Daljnje pojednostavljenje efektivnog vektora opterećenja je moguće ako vrijede sljedeća dva uvjeta:

- matrice prigušenja u izrazu (4.26) su proporcionalne matricama krutosti,
- sustav je diskretiziran na način da su mase koncentrirane u točkama; matrica masa

je dijagonalna.

Ako su navedeni uvjeti zadovoljeni, efektivni vektor opterećenja postaje:

$$\mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{m} * \mathbf{i} * \ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (4.27)$$

#### 4.4.2 Matrica krutosti

Diferencijalna jednačina koja opisuje linearno-elastično ponašanje grede (Euler-Bernoulli-eva greda) se temelji na pretpostavci da poprečni presjeci okomiti na uzdužnu težišnu os grede ostaju ravni (nedeformirani) i okomiti na uzdužnu os i nakon pojave savijanja [2].

U sklopu ovog rada nije prikazan izvod kojime je matrica krutosti dobivena nego je samo navedena pretpostavka na kojoj se izvod temelji te je u nastavku prikazan konačan rezultat:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

gdje je:

$E$  - Young-ov modul elastičnosti,

$G$  - modul posmika,

$L$  - duljina elementa,

$A$  - površina poprečnog presjeka,

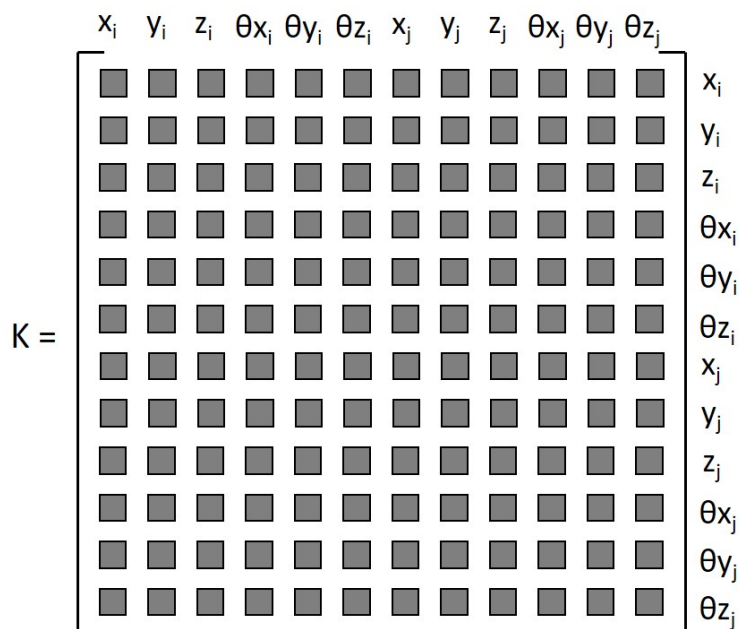
$I$  - moment inercije presjeka,

$J$  - polarni moment inercije presjeka.

Matrica krutosti dana izrazom (4.28) predstavlja matricu krutosti grednog konačnog



elementa u 3D prostoru i to je najopćenitiji oblik matrice krutosti. Konačni element koji ova matrica krutosti opisuje ima 12 stupnjeva slobode, 6 pomaka i 6 rotacija, te je iz tog razloga dimenzija  $12 \times 12$ . Svaki redak i stupac odgovara određenom stupnju slobode i to je, za raspored članova u matrici krutosti iz izraza (4.28), shematski prikazano na slici 4.14.



Slika 4.14: Shematski prikaz stupnjeva slobode u matrici krutosti s 12 stupnjeva slobode

### 4.4.3 Matrica masa

Najjednostavniji način za definiranje matrice masa za bilo koji sustav je da pretpostavimo da je masa cijelog sustava koncentrirana u čvorovima gdje su definirani i pomaci. Uobičajen postupak definiranja koncentriranih masa je da se model podijeli na segmente koji su međusobno povezani preko čvorova, nakon čega se masa segmenta raspodijeli u čvorove tj. čvorne točke [1].

Za sustav gdje su samo pomaci, bez rotacija, definirani kao stupnjevi slobode, matrica masa će biti dijagonalna. To znači da će svi članovi matrice izvan glavne dijagonale biti nula, iz razloga što ubrzanje mase u nekoj točki može stvoriti inercijalnu silu samo u toj točki tj. čvoru. Zbog pretpostavke da je masa koncentrirana u točki, rotacijska inercija ne postoji te će članovi na dijagonali koji su vezani uz rotacijske stupnjeve slobode biti jednaki nuli. U nastavku je prikazana matrica krutosti za jedan konačni element sa 12 stupnjeva slobode (6 pomaka i 6 rotacija) zajedno sa shematskim prikazom kojem retku i stupcu odgovara određeni stupanj slobode u matrici masa (Slika 4.15):

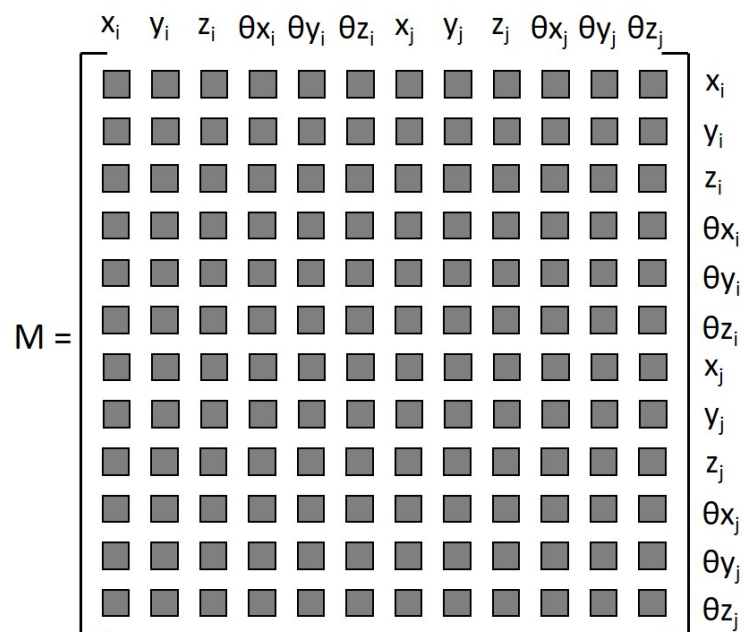
$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

gdje je:

$\rho$  - gustoća materijala,

$L$  - duljina elementa,

$A$  - površina poprečnog presjeka.



Slika 4.15: Shematski prikaz stupnjeva slobode u matrici masa s 12 stupnjeva slobode

Osim dijagonalne matrice masa postoji i tzv. konzistentna matrica masa koja za razliku od dijagonalne uvijek u obzir uzima sve rotacijske stupnjeve slobode i njihove efekte, naravno zajedno s translacijskim stupnjevima slobode. U nastavku je prikazana matrica masa za gredni konačni element sa 12 stupnjeva slobode u 3D prostoru za koju je raspored stupnjeva slobode po retcima i stupcima isti kao na slici 4.15:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

gdje je:

$\rho$  - gustoća materijala,

$L$  - duljina elementa,

$A$  - površina poprečnog presjeka,

$J$  - polarni moment inercije.

#### 4.4.4 Matrica prigušenja

Kako bi formirali matricu prigušenja koristit ćemo tzv. Rayleigh-ovo prigušenje. Rayleigh-ovo prigušenje se temelji na eksperimentalnim rezultatima i matrica prigušenja sustava je formirana kao linearna kombinacija matrice krutosti i matrice masa:

$$\mathbf{C} = a_0 * \mathbf{M} + a_1 * \mathbf{K} \quad (4.31)$$

gdje je:

$\mathbf{M}$  - globalna matrica masa,

$\mathbf{K}$  - globalna matrica krutosti,

$a_0, a_1$  - koeficijenti.

Koeficijent prigušenja za  $n$ -ti ton takvog sustava glasi [3]:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} * \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (4.32)$$

Koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$  mogu se odrediti iz izračunatih koeficijenata prigušenja  $\zeta_i$  i  $\zeta_j$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti ton. Izrazimo li jednadžbu (4.32), za  $i$ -ti i  $j$ -ti ton, u matričnom obliku dobivamo [3]:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Jednadžbe iz izraza (4.33) mogu se riješiti kako bismo odredili koeficijente  $a_0$  i  $a_1$ . Ako pretpostavimo da oba tona tj. oblika osciliranja imaju isti koeficijent prigušenja  $\zeta$ , što je prihvatljivo s obzirom na eksperimentalne podatke, onda vrijedi [3]:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.34)$$

$$a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.35)$$

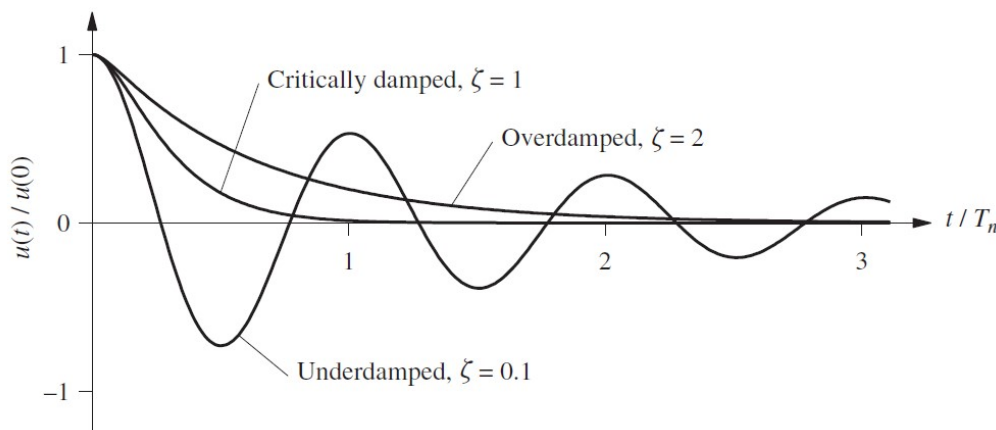
gdje je:

$\zeta$  - koeficijent prigušenja,

$\omega_i, \omega_j$  - prirodne kružne frekvencije  $i$ -tog i  $j$ -tog tona.

Sljedeće što je potrebno odrediti je koeficijent prigušenja  $\zeta$ . Koeficijent prigušenja  $\zeta$  je bezdimenzijska veličina koja opisuje prigušenje nekog sustava te ovisi o krutosti i masi sustava.

Slika 4.16 prikazuje dijagrame pomaka u vremenu  $u(t)$  nastale zbog početnog pomaka  $u(0)$  za tri različite vrijednosti koeficijenta prigušenja:  $\zeta = 0.1$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\zeta = 2$  [3].



Slika 4.16: Utjecaj koeficijenta prigušenja  $\zeta$  na slobodne prigušene oscilacije [3]

Ako je  $\zeta < 1$  onda sustav oscilira oko ravnotežnog položaja s amplitudama koje se postepeno smanjuju. Ako je  $\zeta = 1$ , sustav se vraća u ravnotežni položaj bez osciliranja. Ako je  $\zeta > 1$ , sustav se također vraća u ravnotežni položaj bez osciliranja, ali sporije u odnosu na slučaj gdje je  $\zeta = 1$  [3].

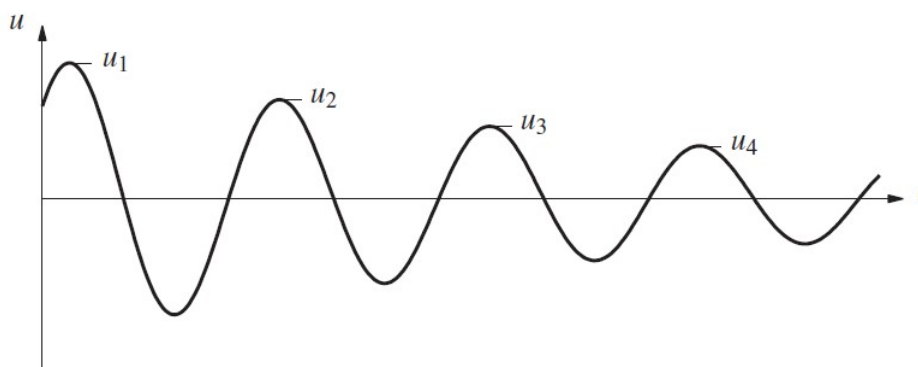
Koeficijent prigušenja nije moguće odrediti analitički, za stvarne konstrukcije, nego ga je potrebno odrediti eksperimentalno. Jedan od načina na koji je moguće odrediti koeficijent prigušenja je koristeći se podacima iz ispitivanja slobodnih prigušenih oscilacija. Za sustave koji nemaju veliko prigušenje, koeficijent prigušenja može se odrediti iz izraza [3]:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} * \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} \quad (4.36)$$

gdje je:

$j$  - broj ciklusa osciliranja između dvije promatrane amplitude,

$u_i, u_{i+j}$  - amplitude iz izmjerenih pomaka u vremenu.



Slika 4.17: Slobodne prigušene oscilacije s označenim uzastopnim amplitudama [3]

Ako u obzir uzimamo uzastopne amplitude (Slika 4.17) onda član  $j$  u izrazu (4.36) postaje jednak 1 i jednačba poprima sljedeći oblik:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} * \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} \quad (4.37)$$

gdje su:

$u_i, u_{i+1}$  - uzastopne amplitude iz izmjerenih pomaka u vremenu.

Još jedan način za određivanje koeficijenta prigušenja je koristeći se tzv. *Half - power bandwidth* metodom. Za to nam je potreban graf spektralne gustoće snage, koji nam prikazuje od kojih se frekvencija određeni signal sastoji ali još bitnije prikazuje koje su frekvencije najdominantnije. Postupak kreće tako da maksimalnu vrijednost u grafu, koja odgovara najdominantnijoj frekvenciji, umanjimo za vrijednost  $\sqrt{2}$ . Nakon toga povlačimo horizontalni pravac koji prolazi kroz umanjenu vrijednost i tražimo sjecišta

pravca i grafa spektralne analize. Na kraju je potrebno očitati vrijednosti frekvencija u sjecištima, nakon čega koeficijent prigušenja određujemo pomoću sljedećeg izraza:

$$\zeta = \frac{f_2 - f_1}{f_{max}} \quad (4.38)$$

gdje je:

$f_1$  - frekvencija koja odgovara prvom sjecištu,

$f_2$  - frekvencija koja odgovara drugom sjecištu,

$f_{max}$  - frekvencija koja odgovara maksimalnoj vrijednosti u grafu spektralne analize.

Na temelju izraza (4.37) i (4.38) te podataka iz eksperimentalnih ispitivanja je određen koeficijent prigušenja  $\zeta$  a samim time i matrica prigušenja na temelju izraza (4.31). Rezultati proračuna koeficijenta prigušenja su prikazani u poglavlju (5).

## 4.5 Vrste vibracija

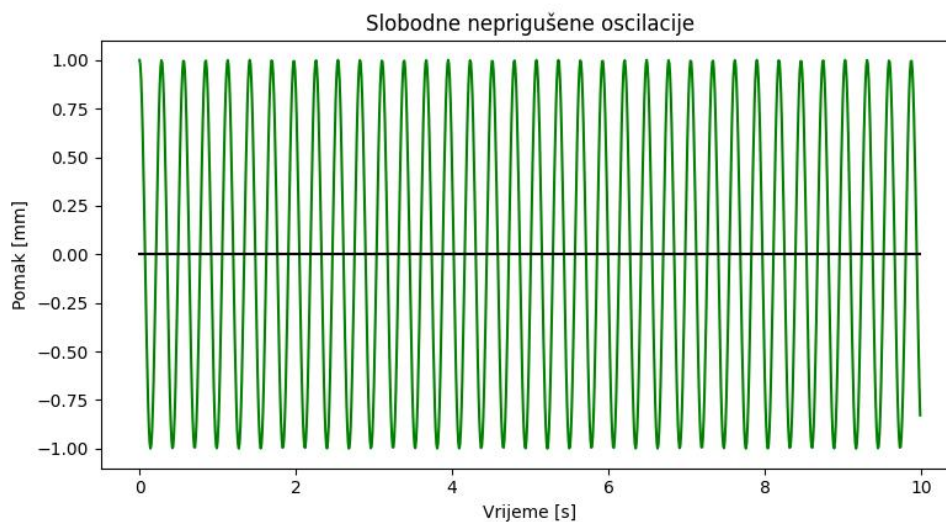
Nakon postavljenih osnova o vrstama opterećenja i vrstama dinamičkih sustava, možemo govoriti o vrstama vibracija. Vibracije ovise o vrsti vanjske pobude (ukoliko ona postoji) te o prigušenju (ako postoji). U nastavku su prikazane i pobliže opisane tri vrste vibracija.

### 4.5.1 Slobodne neprigušene vibracije

Kada govorimo o slobodnim vibracijama, to znači da je sustav izbačen iz stanja mirovanja tj. ravnoteže te nakon toga nije izložen nikakvom opterećenju. Povrh toga, u sustavu ili izvan njega ne postoji prigušenje, koje bi sustav vratilo u stanje mirovanja. Jednadžba dinamičke ravnoteže takvog sustava može se zapisati u sljedećem obliku:

$$m * \ddot{u}(t) + k * u(t) = 0 \quad (4.39)$$

Ako takav sustav izbacimo iz stanja ravnoteže (mirovanja) tako da mu zadamo početni pomak  $u(0) = u$  (u našem slučaju  $u(0) = 1$ ) ili zadavanjem početne brzine  $\dot{u}(0) \neq 0$ , sustav započinje s beskonačnim osciliranjem gdje se amplitude ne smanjuju jer ne postoji prigušenje (Slika 4.18).



Slika 4.18: Slobodne neprigušene oscilacije

Ovakvo ponašanje u stvarnosti nije moguće jer uvijek postoji neka vrsta prigušenja, koliko god to prigušenje bilo maleno. Ponašanje dinamičkog sustava opisano izrazom (4.39) je u teoriji moguće samo u vakuumu jer, osim u vakuumu, uvijek postoji način na koji se energija disipira zbog čega se sustav vraća u stanje ravnoteže ili u ovom slučaju stanje mirovanja. Zbog konstantnog osciliranja sustava oko ravnotežnog položaja, ovu

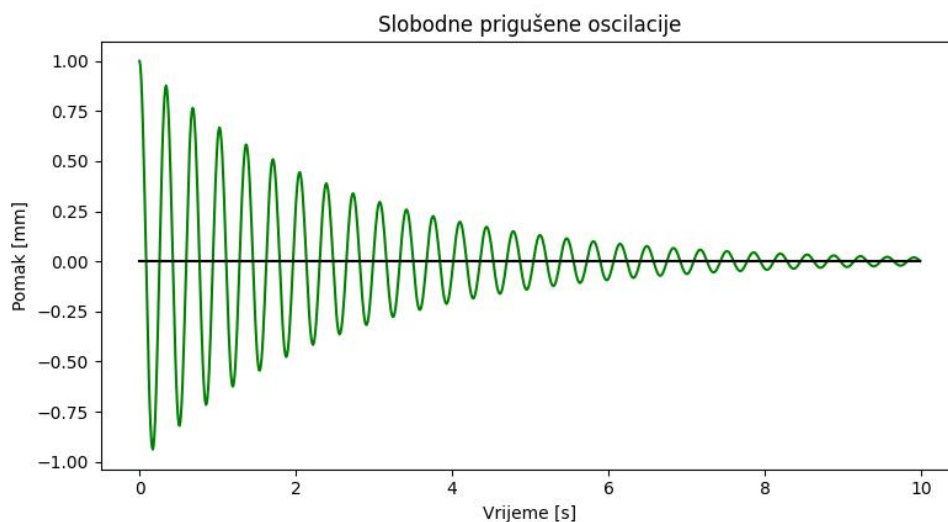
vrstu gibanja još nazivamo slobodne neprigušene oscilacije.

## 4.5.2 Slobodne prigušene vibracije

Uvedemo li viskozno prigušenje u izraz (4.39), koji opisuje slobodne neprigušene oscilacije, dolazimo do izraza koji opisuje slobodne prigušene oscilacije:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = 0 \quad (4.40)$$

I u ovom slučaju ne postoji vanjsko opterećenje nego je sustav izbačen iz stanja mirovanja tako što mu je zadan početni pomak  $u(0) = u$ , kao i za slobodne neprigušene oscilacije  $\dot{u}(0) = 1$ . Nakon toga sustav započinje s osciliranjem oko ravnotežnog položaja ali sada s pomacima tj. amplitudama pomaka koje se, zbog uvedenog prigušenja u sustavu, smanjuju s vremenom.



Slika 4.19: Slobodne prigušene oscilacije

Ovakvo ponašanje je naravno moguće u stvarnosti. Primjerice, rasvjetni stup će nakon blažeg udara vozila ili nakon prestanka djelovanja jakog vjetra oscilirati na ovaj način, sve do trenutka kada se vrati u stanje mirovanja. Na sličan način se ponašaju i konstrukcije nakon prestanka djelovanja potresne pobude.

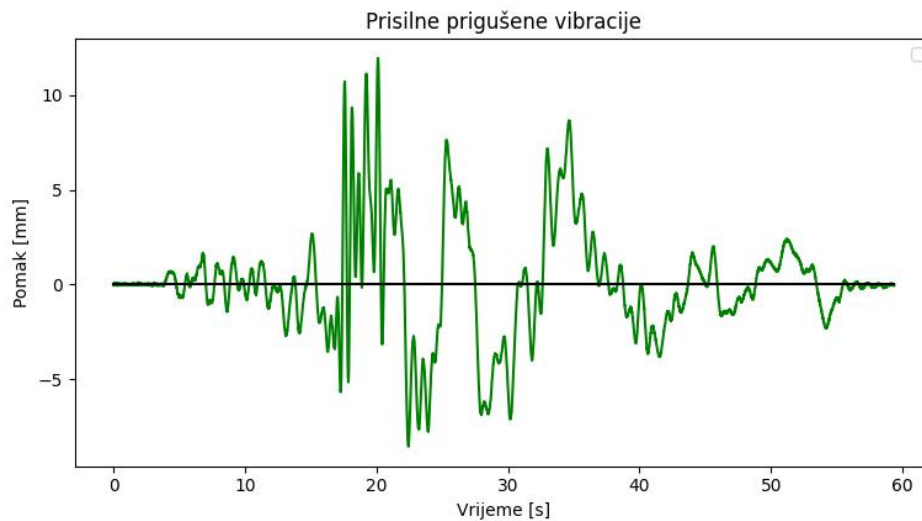
## 4.5.3 Prisilne prigušene vibracije

Ako u izraz (4.40), koji opisuje slobodne prigušene oscilacije, dodamo vanjsko opterećenje koje je promjenjivo u vremenu dobivamo izraz koji opisuje prisilne prigušene vibracije:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = p(t) \quad (4.41)$$



U ovom slučaju više nije riječ o oscilacijama već o vibracijama, pošto se ne pojavljuju pravilne oscilacije oko ravnotežnog položaja. Sustav je konstantno izložen dinamičkom opterećenju koje varira jačinom u vremenu te su pomaci sustava kao rezultat toga, vrlo nepravilnog oblika. Najbolji primjer takvih vrsta vibracija je odgovor konstrukcije koja je izložena potresnom djelovanju (Slika 4.20).



Slika 4.20: Prisilne prigušene oscilacije

## 4.6 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Kako bismo objasnili što su svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori, promotriti ćemo za početak najjednostavniji slučaj nekog dinamičkog problema, slobodne neprigušene oscilacije sustava s jednim stupnjem slobode. Izraz koji ih opisuje glasi:

$$m * \ddot{u}(t) + k * u(t) = 0 \quad (4.42)$$

Slobodne oscilacije započinju nakon što sustav izbacimo iz položaja statičke ravnoteže zadajući masi određeni početni pomak  $u(0)$  i brzinu  $\dot{u}(0)$ . Uzimajući u obzir navedene početne uvjete, rješenje homogene diferencijalne jednačbe 2. reda s konstantnim koeficijentima je dobiveno korištenjem analitičkih metoda za rješavanje [3]:

$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (4.43)$$

gdje je:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.44)$$

Izraz (4.44) predstavlja prirodne kružne frekvencije vibracija čije su mjerne jedinice  $rad/s$ . Prirodne kružne frekvencije su direktno povezane s prirodnim periodom vibracija sustava, kojeg označavamo s  $T_n$  a mjerna jedinica mu je sekunda  $s$ . Prirodni period vibracija predstavlja vrijeme potrebno za jedan kompletni ciklus slobodnih vibracija u neprigušenom sustavu [3]:

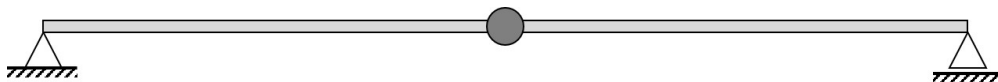
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (4.45)$$

Sustav izvršava  $\frac{1}{T_n}$  ciklusa u 1  $s$  i tu pojavu nazivamo prirodna ciklička frekvencija vibracija koju mjerimo u  $Hz$  tj. ciklusima u sekundi [3]:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (4.46)$$

Pojam prirodna frekvencija se odnosi na  $\omega_n$  i na  $f_n$ . Možemo primjetiti kako svojstva prirodnih vibracija  $\omega_n$ ,  $T_n$  i  $f_n$  ovise isključivo o masi te krutosti sustava. Uzmimo za primjer dva sustava s jednim stupnjem slobode; za istu masu ali različitu krutost, sustav s većom krutošću će imati veću prirodnu frekvenciju i kraći prirodni period, dok će za različitu masu ali istu krutost, sustav s većom masom imati niže prirodne frekvencije te duži prirodni period [3].

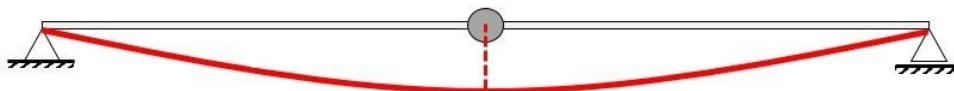
Vlastite vrijednosti možemo opisati kao prirodne frekvencije sustava koje odgovaraju određenim oblicima osciliranja sustava tj. vlastitim vektorima sustava. Uzmimo kao primjer sustav s jednim stupnjem slobode (Slika 4.21).



Slika 4.21: Sustav s jednim stupnjem slobode

Pošto sustav ima samo jedan stupanj slobode, pomak mase u vertikalnom smjeru, znamo da zbog toga ima samo jedan mogući oblik osciliranja (Slika 4.22). Također, možemo odrediti i prirodnu kružnu frekvenciju osciliranja sustava pomoću izraza (4.44), koja će odgovarati obliku osciliranja sa slike 4.22.

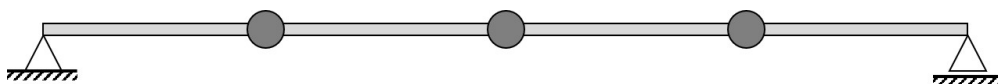
**1. ton ( $\omega_1$ )**



Slika 4.22: Oblik osciliranja sustava s jednim stupnjem slobode

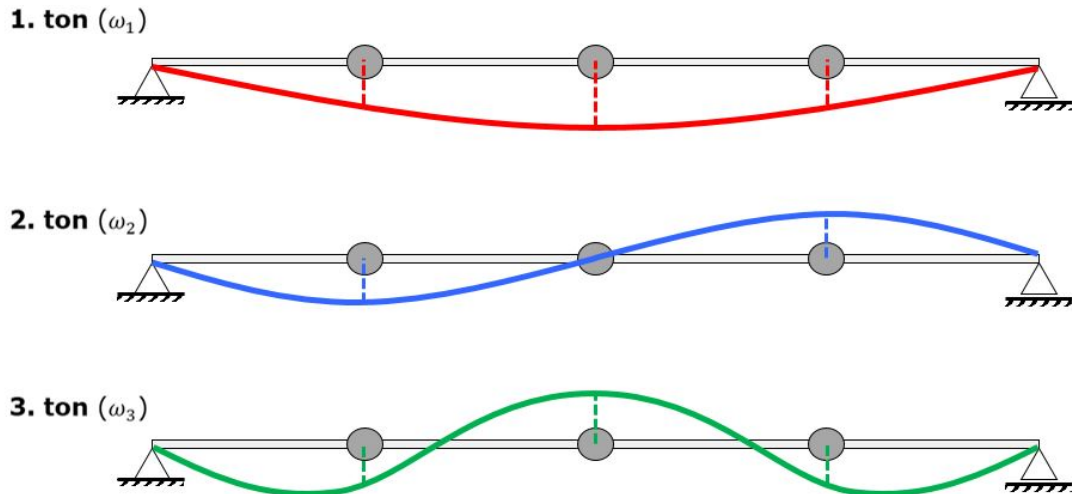
Međutim, uzmemo li u obzir sustav s više stupnjeva slobode, više nije moguće na isti način odrediti vlastite vrijednosti i oblike osciliranja. Kod sustava s više stupnjeva slobode, određivanje vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora se vrlo brzo komplicira zbog matričnog zapisa svojstava sustava. Iz tog razloga u sklopu ovog rada nije objašnjen postupak određivanja vlastitih vrijednosti i vektora, pošto nije na tome naglasak rada. Taj proračun je u potpunosti napravljen u *Python*-u, koristeći se gotovom naredbom *eigh* iz modula *scipy* koja na temelju matrice masa i krutosti računa vlastite vrijednosti i vektore sustava.

Unatoč tome, u nastavku je na primjeru sustava s tri stupnja slobode prikazano kako izgledaju oblici osciliranja te kojim prirodnim kružnim frekvencijama pripada koji oblik.



Slika 4.23: Sustav s tri stupnja slobode

Na slici 4.23 je prikazan sustav s tri stupnja slobode, koji su u ovom slučaju tri vertikalna pomaka mase. Općenito, dinamički odgovor bilo kojeg sustava se može opisati kao zbroj osnovnih oblika osciliranja u različitim omjerima.



Slika 4.24: Oblici osciliranja sustava s tri stupnja slobode

Na slici 4.24 vidimo tri osnovna oblika osciliranja sustava s tri stupnja slobode. Svaki oblik osciliranja možemo dobiti iz vlastitih vektora zajedno s pripadajućim vlastitim vrijednostima tj. prirodnim kružnim frekvencijama. Oblike osciliranja sa slike 4.24 (i općenito) možemo podijeliti na simetrične i asimetrične oblike, pa su prema tome prvi i treći ton simetrični oblici a drugi ton je asimetričan oblik osciliranja.

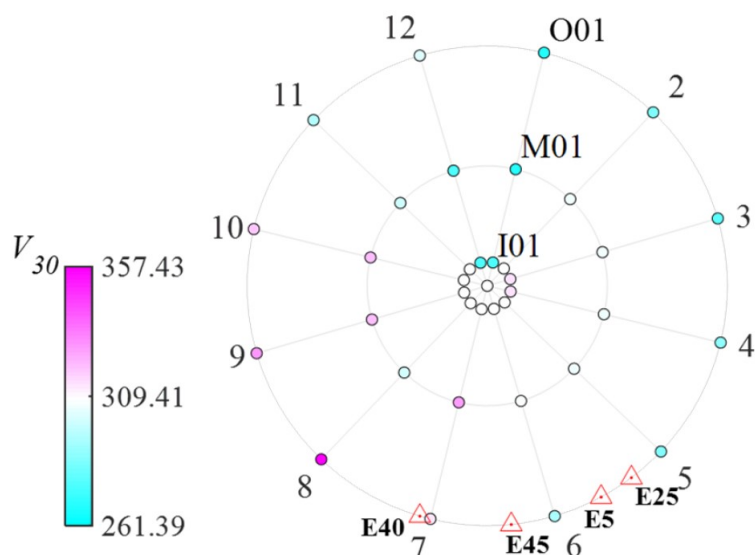
Naravno, s porastom broja stupnjeva slobode raste i broj različitih oblika osciliranja. Ono što treba napomenuti je da se viši oblici osciliranja pojavljuju pri višim frekvencijama osciliranja. Također, viši oblici osciliranja, u većini slučajeva, imaju manji utjecaj na ukupni dinamički odgovor konstrukcije tj. na ukupne pomake sustava.

Upravo se iz tog razloga u potresnom inženjerstvu prilikom projektiranja potresne otpornosti konstrukcija, ne uzimaju u obzir svi mogući oblici osciliranja s obzirom na broj stupnjeva slobode u sustavu. Vrlo često se uzimaju u obzir tonovi koji utječu na 90% ukupnog ponašanja konstrukcije. Primjerice, što je zgrada viša potrebno je uzeti više tonova u obzir, ali vrlo često je za niže objekte dovoljno uzeti u obzir prvih nekoliko oblika osciliranja.

## 5. EKSPERIMENTALNA ISPITIVANJA

U ovom dijelu rada su prikazani fizikalni modeli koji su korišteni u ispitivanjima, zajedno s mjernom opremom te vrstama provedenih ispitivanja. Ispitana su dva okvirna modela od kojih je na modelu okvira s mekim stupovima, u Laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci, provedena serija ispitivanja, s potresnim zapisima iz *SMART 1* sustava. Spomenuta serija ispitivanja je provedena u sklopu hrvatsko-kineskog bilateralnog projekta "Experimental study of bridge structures considering the asymmetric effect under multiple support excitation" u suradnji s istraživačima sa Dalian University of technology, Kina, a odabrana ispitivanja iz serije su obrađena i analizirana u sklopu ovog diplomskog rada.

*SMART 1* je sustav seizmografskih stanica, za promatranje i bilježenje snažnih seizmoloških kretanja, koje su posebno izrađene za inženjerske potrebe te seizmološka istraživanja i studije vezane uz nastanak i karakteristike blisko-poljnih potresa [11]. Blisko polje potresa se u potresnom inženjerstvu definira na udaljenosti od epicentra od 20-60 *km*, dok se daleko polje potresa nalazi na udaljenostima preko 200 *km* [12]. *SMART 1* sustav se nalazi na istočnoj obali otoka Tajvan te na slici 5.1 vidimo shematski prikaz rasporeda 37 postaja, od kojih je jedna središnja a ostalih 36 je raspoređeno unutar tri prstena gdje svaki prsten sadrži 12 seizmografskih stanica. Radijusi triju prstenova su 200 *m*, 1 *km* i 2 *km* [4]. Podaci korišteni u ispitivanjima su preuzeti sa PEER NGA-WEST2 baze podataka.



Slika 5.1: Shematski prikaz rasporeda seizmografskih stanica u *SMART I* sustavu [4]

Svaki prsten ima svoj naziv ovisno o tome gdje se nalazi, pa je tako *I (Inner)* unutarnji prsten, *M (Middle)* srednji prsten te *O (Outer)* vanjski prsten. Seizmografske stanice su u svakom prstenu numerirane od 1 do 12 a središnja stanica ima naziv *C00* [11].

## 5.1 Eksperimentalni modeli

Eksperimentalna ispitivanja su provedena na dva različita okvirna modela. Razlika između modela je u krutosti stupova te u broju dodanih utega na gredi. Prvi model je okvir s vrlo krutim stupovima na čiju su gredu pričvršćena tri utega od kojih je svaki težine  $4 N$  (Slika 5.2).



Slika 5.2: Fizikalni model okvira s krutim stupovima

Visina stupova je  $60 \text{ cm}$  a greda je dužine  $200 \text{ cm}$  na koju su pričvršćeni utezi na međusobno jednakim razmacima od  $50 \text{ cm}$ .

Drugi model je okvir sa stupovima puno manje krutosti u odnosu na prvi okvir te su na gredu sada pričvršćena četiri utega (Slika 5.3); težina svakog utega je  $4 N$  kao i u prvom modelu.



Slika 5.3: Fizikalni model okvira sa stupovima manje krutosti

Visina stupova je u ovom slučaju  $50\text{ cm}$  dok je greda dužine  $201\text{ cm}$  sa postavljenim utezima na međusobno jednakim razmacima od  $67\text{ cm}$ .

Oba okvirna modela imaju na gredi pričvršćene utege te se u oba slučaja radi o utezima iste težine. Svaki uteg je težine  $2 N$  (Slika 5.4) ali su na gredu uvijek postavljeni u paru, sa svake strane grede po jedan, tako da ukupna težina iznosi  $4 N$ .

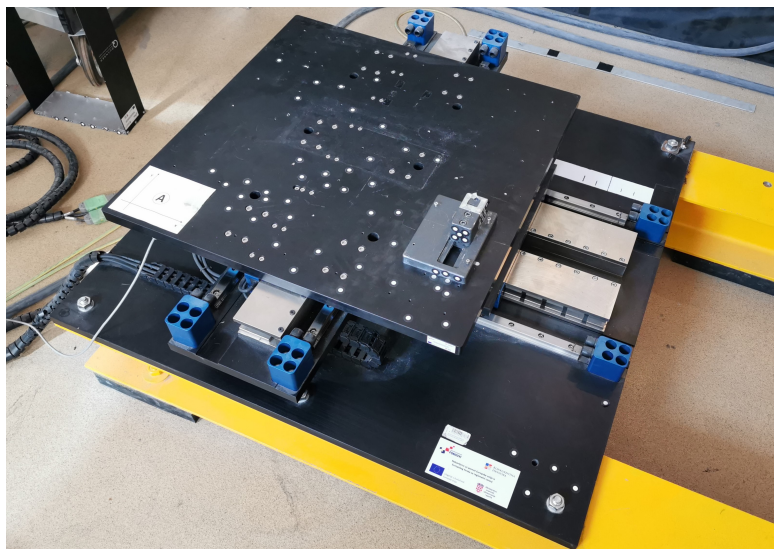


Slika 5.4: Utezi težine  $2 N$  [5]



## 5.2 Mjerna oprema i potresni stolovi

Kako bismo okvirne modele izložili harmonijskim ili potresnim pobudama, potrebni su nam potresni stolovi te su u sklopu rada za te potrebe korištene dvije potresne platforme marke Quanser ST-III (Slika 5.5).



Slika 5.5: Potresni stol Quanser ST-III

Svaki potresni stol se pokreće pomoću ugrađenog elektromagnetnog motora koji omogućuje simuliranje ubrzanja frekvencijom i do 20 Hz. Zbog zasebnih elektromagnetnih motora, moguće je nanijeti različitu pobudu na svaki stol, sa ili bez vremenskog zakašnjenja između stolova. Pomaci su mogući u  $x$  i  $y$  smjeru tj. mogući su samo u horizontalnoj ravnini u dva međusobno okomita smjera te maksimalni mogući pomaci iznose 15 cm u oba smjera kretanja. Ako su stolovi neopterećeni onda su moguća ubrzanja od 2.8g u  $x$  smjeru te 4.5g u  $y$  smjeru.

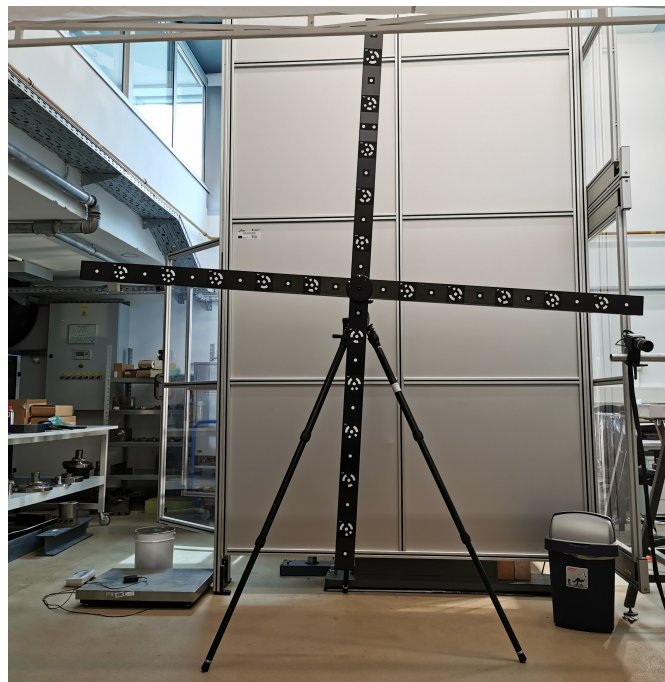
Ponašanje okvira tj. dinamički odgovor okvirnog modela je praćen i bilježen pomoću optičkog mjernog sustava za praćenje pomaka i deformacija GOM Aramis 4M (Slika 5.6). Korištenjem sustava koji nije direktno povezan s potresnim stolovima značajno umanjujemo mogućnost pogrešaka pri mjerenju koje bi se mogle pojaviti kada bismo pomake pratili preko potresnih stolova.





Slika 5.6: Optički mjerni sustav GOM Aramis 4M [5]

Optički sustav se sastoji od dvije kamere koje imaju mogućnost slikanja s visokim frekvencijama. Kamere je prije korištenja potrebno kalibrirati kako bi mjerenja bila što točnija tj. kako bi se smanjile pogreške prilikom obrade. Za kalibraciju je korišten kalibracijski križ (Slika 5.7) pomoću kojega je nakon kalibracije moguće snimati mjerne volumene od cca  $20 \times 20 \times 10 \text{ mm}$  do cca  $2000 \times 2000 \times 2000 \text{ mm}$ .



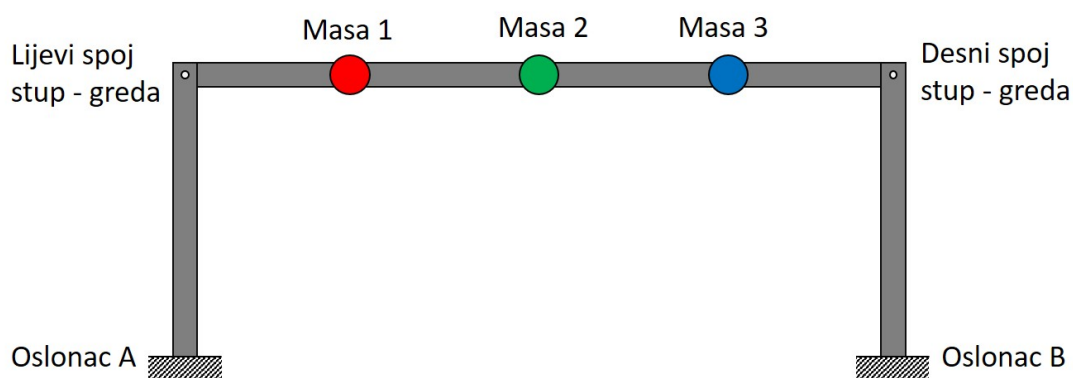
Slika 5.7: Kalibracijski križ [5]

U našem slučaju, kamere su kalibrirane na radnoj udaljenosti od  $3380 \text{ mm}$  s mjernim volumenom  $2305 \times 1735 \times 1735 \text{ mm}$ . Nakon provedene kalibracije potrebno je kamere tj. optički sustav postaviti na udaljenosti od mjernog objekta (okvirni model) koja je korištena tijekom kalibracije. Osim radne udaljenosti, ne smije se mijenjati ni kut između kamera koji u našem slučaju iznosi  $19.5^\circ$ .

## 5.3 Rezultati eksperimentalnih ispitivanja

### 5.3.1 Okvir s krutim stupovima

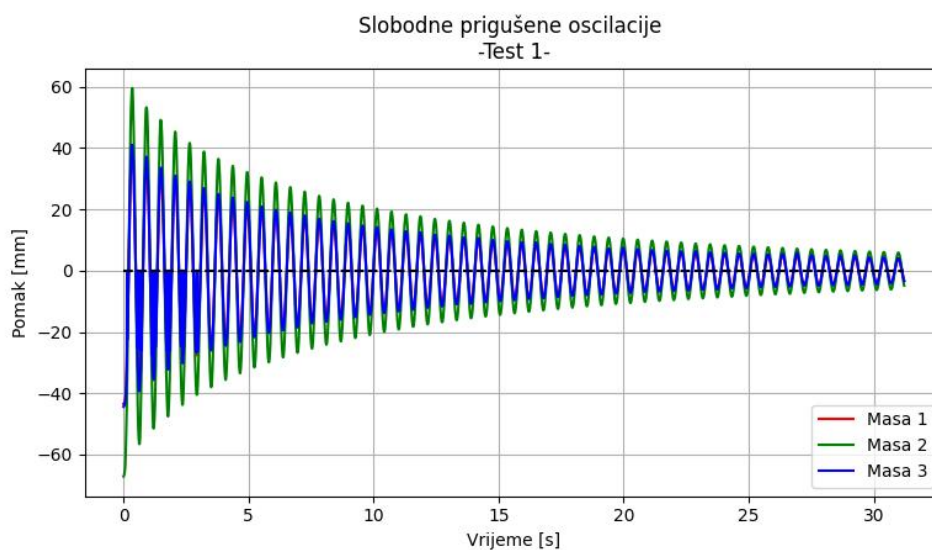
Okvirni model s krutim stupovima je izložen dvjema vrlo različitim pobudama te se prvo ispitivanje tiče slobodnih prigušenih oscilacija a drugo je vezano uz prisilne prigušene vibracije. Provedena su ukupno dva ispitivanja te su pojedinosti svakog objašnjene zasebno u nastavku. Radi lakšeg praćenja, pomaci masa su razvrstani po bojama te ih dijagrami pomaka u nastavku prate u skladu sa shematskim prikazom na slici (5.8).



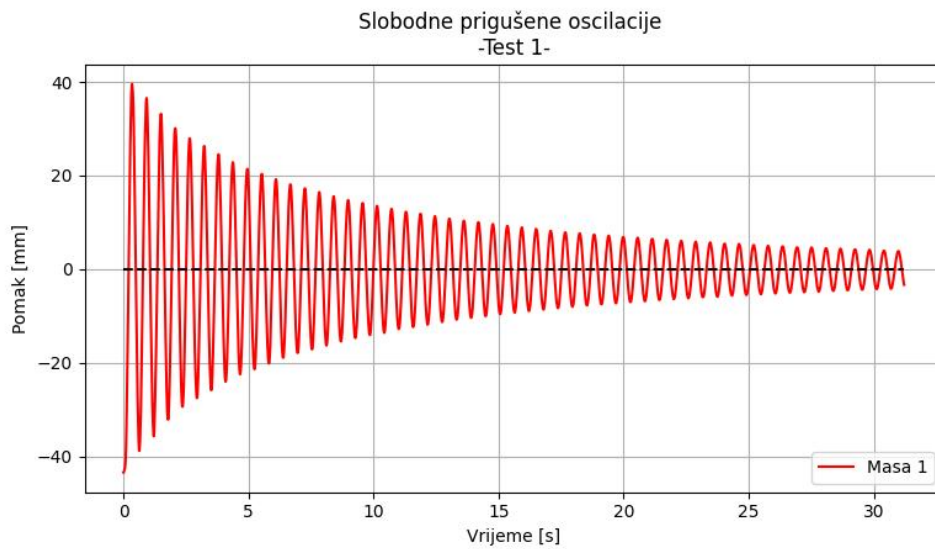
Slika 5.8: Okvir s krutim stupovima - podjela pomaka masa po bojama

#### Test 1

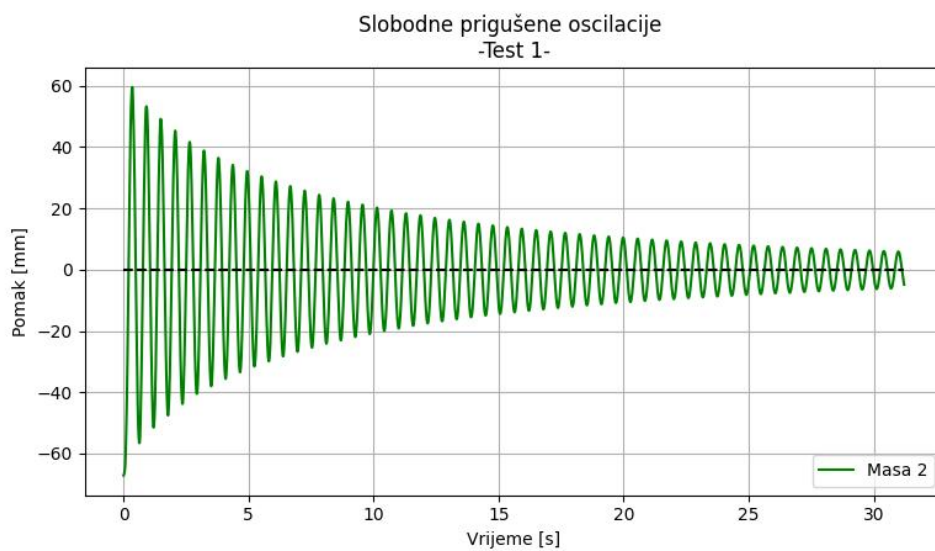
U prvome ispitivanju je središnja masa (masa 2) izbačena iz ravnotežnog položaja te je ispuštena, nakon čega započinju slobodne prigušene oscilacije. Ovo ispitivanje je bilo potrebno kako bismo kasnije odredili koeficijent prigušenja sustava.



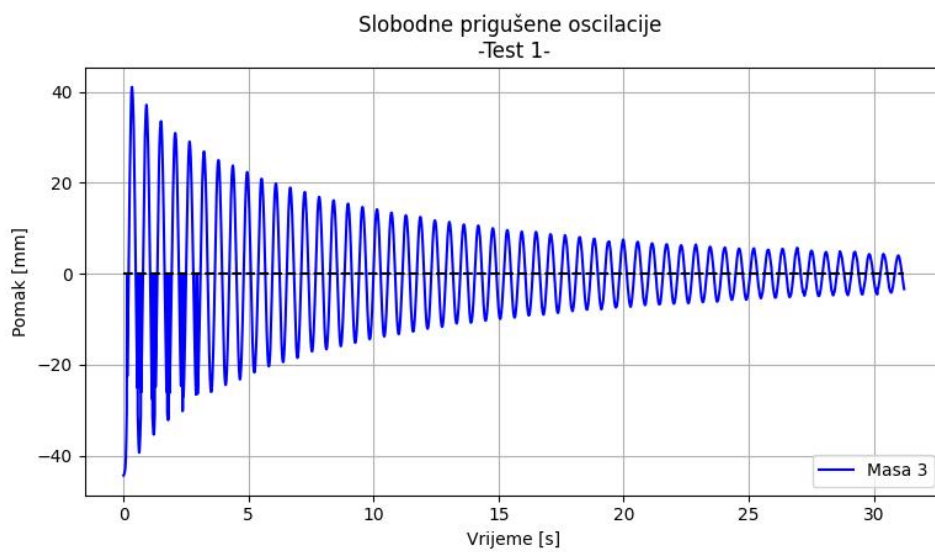
Slika 5.9: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (test 1)



Slika 5.10: Dijagram pomaka mase 1 - eksperimentalna ispitivanja (test 1)

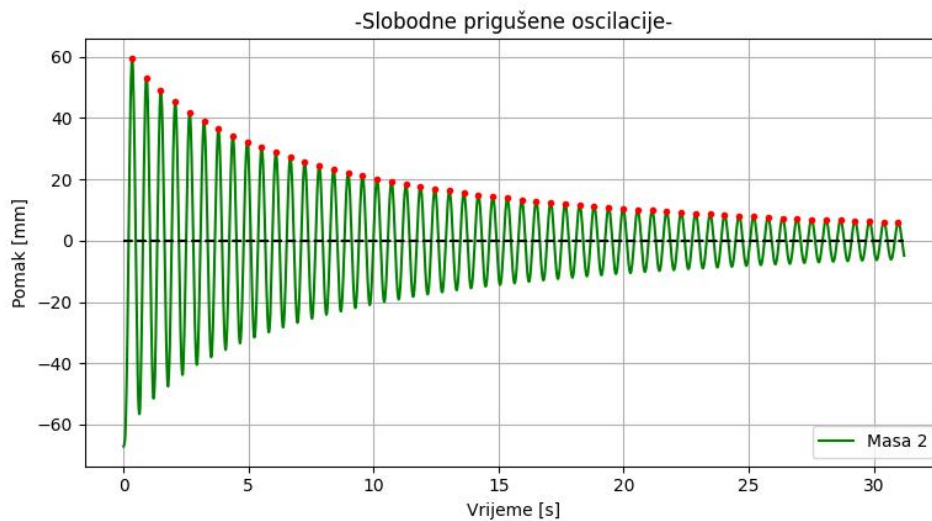


Slika 5.11: Dijagram pomaka mase 2 - eksperimentalna ispitivanja (test 1)



Slika 5.12: Dijagram pomaka mase 3 - eksperimentalna ispitivanja (test 1)

U nastavku su prikazani rezultati određivanja koeficijenta prigušenja  $\zeta$ , koristeći metode koje su opisane u poglavlju 4. Ovdje je prikazan samo konačni rezultat zajedno s pratećim dijagramom potrebnim za proračun. Koeficijent prigušenja okvira s krutim stupovima je određen na temelju uzastopnih amplituda iz ispitivanja sa slobodnim prigušenim oscilacijama (Test 1).



Slika 5.13: Amplitude pomaka korištene za izračun koeficijenta prigušenja

Koeficijent prigušenja je određen pomoću izraza te 54 amplitude pomaka (Slika 5.13):

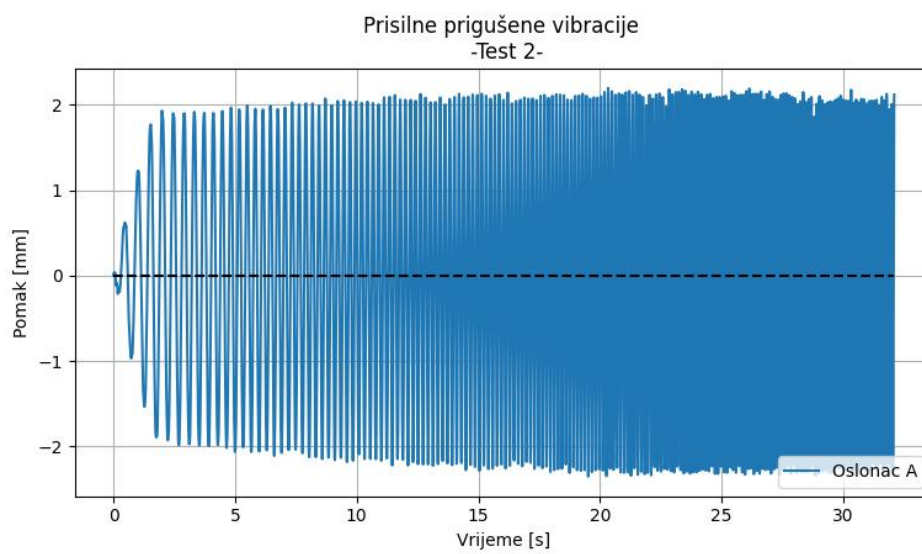
$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} \quad (5.1)$$

Izračunata su sveukupno 53 koeficijenta prigušenja, koji nisu prikazani u radu, a konačni koeficijent prigušenja je dobiven kao srednja vrijednost te iznosi:

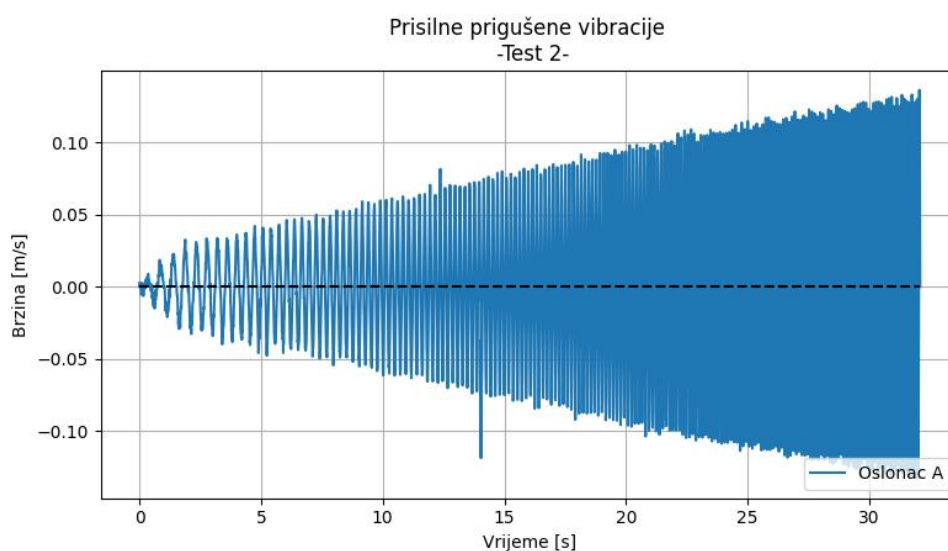
$$\zeta = 0.006938$$

## Test 2

U drugom ispitivanju, okvirni model je izložen tzv. *Sinesweep* pobudi. To je vrsta pobude gdje su amplitude pomaka konstantne ali se frekvencije u vremenu pravilno i kontinuirano povećavaju (Slika 5.14). Cilj provođenja ovakve vrste ispitivanja je da se konstrukciju izloži opterećenju kroz što veći spektar frekvencija ne bismo li u tom procesu pronašli vlastite frekvencije modela ili frekvencije koje su po vrijednosti vrlo blizu vlastitima.

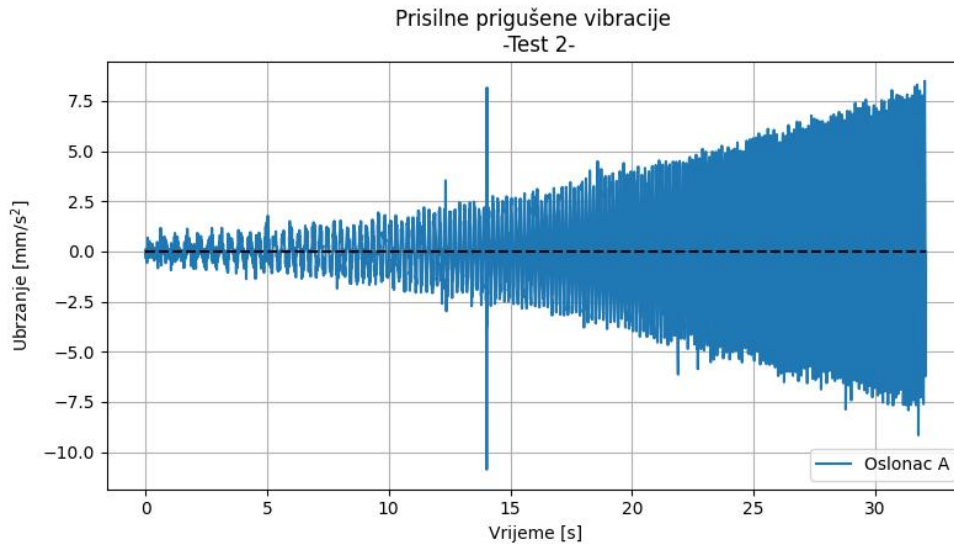


Slika 5.14: Dijagram pomaka lijevog oslonca - eksperimentalna ispitivanja (test 2)



Slika 5.15: Dijagram brzina lijevog oslonca - eksperimentalna ispitivanja (test 2)





Slika 5.16: Dijagram ubrzanja lijevog oslonca - eksperimentalna ispitivanja (test 2)

Na slikama 5.15 i 5.16 vidimo kako izgledaju brzine i ubrzanja lijevog oslonca okvira. Jasno se vidi kako se kontinuirano povećavaju brzine i ubrzanja, što je i logično pošto se frekvencija osciliranja također kontinuirano povećava, kao što je opisano ranije u tekstu. Zapišemo li jednadžbu pomaka pobude, dolazimo do izraza (5.2):

$$x_g(t) = x_{g_0} \sin(\omega t), \quad (5.2)$$

kada ga deriviramo po vremenu dobivamo:

$$v_g = \dot{x}_g = x_{g_0} \omega \cos \omega t = v_{g_0} \cos(\omega t), \quad (5.3)$$

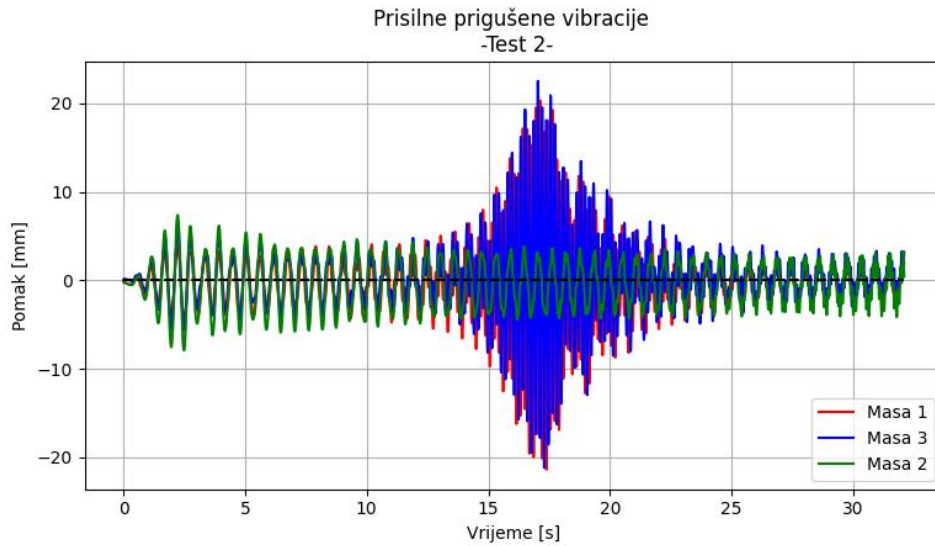
a daljnjom derivacijom izraza (5.3) po vremenu, dolazimo do izraza za ubrzanje:

$$a_g = \dot{v}_g = -x_{g_0} \omega^2 \sin(\omega t) = a_{g_0} \sin(\omega t). \quad (5.4)$$

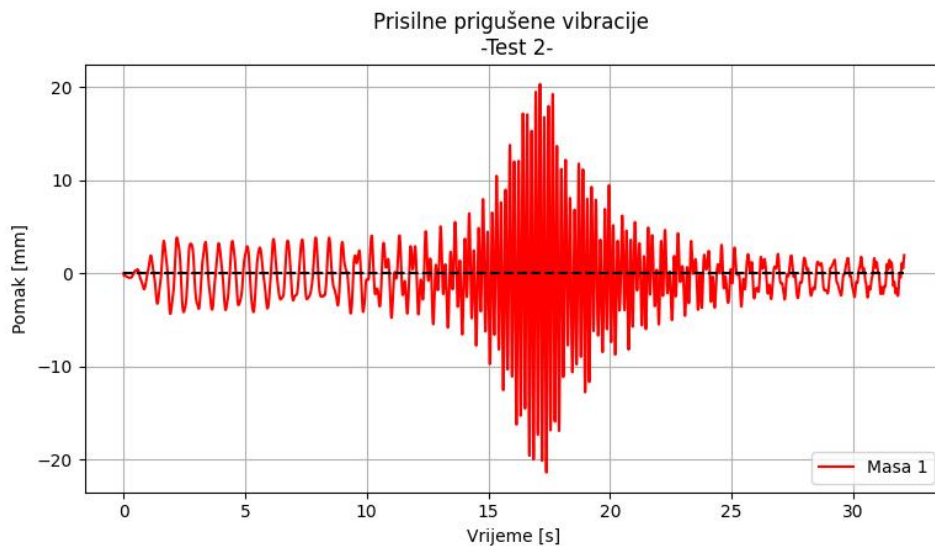
S obzirom da se frekvencija kod *Sinesweep* pobude konstantno povećava, jasno je da je u tom slučaju amplituda funkcije brzine  $v_{g_0} = x_{g_0} \omega$  linearna funkcija, dok je amplituda funkcije ubrzanja  $|a_{g_0}| = x_{g_0} \omega^2$  kvadratna funkcija.

Treba napomenuti kako se ovaj skok u dijagramima, oko 14. sekunde, pojavljuje kao posljedica greške optičkih mjerenja. U dijagramu pomaka (Slika 5.14) ta greška nije jasno vidljiva ali pošto su brzine i ubrzanja derivacije pomaka u vremenu, a vremenski korak je ovdje 0.01 s, ta greška vrlo brzo dolazi do izražaja u dijagramima brzine i ubrzanja (Slike 5.15 i 5.16).

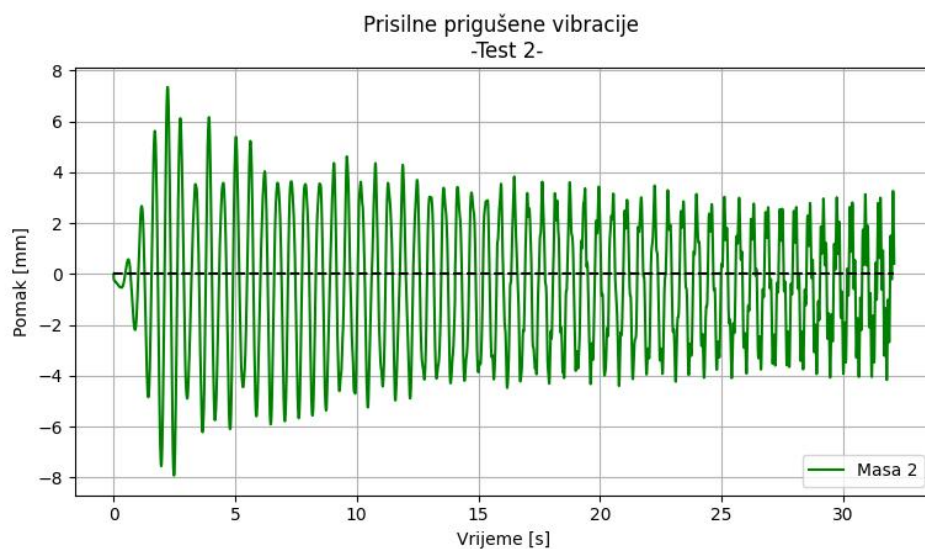
[h]



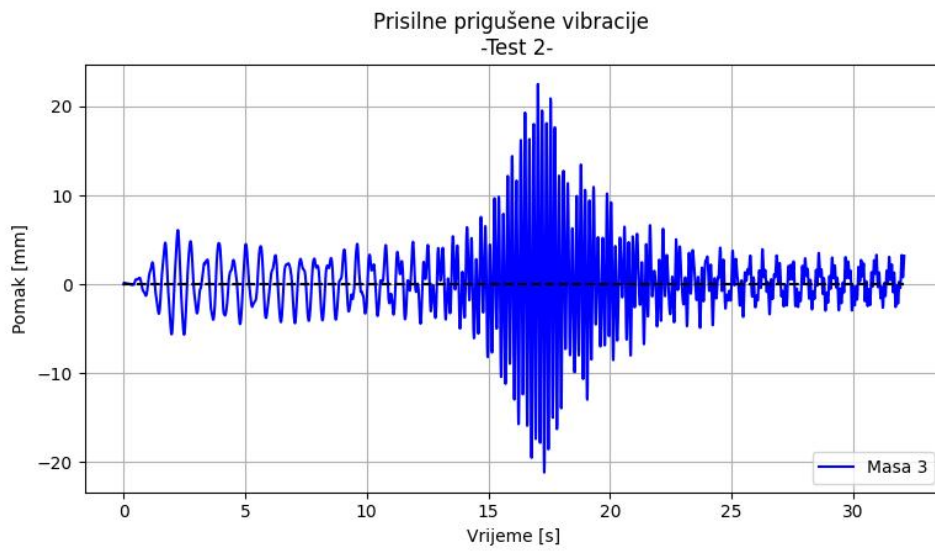
Slika 5.17: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (test 2)



Slika 5.18: Dijagram pomaka mase 1 - eksperimentalna ispitivanja (test 2)



Slika 5.19: Dijagram pomaka mase 2 - eksperimentalna ispitivanja (test 2)



Slika 5.20: Dijagram pomaka mase 3 - eksperimentalna ispitivanja (test 2)

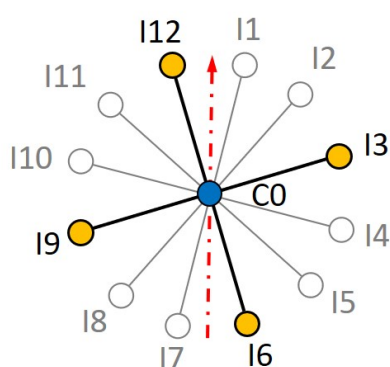


### 5.3.2 Okvir s mekim stupovima

U sklopu ovog rada, okvirni model s mekim stupovima je izložen izabranim potresnim zapisima, iz *SMART 1* sustava, zabilježenima u središnjoj postaji C-00 te unutarnjem prstenu *I*. Model je izložen višestrukoj pobudi oslonaca, tako što su kombinirani potresni zapisi iz središnje postaje te zapisi jedne od postaja iz unutarnjeg prstena. Sveukupno je provedeno pet ispitivanja, pod sljedećim nazivima:

- SE\_C0C0
- SE\_C0I3
- SE\_C0I6
- SE\_C0I9
- SE\_C0I12

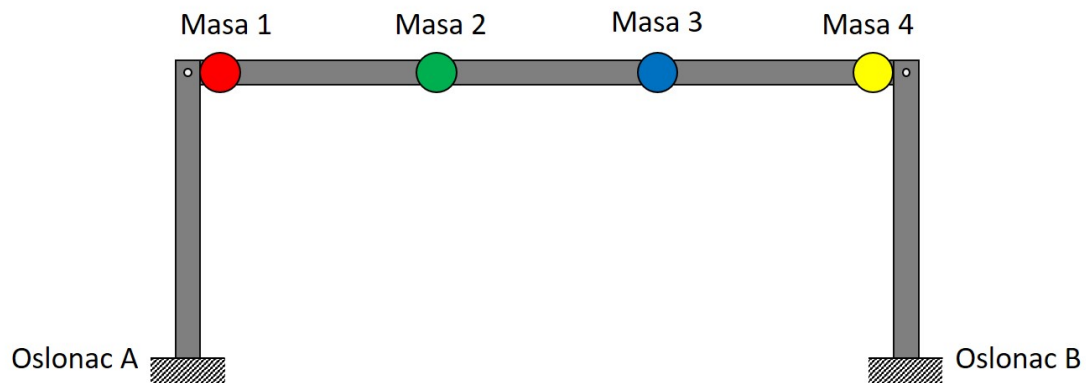
Dio "SE" u nazivu znači da se radi o jugoistočnoj komponenti mjerenja potresnog zapisa (*SouthEast*). Drugi dio u nazivu je od većeg značaja jer on opisuje kojoj kombinaciji potresnih zapisa je okvirni model izložen. Primjerice, ispitivanje pod nazivom SE\_C0I3 znači da je lijevi oslonac okvira (Oslonac A) izložen potresnom zapisu izmjenom u središnjoj postaji C-00, a da je desni oslonac okvira (Oslonac B) izložen zapisu izmjenom u postaji broj 3 koja se nalazi u unutarnjem prstenu *I*. U svakom ispitivanju je lijevi oslonac izložen zapisu iz središnje postaje dok su za desni oslonac korišteni zapisi iz četiri međusobno okomita smjera tj. iz četiri postaje koje se nalaze na međusobno okomitim pravcima (Slika 5.21).



Slika 5.21: Unutarnji prsten SMART 1 sustava

U ovom dijelu su prikazani samo izmjereni pomaci za svako ispitivanje, a kasnije će biti analizirani i iz njih izvučeni zaključci.

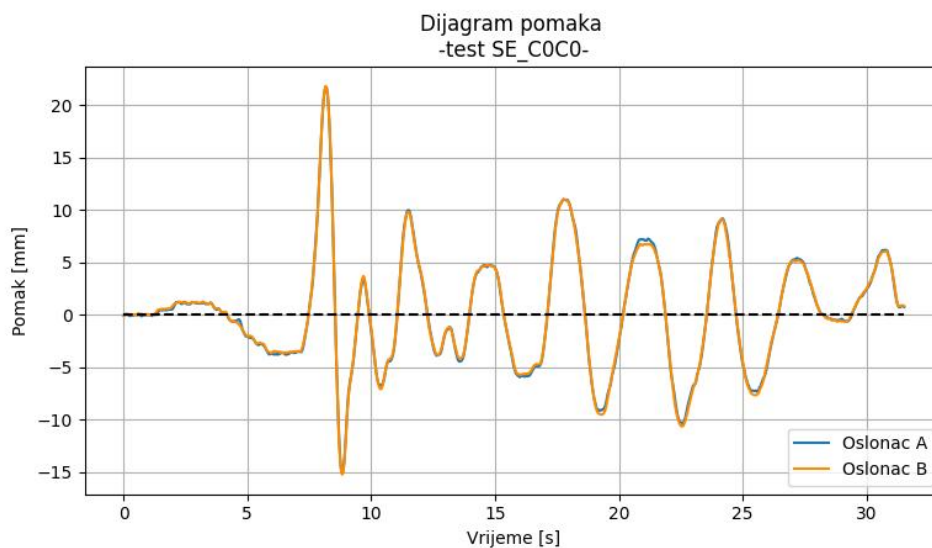
U nastavku su prikazani rezultati iz provedenih ispitivanja te je na slici (5.22) prikazana podjela pomaka masa po bojama za lakše praćenje dijagrama pomaka prikazanih u nastavku. Rezultati odabranih eksperimenata će u nastavku rada biti korišteni za validaciju numeričkog modela, a svi detaljni rezultati eksperimentalnih ispitivanja zajedno s komentarima su prikazani u poglavlju 8.1



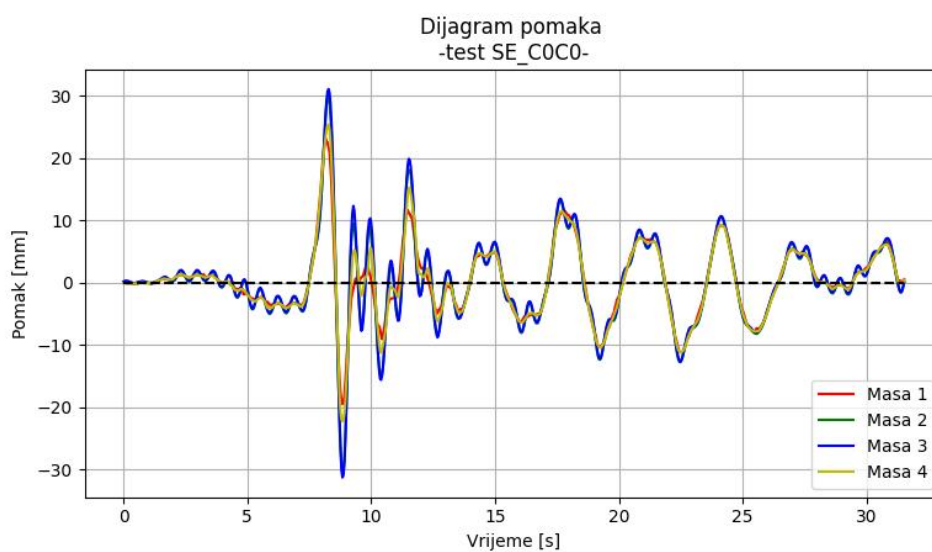
Slika 5.22: Okvir s mekim stupovima - podjela pomaka masa po bojama

## Ispitivanje SE\_C0C0

Pobude oba oslonca kod ispitivanja jednolikom pobudom SE\_C0C0 su prikazane na slici 5.23, dok su pomaci masa na modelu prikazani na slici 5.24.

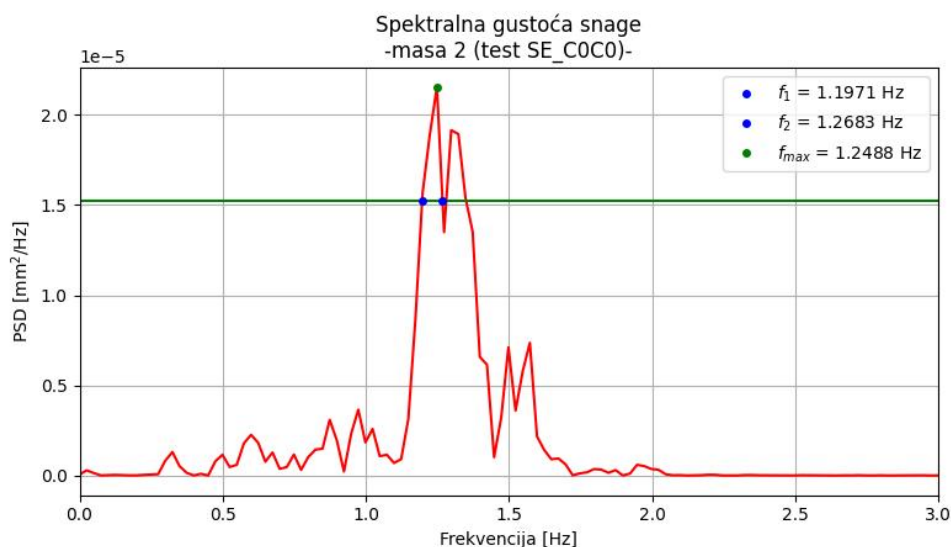


Slika 5.23: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0C0)

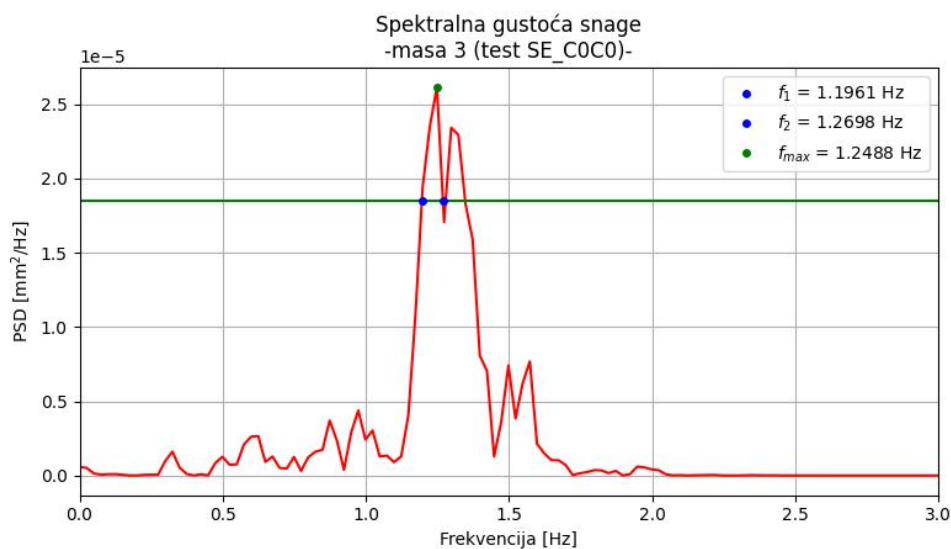


Slika 5.24: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0C0)

Pošto su u sklopu rada korištena dva različita modela okvira, s različitim geometrijskim karakteristikama i brojem dodanih utega, potrebno je odrediti dva koeficijenta prigušenja. Za određivanje koeficijenta prigušenja okvira sa stupovima manje krutosti je korištena druga metoda iz razloga što na ovom okvirnom modelu nisu ispitane slobodne prigušene oscilacije. Koeficijent prigušenja okvira sa stupovima manje krutosti je dobiven pomoću *Half - power bandwidth* metode koja je također opisana u poglavlju 4. Za proračun su korištena dva dijagrama spektralne gustoće snage, koji su dobiveni iz pomaka mase 2 i 3 iz ispitivanja SE\_C0C0.



Slika 5.25: Graf spektralne gustoće snage mase 2 za izračun koeficijenta prigušenja



Slika 5.26: Graf spektralne gustoće snage mase 3 za izračun koeficijenta prigušenja

Izraz za izračun koeficijenta prigušenja glasi:

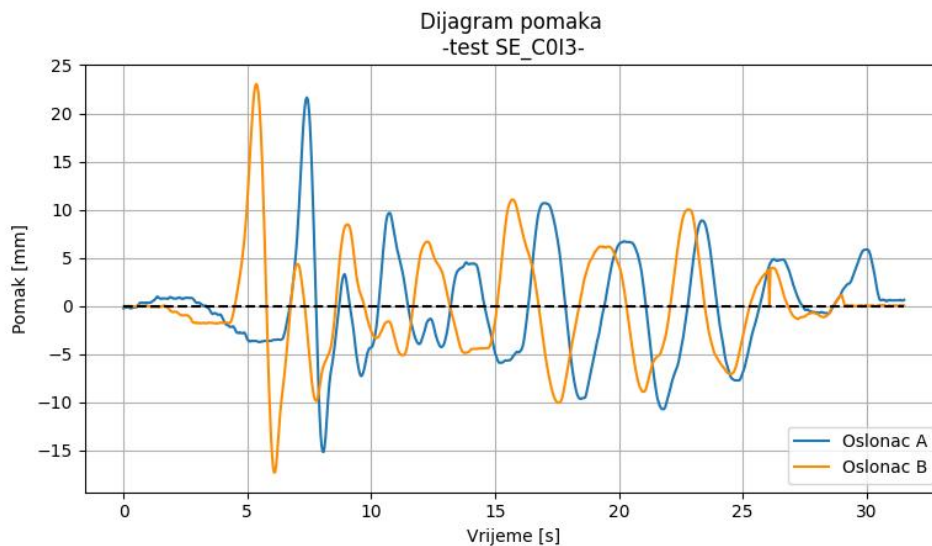
$$\zeta = \frac{f_2 - f_1}{2f_{max}} \quad (5.5)$$

Dobiveni koeficijenti prigušenja za obje mase su vrlo slični, zbog sličnih frekvencija, te je izračunata njihova srednja vrijednost koja je korištena u dalje u numeričkom modelu:

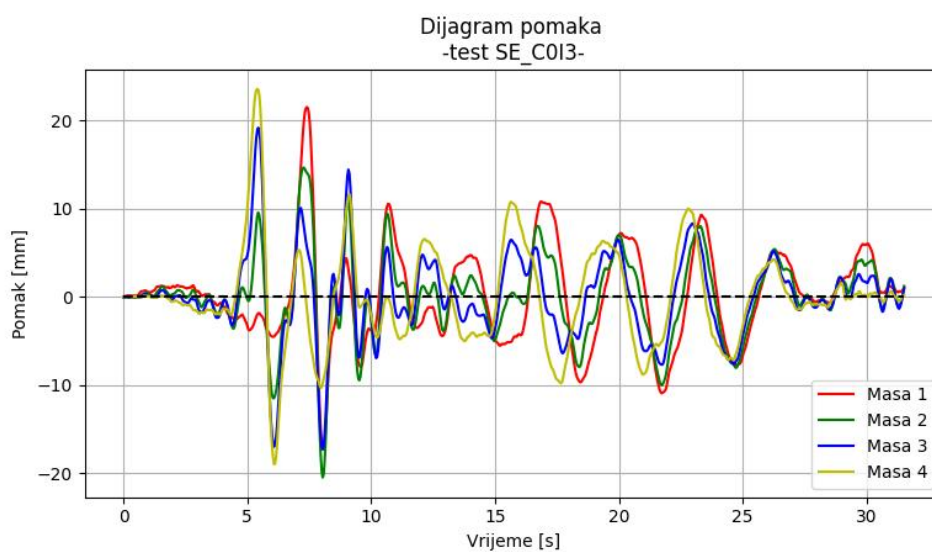
$$\zeta = 0.02901$$

## Ispitivanje SE\_C0I3

Pobude oba oslonca kod ispitivanja s višestrukom pobudom SE\_C0I3 su prikazane na slici 5.27, dok su pomaci masa na modelu prikazani na slici 5.28.



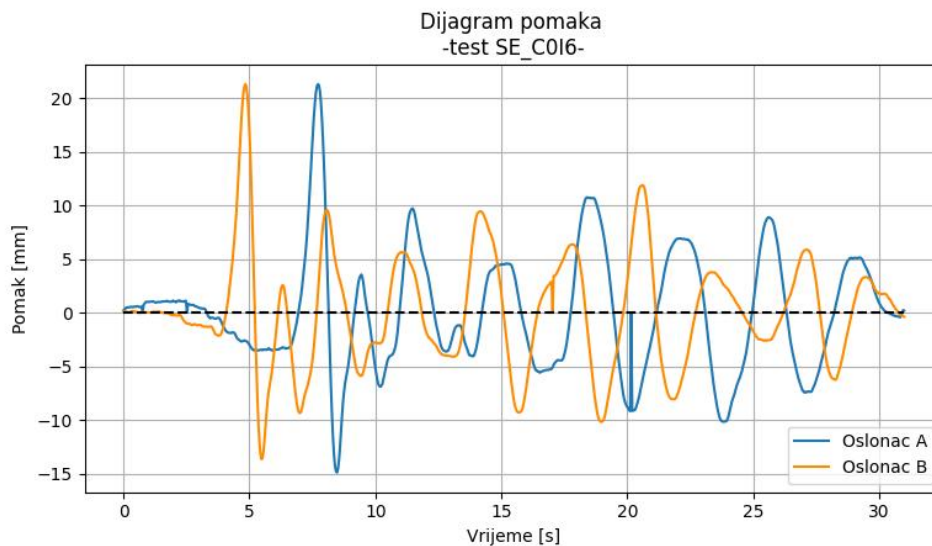
Slika 5.27: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I3)



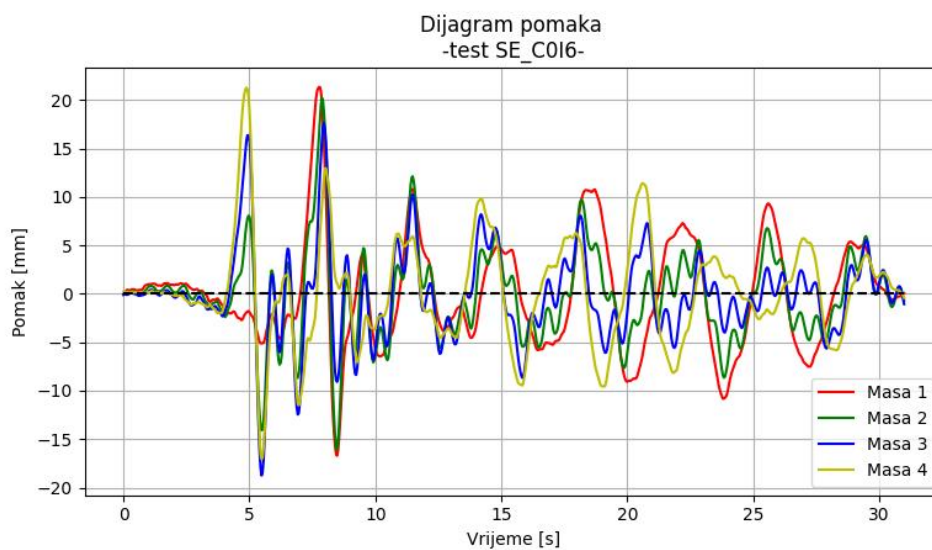
Slika 5.28: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I3)

## Ispitivanje SE\_C0I6

Pobude oba oslonca kod ispitivanja s višestrukom pobudom SE\_C0I6 su prikazane na slici 5.29, dok su pomaci masa na modelu prikazani na slici 5.30.



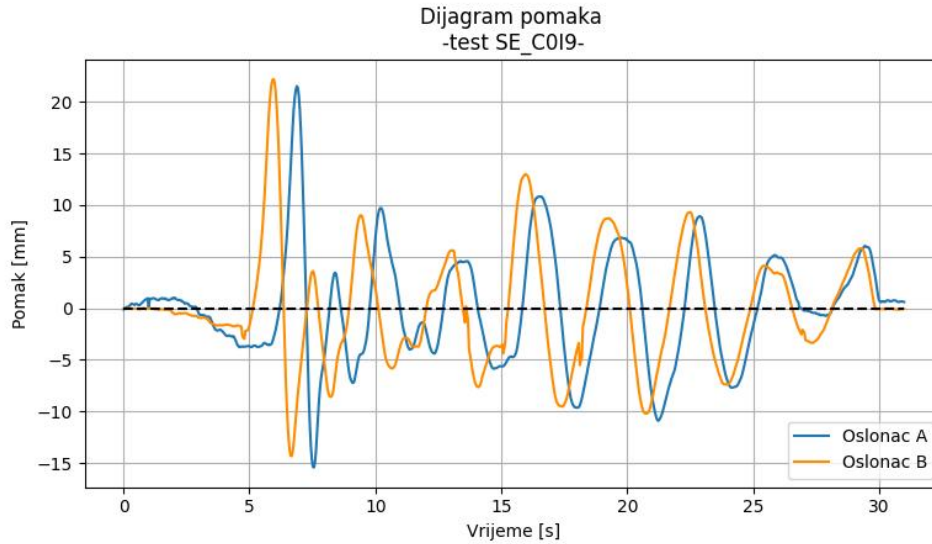
Slika 5.29: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I6)



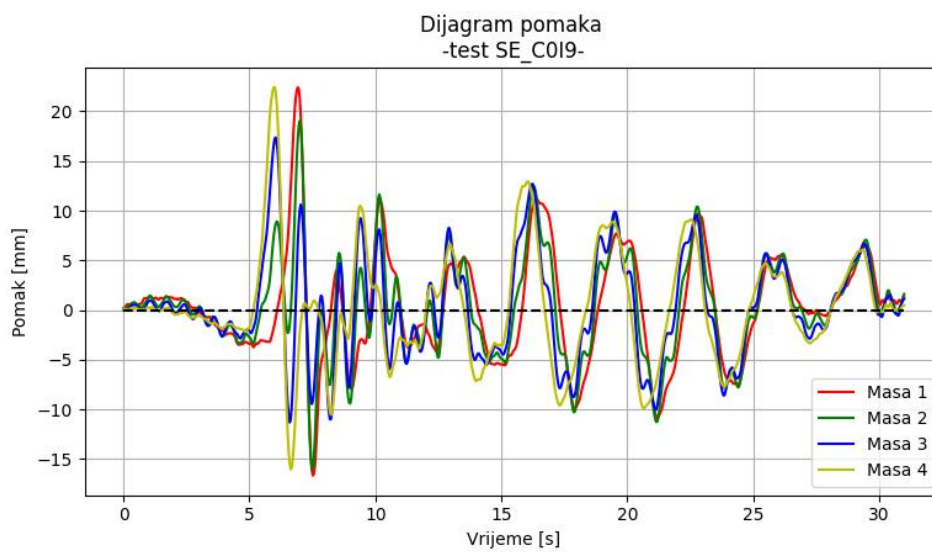
Slika 5.30: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I6)

## Ispitivanje SE\_C019

Pobude oba oslonca kod ispitivanja s višestrukom pobudom SE\_C019 su prikazane na slici 5.31, dok su pomaci masa na modelu prikazani na slici 5.32.



Slika 5.31: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C019)

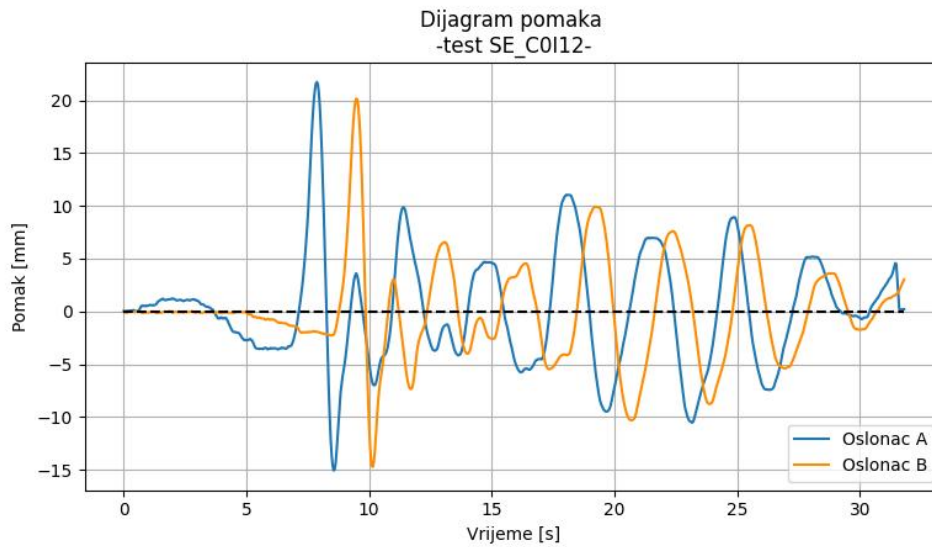


Slika 5.32: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C019)

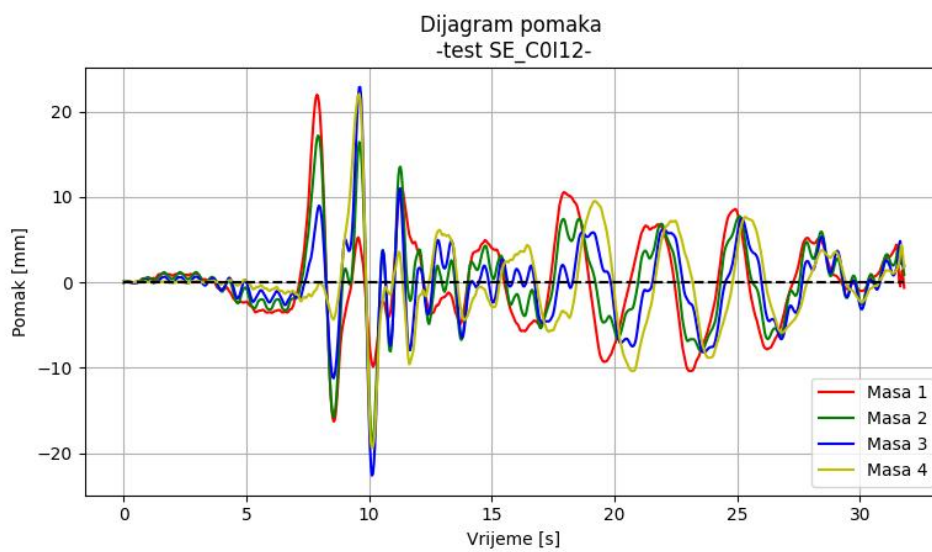


## Ispitivanje SE\_C0I12

Pobude oba oslonca kod ispitivanja s višestrukom pobudom SE\_C0I12 su prikazane na slici 5.33, dok su pomaci masa na modelu prikazani na slici 5.34.



Slika 5.33: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I12)



Slika 5.34: Dijagram pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I12)

## 6. NUMERIČKI MODEL

U prošlim poglavljima je prikazano na koji način možemo zapisati jednadžbu dinamičke ravnoteže za različite vrste sustava, kako možemo preformulirati izvedene jednadžbe (ili njezine djelove) kako bismo ih lakše riješili te na koji način određujemo fizička svojstva sustava (krutost, masa, prigušenje). Međutim, nigdje nije prikazano ili objašnjeno na koji način pristupamo samome rješavanju. Točnost dinamičke analize velikim dijelom ovisi o numeričkim metodama koje su korištene unutar analize kako bismo došli do rješenja sustava jednadžbi dinamičke ravnoteže. Iz tog su razloga na početku ovog poglavlja predstavljene metode koje su korištene u radu.

Najčešći pristup rješavanju dinamičkog odgovora konstrukcija je direktnom numeričkom integracijom jednadžbi dinamičke ravnoteže. To znači da se nastoji zadovoljiti dinamička ravnoteža u diskretnim točkama sustava u svakom vremenskom trenutku, nakon što je rješenje definirano za početak tj. nakon što su zadani početni uvjeti. Postoji mnogo numeričkih metoda, ali sve ih možemo razvrstati u dvije kategorije [13]:

- Eksplicitne integracijske metode,
- Implicitne integracijske metode.

Eksplicitne metode ne zahtijevaju rješenje skupa linearnih jednadžbi u svakom koraku, nego koristeći se diferencijalnom jednadžbom, u vremenu  $t$  predviđaju rješenje u vremenu  $t + \Delta t$ . Kod stvarnih konstrukcija potreban je vrlo malen vremenski korak kako bi rješenje bilo stabilno. Iz tog su razloga sve eksplicitne metode uvjetno stabilne [13].

Implicitne metode nastoje zadovoljiti diferencijalnu jednadžbu u vremenu  $t$  nakon što je poznato rješenje u vremenu  $t - \Delta t$ . Takve metode zahtijevaju rješenje skupa linearnih jednadžbi u svakom vremenskom koraku, ali zato je moguće korištenje većih vremenskih koraka. Implicitne metode mogu biti uvjetno i bezuvjetno stabilne [13].

Na temelju iskustva, došlo se do zaključka kako je za seizmičku analizu stvarnih konstrukcija najopravdanije korištenje implicitnih, bezuvjetno stabilnih metoda [13]. Jedna od takvih metoda, koja je i korištena u sklopu ovog rada, je prikazana u nastavku.

## 6.1 Newmarkova metoda

Newmark je 1959. godine predstavio skupinu jednostupanjskih integracijskih metoda za rješavanje dinamičkih problema stvarnih konstrukcija izloženih udarnim i potresnim djelovanjima. Polazna točka ove metode je jednažba dinamičke ravnoteže zapisana u matričnom obliku [13]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t \quad (6.1)$$

Korištenjem Taylor-ovog reda moguće je dobiti sljedeće dvije jednažbe [13]:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \dots, \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \dots \quad (6.3)$$

Newmark je jednažbe (6.2) i (6.2) skratio i zapisao ih u sljedećem obliku [13]:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^3 \ddot{\mathbf{u}}, \quad (6.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}, \quad (6.5)$$

gdje su  $\beta$  i  $\gamma$  Newmarkovi parametri integracije o kojima će više riječi biti u nastavku. Pretpostavimo li da je ubrzanje linearno unutar vremenskog koraka, možemo zapisati sljedeći izraz [13]:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{(\ddot{\mathbf{u}}_t - \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t})}{\Delta t}. \quad (6.6)$$

Uvođenjem izraza (6.6) u jednažbe (6.4) i (6.5), dolazimo do Newmarkovih izraza zapisanih u standardnom obliku [13]:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (6.7)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (6.8)$$

Newmark je jednažbe (6.7), (6.8) i (6.1) rješio iteracijom u svakom vremenskom koraku i za svaki stupanj slobode sustava. Wilson je 1962. godine u Newmarkovu metodu uveo matrični zapis, dodao prigušenje koje je proporcionalno krutosti i masi te uklonio potrebu za iteriranjem, uvođenjem izravnog rješenja jednažbi u svakom vremenskom koraku. To zahtijeva da jednažbe (6.7) i (6.8) budu zapisane u sljedećem obliku [13]:

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = b_1(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) + b_2 \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + b_3 \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} \quad (6.9)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = b_4(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) + b_5\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + b_6\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} \quad (6.10)$$

gdje su konstante  $b_1$  do  $b_6$ :

$$b_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \quad (6.11)$$

$$b_2 = -\frac{1}{\beta\Delta t} \quad (6.12)$$

$$b_3 = 1 - \frac{1}{2\beta} \quad (6.13)$$

$$b_4 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \quad (6.14)$$

$$b_5 = 1 - \frac{\gamma}{\beta} \quad (6.15)$$

$$b_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t, \quad (6.16)$$

Uvođenjem jednadžbi (6.9) i (6.10) u izraz (6.1), dolazimo do jednadžbe dinamičke ravnoteže sustava u vremenu  $t$  koja ovisi o nepoznatim pomacima  $\mathbf{u}_t$  [13]:

$$\begin{aligned} (b_1\mathbf{M} + b_4\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u}_t &= \mathbf{p}_t + \mathbf{M}(b_1\mathbf{u}_{t-\Delta t} - b_2\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} - b_3\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t}) \\ &+ \mathbf{C}(b_4\mathbf{u}_{t-\Delta t} - b_5\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} - b_6\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

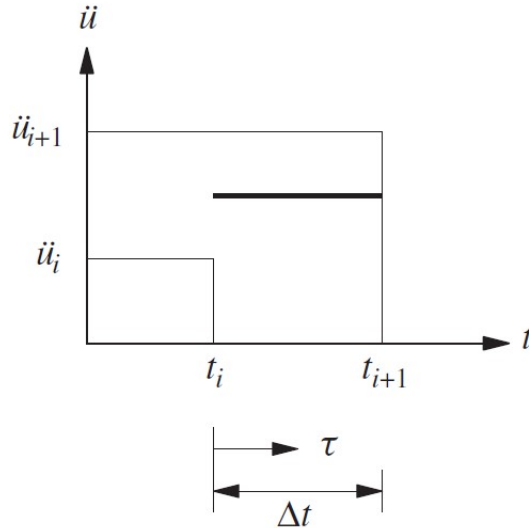
Pomoću izraza (6.17) sada možemo odrediti nepoznate pomake  $\mathbf{u}_t$  u svakoj točki sustava, na temelju poznatih pomaka  $\mathbf{u}_{t-\Delta t}$ . Izrazima (6.9) i (6.10) možemo odrediti nepoznate brzine i ubrzanja na sličan način.

### 6.1.1 Stabilnost Newmarkove metode

Newmarkova metoda spada u kategoriju implicitnih integracijskih metoda te kao takva može biti uvjetno i bezuvjetno stabilna. U ovom dijelu rada su u kratkim crtama objašnjena dva posebna slučaja Newmarkove metode i stabilnost oba. Posebne metode proračuna unutar Newmarkove skupine metoda su:

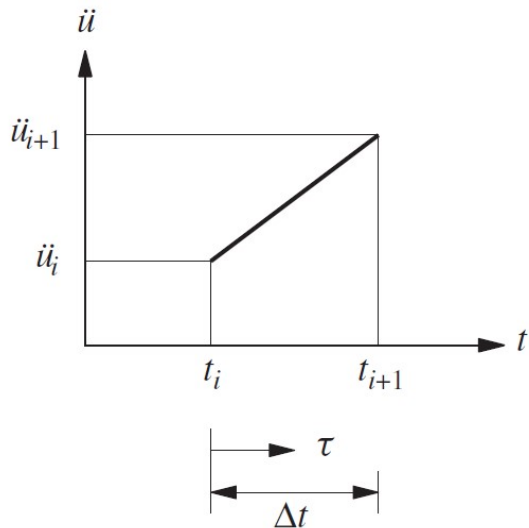
- Metoda s konstantnim prosječnim ubrzanjem
- Metoda s linearnim ubrzanjem

U suštini, razlika između obje metode je u Newmarkovim parametrima integracije. Utvrđeno je da su Newmarkove jednadžbe gdje su uvršteni parametri  $\gamma = \frac{1}{2}$  i  $\beta = \frac{1}{4}$  iste onima koje su dobivene s pretpostavkom konstantnog prosječnog ubrzanja unutar vremenskog koraka (Slika 6.1) [3]:



Slika 6.1: Primjer konstantnog prosječnog ubrzanja unutar vremenskog koraka [3]

Na sličan je način određeno da se Newmarkove jednačbe s parametrima  $\gamma = \frac{1}{2}$  i  $\beta = \frac{1}{6}$  podudaraju s jednačbama dobivenima s pretpostavkom linearnog ubrzanja unutar vremenskog intervala (Slika 6.2) [3]:



Slika 6.2: Primjer linearnog ubrzanja unutar vremenskog koraka [3]

Newmarkova metoda je stabilna ako vrijedi [3]:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (6.18)$$

Za  $\gamma = \frac{1}{2}$  i  $\beta = \frac{1}{4}$  uvjet stabilnosti postaje:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \quad (6.19)$$

što znači da je metoda s konstantnim prosječnim ubrzanjima bezuvjetno stabilna, tj. stabilna je za bilo koju veličinu vremenskog koraka  $\Delta t$ . Međutim, rezultati će biti precizni samo ako je vremenski korak dovoljno malen [3].

Za  $\gamma = \frac{1}{2}$  i  $\beta = \frac{1}{6}$  uvjet stabilnosti je:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551 \quad (6.20)$$

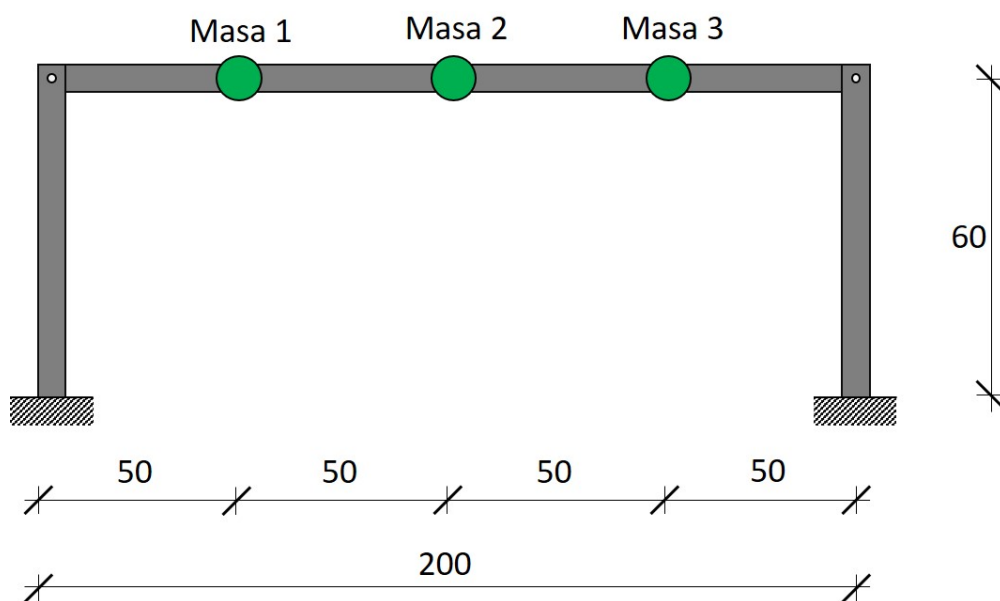
što ukazuje na to da je metoda s linearnim ubrzanjem uvjetno stabilna [3]. U sklopu ovog rada korištena je isključivo Newmarkova metoda s konstantnim prosječnim ubrzanjima.

## 6.2 Geometrija modela

Nakon što su eksperimentalna ispitivanja provedena, potrebno je izraditi numerički model koji će umjetno simulirati ponašanje dobiveno ispitivanjima. Zato su u dijelu poglavlja detaljno opisani svi koraci koji se tiču modeliranja numeričkog modela, na temelju stvarnog modela te koristeći se postupcima i metodama opisanima u prošlim poglavljima. Numerički model je napravljen za okvir sa krutim stupovima te za okvir sa stupovima manje krutosti.

### Okvir s krutim stupovima

Okvirni model se sastoji od dva stupa iste visine te grede koja ih povezuje (Slika 6.3). Stupovi su visine  $0.6\text{ m}$  a greda je dužine  $2\text{ m}$  te su na nju postavljena 3 utega na međusobno jednakim razmacima. Svaki uteg je težine  $4\text{ N}$  i svi su iste težine.

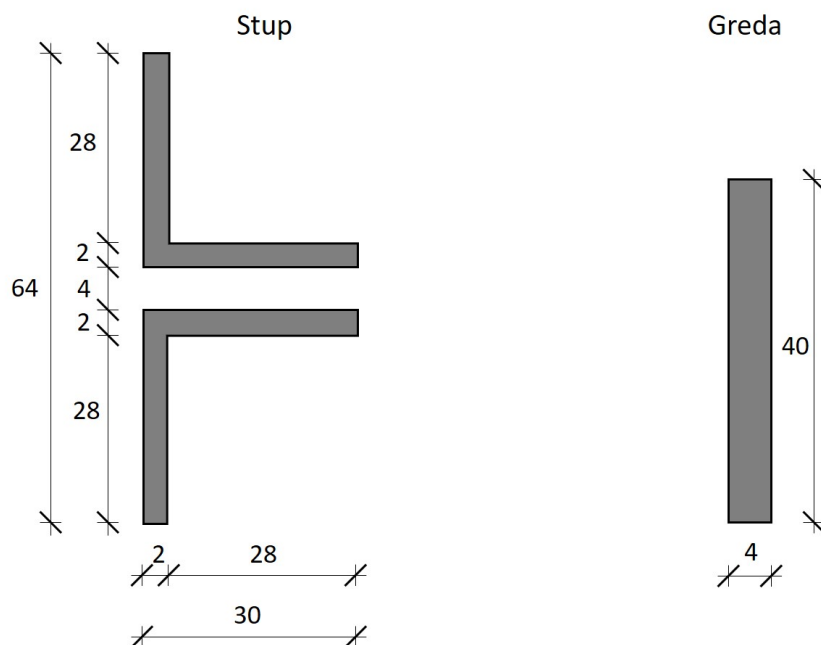


Slika 6.3: Model okvira s krutim stupovima s dimenzijama u [cm]

Stupovi su s podlogom povezani preko kruto upetih oslonaca i oba stupa su dvodijelna; svaki se stup sastoji od dva L - profila, dimenzija  $30 \times 30 \times 2\text{ mm}$ . Stupovi su dvodijelni kako bi gredu bilo moguće pričvrstiti između njih. Razmak L - profila, za širinu grede, utječe na određene geometrijske karakteristike poprečnog presjeka stupa, kao što su statički moment drugog reda stupa (moment inercije stupa) te polarni moment inercije stupa.

Greda je pravokutnog poprečnog presjeka, širine  $4\text{ mm}$  te visine  $40\text{ mm}$ . Stupovi i greda su izrađeni od aluminija, za koji je pretpostavljen Young-ov modul elastičnosti od  $70\text{ GPa}$  te Poisson-ov koeficijent od  $0.3$ , na temelju čega je dobiven modul posmika

od 26.92 *GPa*. U nastavku su prikazani poprečni presjeci stupova i grede, zajedno s dimenzijama te pripadajućim geometrijskim karakteristikama.



Slika 6.4: Poprečni presjek stupa i grede okvira s 3 mase s dimenzijama u [mm]

### Stup

$$A = 232 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 44725.33 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 20391.82 \text{ mm}^4$$

$$I_p = 65117.15 \text{ mm}^4$$

### Greda

$$A = 160 \text{ mm}^2$$

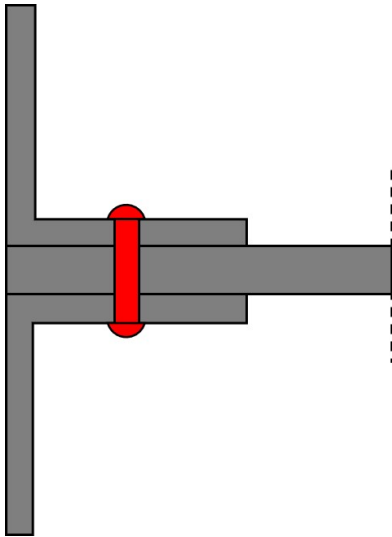
$$I_y = 21333.33 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 213.33 \text{ mm}^4$$

$$I_p = 21546.67 \text{ mm}^4$$

Spoj stupa i grede je za, oba spoja kod okvira s krutim stupovima, ostvaren preko jednog vijka (Slika 6.5). Pomoću jednog vijka se općenito stvara zglobov a ne kruti spoj, ali to vrijedi samo ako su pomaci (ili opterećenja) na okvir naneseni u ravnini okvira (u našem slučaju u XY ravnini) tj. okomito na os vijka. Međutim, u našem slučaju greda je pričvršćena između dva profila relativno velike krutosti te još bitnije, sustav nije izložen opterećenjima u ravnini okvira (XY ravnina) nego je izložen opterećenjima okomito na okvir, točnije horizontalnim opterećenjima u smjeru osi Z (koja je okomita na XY ravninu okvira). Zbog toga možemo reći kako se spoj stupa i grede kod okvira s krutim stupovima ponaša kao kruti spoj.

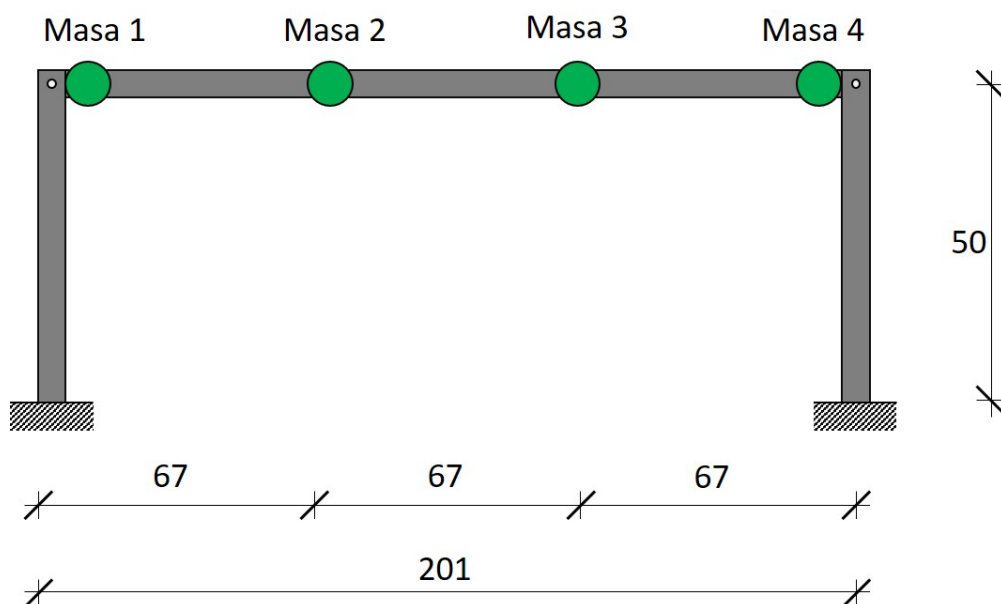




Slika 6.5: Tlocrt spoja stupa i grede (okvir sa krutim stupovima)

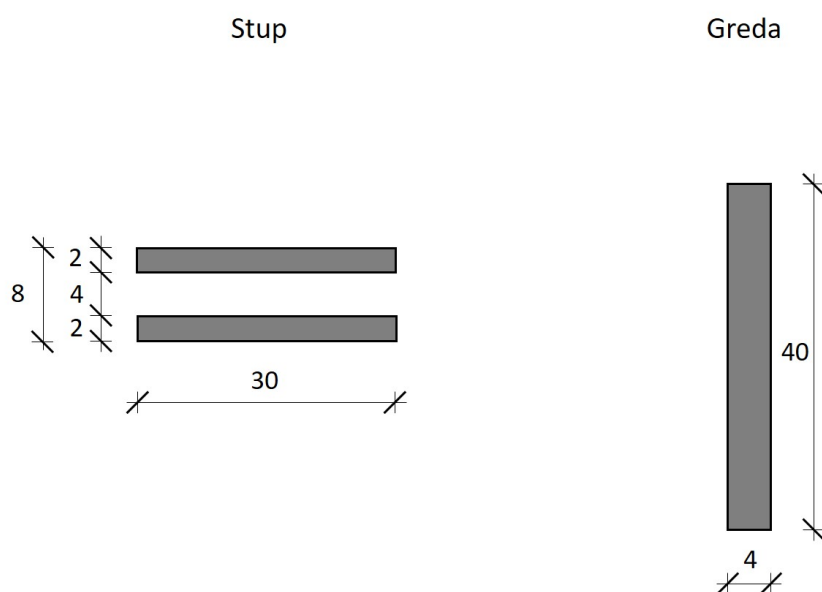
## Okvir sa stupovima manje krutosti

Kod okvira sa 4 mase, stupovi su visine  $0.5\text{ m}$  a greda je dužine  $2.01\text{ m}$  sa 4 utega postavljena na međusobno jednakim razmacima od  $67\text{ cm}$ . Kao i na okviru s 3 dodane mase, utezi su svi iste težine od  $4\text{ N}$ .



Slika 6.6: Model okvira sa stupovima manje krutosti s dimenzijama u [cm]

Stupovi su s podlogom i kod ovog modela povezani preko kruto upetih oslonaca te su ponovno korišteni dvodijelni stupovi, razlika je što su sada stupovi sastavljeni od dva profila pravokutnog poprečnog presjeka, dimenzija  $2 \times 30\text{ mm}$ . Greda je istih dimenzija kao i kod okvira s krutim stupovima, širine  $4\text{ mm}$  te visine  $40\text{ mm}$ .



Slika 6.7: Poprečni presjek stupa i grede okvira s 4 mase s dimenzijama u [mm]

### Stup

$$A = 120 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 1120 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 9000 \text{ mm}^4$$

$$I_p = 10120 \text{ mm}^4$$

### Greda

$$A = 160 \text{ mm}^2$$

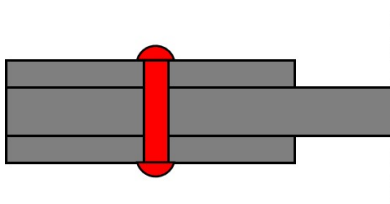
$$I_y = 21333.33 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 213.33 \text{ mm}^4$$

$$I_p = 21546.67 \text{ mm}^4$$

Treba napomenuti kako izračunate geometrijske karakteristike grede ovise o dimenzijama izmjerenima u stvarnosti te koliko god precizno mjerili nikada nećemo imati apsolutno točne vrijednosti. Jednako, ako ne i više, ta tvrdnja vrijedi kod materijalnih karakteristika okvira jer Young-ov modul elastičnosti zajedno s Poisson-ovim koeficijentom nisu određeni eksperimentalno već su pretpostavljeni. Stvarne vrijednosti mogu značajnije varirati u kojem slučaju će se i rezultati numeričkog modela manje poklapati sa onima iz ispitivanja.

Kod okvira sa stupovima manje krutosti su spojevi stupa i grede također izvedeni pomoću jednog vijka (Slika 6.8). Sve što je navedeno za spojeve na okviru s krutim stupovima vrijedi i ovdje. Razlika je samo u krutosti stupova, koji će u ovom slučaju zbog manje krutosti imati veće pomake i rotacije. Međutim, spoj stupa i grede se i dalje ne ponaša kao zglobov, nego kao kruti spoj koji doživljava pomake i rotacije u prostoru kao posljedica pomaka i rotacija ostatka sustava.



Slika 6.8: Tlocrt spoja stupa i grede (okvir sa stupovima manje krutosti)

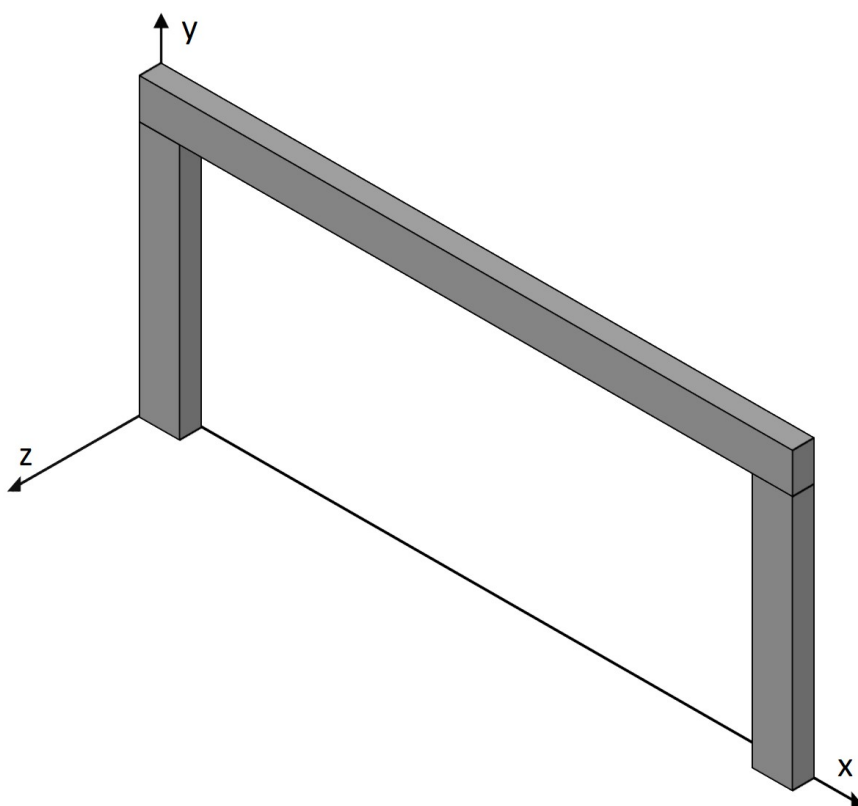
## 6.3 Diskretizacija modela

Kada analiziramo konstrukciju koja je izložena dinamičkoj pobudi, jasno je da će zbog vremenski promjenjivog opterećenja i odgovor konstrukcije biti različit u vremenu. Iz toga razloga dinamički problem nema jedno rješenje, kao što bi imao statički problem, već ima skup rješenja gdje svaki vremenski trenutak ima zasebno rješenje.

Osim što treba pronaći rješenje problema za svaki vremenski korak, potrebno je pronaći rješenje u određenim točkama ili čvorovima sustava. Iz tog je razloga potrebno diskretizirati model tj. podijeliti ga na konačan broj elemenata.

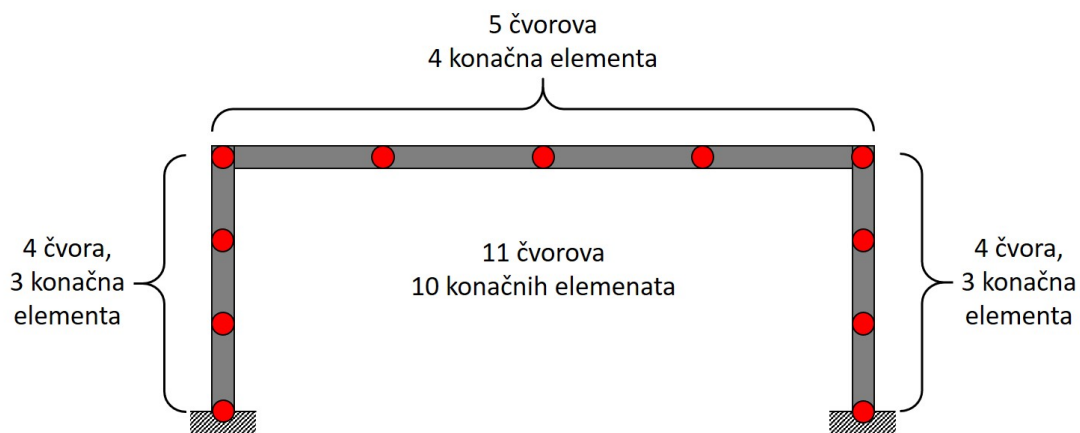
Modeliranje tijela na način da ga rastavimo na ekvivalentni sustav manjih tijela ili jedinica (konačnih elemenata) međusobno povezanih u zajedničkim točkama od dva ili više elementa (čvorovi ili čvorne točke) i/ili rubnim linijama i/ili površinama se naziva *diskretizacija*. Umjesto traženja rješenja problema za cijeli sustav odjednom, metodom konačnih elemenata formuliramo jednadžbe za svaki konačni element te ih sjedinjujemo kako bismo u konačnici dobili rješenje za cijeli sustav [2].

Prije same diskretizacije potrebno je definirati globalni koordinatni sustav (Slika 6.9) koji će nam, osim u ovom poglavlju, biti potreban i u drugim dijelovima rada.



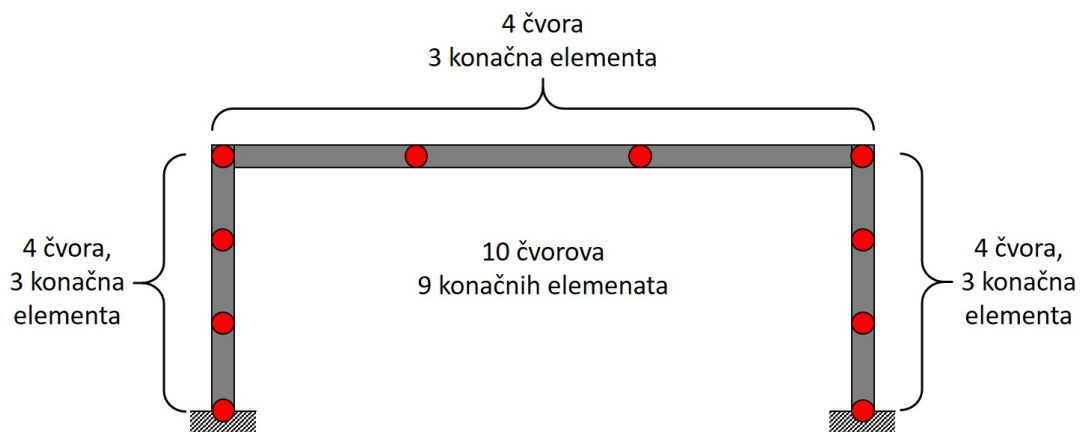
Slika 6.9: Globalni koordinatni sustav

Proizvoljno možemo odabrati na koji broj elemenata ćemo podijeliti sustav ili kolika je duljina jednog elementa, ali treba imati na umu da će rješenje biti "točnije" ili bliže stvarnome rješenju što je broj podjela veći.



Slika 6.10: Diskretizacija okvirnog modela (okvir s 3 mase)

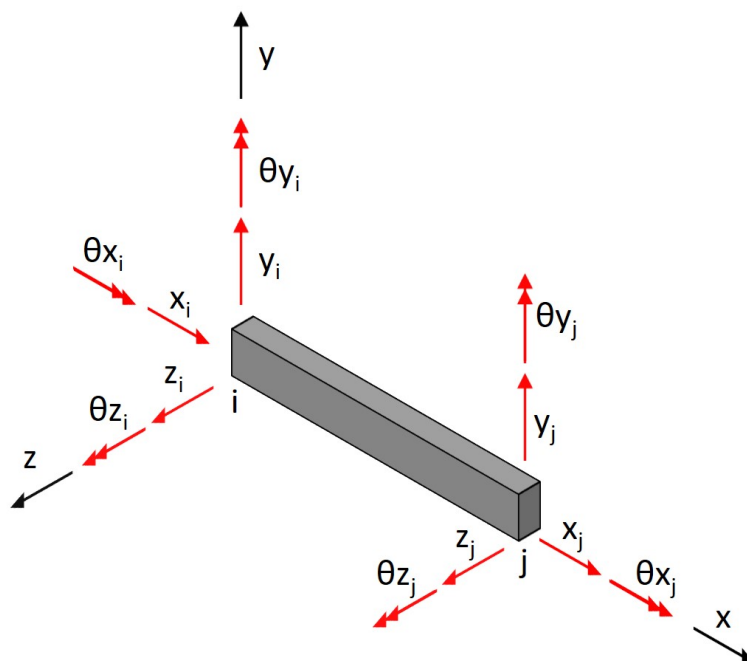
Slika 6.10 prikazuje diskretizaciju okvirnog modela s krutim stupovima i tri dodana utega na gredi. Stupovi su podijeljeni sa 4 čvorne točke na 3 konačna elementa dok je greda sa 5 čvornih točaka podijeljena na 4 konačna elementa što znači da je sustav podijeljen na ukupno 10 konačnih elemenata sa 11 čvornih točaka. Duljine konačnih elemenata stupova i grede nisu jednaki, ali to neće utjecati na točnost ili stabilnost numeričkog modela.



Slika 6.11: Diskretizacija okvirnog modela (okvir s 4 mase)

Slika 6.11 prikazuje diskretizaciju modela okvira sa stupovima manje krutosti i četiri dodana utega na gredi. Stupovi su podijeljeni na isti broj čvorova i konačnih elemenata kao i model okvira s krutim stupovima, a greda je u ovom slučaju podijeljena sa 4 čvora na 3 konačna elementa. Sustav je podijeljen na ukupno 9 konačnih elemenata sa 10 čvorova.

Izdvojimo li sada jedan konačni element grede i promotrimo ga u 3D prostoru, onda znamo da su za svaki kraj ili čvor konačnog elementa moguća 3 pomaka i 3 rotacije tj. 6 stupnjeva slobode. Dakle, u najopćenitijem obliku, na jednom grednom konačnom elementu može biti najviše 12 stupnjeva slobode (Slika 6.12).



Slika 6.12: Gredni konačni element u 3D prostoru

gdje su:

$x_i, x_j$  - pomak u smjeru osi  $x$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor,

$y_i, y_j$  - pomak u smjeru osi  $y$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor,

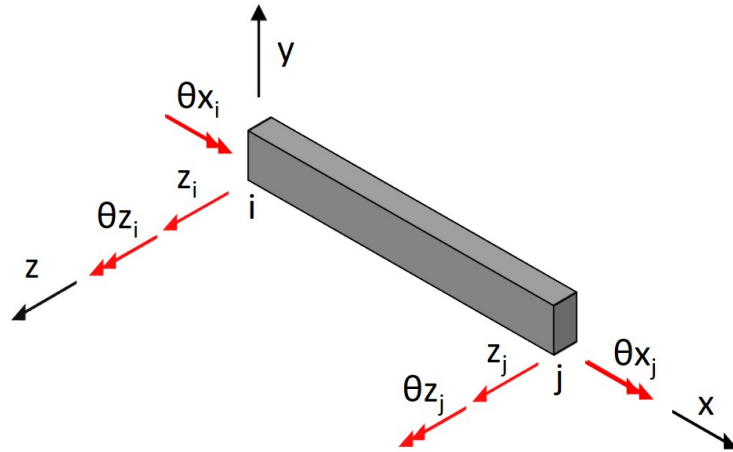
$z_i, z_j$  - pomak u smjeru osi  $z$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor,

$\theta_{x_i}, \theta_{x_j}$  - rotacija oko osi  $x$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor,

$\theta_{y_i}, \theta_{y_j}$  - rotacija oko osi  $y$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor,

$\theta_{z_i}, \theta_{z_j}$  - rotacija oko osi  $z$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor.

U ovome radu je ponašanje stvarnog modela poistovjeđeno s ponašanjem roštiljnog sustava. To znači da će na jednom grednom konačnom elementu biti najviše 6 stupnjeva slobode tj. jedan pomak i dvije rotacije. Na slici (6.13) je prikazan jedan gredni roštiljni konačni element, zajedno sa dozvoljenim pomacima i rotacijama, koji je korišten u radu. Dozvoljen je jedan pomak okomit na os elementa, jedna rotacija koja predstavlja savijanje elementa te druga rotacija koja predstavlja torziju elementa. Treba napomenuti kako će torzija u čvoru na vrhu stupa predstavljati savijanje u čvoru na lijevom kraju grede, i obrnuto.



Slika 6.13: Gredni roštiljni konačni element

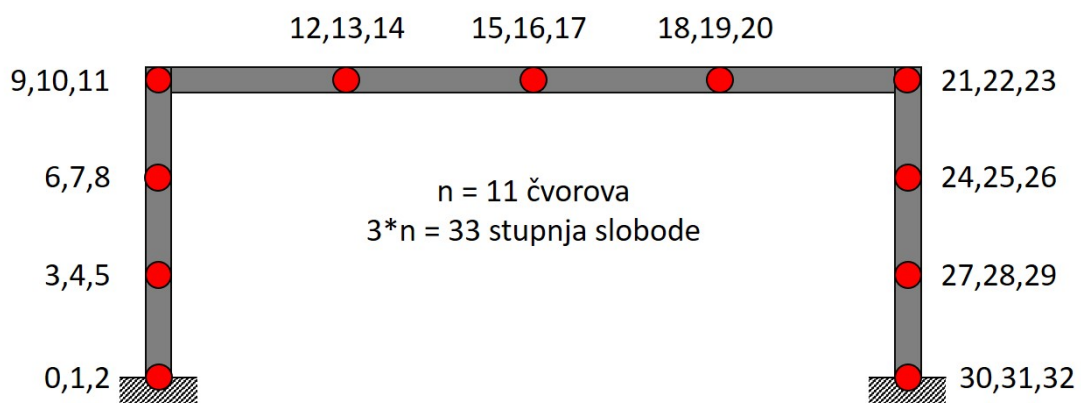
gdje su:

$z_i, z_j$  - pomak u smjeru osi  $z$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor

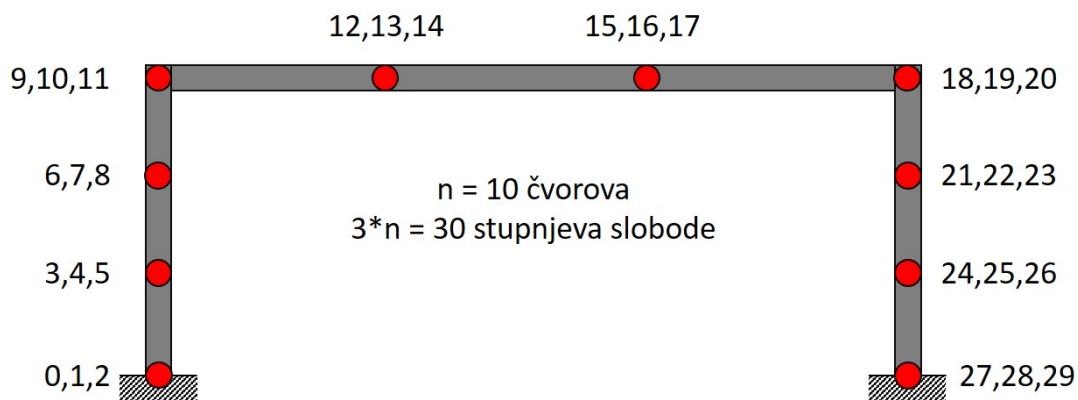
$\theta_{x_i}, \theta_{x_j}$  - rotacija oko osi  $x$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor,

$\theta_{z_i}, \theta_{z_j}$  - rotacija oko osi  $z$  za  $i$ -ti i  $j$ -ti čvor.

Promotrimo li sada opet Sliku 6.10 i 6.11 gdje su modeli okvira diskretizirani te ako uzmemo u obzir pretpostavku roštiljnog ponašanja sustava, dolazimo do zaključka da diskretizirani model okvira s 3 mase ima 33 stupnja slobode (Slika 6.14) dok diskretizirani model okvira s 4 mase ima ukupno 30 stupnjeva slobode (Slika 6.15).



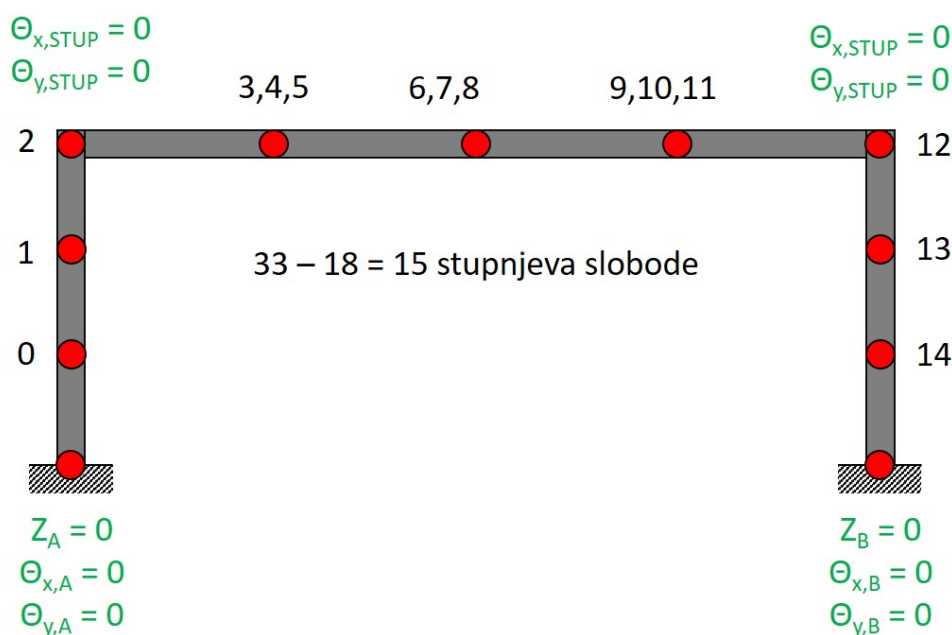
Slika 6.14: Stupnjevi slobode okvirnog modela s 3 mase



Slika 6.15: Stupnjevi slobode okvirnog modela s 4 mase

Modeli sa slika 6.14 i (6.15) prikazuju sve moguće stupnjeve slobode na sustavu, na temelju naših pretpostavki i diskretizacije modela. Međutim, određeni rubni uvjeti moraju biti uvedeni u model kako bi ponašanje određenih dijelova sustava bilo definirano, a samim time i ponašanje kompletnog sustava. Uvođenje rubnih uvjeta možemo opisati kao uvođenje pretpostavki za koje znamo da zasigurno vrijede.

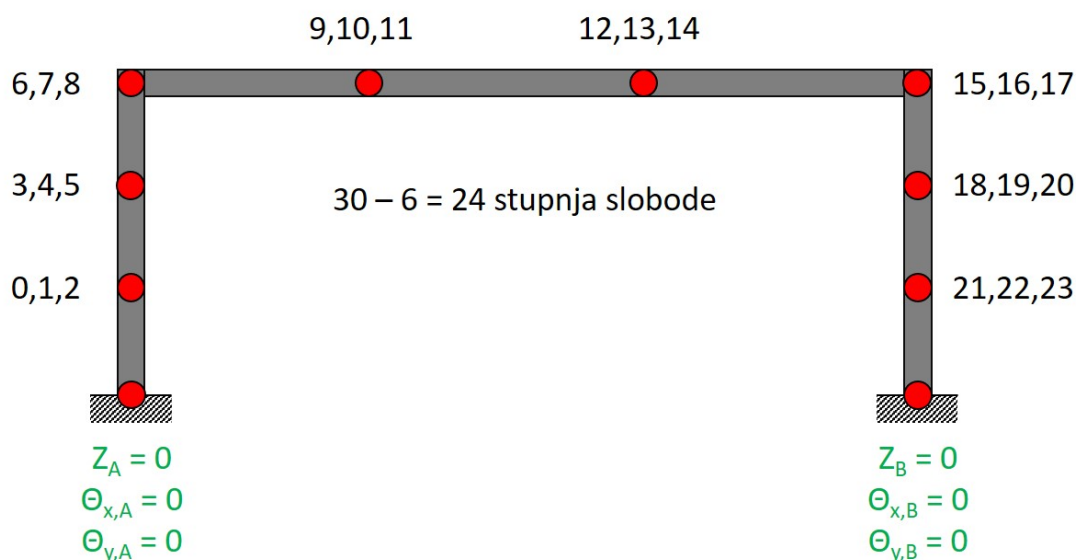
U slučaju okvira s krutim stupovima, znamo da se zbog upetih oslonaca u čvornim točkama ne pojavljuju pomaci ni rotacije. Osim toga, znamo da se zbog velike krutosti u čvorovima koji predstavljaju čvorne točke stupova ne ostvaruju rotacije, dok su pomaci okomiti na os stupa mogući. Navedeni rubni uvjeti u našem slučaju, uz pretpostavku roštiljnih konačnih elemenata, smanjuju ukupni broj stupnjeva slobode okvira sa krutim stupovima, sa 33 na 15 (Slika 6.16).



Slika 6.16: Stupnjevi slobode okvirnog modela s uvedenim rubnim uvjetima (okvir s 3 mase)



Okvir sa stupovima manje krutosti ima iste rubne uvjete na osloncima, pošto se u oba slučaja radi o upetim osloncima. Međutim, zbog toga što u ovom slučaju stupovi imaju puno manju krutost, bilo bi pogrešno pretpostaviti da se na stupovima ne pojavljuju rotacije prilikom nanošenja opterećenja. Zbog toga se ukupni broj stupnjeva slobode, uz navedene rubne uvjete, na okviru sa stupovima manje krutosti smanjuje sa 30 na 24 (Slika 6.17)



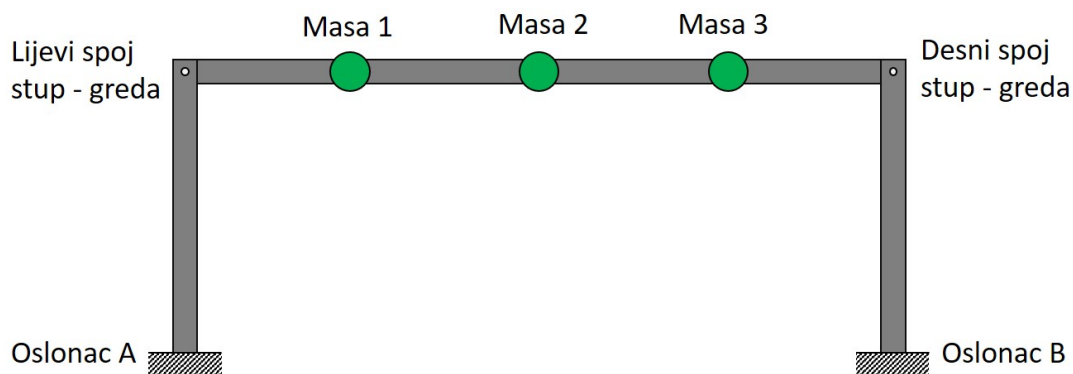
Slika 6.17: Stupnjevi slobode okvirnog modela s uvedenim rubnim uvjetima (okvir s 4 mase)

Pošto govorimo o dinamičkom problemu, svi stupnjevi slobode su u svakom vremenskom trenutku različitih vrijednosti, osim onih koji su određeni rubnim uvjetima te su zbog toga njihove vrijednosti tijekom cijele dinamičke analize unaprijed poznate. Uvođenje rubnih uvjeta će naravno imati utjecaj i na veličinu i oblik svih matrica i vektora sustava.

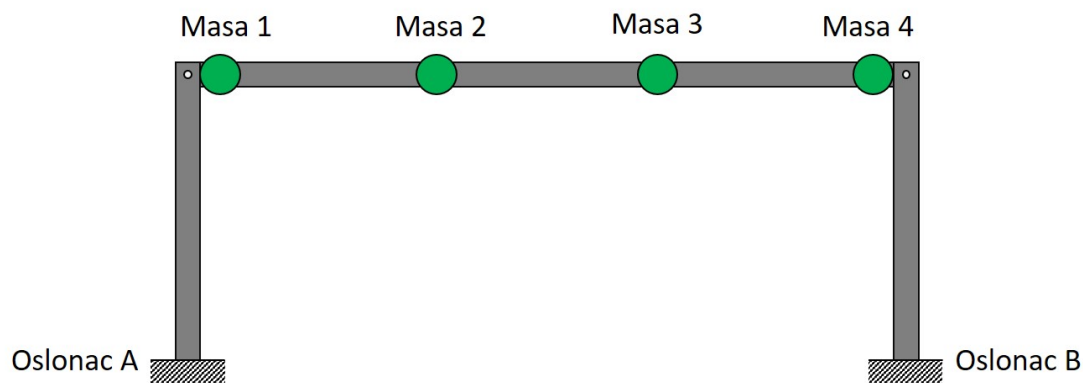
Prilikom diskretizacije modela poželjno je da sustav diskretiziramo na način da su čvorovi konačnih elemenata na mjestima koja su nam od interesa na sustavu. Razlog za to je što će jednadžba dinamičke ravnoteže biti računata isključivo u tim čvorovima. Iz tog razloga nam broj i duljina konačnih elemenata na stupovima nije bitna, pošto na njima nemamo koncentriranih masa koje pratimo nije bitno gdje su čvorovi jer su sve točke od jednake važnosti. Na gredi je bitno da prilikom njene diskretizacije, čvorove postavimo na mjestima gdje su postavljene utezi. Prema tome, kada promatramo cijeli sustav najbitnije je postaviti čvorove konačnih elemenata na mjesta za koja imamo podatke iz optičkih mjerenja, a to su u našem slučaju (Slika 6.18 i 6.19):

- Lijevi i desni oslonac
- Lijevi i desni spoj stupa i grede

- Pričvršćeni utezi.



Slika 6.18: Točke mjerenja na okvirnom modelu s 3 mase



Slika 6.19: Točke mjerenja na okvirnom modelu s 4 mase

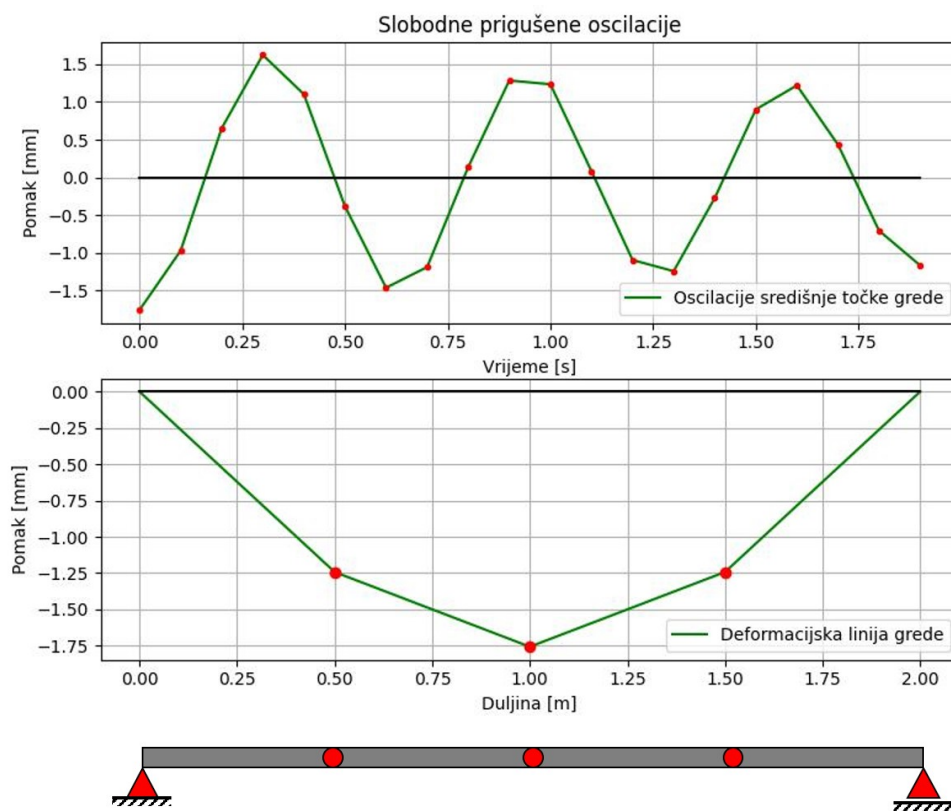
Ranije u tekstu je spomenuto kako je kod dinamičkih problema potrebno pronaći rješenje za svaki vremenski trenutak u svakom čvoru diskretiziranog modela. To znači da na točnost dobivenih rješenja utječe veličina vremenskog koraka te broj konačnih elemenata na koji je sustav podijeljen. U nastavku je na jednostavnom primjeru prikazan utjecaj oba parametra na točnost tj. preciznost rješenja. Korištena numerička metoda u ovom dijelu rada i za ovaj primjer neće biti opisana jer ovdje nije na njoj naglasak.

Na slici 6.20 je prikazana jednostavna greda kojoj je zadan početni pomak na sredini raspona te je nakon toga puštena da oscilira slobodnim prigušenim oscilacijama. Uspoređena su dva modela, početni pomak i karakteristike grede su iste u oba modela, razlika je u veličini vremenskog koraka te broju konačnih elemenata na koje je greda podijeljena.

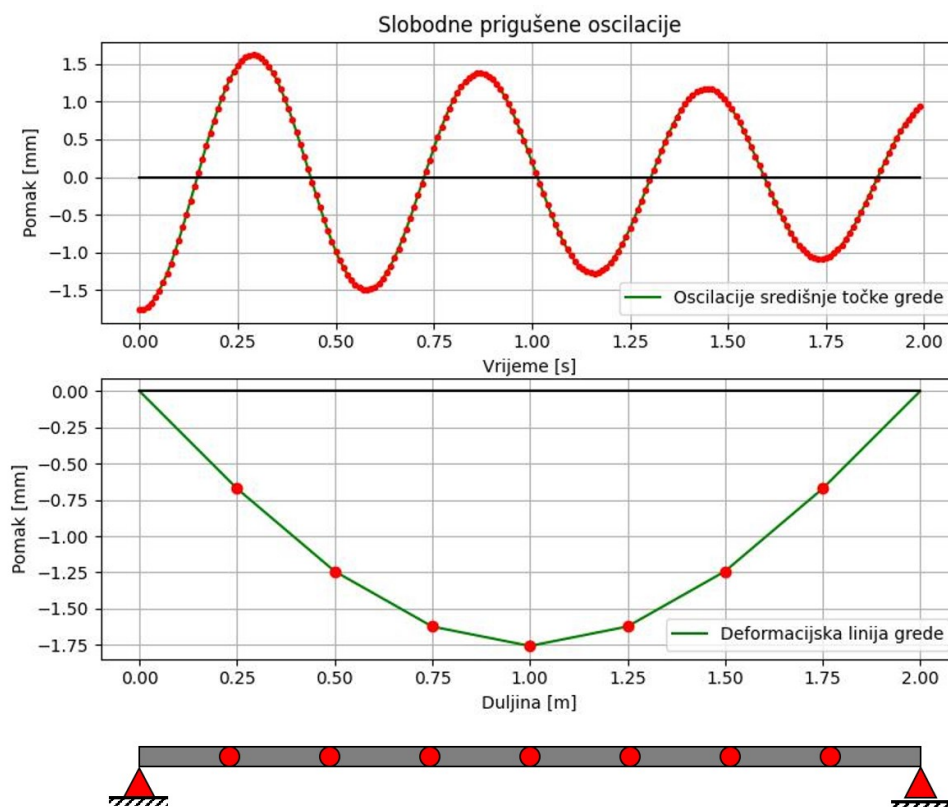


Slika 6.20: Jednostavna greda

Prvi model (Slika 6.21) je greda podijeljena na 4 konačna elementa sa vremenskim korakom od 0.1 s a drugi model (Slika 6.22) je ista greda podijeljena na 8 konačnih elemenata sa vremenskim korakom od 0.01 s. Obje grede su izbačene iz stanja statičke ravnoteže tako što je središnjoj točki dodijeljen određeni pomak, nakon čega sustav započinje oscilirati slobodnim prigušenim oscilacijama.



Slika 6.21: Oscilacije sredine grede i deformacijska linija za gredu s 4 konačna elementa i vremenskim korakom od 0.1s



Slika 6.22: Oscilacije sredine grede i deformacijska linija za gredu s 8 konačnih elemenata i vremenskim korakom od 0.01s

Vidljiva je jasna razlika u preciznosti kada usporedimo oscilacije srednje mase te deformacijske linije oba modela. Ovom usporedbom je pokazano kako s povećanjem broja konačnih elemenata i smanjenjem vremenskog koraka dobivamo veću količinu podataka koja naravno utječe na kvalitetu dobivenih rješenja. U slučaju da povećamo samo veličinu vremenskog koraka dobili bismo puno više podataka o pomacima za čvorne točke određene na sustavu, međutim i dalje bi ukupno ponašanje sustava bilo nedovoljno detaljno opisano pošto je broj konačnih elemenata ostao isti. Ako bismo povećali samo broj konačnih elemenata, a veličinu vremenskog koraka ostavili istu, dobili bismo podatke o pomacima za veći broj točaka na sustavu ali zbog velikog vremenskog koraka postoji mogućnost da podaci ne budu dovoljno točni tj. gusti. Primjer toga možemo vidjeti na slici 6.21 na dijagramu oscilacija grede, na drugom brijegu se vidi kako nedostaje točka gdje očekujemo vrh brijega tj. najveću amplitudu pomaka. Razlog za takvu pojavu je što ne postoji vremenski trenutak u kojem bi numerički model proračunao pomak.

## 6.4 Fizičko - mehanička svojstva modela

Nakon što je model diskretiziran, potrebno je za takav sustav odrediti matrice koje opisuju njegova fizičko - mehanička svojstva. Posljedica diskretizacije sustava je da što više sustav diskretiziramo tj. na što ga više konačnih elemenata podijelimo, to više lokalnih matrica sustava stvaramo. Sve lokalne matrice sustava potrebno je na određeni način spojiti kako bismo dobili globalnu matricu sustava, koja opisuje određena svojstva (npr. krutost ili masu sustava). U nastavku je zato prikazan i objašnjen postupak slaganja lokalnih matrica krutosti i masa, kako bismo dobili globalnu matricu krutosti i masa sustava.

### 6.4.1 Matrica krutosti

U radu je korišten roštiljni gredni konačni element (Slika 6.13) za koji znamo da, nakon što uvedemo određene rubne uvjete, ima ukupno 6 stupnjeva slobode. Iz tog razloga je matrica krutosti koja ga opisuje dimenzija  $6 \times 6$  i ona je prikazana u nastavku:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

gdje je:

$E$  - Young-ov modul elastičnosti,

$G$  - modul posmika,

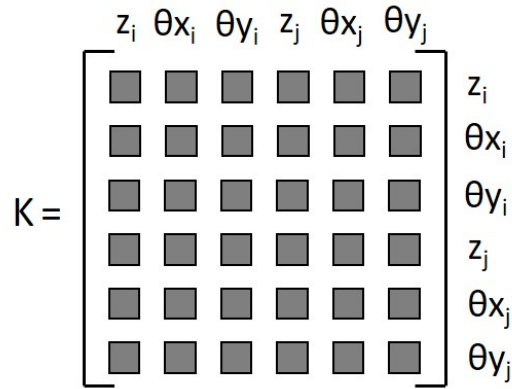
$L$  - duljina elementa,

$A$  - površina poprečnog presjeka,

$I$  - moment inercije presjeka,

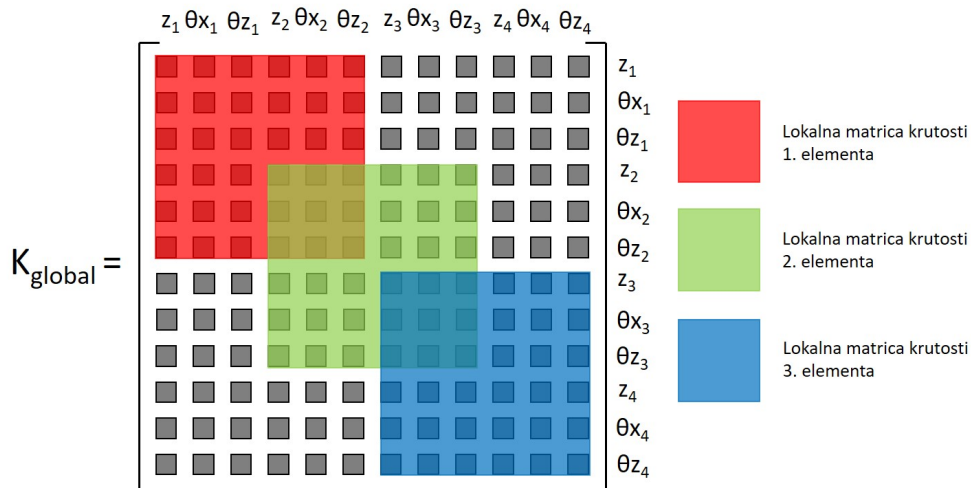
$J$  - polarni moment inercije presjeka.

Na slici (6.23) je također shematski prikazano kojim stupnjevima slobode odgovaraju retci i stupci matrice krutosti roštiljnog elementa.



Slika 6.23: Shematski prikaz stupnjeva slobode u matrici krutosti s 6 stupnjeva slobode

Bitno je napomenuti kako matrica krutosti (6.21) opisuje samo jedan konačni element a ne cijeli sustav. Drugim riječima, matrica (6.21) predstavlja lokalnu matricu krutosti, koja opisuje samo jedan konačni element modela, unutar globalne matrice krutosti koja opisuje krutost cijelog sustava tj. modela. Način na koji dobivamo globalnu matricu krutosti je slaganjem lokalnih matrica krutosti na način da se elementi zadnja tri retka i stupca prethodne lokalne matrice krutosti dodaju elementima prva tri retka i stupca sljedeće lokalne matrice krutosti. Na slici 6.24 je shematski prikazano slaganje tri lokalne matrice krutosti u jednu globalnu matricu krutosti.



Slika 6.24: Primjer slaganja globalne matrice krutosti od lokalnih matrica krutosti s 6 stupnjeva slobode

## 6.4.2 Matrica masa

Pošto su u radu korišteni gredni roštiljni konačni elementi sa 6 stupnjeva slobode, matrica masa jednog elementa će biti dimenzija  $6 \times 6$  i izgledati će ovako:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & -22L & 54 & 0 & 13L \\ 0 & \frac{140J}{A} & 0 & 0 & \frac{70J}{A} & 0 \\ -22L & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & -13L & 156 & 0 & 22L \\ 0 & \frac{70J}{A} & 0 & 0 & \frac{140J}{A} & 0 \\ 13L & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

gdje je:

$\rho$  - gustoća materijala,

$L$  - duljina elementa,

$A$  - površina poprečnog presjeka,

$J$  - polarni moment inercije.

Princip slaganja lokalnih matrica masa u globalnu matricu masa je isti kao i za matricu krutosti (Slika 6.24). Stupnjevi slobode povezani s retcima i stupcima u izrazima (4.30) i (6.22) su raspoređeni na isti način kao i za matricu krutosti (Slike 4.14 i 6.23). U radu je korištena konzistentna matrica masa jer su njome uzeti u obzir i rotacijski stupnjevi slobode te s povećanjem broja konačnih elemenata daje preciznije rezultate koji su bliži stvarnim. Treba napomenuti kako je izraz za efektivni vektor opterećenja izveden na temelju pretpostavke da je matrica masa dijagonalna, ali unatoč tome u radu je korištena konzistentna matrica masa.

Međutim, kod sustava koji su podijeljeni na daleko veći broj konačnih elemenata nego u ovome radu, nije praktično koristiti konzistentnu matricu masa. Razlog za to je što računalo tijekom dinamičke analize treba puno više snage i koristi puno više resursa kada članovi izvan glavne dijagonale matrice masa nisu nula. U našem slučaju to ne stvara problem pošto je model podijeljen na relativno malen broj konačnih elemenata.

U praksi se korištenjem konzistentne matrice masa dolazi, u većini slučajeva, do vrlo malih poboljšanja u točnosti (u odnosu na dijagonalnu matricu masa) jer sile inercije koje su povezane s rotacijama čvorova su najčešće od manjeg značaja u većini problema potresnog inženjerstva [3].

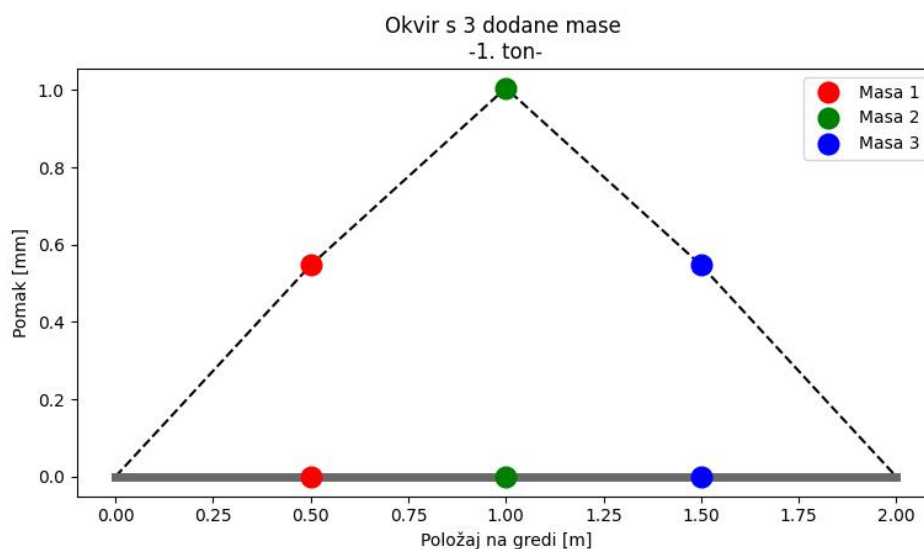
### 6.4.3 Vlastite vrijednosti i oblici osciliranja

#### Okvir s krutim stupovima

Pošto okvir s krutim stupovima ima 3 dodane mase na gredi, izvučene su samo tri vlastite vrijednosti tj. prirodne frekvencije. U nastavku su prikazane prve tri prirodne cikličke frekvencije te njima odgovarajuće prirodne kružne frekvencije:

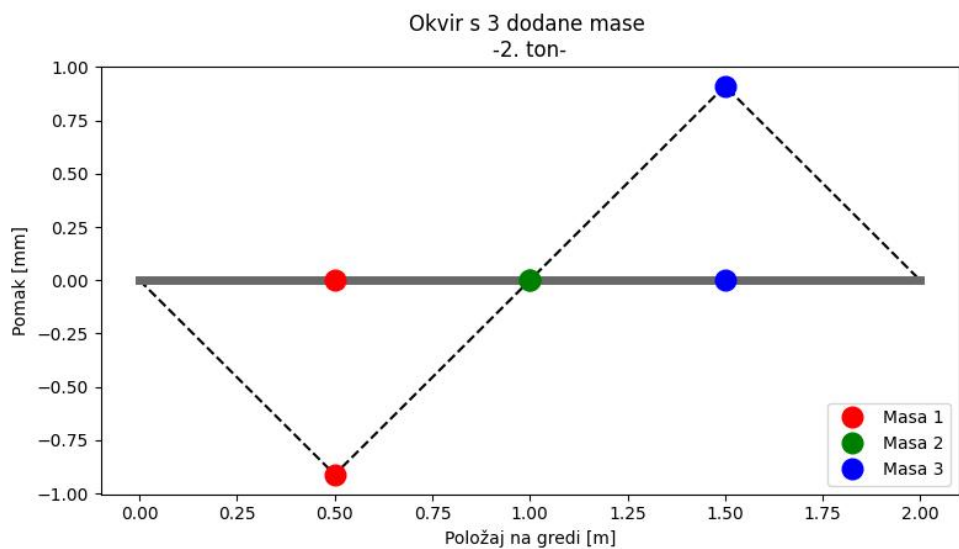
$$\begin{aligned} f_1 &= 3.075 \text{ Hz} & \omega_1 &= 19.32 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ f_2 &= 8.306 \text{ Hz} & \omega_2 &= 52.189 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ f_3 &= 14.406 \text{ Hz} & \omega_3 &= 90.518 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Osim vlastitih vrijednosti u nastavku su prikazani oblici osciliranja (Slike 6.25, 6.26 i 6.27), dobiveni na temelju vlastitih vektora izračunatih u programskom kodu. Kao i za vlastite vrijednosti, prikazana su samo prva tri oblika osciliranja koja su povezana sa prve tri prirodne frekvencije prikazane iznad. Treba napomenuti kako je crna crt-kana linija, koja povezuje mase, samo ilustrativnog karaktera te ne predstavlja stvarnu deformacijsku liniju pošto se u stvarnosti ovakvi lomovi ne pojavljuju na sustavu.

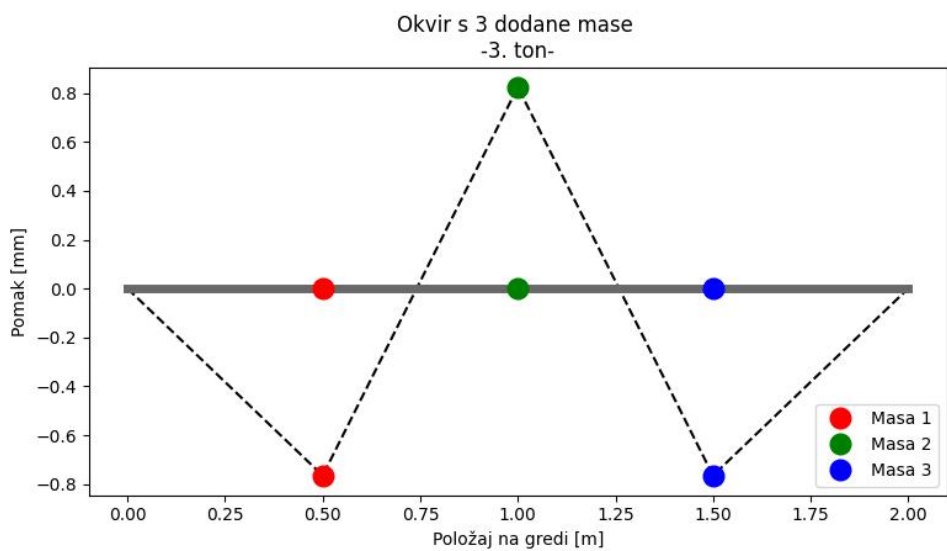


Slika 6.25: Izgled 1. oblika osciliranja - okvir s krutim stupovima





Slika 6.26: Izgled 2. oblika osciliranja - okvir s krutim stupovima



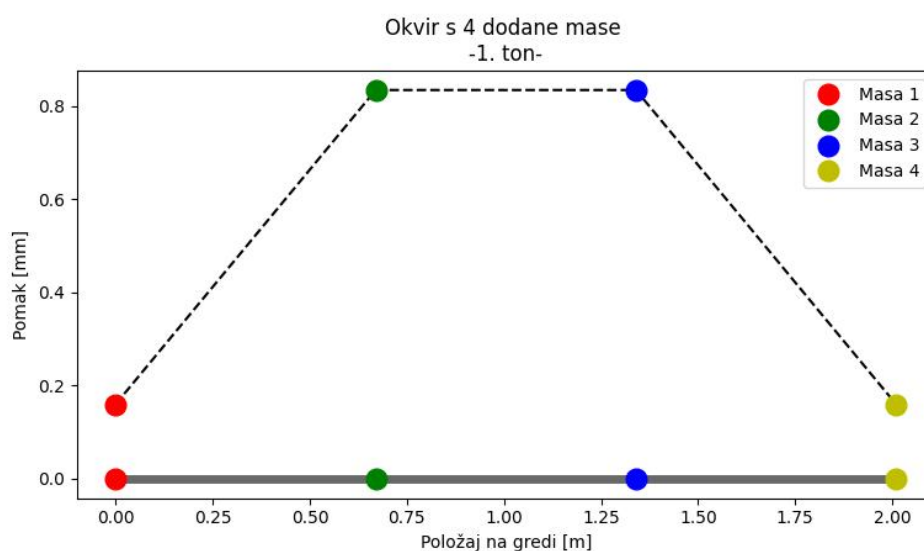
Slika 6.27: Izgled 3. oblika osciliranja - okvir s krutim stupovima

## Okvir sa stupovima manje krutosti

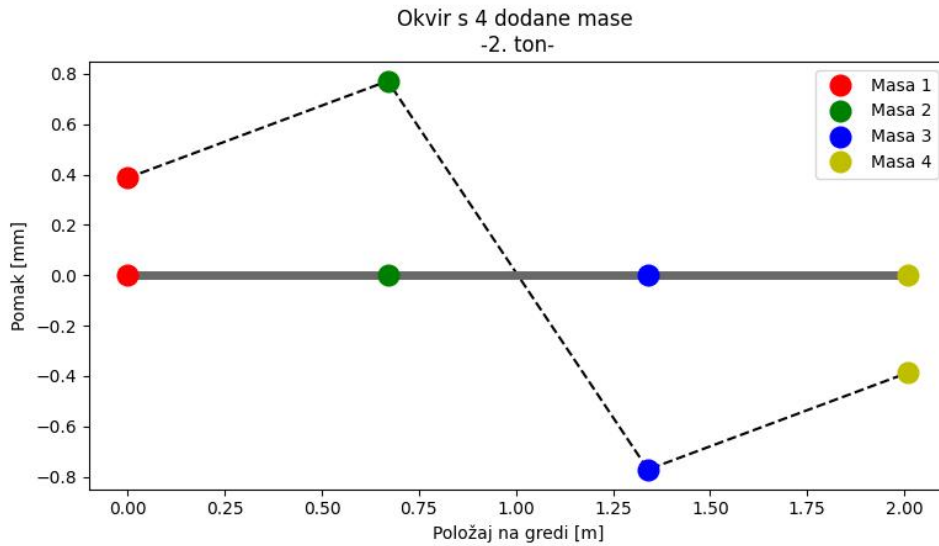
Okvir sa stupovima manje krutosti ima 4 dodane mase na gredi, pa su u ovom slučaju prikazane prve četiri prirodne frekvencije:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1.338 \text{ Hz} & \omega_1 &= 8.407 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ f_2 &= 3.627 \text{ Hz} & \omega_2 &= 22.789 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ f_3 &= 5.352 \text{ Hz} & \omega_3 &= 33.628 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ f_4 &= 8.31 \text{ Hz} & \omega_4 &= 52.213 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

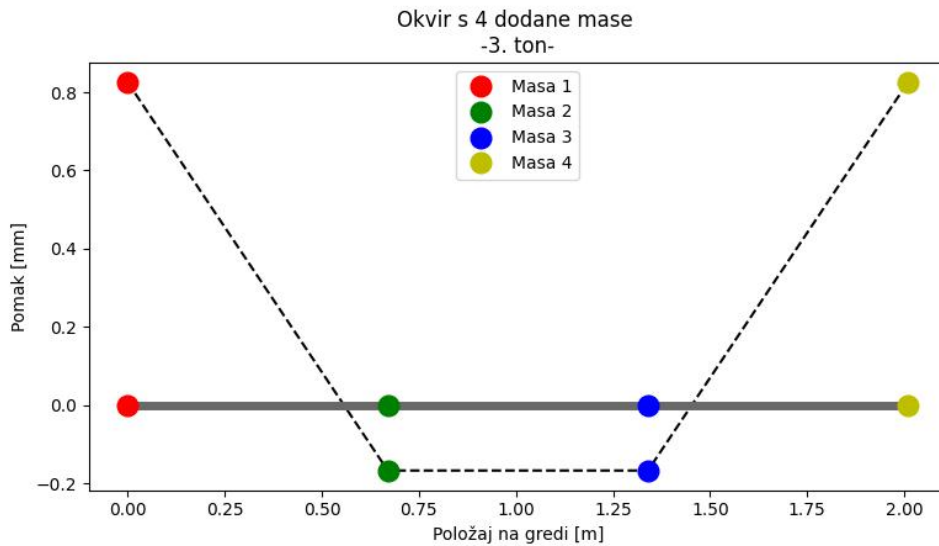
U nastavku su na slikama 6.28, 6.29, 6.30 i 6.31 prikazana prva četiri oblika osciliranja, također izvučenih iz programskog koda, povezana sa prve četiri prirodne frekvencije prikazane iznad u tekstu.



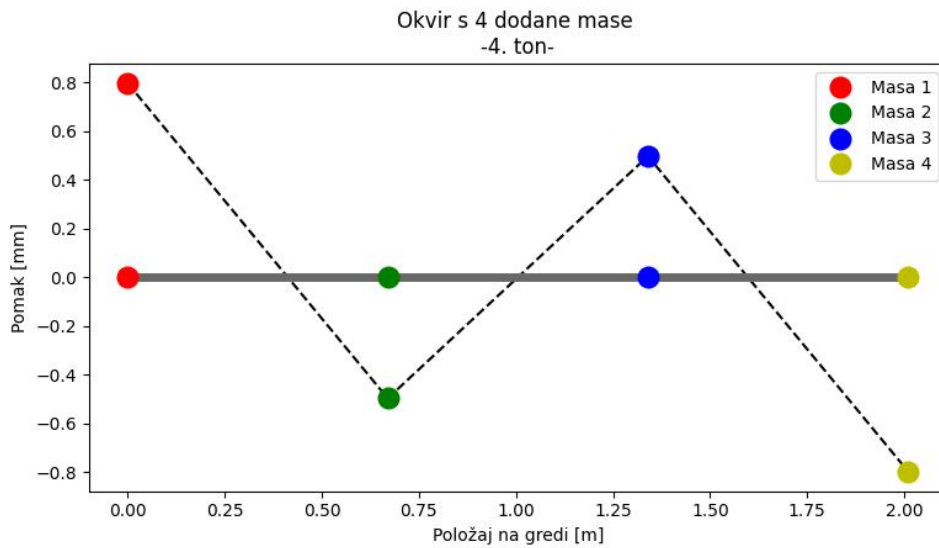
Slika 6.28: Izgled 1. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti



Slika 6.29: Izgled 2. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti



Slika 6.30: Izgled 3. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti



Slika 6.31: Izgled 4. oblika osciliranja - okvir sa stupovima manje krutosti

#### 6.4.4 Matrica prigušenja

Matrica prigušenja je određena na temelju Rayleigh-ovog prigušenja tj. kao linearna kombinacija matrice masa i krutosti. Taj postupak je objašnjen u poglavlju 4 a proračun koeficijenata prigušenja je prikazan u poglavlju 5. U ovom dijelu rada su prikazane vrijednosti koeficijenata  $a_0$  i  $a_1$ , zajedno s vlastitim vrijednostima te izračunatim koeficijentima prigušenja, na temelju čega su spomenuti koeficijenti  $a_0$  te  $a_1$  određeni.

##### Okvir s krutim stupovima

Koeficijent prigušenja, koji je ranije izračunat u eksperimentalnom dijelu, iznosi:

$$\zeta = 0.006938$$

te onda koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$ , prema izrazima (4.34) i (4.35) iznose:

$$a_0 = 0.19566 \quad a_1 = 0.00019$$

Matrica prigušenja okvira s krutim stupovima te tri dodane mase, izgleda ovako:

$$\mathbf{C} = 0.13277 \cdot \mathbf{M} + 0.00029 \cdot \mathbf{K}$$

##### Okvir sa stupovima manje krutosti

Koeficijent prigušenja za okvir sa stupovima manje krutosti je:

$$\zeta = 0.02901$$

pa su koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$  onda:

$$a_0 = 0.35632 \quad a_1 = 0.00186$$

matrica prigušenja za okvir sa stupovima manje krutosti te 4 dodane mase, izgleda ovako:

$$\mathbf{C} = 0.35632 \cdot \mathbf{M} + 0.00186 \cdot \mathbf{K}$$

Pošto matrica prigušenja ovisi o globalnoj matrici krutosti i masa, automatski prilikom izračuna postaje globalna matrica prigušenja te nije potrebno posebno slagati lokalne matrice prigušenja.

### 6.4.5 Utjecajna matrica

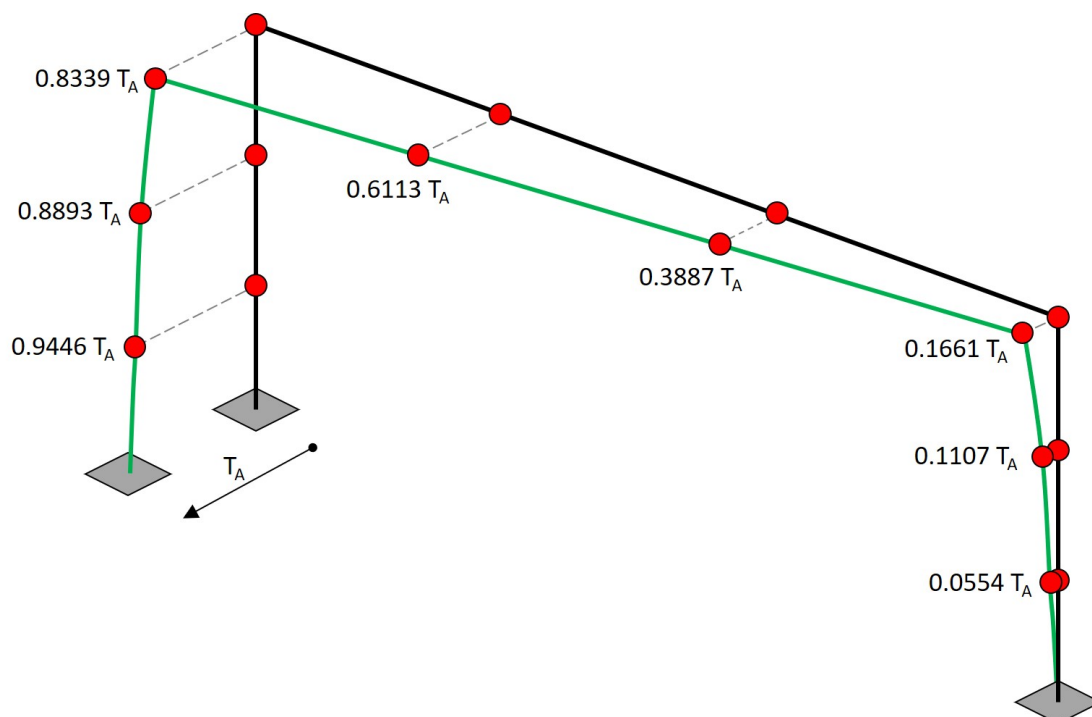
Kada govorimo o višestrukoj pobudi oslonaca, dinamički odgovor određene točke na sustavu ovisi o pobudi oslonaca koji imaju najveći utjecaj na promatranu točku. To ponašanje ili bolje rečeno utjecaj pobude oslonaca na sustav je opisano pomoću utjecajne matrice. Određivanje utjecajne matrice je opisano u poglavlju 4 te ovdje nije ponavljano, nego je utjecajna matrica objašnjena na primjeru okvira sa stupovima manje krutosti.

Izvučemo li iz utjecajne matrice samo članove koji su vezani uz pomake čvornih točaka, dobivamo matricu koja izgleda ovako:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0.9446 & 0.0554 \\ 0.8893 & 0.1107 \\ 0.8339 & 0.1661 \\ 0.6113 & 0.3887 \\ 0.3887 & 0.6113 \\ 0.1661 & 0.8339 \\ 0.1107 & 0.8893 \\ 0.0554 & 0.9446 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Prikazana utjecajna matrica nam pomaže da odredimo statičke pomake svih čvorova na sustavu (u ovom slučaju okvira s 4 dodane mase). Prvi redak odgovara prvoj čvornoj točki definiranoj iznad oslonca, drugi redak odgovara drugoj i tako sve do definirane čvorne točke na okviru, koja je direktno iznad desnog oslonca. Svaki redak prikazuje za koji omjer bi se čvorna točka pomaknula u odnosu na pomak oslonca, a stupci nam definiraju koji je oslonac pomaknut; prvi stupac odgovara pomicanju lijevog oslonca a drugi odgovara pomicanju desnog oslonca. Naravno, ako su oba oslonca pobuđena onda se statički pomak čvornih točaka određuje preko kombinacije koeficijenata iz svakog retka. Također, ono što možemo primjetiti je da je zbroj svih članova u svakom retku uvijek jedinici, što je i logično ako su statički pomaci čvornih točaka u potpunosti definirani pomakom oslonaca.

Na slici 6.32 je shematski prikazano koliko bi iznosili statički pomaci čvornih točaka na okviru ako bi lijevi oslonac bio izmaknut za neku vrijednost  $T_A$ .



Slika 6.32: Statički pomaci čvornih točaka na okviru s 4 mase za slučaj pomicanja samo lijevog oslonca sustava

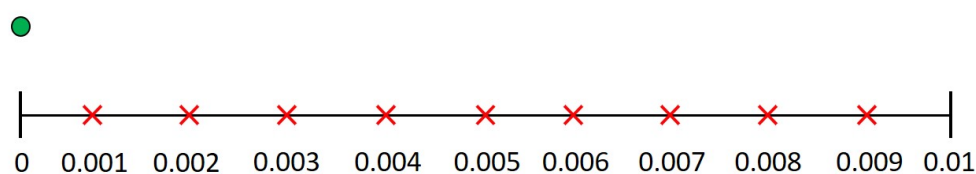
Na jednak način bismo odredili i statičke pomake čvornih točaka okvira sa 3 dodane mase, ali to ovdje nije napravljeno pošto je postupak identičan. Međutim, svejedno je prikazana utjecajna matrica za okvir sa 3 mase i ona izgleda ovako:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0.9375 & 0.0625 \\ 0.8750 & 0.1250 \\ 0.8125 & 0.1875 \\ 0.6563 & 0.3437 \\ 0.5000 & 0.5000 \\ 0.3438 & 0.6562 \\ 0.1875 & 0.8125 \\ 0.1250 & 0.8750 \\ 0.0625 & 0.9375 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

## 6.5 Progušćivanje podataka iz ispitivanja

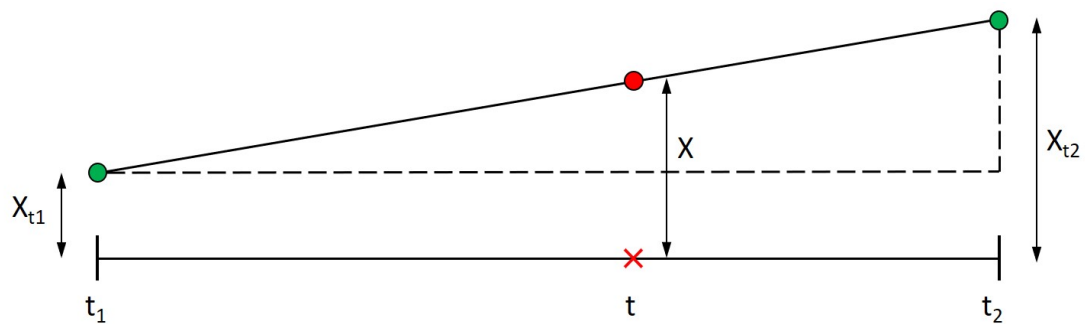
Podaci iz ispitivanja će nam biti potrebni za više stvari u radu, ono prvo i očito je za usporedbu s rezultatima iz numeričkog modela. Drugi razlog zašto nam trebaju podaci optičkih mjerenja je da bi kod prisilnih prigušenih vibracija mogli odrediti efektivni vektor opterećenja. Određivanje efektivnog vektora opterećenja je detaljnije objašnjeno u narednim poglavljima.

Prilikom provođenja dinamičke analize potrebno je unutar numeričkog modela zadati veličinu vremenskog koraka, kojime koračamo u vremenskoj domeni te za svaki trenutak računamo pomake, brzine i ubrzanja. Veličina vremenskog koraka, kojom su analizirani eksperimentalni rezultati, u našem slučaju ovisi o frekvenciji mjerenja podataka te ona iznosi  $100\text{ Hz}$  te  $25\text{ Hz}$ , ovisno o kojem se ispitivanju radi. To znači da su optičkim mjerenjima izmjereni pomaci okvira svakih  $0.01\text{ s}$ . U slučaju da dinamičku analizu želimo provesti s manjim vremenskim korakom, nećemo imati dovoljno podataka iz mjerenja na temelju kojih stvaramo efektivni vektor opterećenja u svakom vremenskom trenutku. Primjerice, ako imamo izmjerene pomake u vremenu, svake  $0.01\text{ s}$ , a u numeričkom modelu odredimo vremenski korak od  $0.001\text{ s}$ , između svaka dva vremenska trenutka iz ispitivanja će faliti podaci o pomacima koji su potrebni za izračun ubrzanja za vektor efektivnih opterećenja u numeričkom modelu (Slika 6.33). Samim time nije moguće odrediti pomake u vremenima za koja nemamo podatke iz ispitivanja u istim vremenskim trenutcima.



Slika 6.33: Primjer razlike u podacima zbog različitih vremenskih koraka

Kako bismo riješili taj problem, u sklopu rada je napravljen program koji proglašuje podatke iz ispitivanja na temelju jednadžbe pravca tj. korištenjem linearne aproksimacije. Pretpostavka je da se vrijednosti pomaka mijenjaju linearno unutar vremenskog koraka, naravno to vrijedi samo ako su vremenski koraci vrlo mali a samim time i razlike između dvije vrijednosti pomaka. Slika (6.34) prikazuje na koji način određujemo nepoznate vrijednosti pomaka  $X$ , na temelju poznatih vrijednosti  $X_{t_1}$  i  $X_{t_2}$  u vremenima  $t_1$  i  $t_2$ , u novoodređenom vremenu  $t$ .



Slika 6.34: Linearna aproksimacija pomaka između dva vremenska trenutka

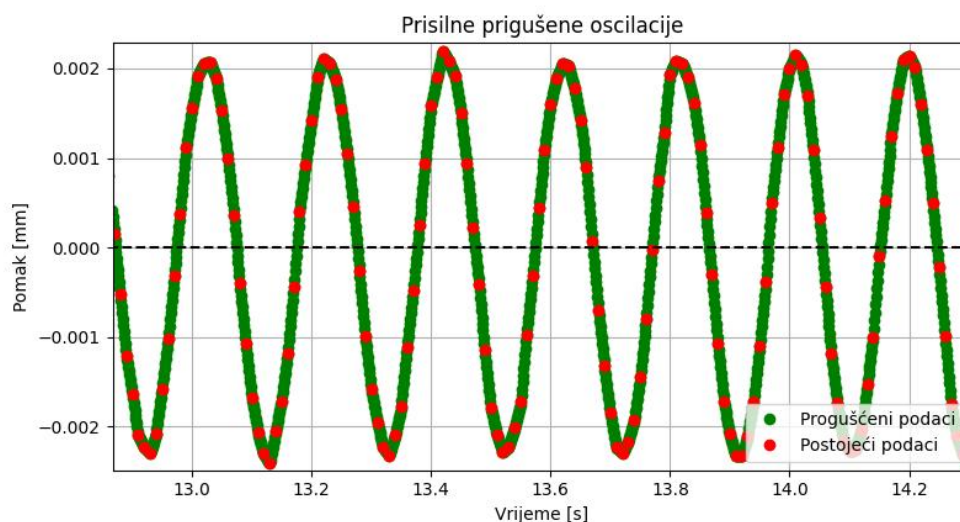
Možemo primjetiti kako je jedina nepoznanica na slici (6.34) upravo pomak  $X$  te ako se poslužimo sličnošću pravokutnih trokuta dolazimo do izraza:

$$X = X_{t1} + (X_{t2} - X_{t1}) * \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (6.25)$$

gdje je  $t_2 - t_1$  zapravo vremenski korak  $\Delta t_e$  iz postojećih podataka iz ispitivanja. Izraz (6.25) možemo sada zapisati u sljedećem obliku:

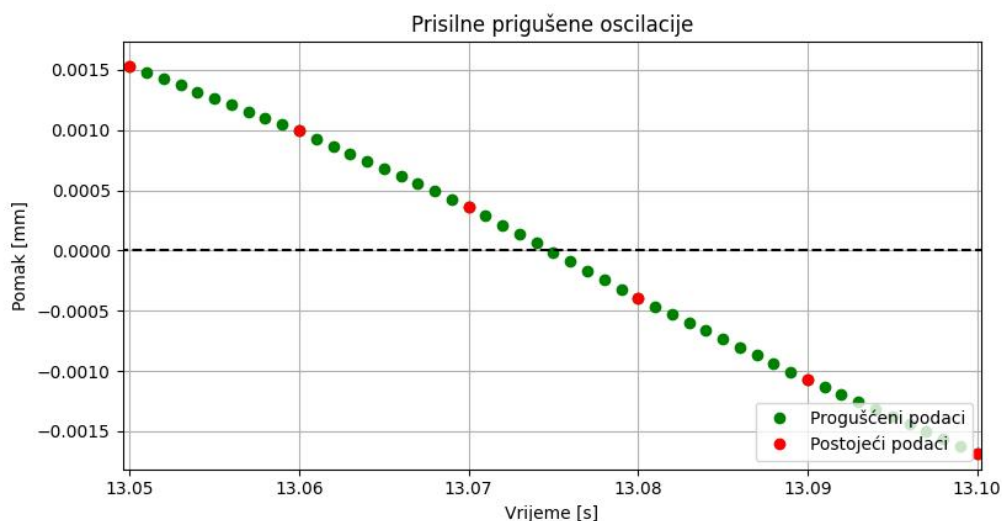
$$X = X_{t1} + (X_{t2} - X_{t1}) * \frac{t - t_1}{\Delta t_e} \quad (6.26)$$

U nastavku je na konkretnom primjeru iz provedenih ispitivanja prikazano prognošćenje postojećih podataka tj. linearna aproksimacija podataka. Korišteni podaci su iz ispitivanja sa *sinesweep* pobudom (test2), a prikazani podaci su pomaci lijevog oslonca u vremenu. Vremenski korak postojećih ispitivanja je 0.01 s, a linearna aproksimacija je provedena sa vremenskim korakom od 0.001 s.

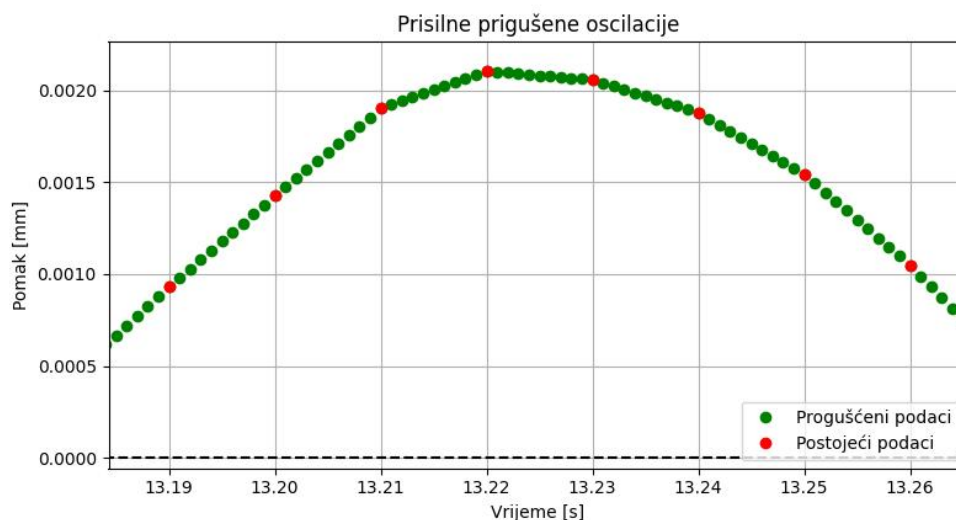


Slika 6.35: Primjer linearne aproksimacije postojećih pomaka





Slika 6.36: Primjer linearne aproksimacije postojećih pomaka (uvećani prikaz)



Slika 6.37: Primjer linearne aproksimacije postojećih pomaka (uvećani prikaz vrha brijega)

Slike 6.35, 6.36 i 6.37 prikazuju razinu progušćenja pomaka u različitim dijelovima. Slika 6.37 prikazuje uvećani prikaz pomaka u dijelu grafa gdje je brijeg oscilacija i vidljivo je kako linearna aproksimacija nije najtočniji model za aproksimaciju podataka u dijelovima gdje se ostvaruju nagle promjene u obliku, kao što je ovdje slučaj. Međutim, s obzirom na veličinu vremenskog koraka o kojem se radi te razlici u veličinama pomaka pretpostavljeno je da je dovoljno točna. Ako sada promotrimo sliku 6.35 ili 6.36 vidimo kako podaci, koji su dobiveni aproksimacijom, vrlo lijepo prate postojeći oblik vibracija u dijelovima grafa gdje nema naglih promjena u obliku, što je i logično s obzirom da se radi o linearnoj aproksimaciji. Rezultat aproksimacije su podaci koji su za potrebe rada dovoljno točni te su dalje korišteni u numeričkom modelu.

## 6.6 Programski jezik *Python*

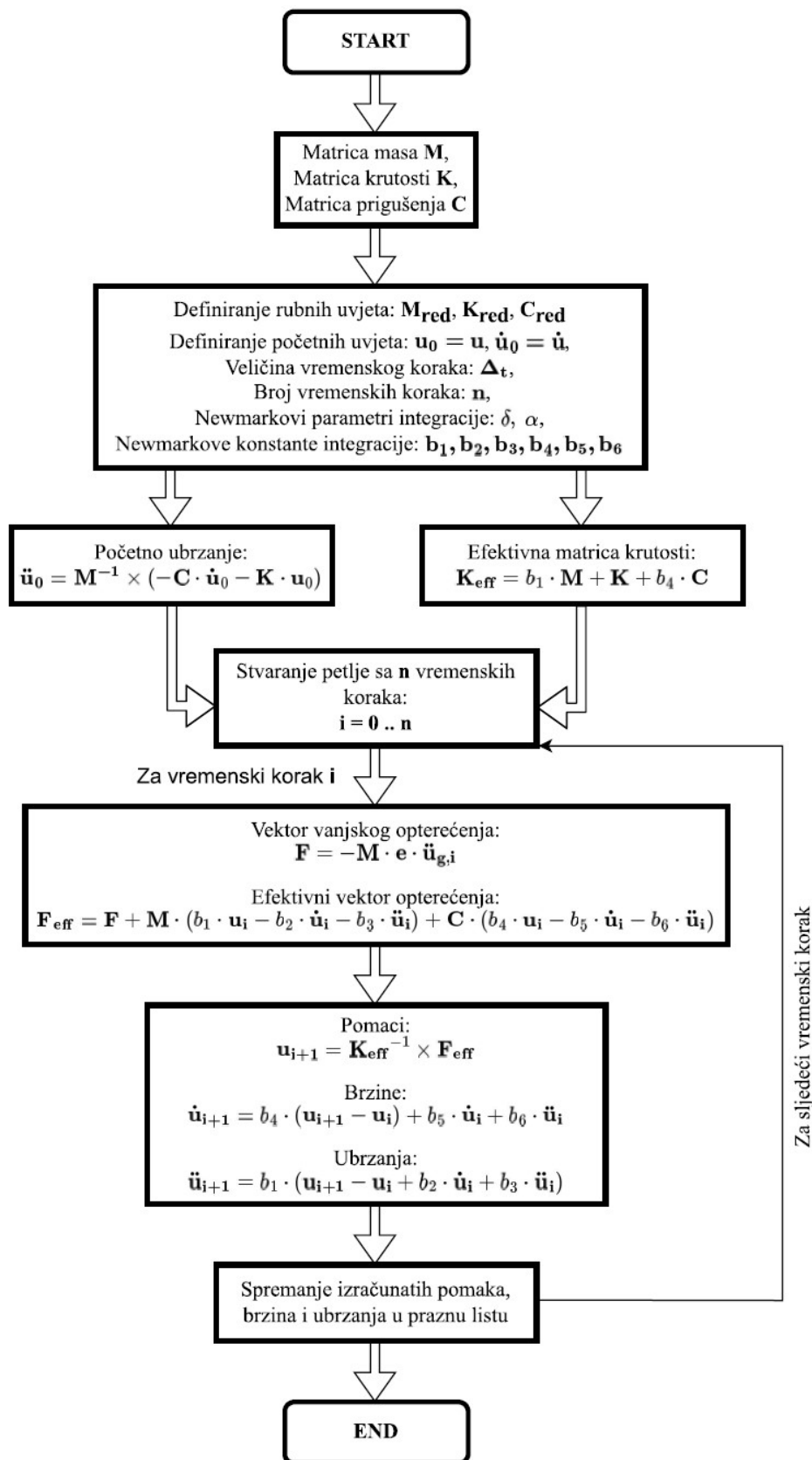
Nakon postavljene teoretske osnove te numeričkih metoda pomoću kojih je moguće riješiti dinamičke probleme, potrebno je sve od navedenog ukomponirati u program. Programski jezik kojime je to u ovom radu napravljeno je *Python*. Python je interpretirani, objektno - orijentirani programski jezik koji zbog svoje jednostavne i čitljive sintakse olakšava stvaranje i uređivanje programskog koda. Kompletan numerički model zajedno sa svim proračunima je napravlje u Python-u.

Danas na tržištu postoji mnogo komercijalnih programa koji se temelje na metodi konačnih elemenata i imaju mogućnost dinamičke analize. Međutim, stvaranjem vlastitog programa specijalno za naš problem imamo nekoliko prednosti:

- programski kod je kratak i zahtijeva manje računalnih resursa prilikom proračuna
- program radi točno što želimo te se lako nadograđuje i popravlja
- program je "lagan" te nema nepotrebnih dodataka koji bi mogli usporiti njegov rad
- imamo bolje razumijevanje teorije iza rješavanja problema pošto svaki dio koda izrađujemo sami

Najveći nedostatak stvaranja posebnog programa samo za određeni problem je upravo to što je napravljen samo za jedan određeni slučaj i nemože se koristiti za drugi problem.

U nastavku je na slici 6.38 prikazan blok dijagram koji opisuje na koji način funkcionira izrađeni numerički model. Kao što je već rečeno, numerički model tj. točnije, numerička analiza, se temelji na Newmarkovoj metodi koja je prikazana na početku ovog poglavlja i bitno je napomenuti kako se ovdje radi o linearnoj analizi dinamičkog problema. Cijeli proces rješavanja dinamičkog problema je izrađen u programskom jeziku *Python*, od formiranja matrica krutosti i masa, prognošćivanja podataka sve do provođenja same numeričke analize, te je u priložima na kraju rada prikazan kompletan programski kod.



Slika 6.38: Blok dijagram Newmarkove metode (linearna analiza)

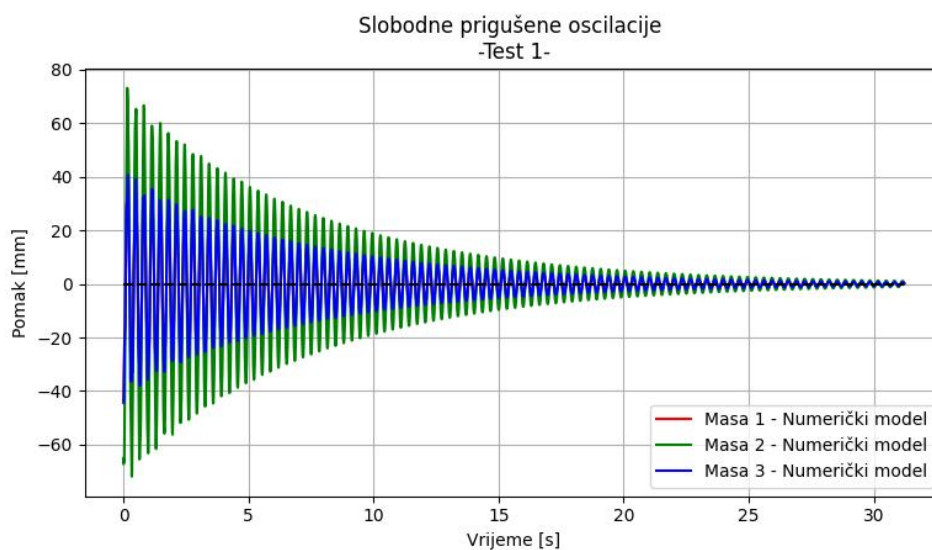
## 6.7 Rezultati numeričke analize

U ovom dijelu rada su prikazani rezultati provedene numeričke analize za oba okvirna modela. Za potrebe numeričke analize su korišteni postojeći podaci iz mjerenja te umjetno proglašeni podaci. Pomaci dva okvirna modela nisu snimani istom frekvencijom, ali su zato u numeričkoj analizi, za oba modela, proglašeni na istu frekvenciju od  $1000\text{ Hz}$ . Dakle, pomaci okvira s krutim stupovima su proglašeni sa  $100\text{ Hz}$  na  $1000\text{ Hz}$ , a pomaci okvira sa stupovima manje krutosti su proglašeni sa  $25\text{ Hz}$  na  $1000\text{ Hz}$ .

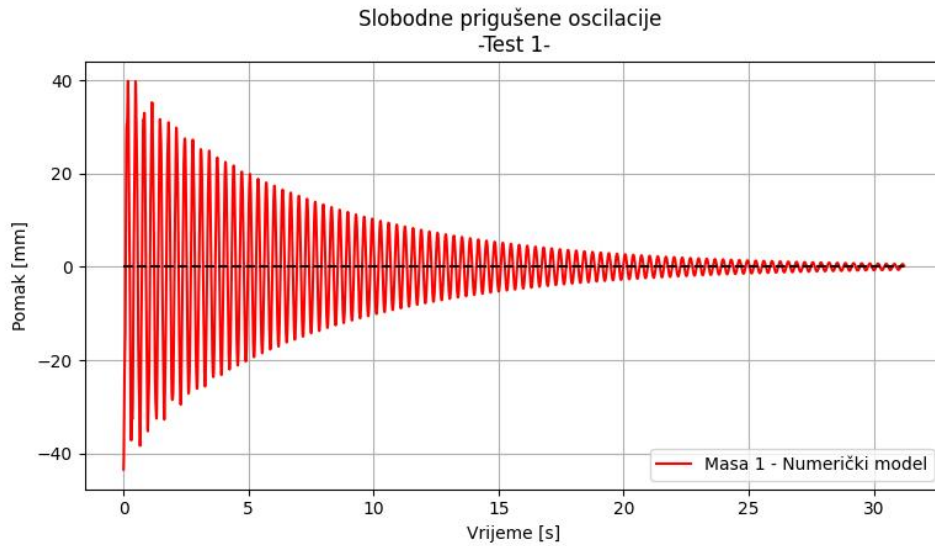
### 6.7.1 Okvir s krutim stupovima

#### Test 1

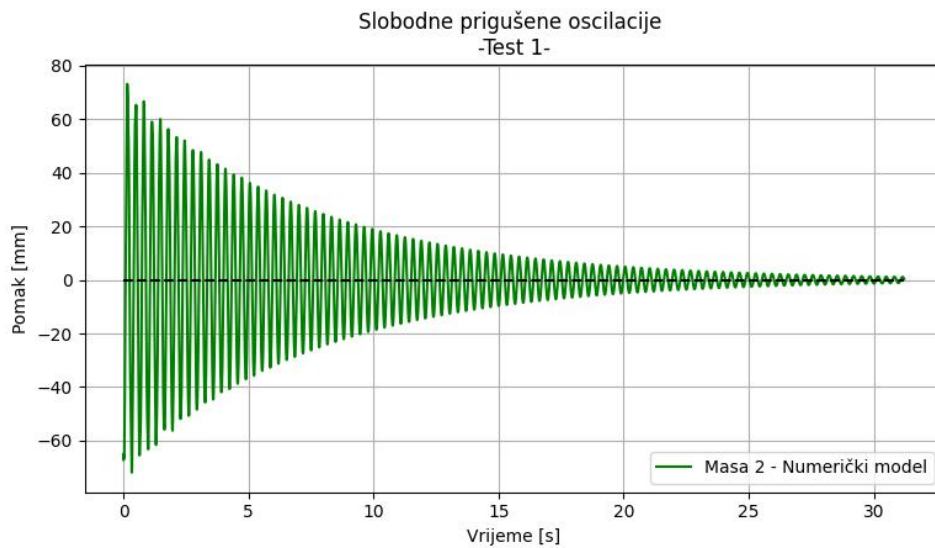
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za test 1, su prikazani na slici 6.39 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.40, 6.41, 6.42.



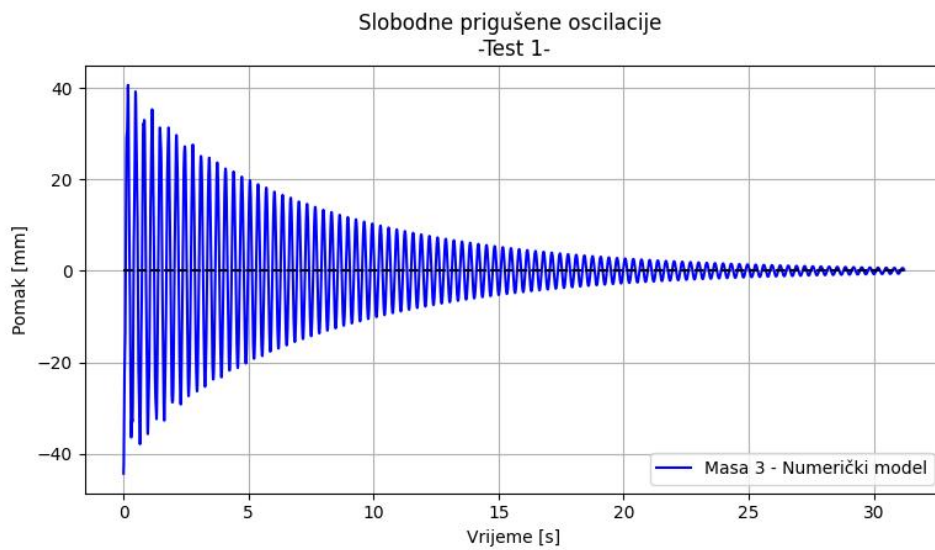
Slika 6.39: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (test 1)



Slika 6.40: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (test 1)



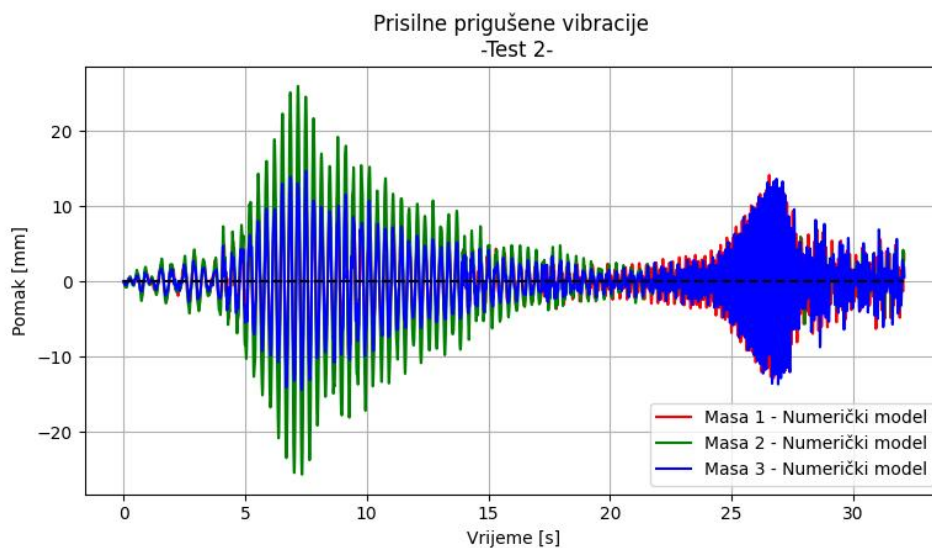
Slika 6.41: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (test 1)



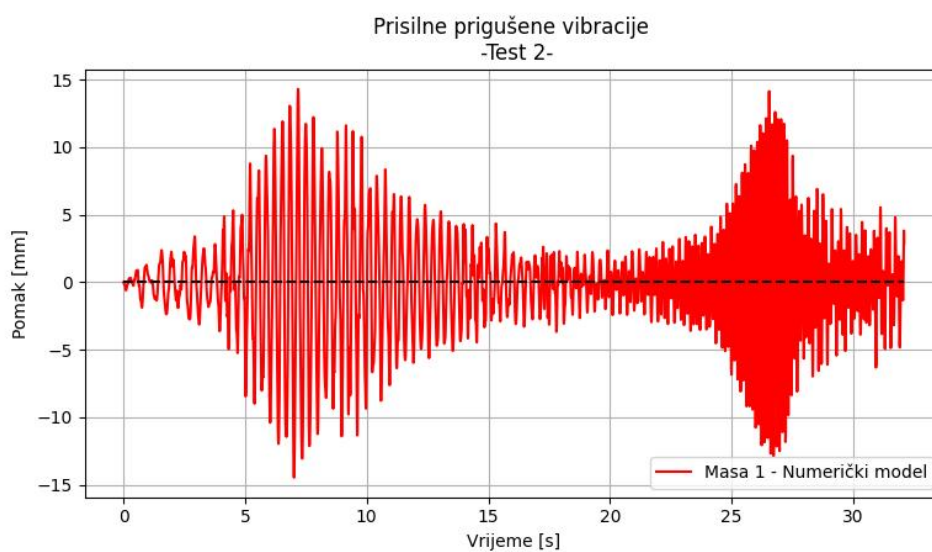
Slika 6.42: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (test 1)

## Test 2

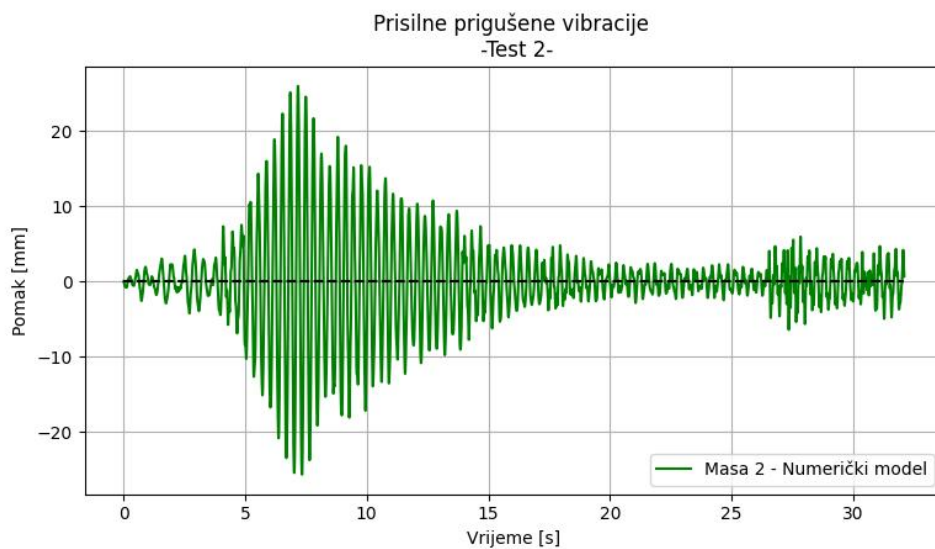
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za test 2, su prikazani na slici 6.43 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.44, 6.45, 6.46.



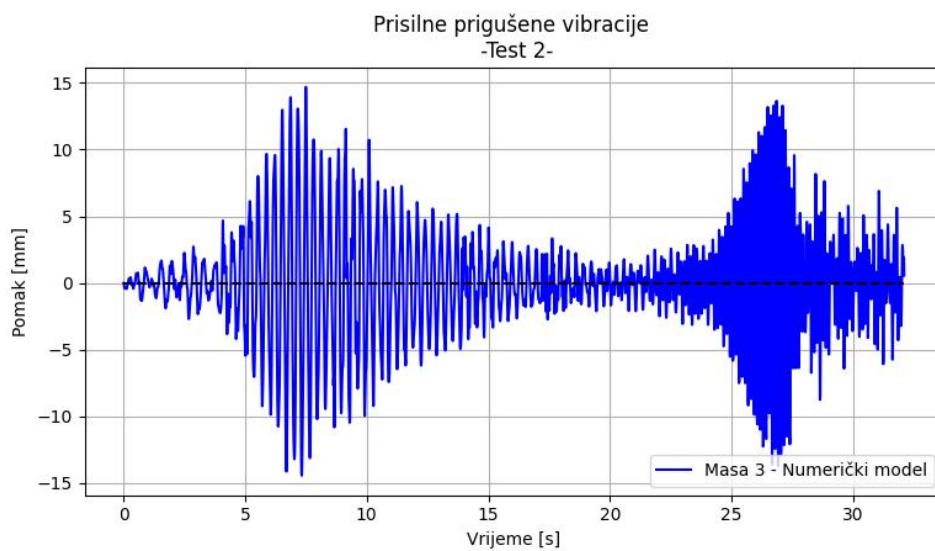
Slika 6.43: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (test 2)



Slika 6.44: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (test 2)



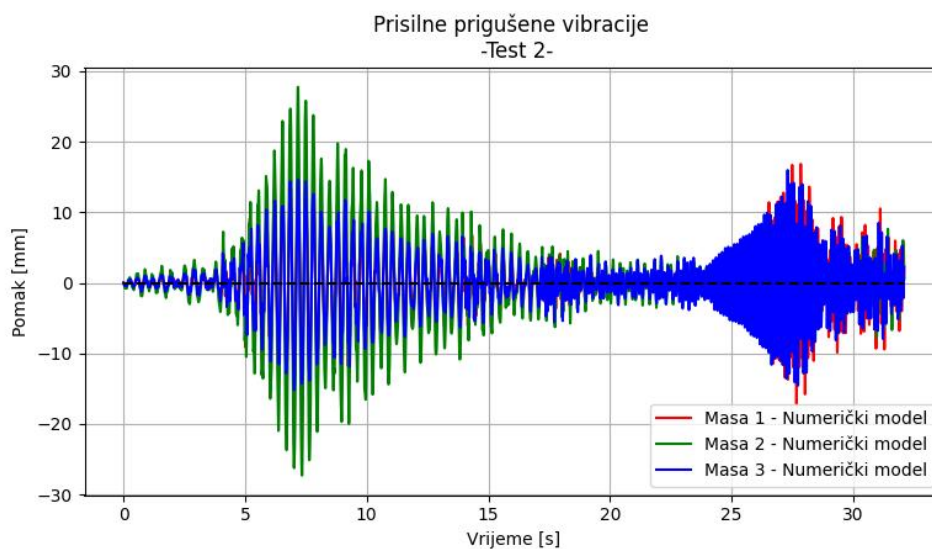
Slika 6.45: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (test 2)



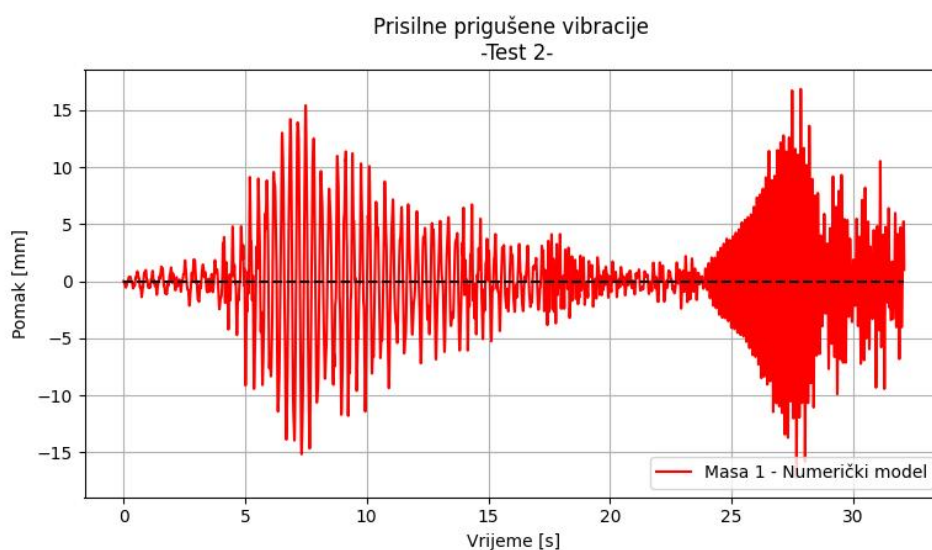
Slika 6.46: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (test 2)

### - Progušćeni podaci -

Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom s progušćenim ulaznim podacima za test 2, su prikazani na slici 6.47 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.48, 6.49 i 6.50.

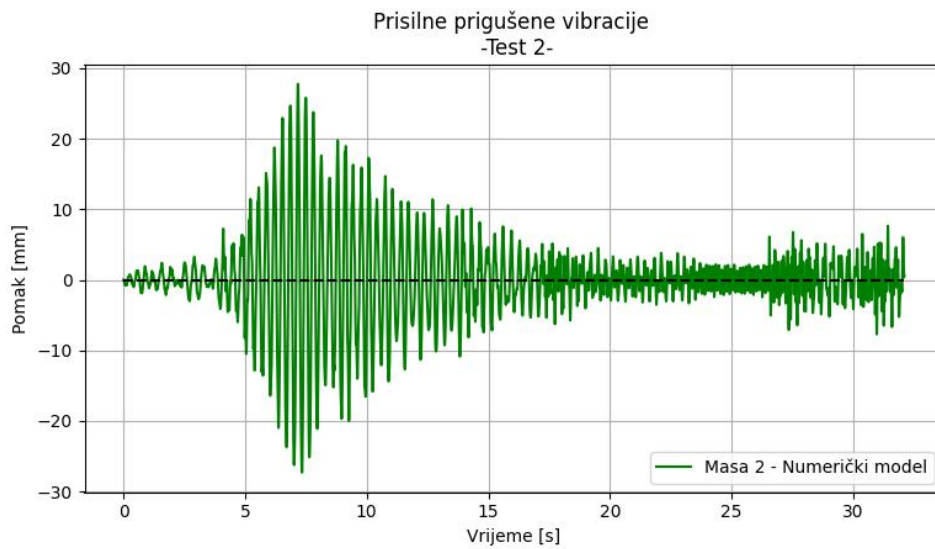


Slika 6.47: Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (test 2)

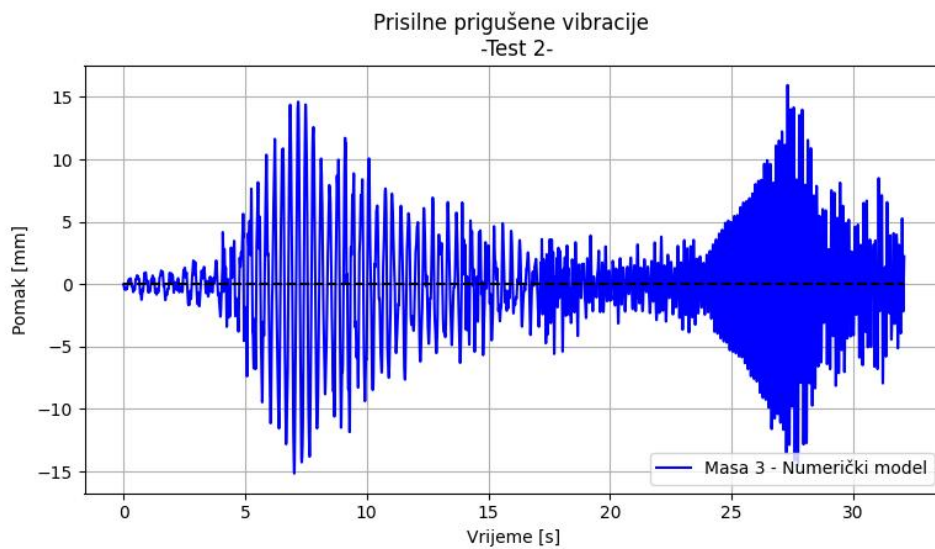


Slika 6.48: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (test 2)





Slika 6.49: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (test 2)

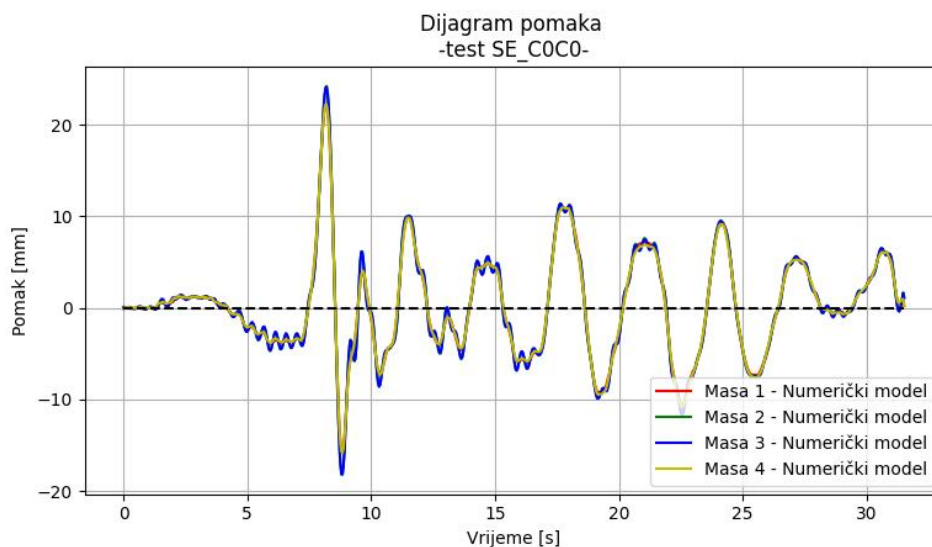


Slika 6.50: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (test 2)

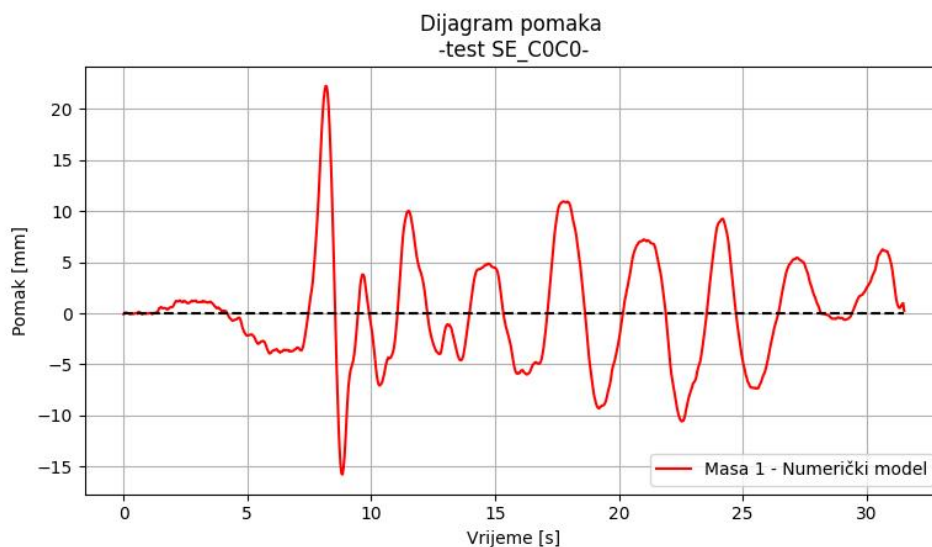
## 6.7.2 Okvir sa stupovima manje krutosti

### Ispitivanje SE\_C0C0

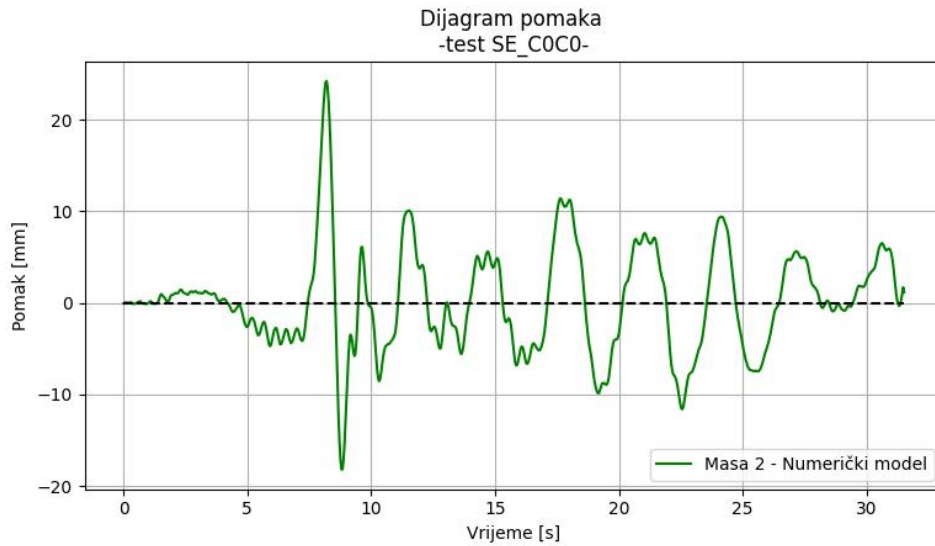
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za ispitivanje SE\_C0C0, su prikazani na slici 6.51 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.52, 6.53, 6.54 i 6.55



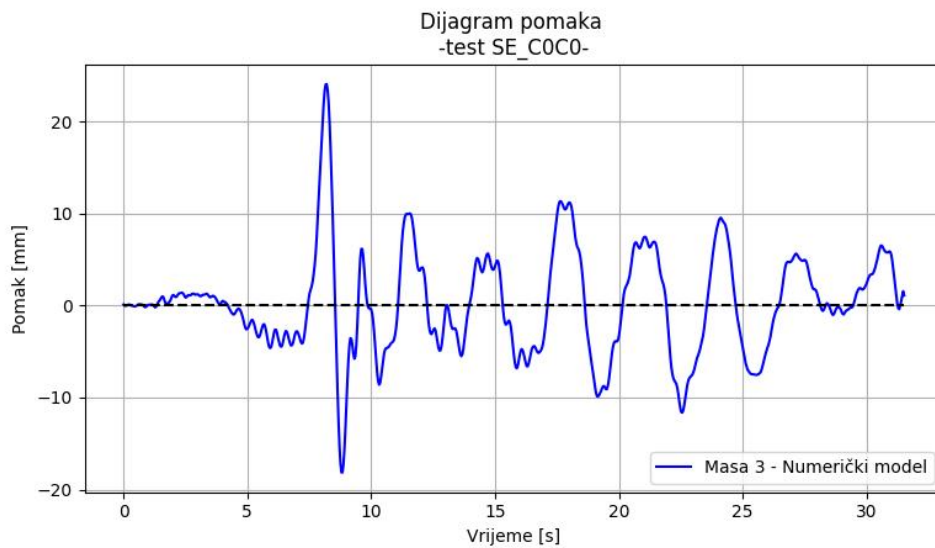
Slika 6.51: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE\_C0C0)



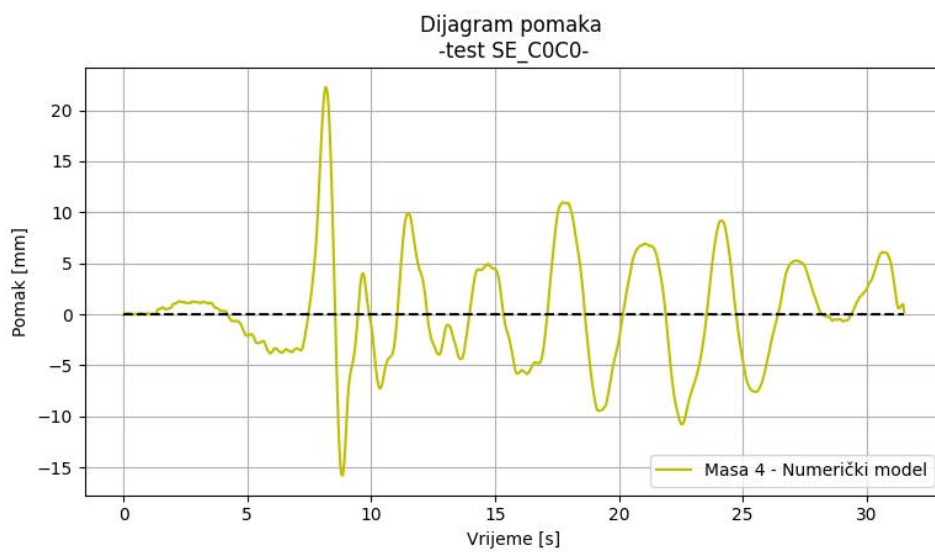
Slika 6.52: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE\_C0C0)



Slika 6.53: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE\_COC0)



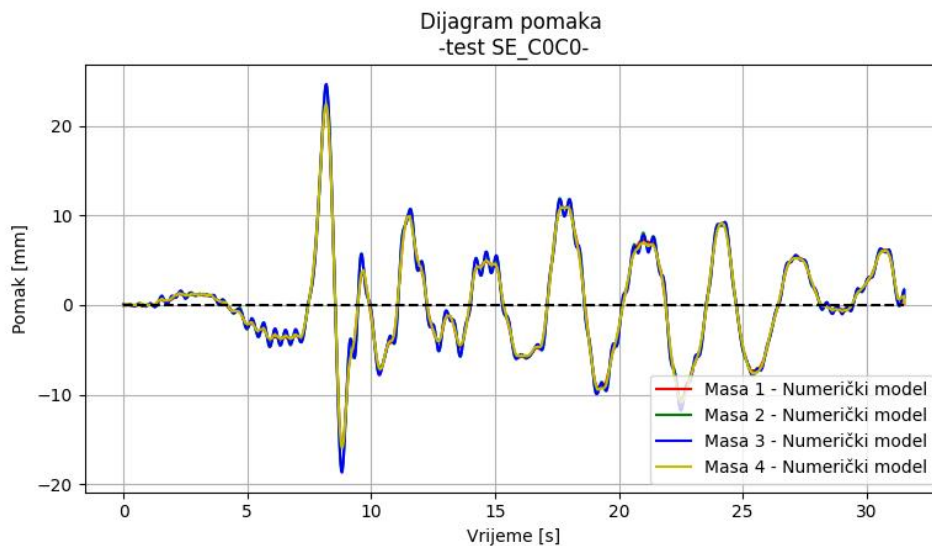
Slika 6.54: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE\_COC0)



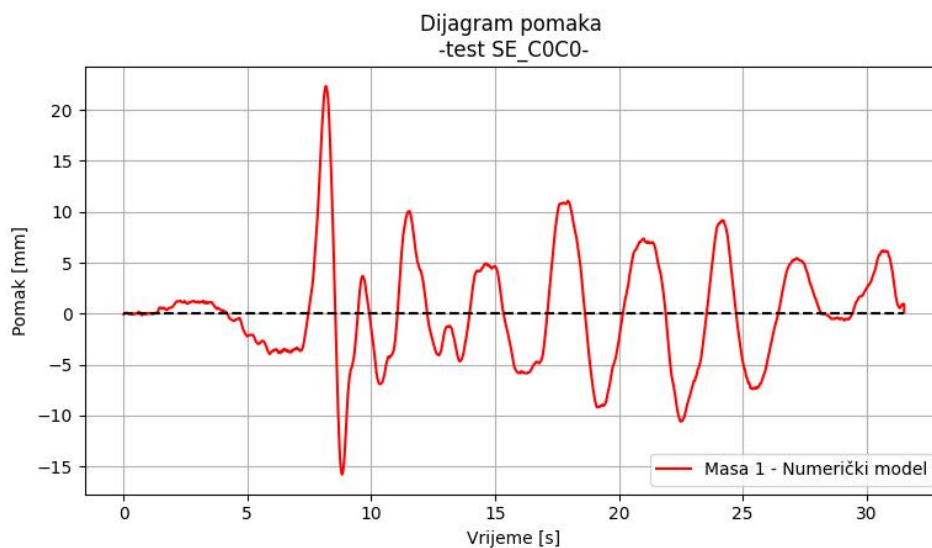
Slika 6.55: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE\_COC0)

### - Progušćeni podaci -

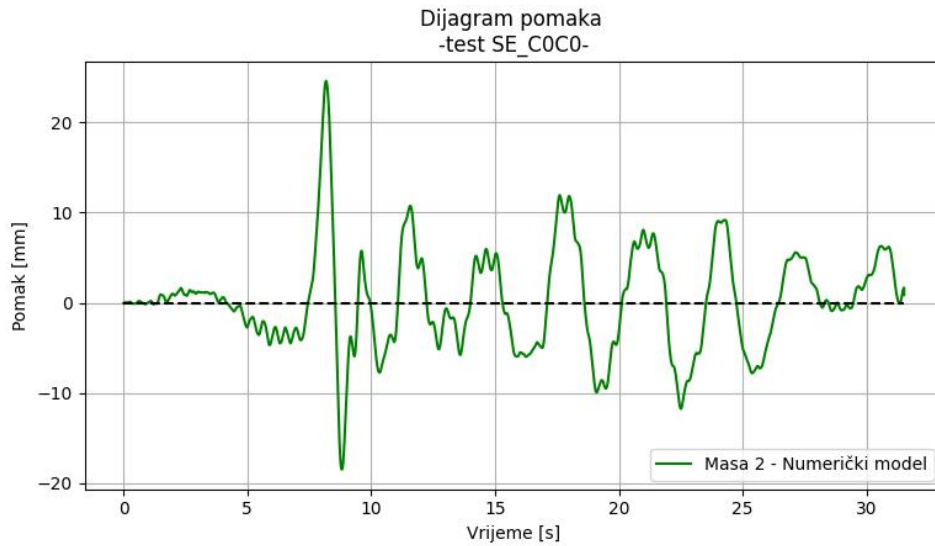
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom s progušćenim ulaznim podacima za ispitivanje SE\_C0C0, su prikazani na slici 6.56 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.57, 6.58, 6.59 i 6.60



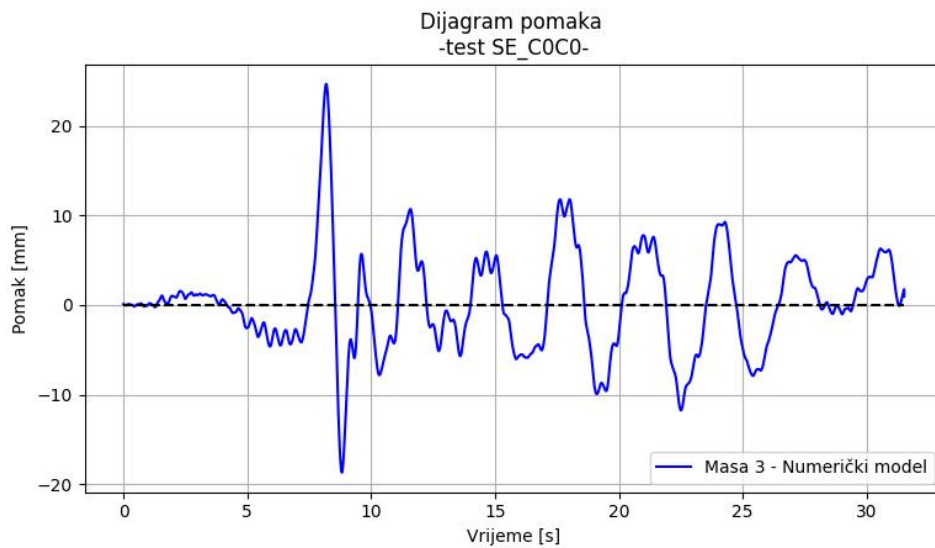
Slika 6.56: Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0C0)



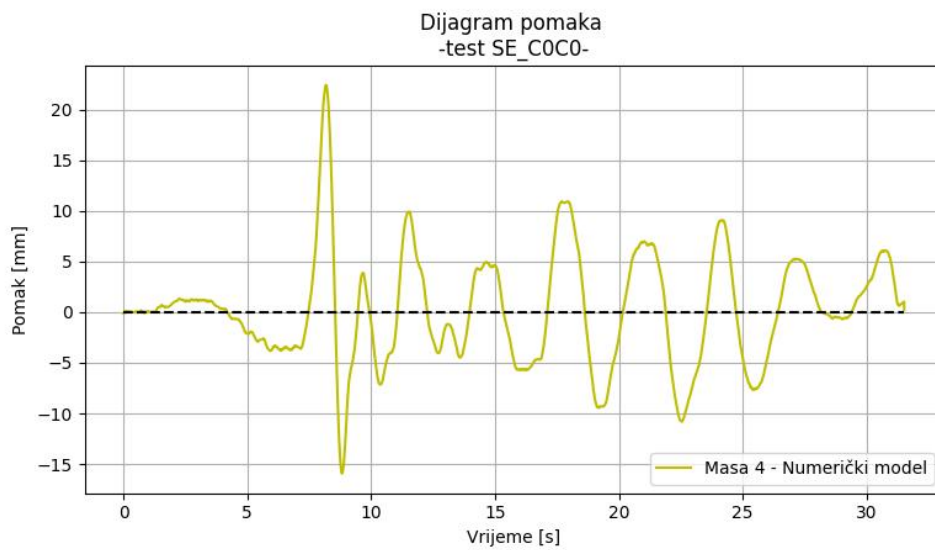
Slika 6.57: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0C0)



Slika 6.58: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_COC0)



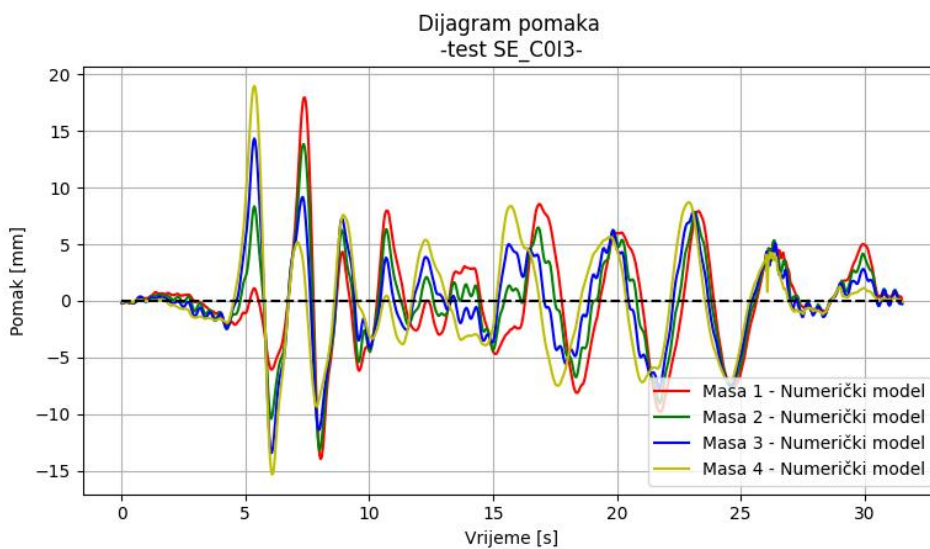
Slika 6.59: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_COC0)



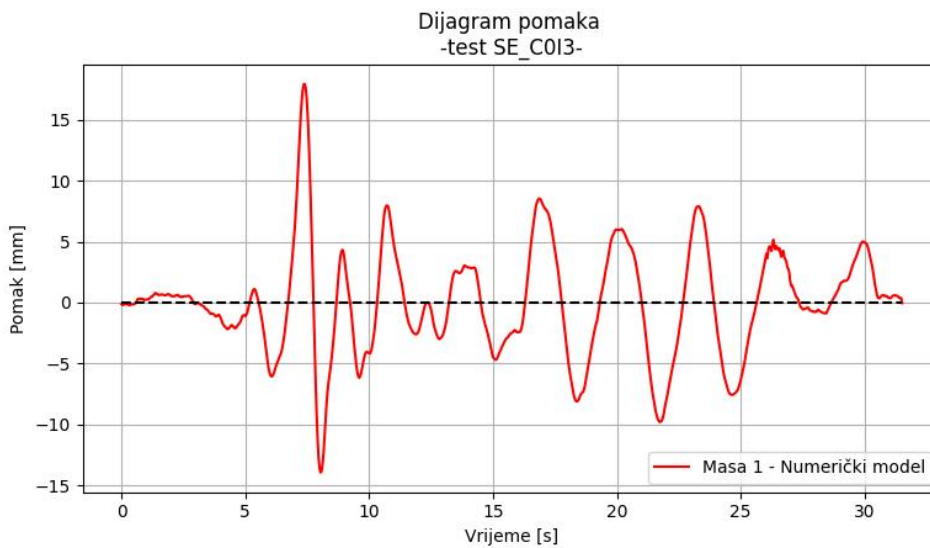
Slika 6.60: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_COC0)

## Ispitivanje SE\_C0I3

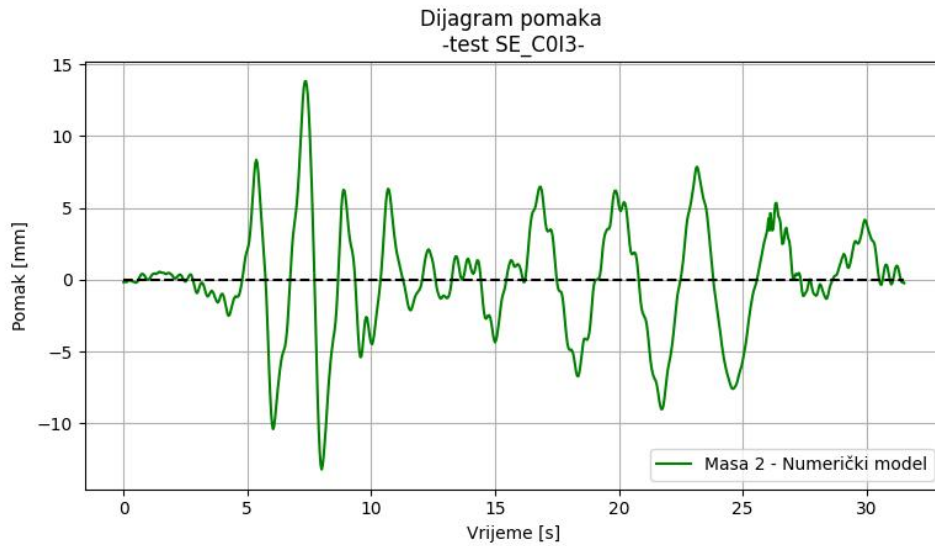
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za ispitivanje SE\_C0I3, su prikazani na slici 6.61 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.62, 6.63, 6.64 i 6.65



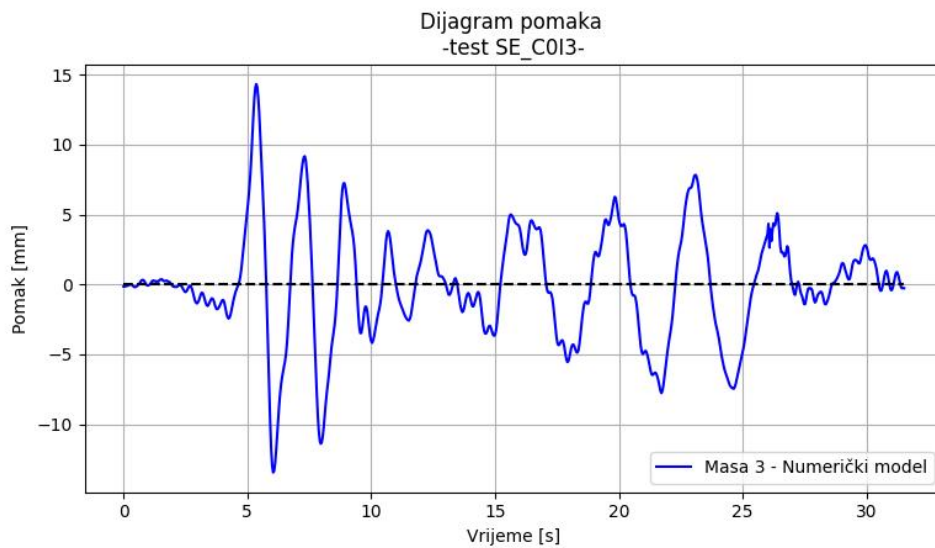
Slika 6.61: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE\_C0I3)



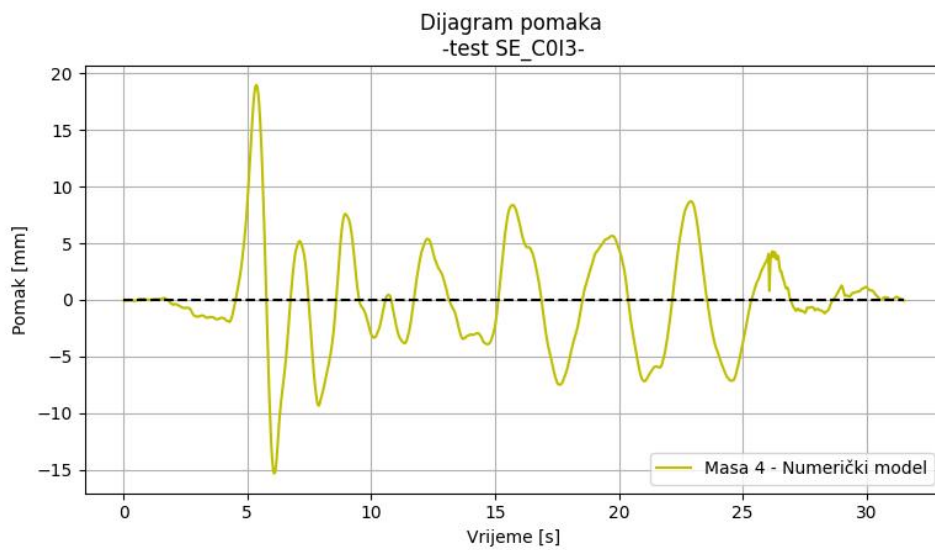
Slika 6.62: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE\_C0I3)



Slika 6.63: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE\_C0I3)



Slika 6.64: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE\_C0I3)

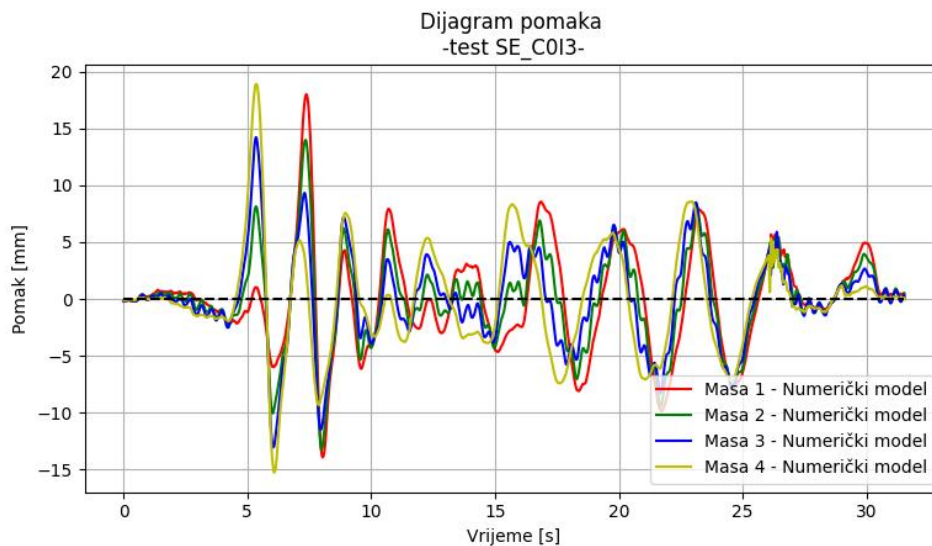


Slika 6.65: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE\_C0I3)

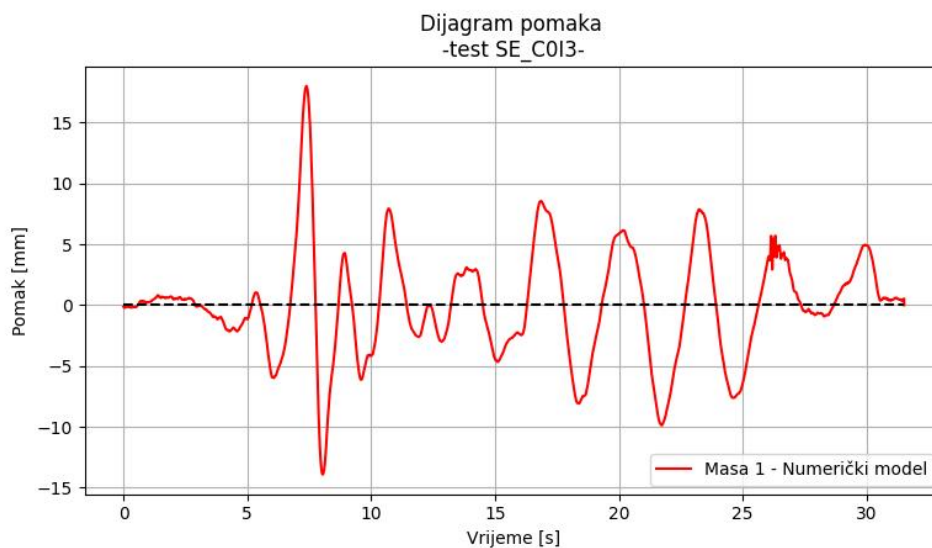


### - Progušćeni podaci -

Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom s progušćenim ulaznim podacima za ispitivanje SE\_C0I3, su prikazani na slici 6.66 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.67, 6.68, 6.69 i 6.70

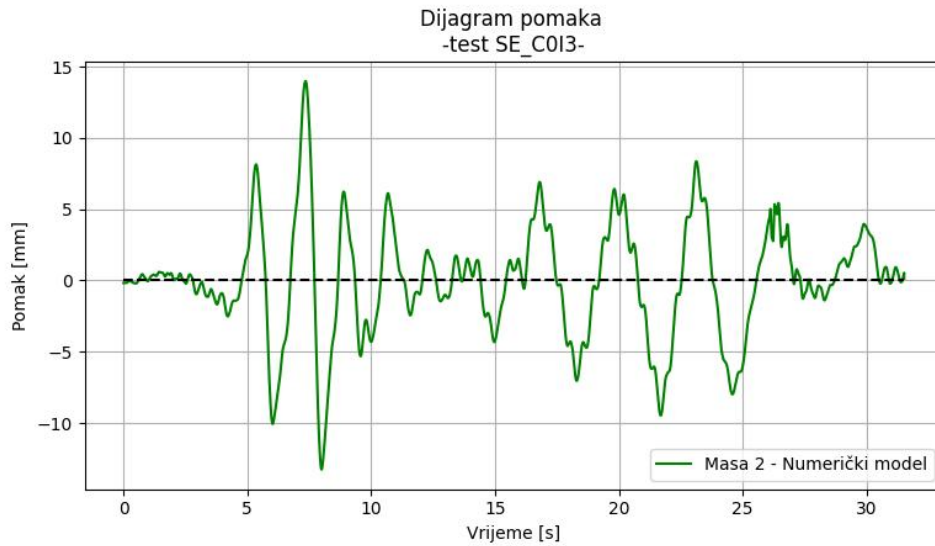


Slika 6.66: Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I3)

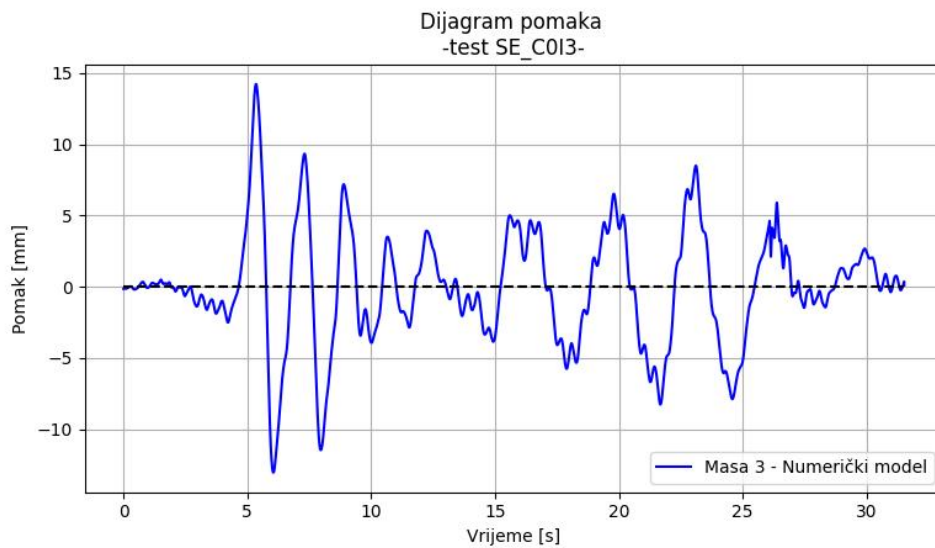


Slika 6.67: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I3)

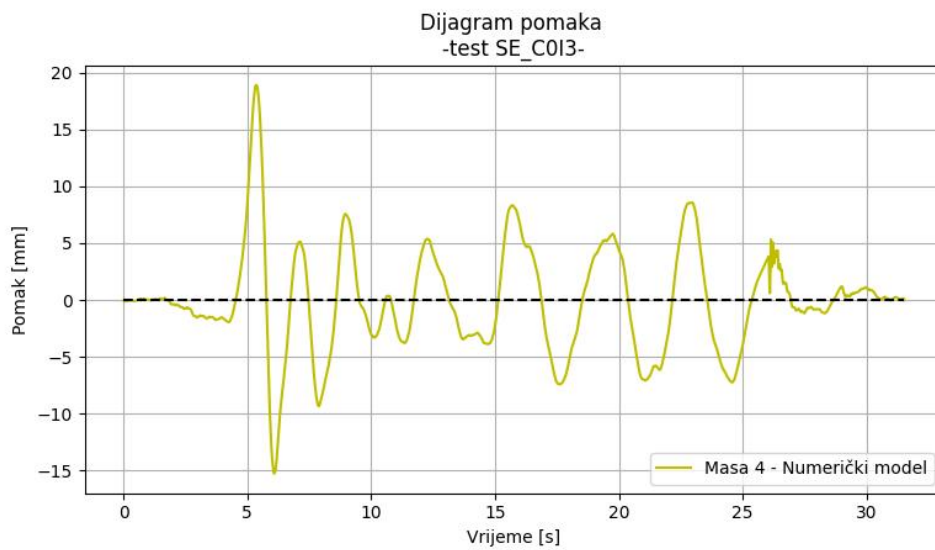




Slika 6.68: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C0I3)



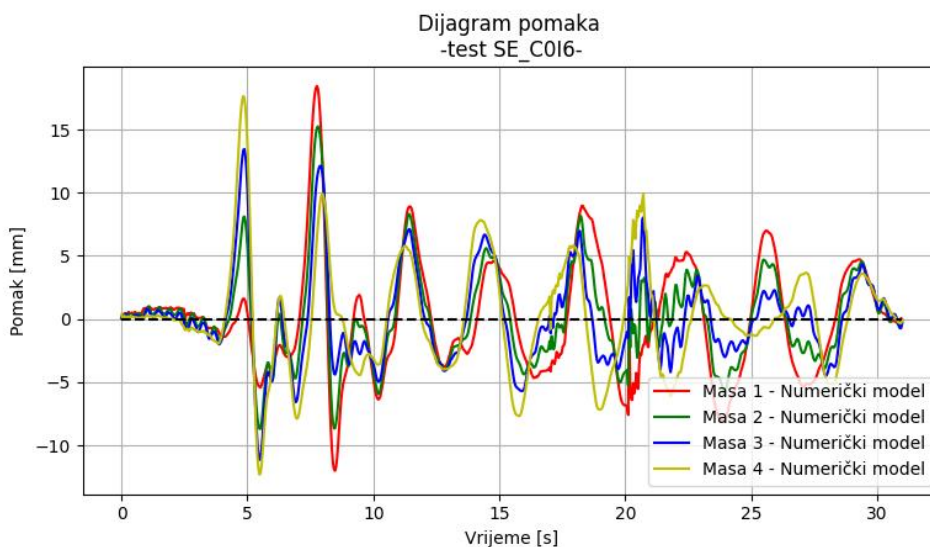
Slika 6.69: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C0I3)



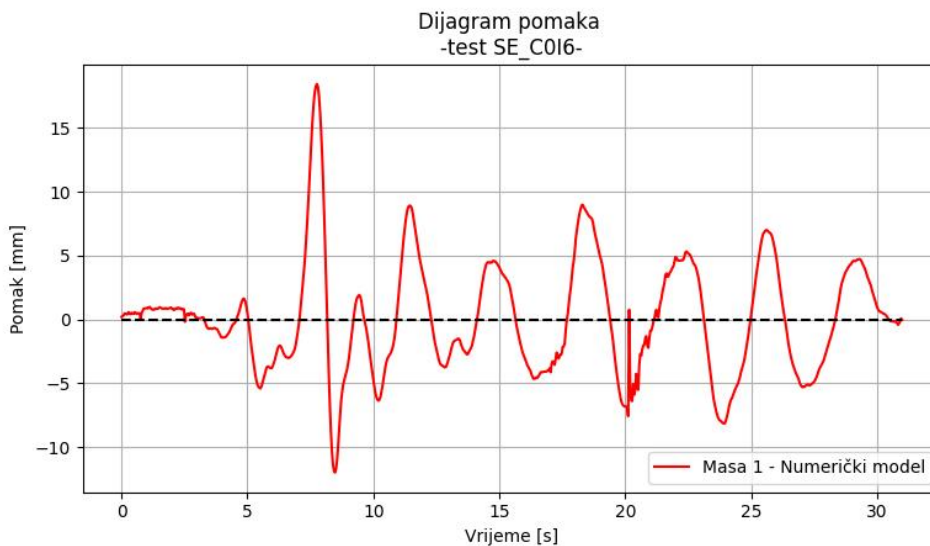
Slika 6.70: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C0I3)

## Ispitivanje SE\_C0I6

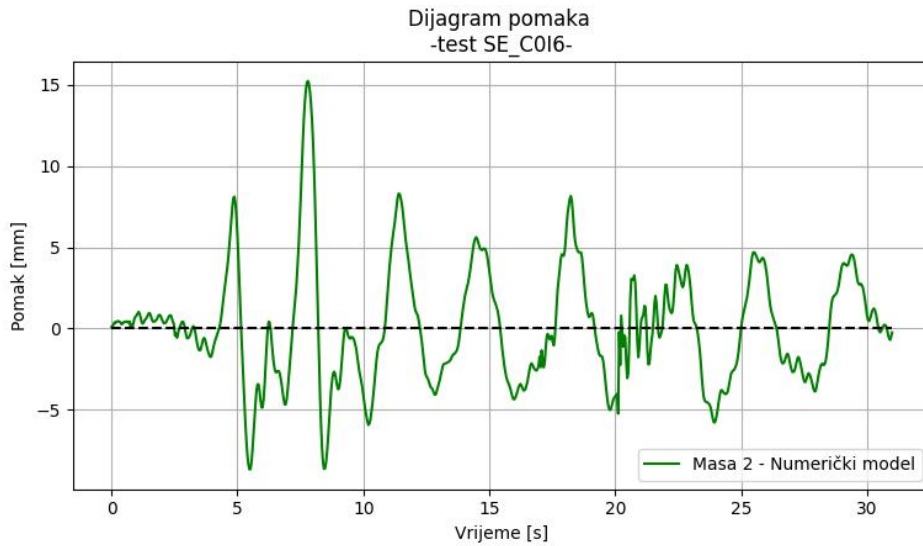
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za ispitivanje SE\_C0I6, su prikazani na slici 6.71 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.72, 6.73, 6.74 i 6.75



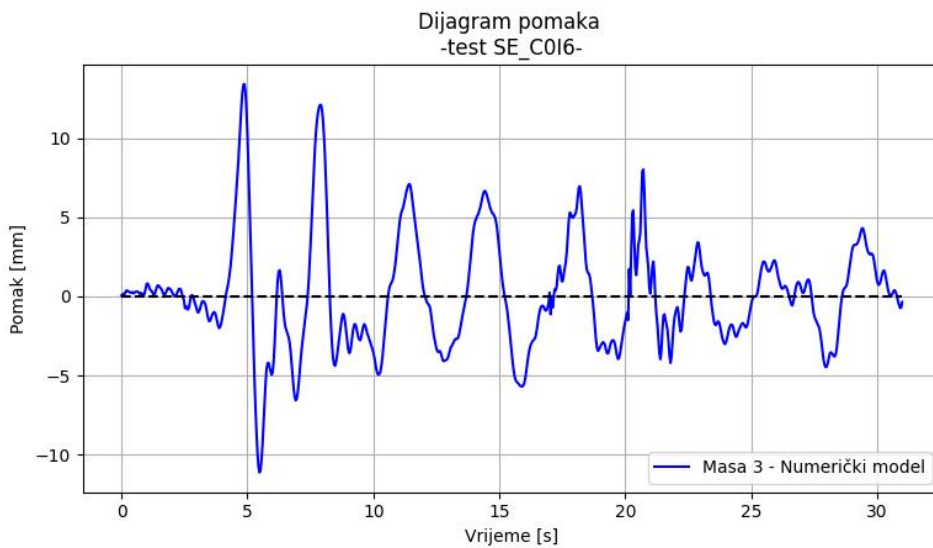
Slika 6.71: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE\_C0I6)



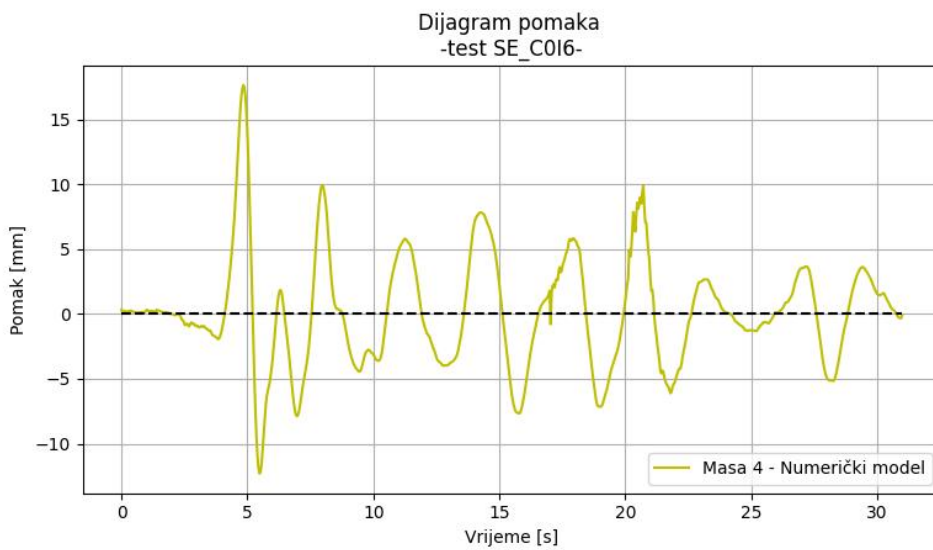
Slika 6.72: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE\_C0I6)



Slika 6.73: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE\_C0I6)



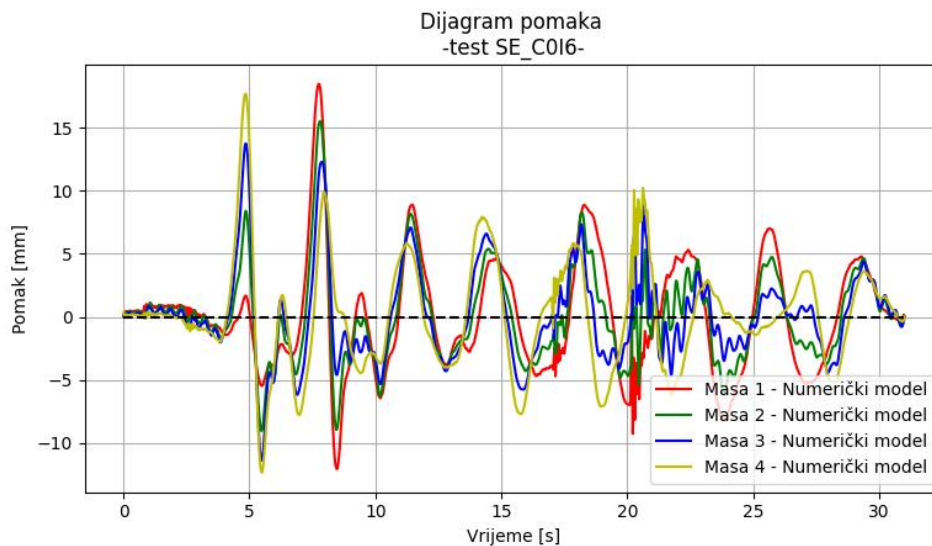
Slika 6.74: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE\_C0I6)



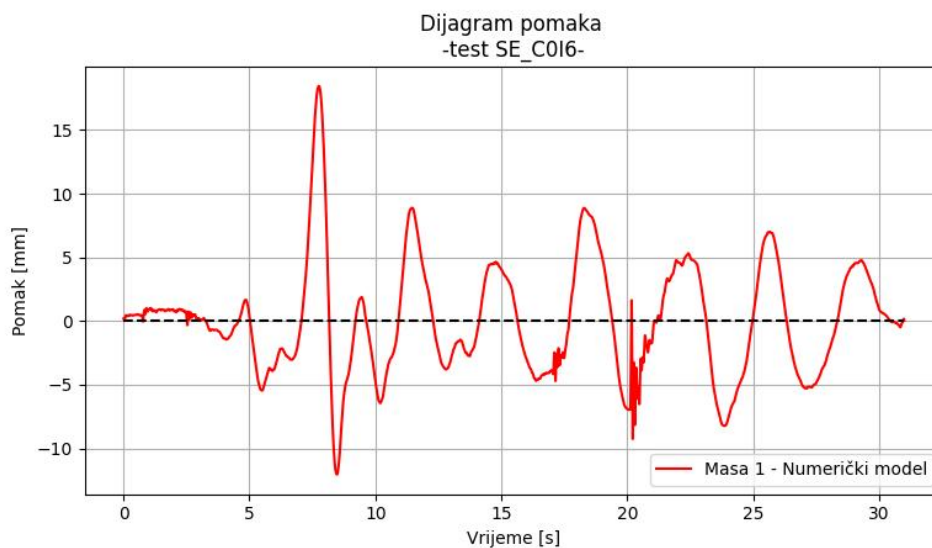
Slika 6.75: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE\_C0I6)

### - Progušćeni podaci -

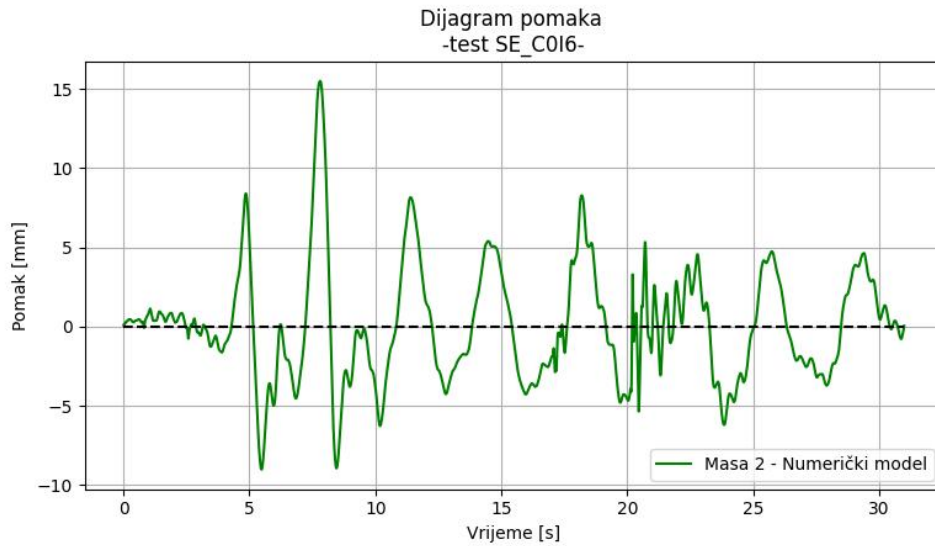
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom s progušćenim ulaznim podacima za ispitivanje SE\_C0I6, su prikazani na slici 6.76 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.77, 6.78, 6.79 i 6.80



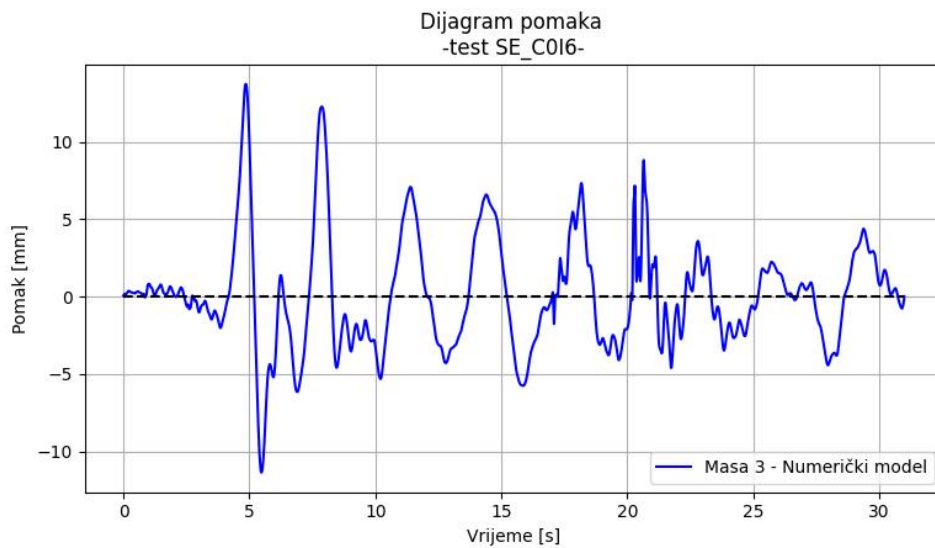
Slika 6.76: Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I6)



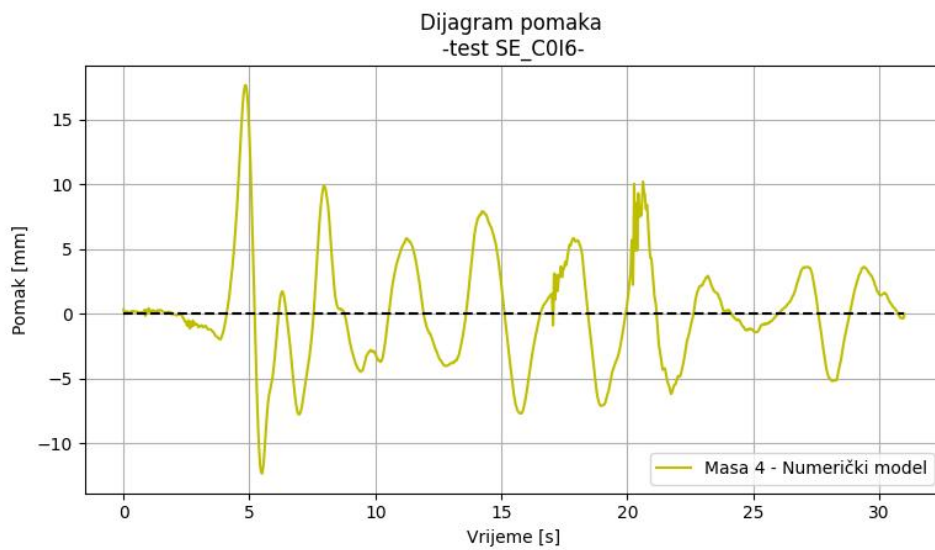
Slika 6.77: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I6)



Slika 6.78: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C016)



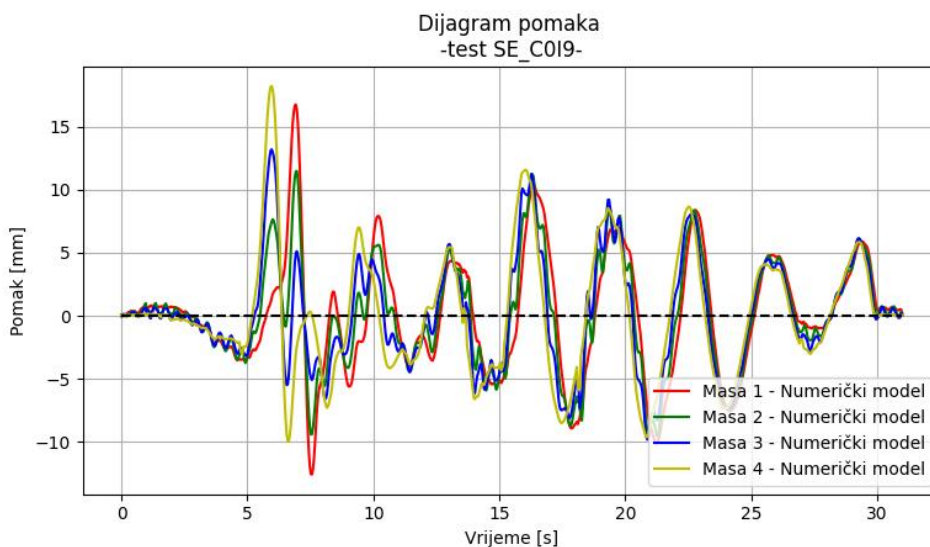
Slika 6.79: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C016)



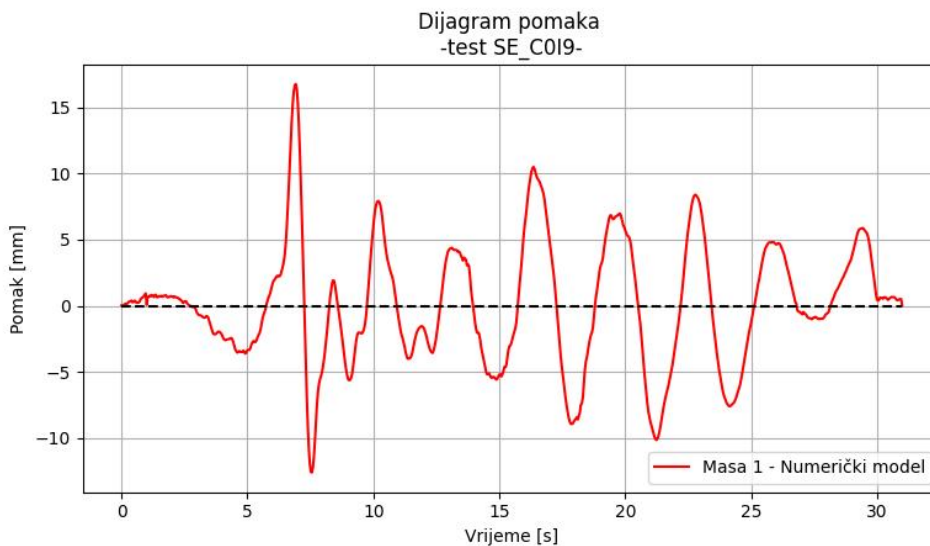
Slika 6.80: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C016)

## Ispitivanje SE\_C019

Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za ispitivanje SE\_C019, su prikazani na slici 6.81 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.82, 6.83, 6.84 i 6.85

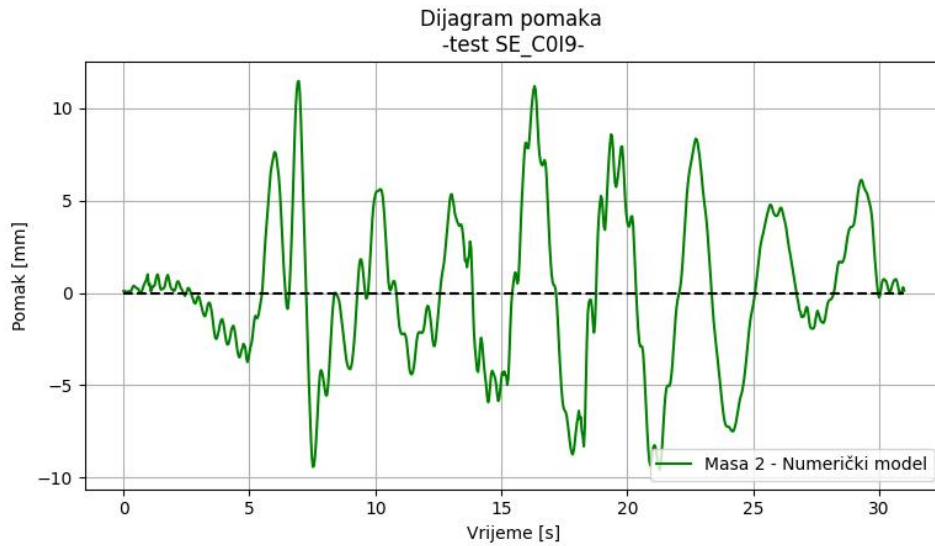


Slika 6.81: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE\_C019)

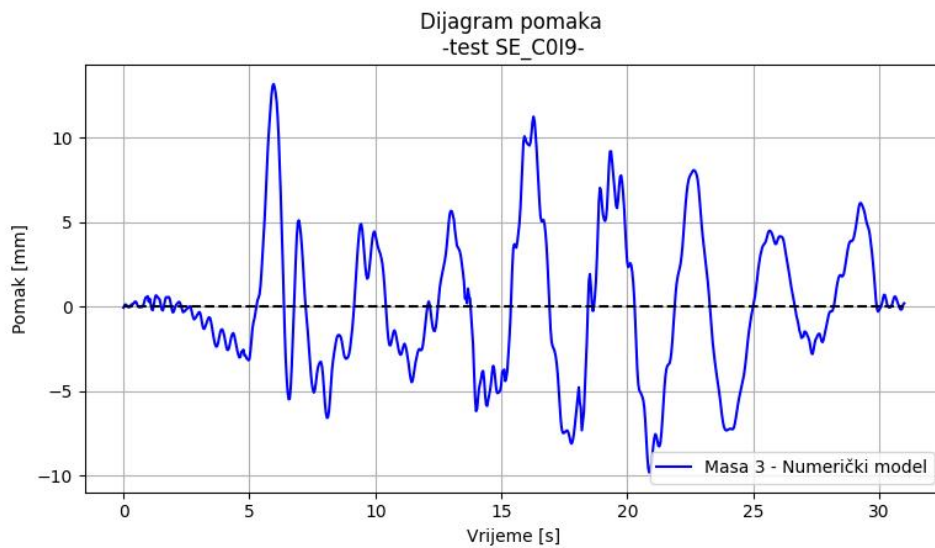


Slika 6.82: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE\_C019)

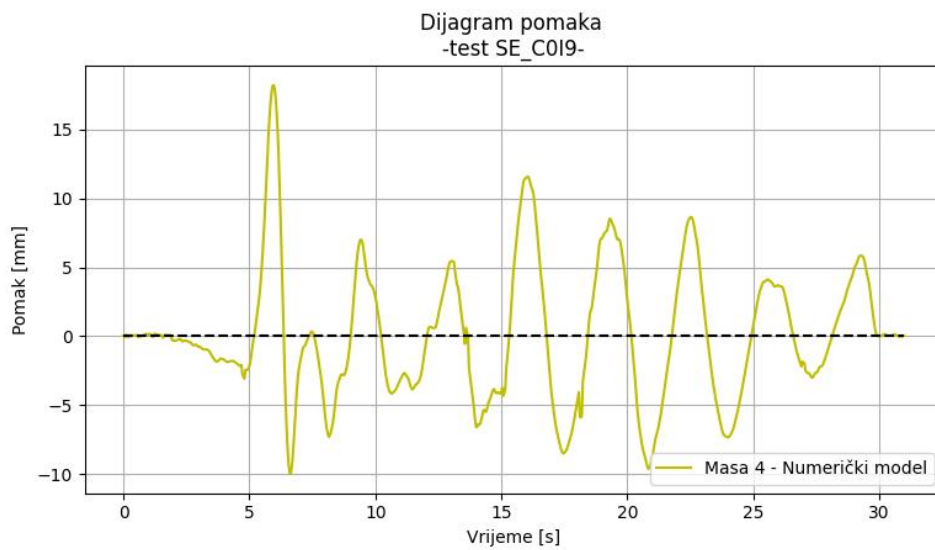




Slika 6.83: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE\_C019)



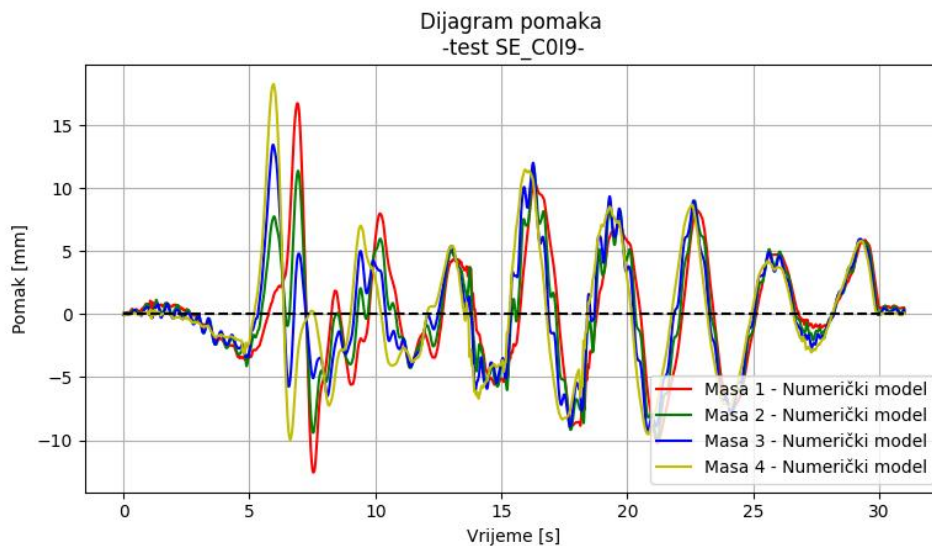
Slika 6.84: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE\_C019)



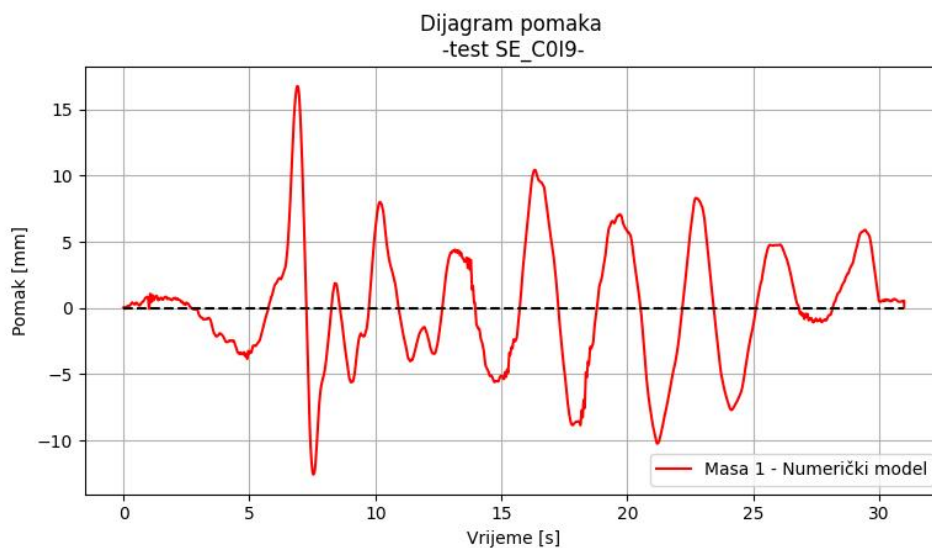
Slika 6.85: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE\_C019)

### - Progušćeni podaci -

Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom s progušćenim ulaznim podacima za ispitivanje SE\_C0I9, su prikazani na slici 6.86 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.87, 6.88, 6.89 i 6.90

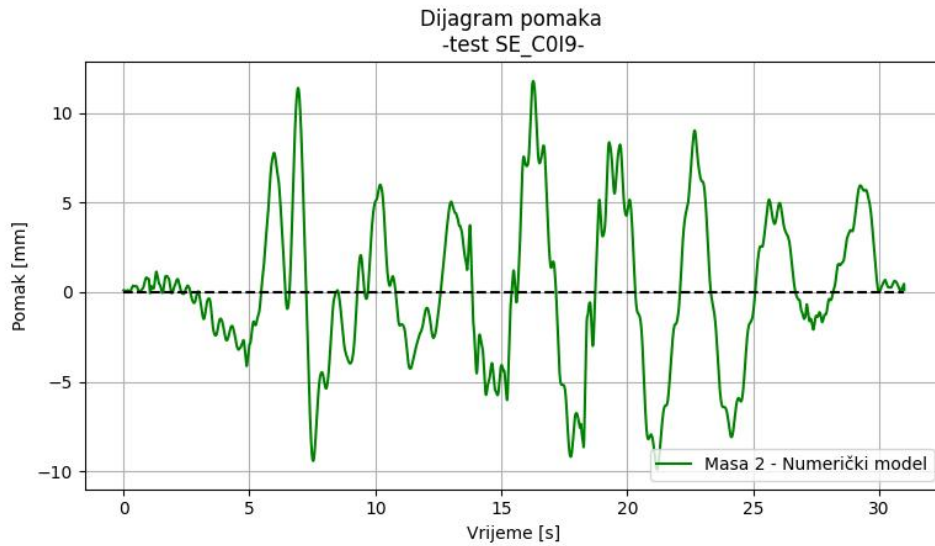


Slika 6.86: Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I9)

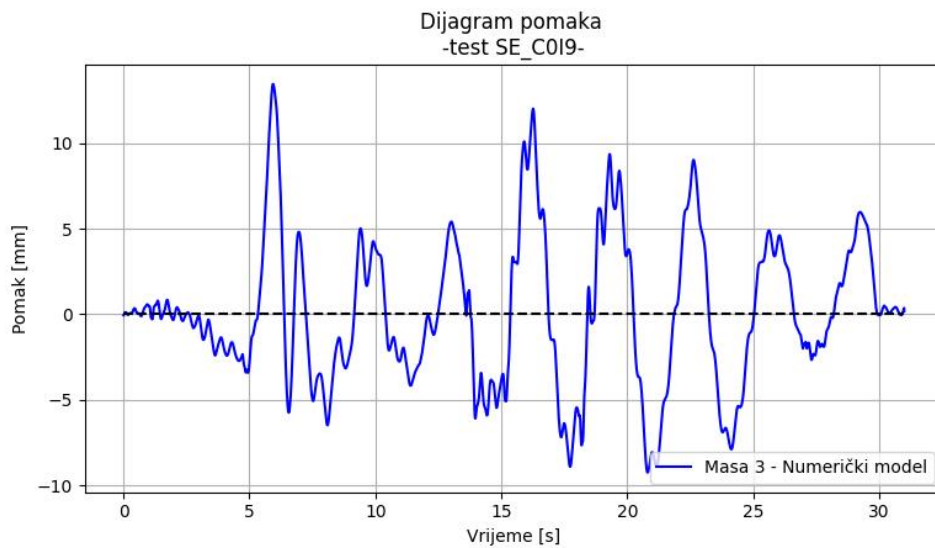


Slika 6.87: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I9)

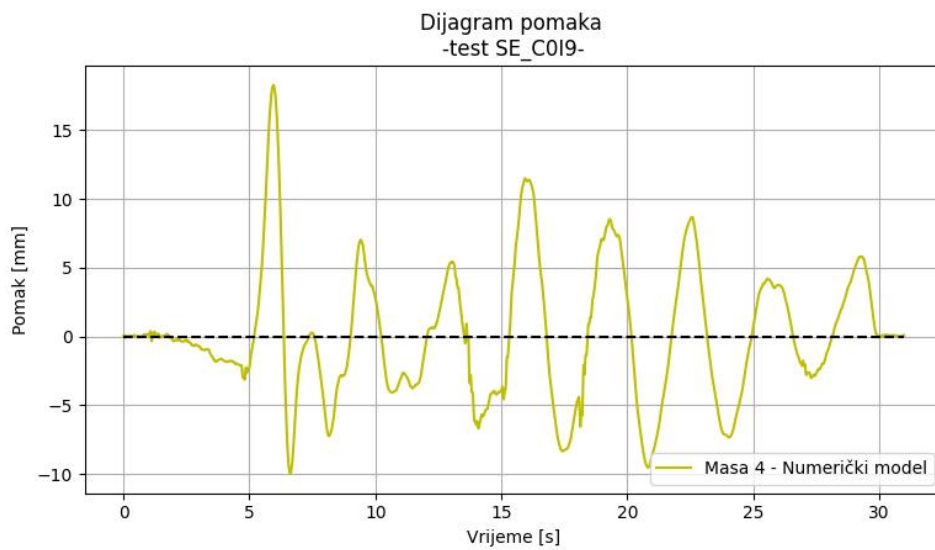




Slika 6.88: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C019)



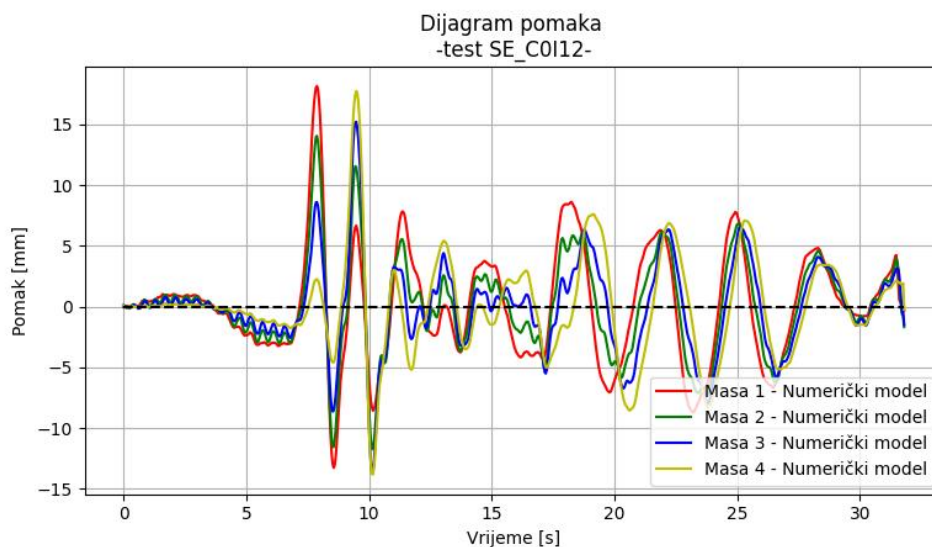
Slika 6.89: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C019)



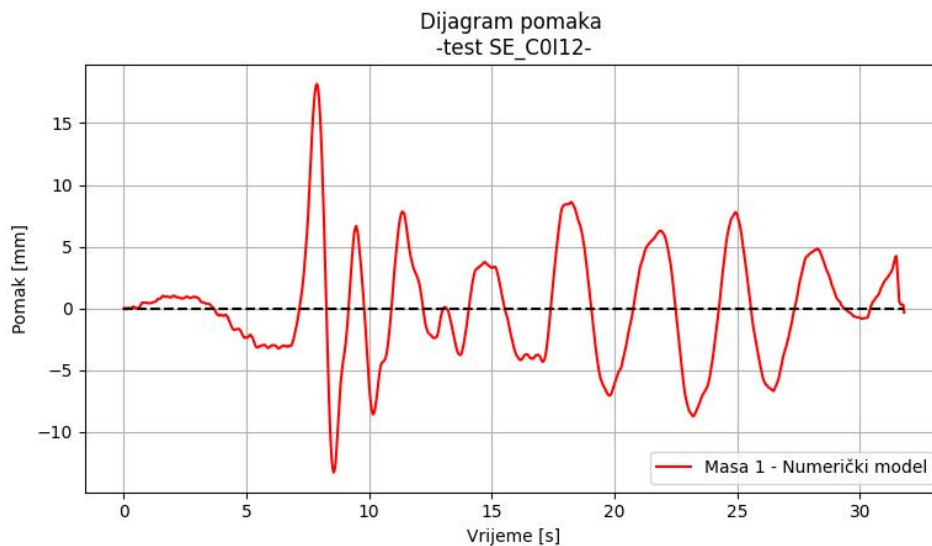
Slika 6.90: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C019)

## Ispitivanje SE\_C0I12

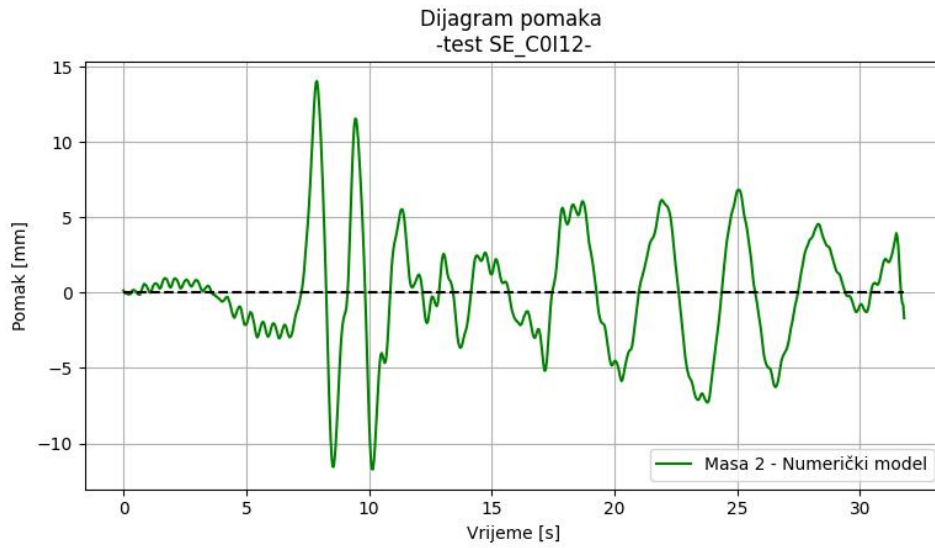
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom za ispitivanje SE\_C0I12, su prikazani na slici 6.91 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.92, 6.93, 6.94 i 6.95



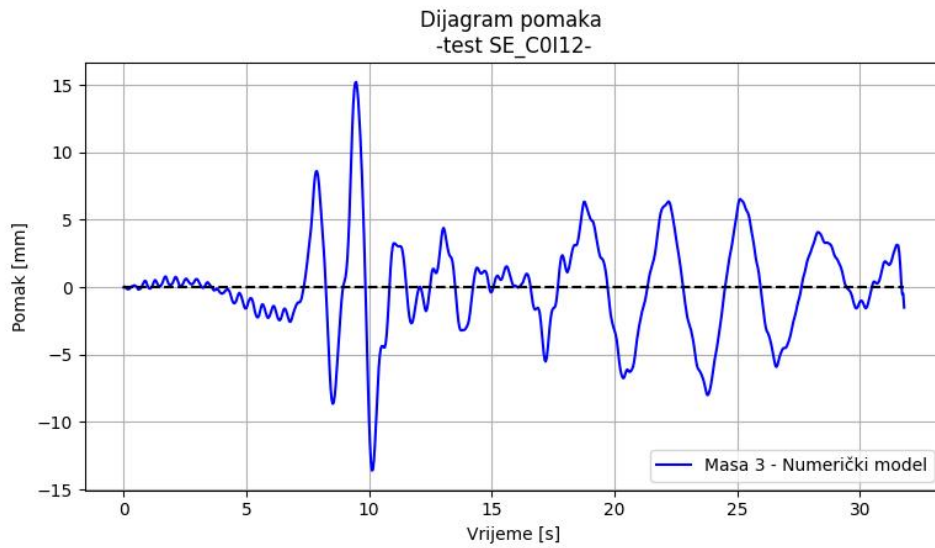
Slika 6.91: Dijagram pomaka svih masa - numerički model (SE\_C0I12)



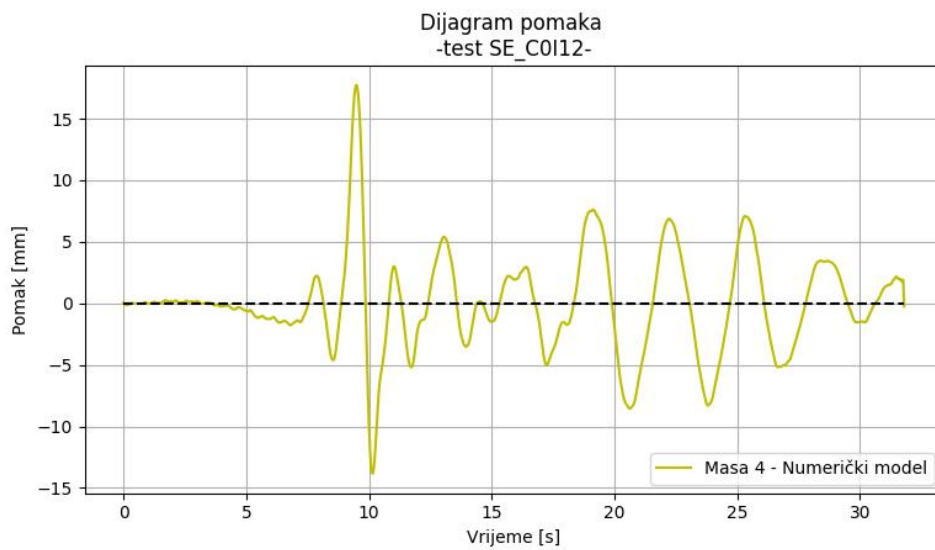
Slika 6.92: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model (SE\_C0I12)



Slika 6.93: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model (SE\_CO12)



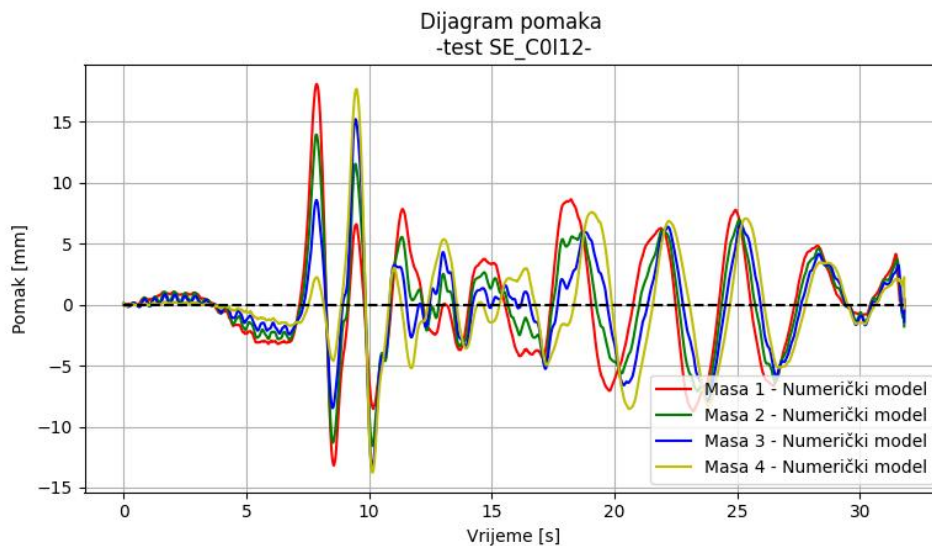
Slika 6.94: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model (SE\_CO12)



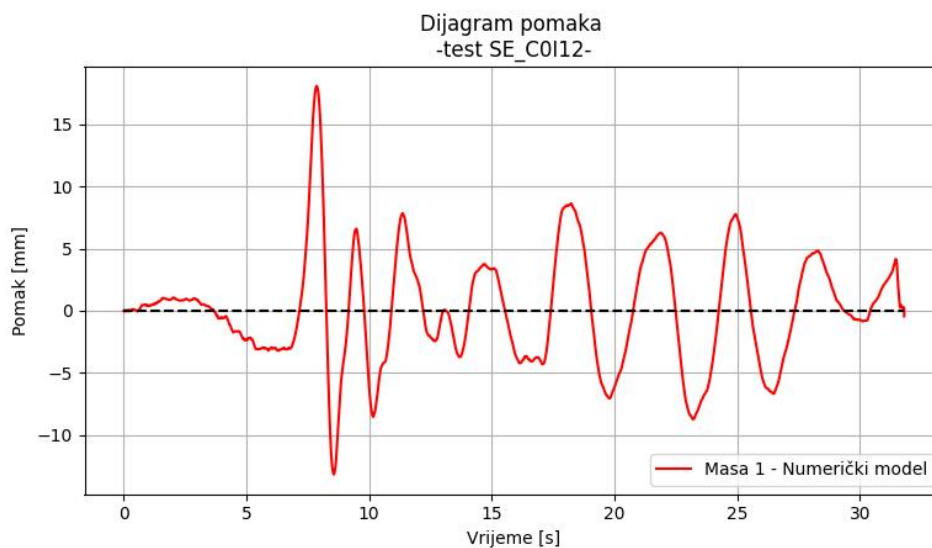
Slika 6.95: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model (SE\_CO12)

### - Progušćeni podaci -

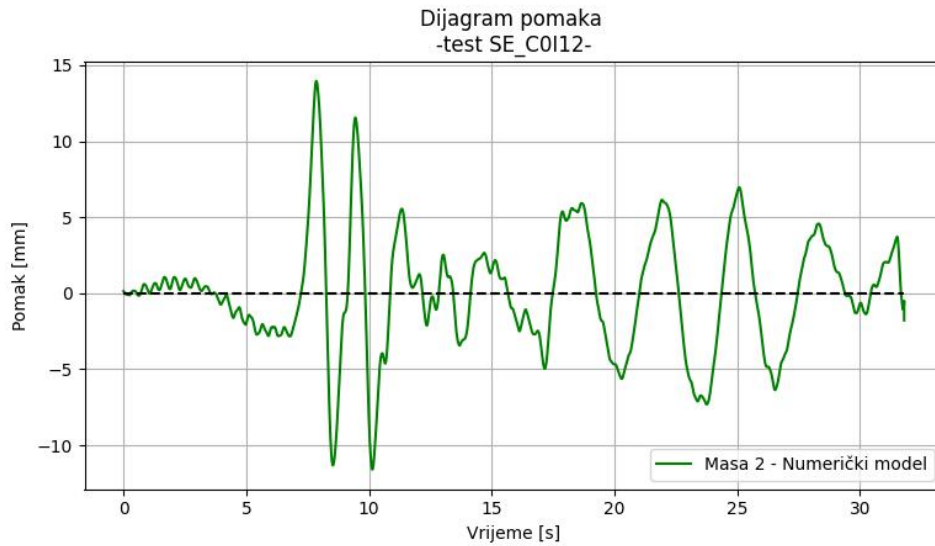
Pomaci svih masa modela, dobiveni numeričkom analizom s progušćenim ulaznim podacima za ispitivanje SE\_C0I12, su prikazani na slici 6.96 a pojedinačni pomaci masa su prikazani na slikama 6.97, 6.98, 6.99 i 6.100



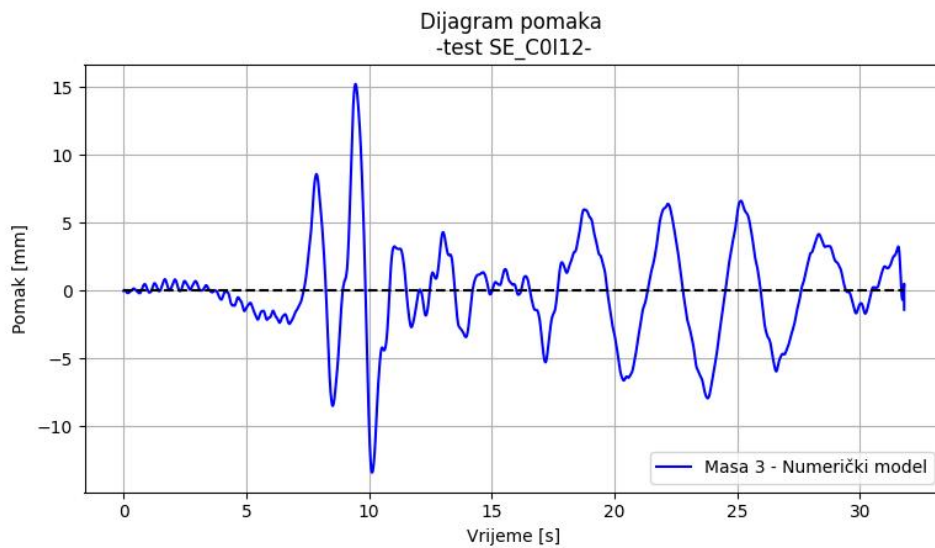
Slika 6.96: Dijagram pomaka svih masa - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I12)



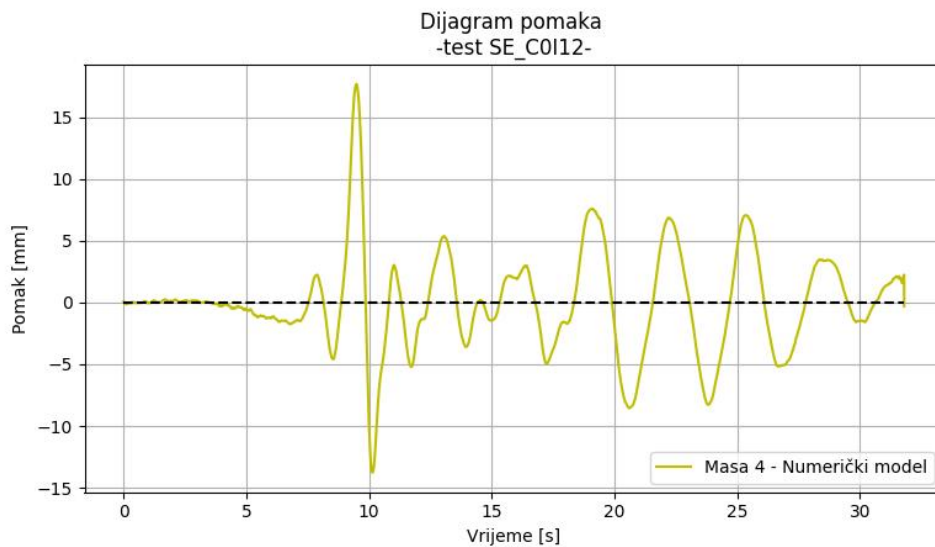
Slika 6.97: Dijagram pomaka mase 1 - numerički model; progušćeni podaci (SE\_C0I12)



Slika 6.98: Dijagram pomaka mase 2 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C0I12)



Slika 6.99: Dijagram pomaka mase 3 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C0I12)



Slika 6.100: Dijagram pomaka mase 4 - numerički model; proglašeni podaci (SE\_C0I12)

# 7. VALIDACIJA NUMERIČKOG MODELA

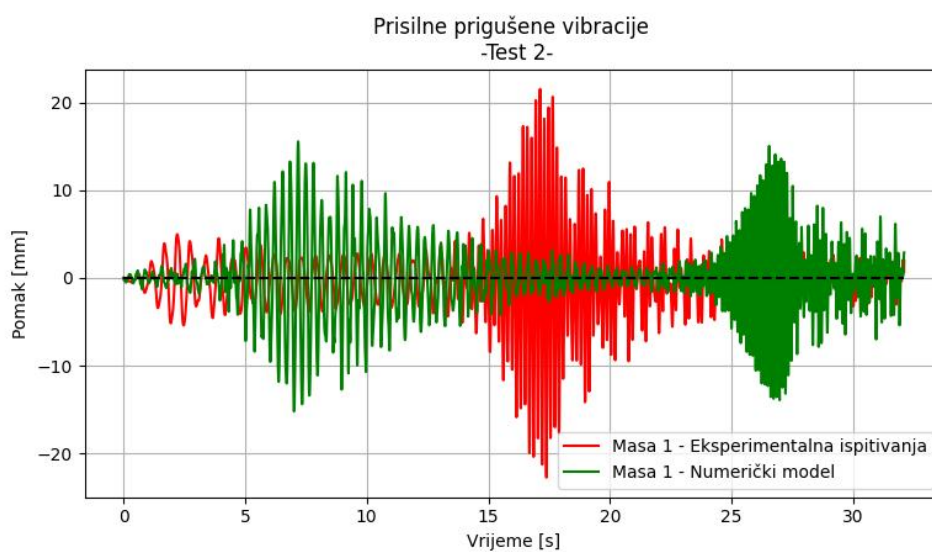
U ovom poglavlju su prikazani rezultati dobiveni iz eksperimentalnih ispitivanja i numeričke analize, koji su međusobno uspoređeni kako bismo validirali numerički model. Validacija numeričkog modela se provodi tako da se usporede rezultati izabranih pokusa te ako se dovoljno dobro poklapaju, smatramo da je model validiran. U sklopu ovog rada, validacija je provedena koristeći se samo određenim ispitivanjima te su oni prikazani u nastavku, zajedno s razlogom odabira istih.

Okvir s krutim stupovima je validiran na temelju podataka iz testa 2, a za okvir sa stupovima manje krutosti su korišteni rezultati sljedeća dva ispitivanja:

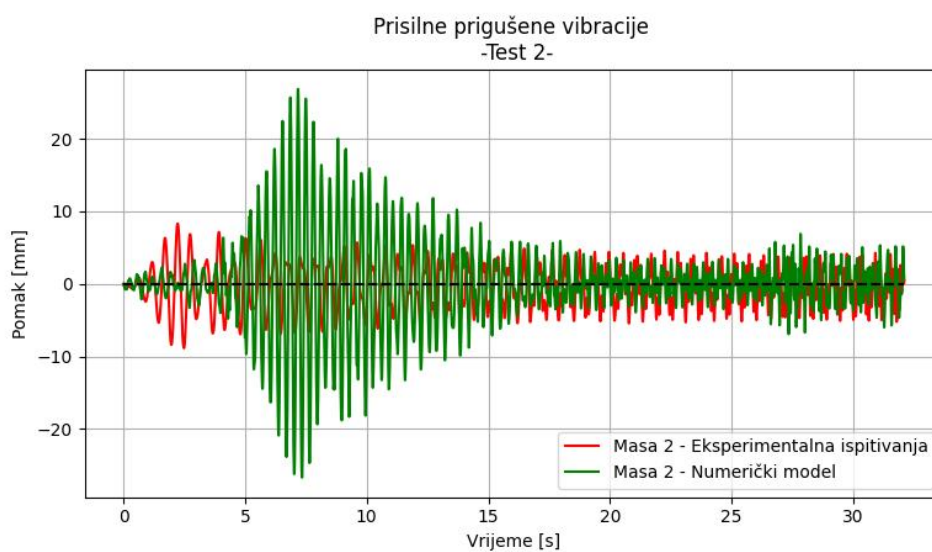
- SE\_C0C0
- SE\_C0I3

Treba napomenuti kako je validacija numeričkog modela provedena s numeričkim rezultatima gdje ulazni podaci nisu proglašćivani. Razlog za to je što gotovo da nema razlike u rezultatima dobivenima za proglašćene ulazne podatke u odnosu na rezultate s postojećim podacima.

## 7.1 Okvir s krutim stupovima

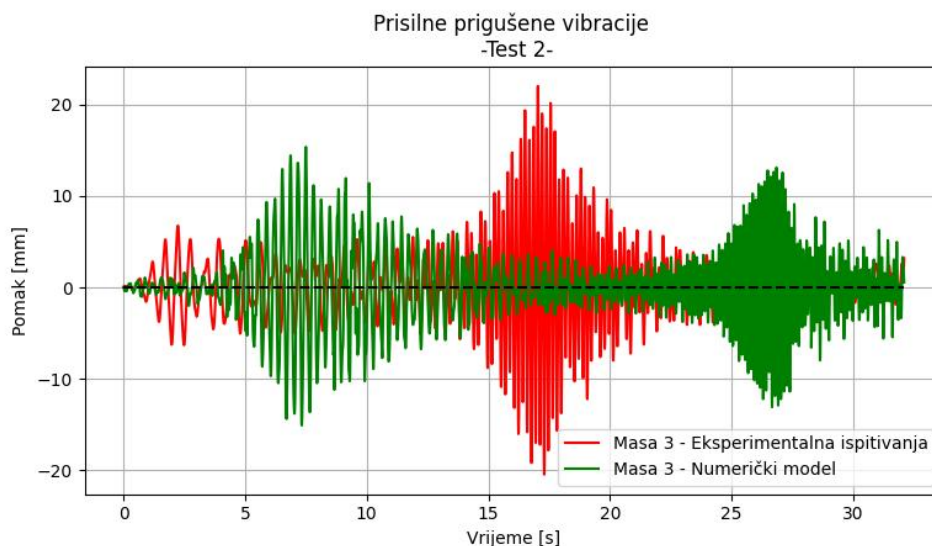


Slika 7.1: Usporedba pomaka mase 1 - validacija (test 2)



Slika 7.2: Usporedba pomaka mase 2 - validacija (test 2)





Slika 7.3: Usporedba pomaka mase 3 - validacija (test 2)

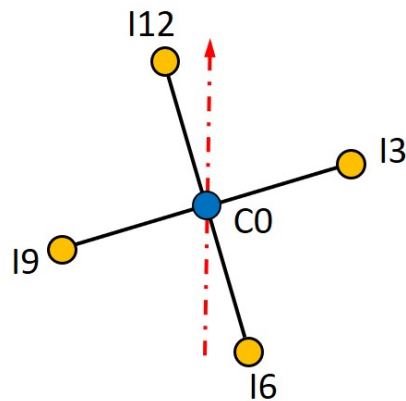
Na slikama 7.1, 7.2 i 7.3 vidimo kako se rezultati eksperimentalnih ispitivanja i numeričkog modela ne poklapaju. Jedan od razloga za to je što je kao pobuda oslonca korištena *Sinesweep* pobuda za koju je teško numeričkim modelom dobiti sličan dinamički odgovor kao što je dobiven eksperimentalnim ispitivanjima. Na svim prikazanim slikama je vidljivo kako se značajniji skokovi u pomacima pojavljuju u različitim vremenskim trenucima. Jedan od razloga za takvo ponašanje je da postoji razlika u geometrijskim i materijalnim karakteristikama numeričkog modela u odnosu na stvarni. Kao što je spomenuto u poglavlju 5, određene materijalne karakteristike modela nisu izmjerene nego su pretpostavljene, a takve pretpostavke unutar numeričkog modela mogu izazvati značajne razlike u rezultatima. Međutim, korištenje *Sinesweep* pobude za potrebe validacije numeričkog modela nije preporučljivo, upravo zbog velike šanse za grešku i odstupanja od očekivanih ili izmjerenih rezultata. Osim toga, takva vrsta vanjske pobude se u stvarnosti nigdje ne pojavljuje tako da se provođenje validacije modela na temelju takve pobude ne treba niti provoditi.

Pošto u sklopu ovog rada okvir sa krutim stupovima nije izložen stvarnome potresnom zapisu, prikazani su rezultati ovakve vrste ispitivanja.



## 7.2 Okvir sa stupovima manje krutosti

Ispitivanje *SE\_C0C0* je odabrano jer ima jednaku pobudu oslonaca te je kao takvo dobro referentno ispitivanje, a odabir drugog ispitivanja ima veze sa pravcem nailaska potresa na okvir. Pogledajmo sada uvećani prikaz unutarnjeg prstena, *SMART 1* sustava, uz prikazane stanice čiji su podaci korišteni u radu te smjerom nailaska potresnog vala (Slika 7.4).



Slika 7.4: Unutarnji prsten SMART 1 sustava - izdvojene stanice

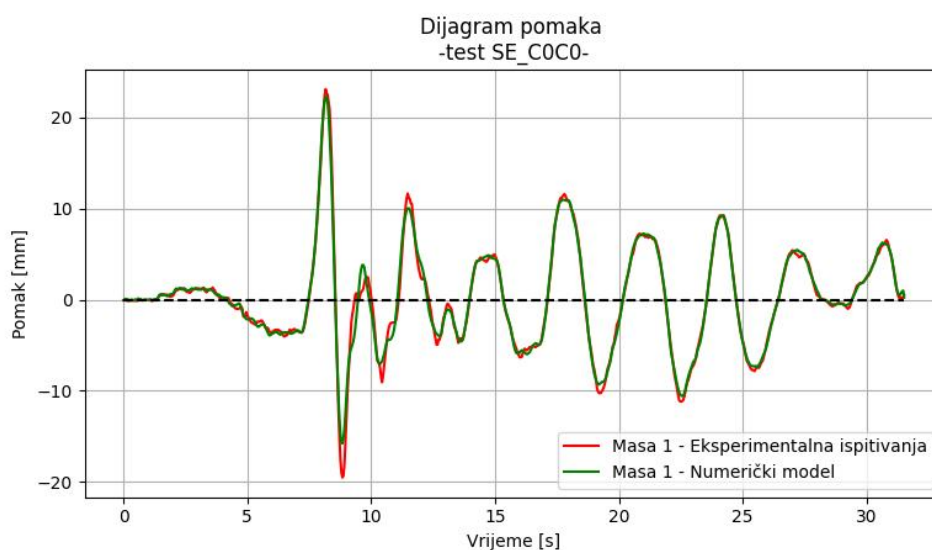
U prvoj kombinaciji pretpostavlja se jednolika pobuda oslonaca, tj. kao da ne postoji zakašnjenje ili bilo kakva promjena u potresnom valu. Ispitivanje *SE\_C0I3* se nalazi na pravcu otprilike okomitom na smjer nailaska potresnog vala. Odabirom ove kombinacije ispitivanja simuliramo višestruku pobudu oslonaca gdje oslonci nisu opterećeni na jednak način te tako simuliramo nailazak potresnog vala u stvarnosti.

U nastavku su prikazane usporedbe dobivenih rezultata (bez proglašćivanja podataka) te su za svako ispitivanje prikazani rezultati apsolutnih te relativnih pomaka.

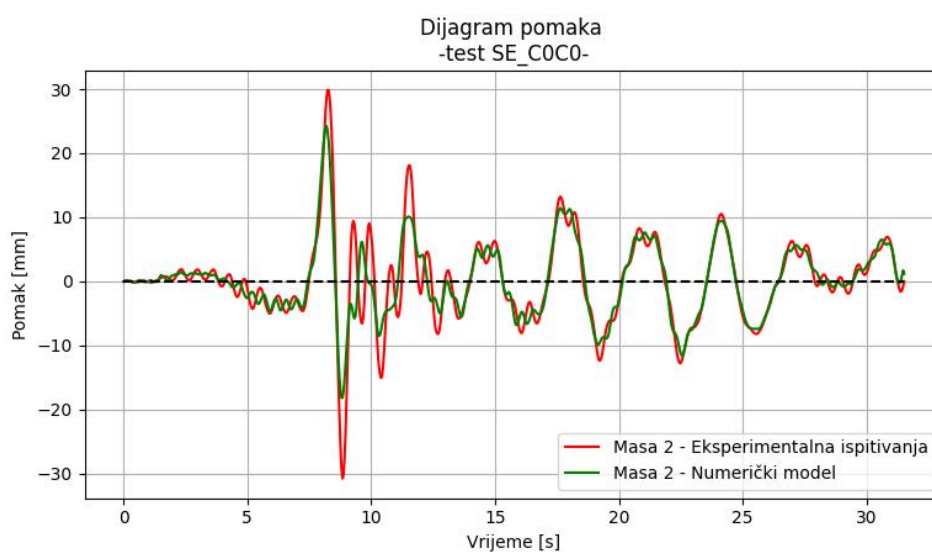
## Ispitivanje SE\_C0C0

Za ispitivanje *SE\_C0C0* su osim dijagrama apsolutnih pomaka (Slike 7.5, 7.6, 7.7 i 7.8) prikazani i dijagrami relativnih pomaka svih masa (Slike 7.9, 7.10, 7.11 i 7.12), zajedno s dijagramima relativnih kuteva zaokreta svih četiriju masa (Slike 7.13, 7.14, 7.15 i 7.16). Razlog tome je što se iz dijagrama relativnih pomaka jasnije mogu uočiti razlike u veličini/amplitudi oscilacija, a koje nastaju najviše zbog neprecizno određenog koeficijenta prigušenja.

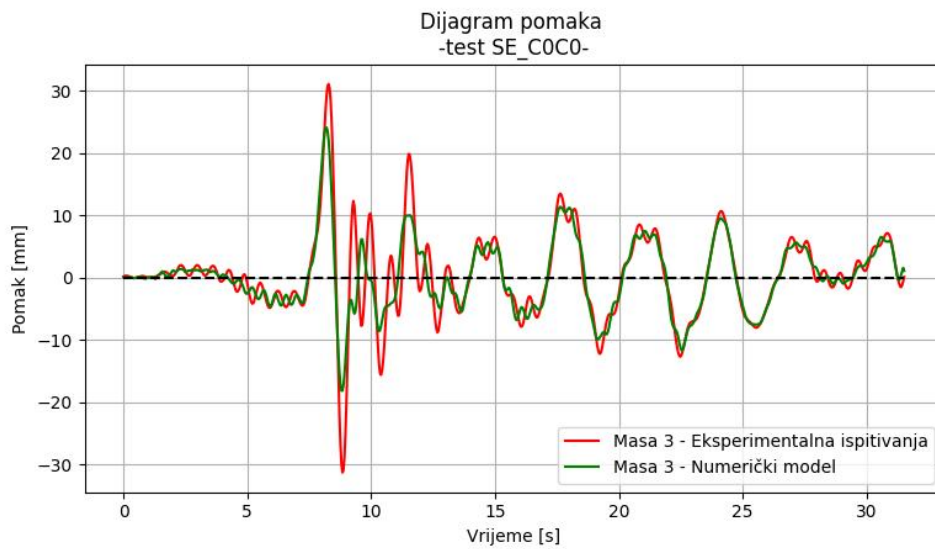
### *Dijagrami apsolutnih pomaka*



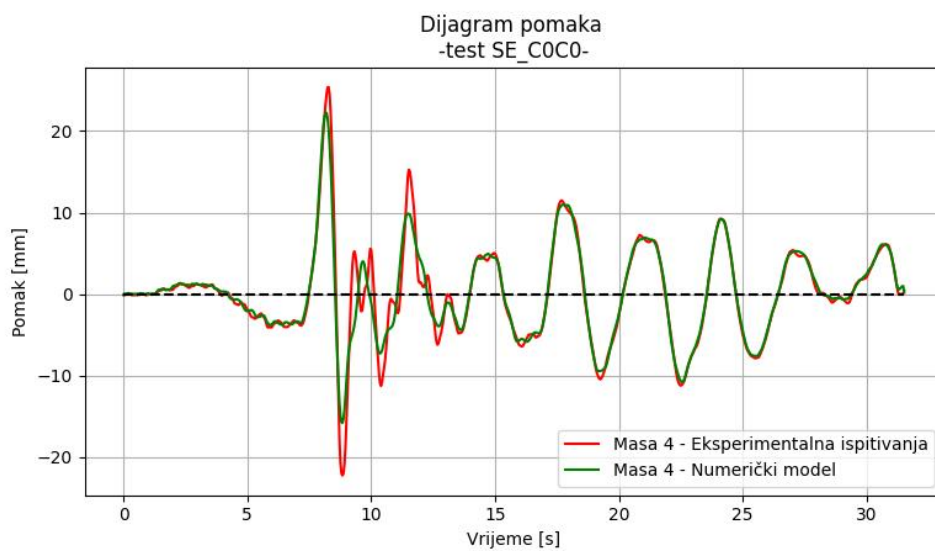
Slika 7.5: Usporedba pomaka mase 1 - validacija (SE\_C0C0)



Slika 7.6: Usporedba pomaka mase 2 - validacija (SE\_C0C0)

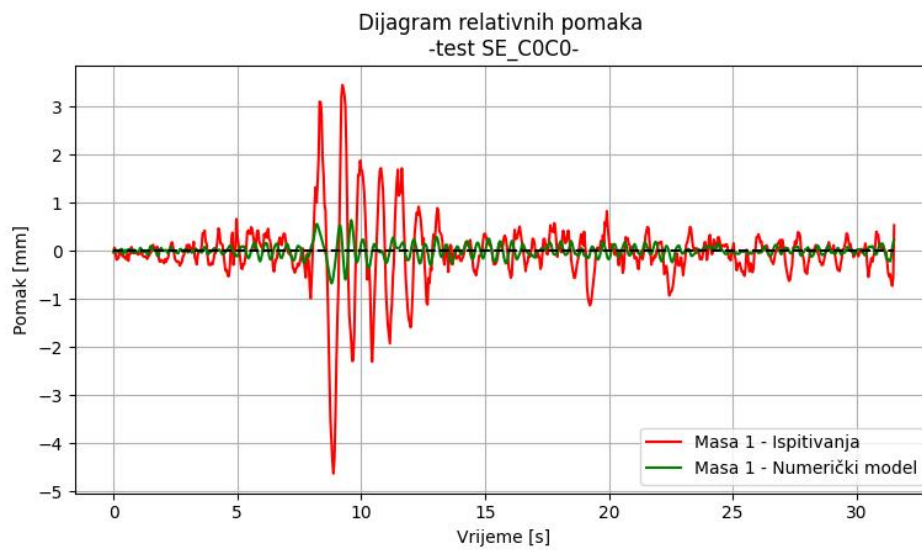


Slika 7.7: Usporedba pomaka mase 3 - validacija (SE\_C0C0)

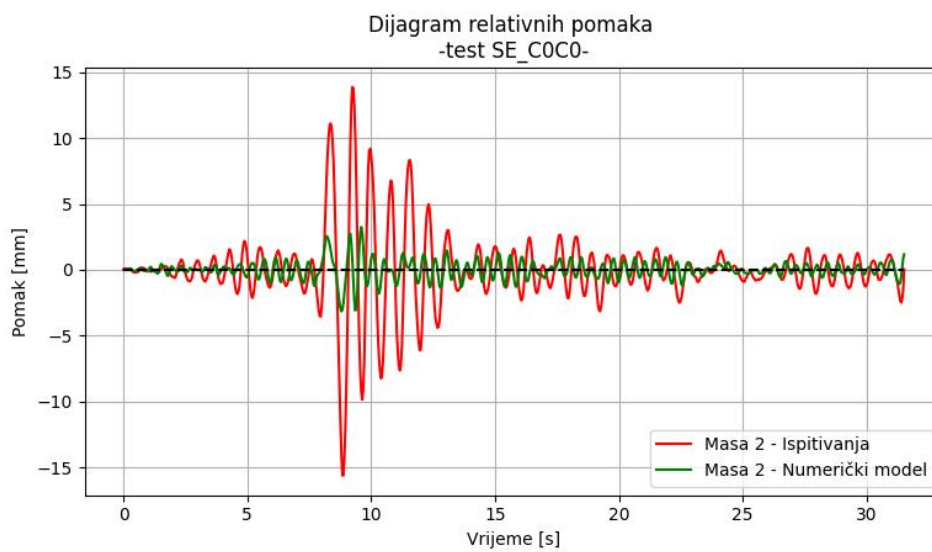


Slika 7.8: Usporedba pomaka mase 4 - validacija (SE\_C0C0)

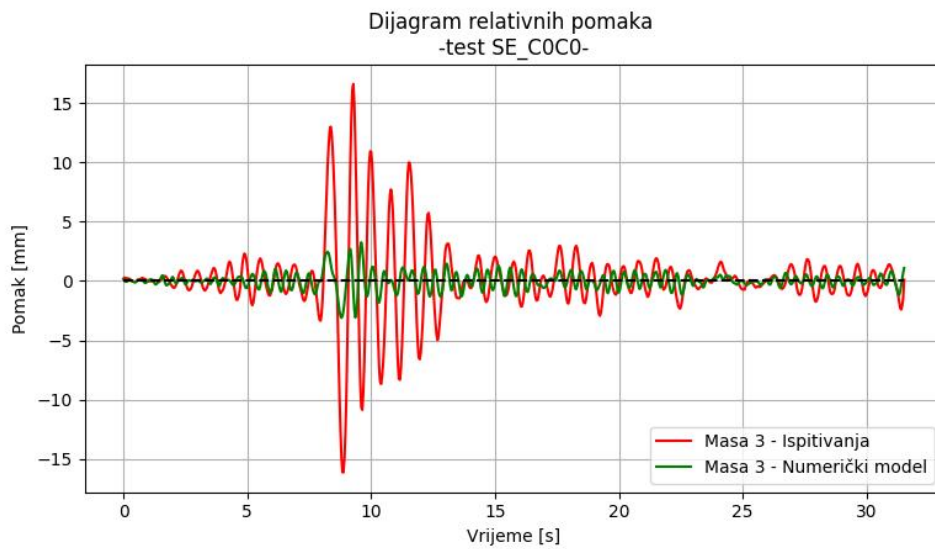
## Dijagrami relativnih pomaka



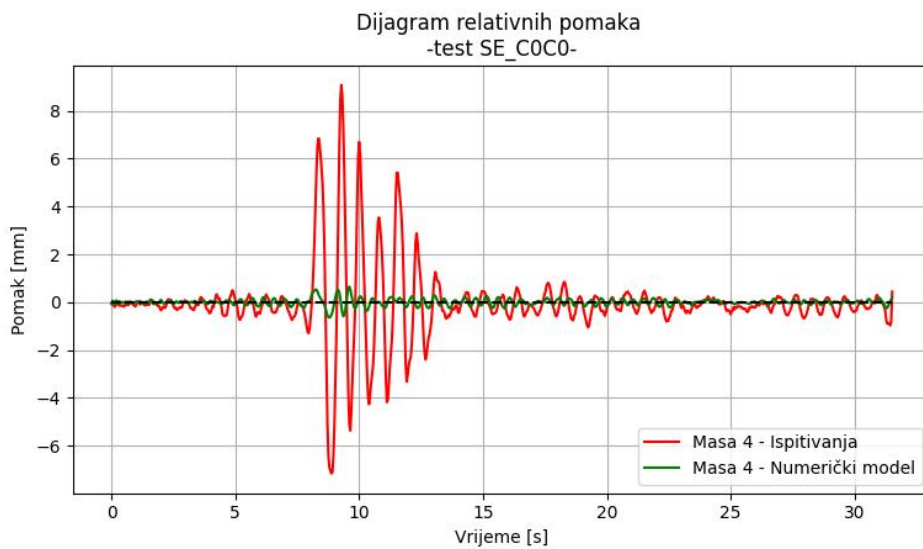
Slika 7.9: Usporedba relativnih pomaka mase 1 - validacija (SE\_C0C0)



Slika 7.10: Usporedba relativnih pomaka mase 2 - validacija (SE\_C0C0)

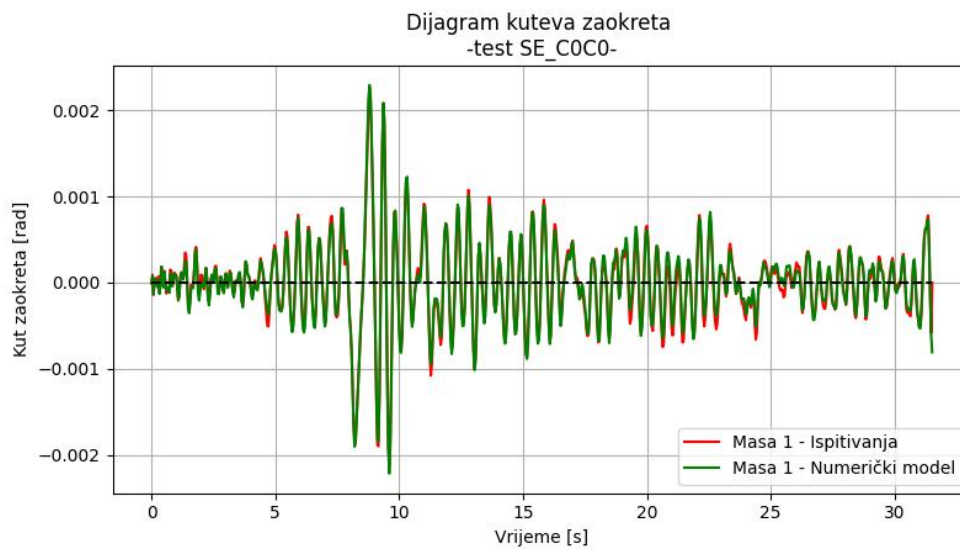


Slika 7.11: Usporedba relativnih pomaka mase 3 - validacija (SE\_C0C0)

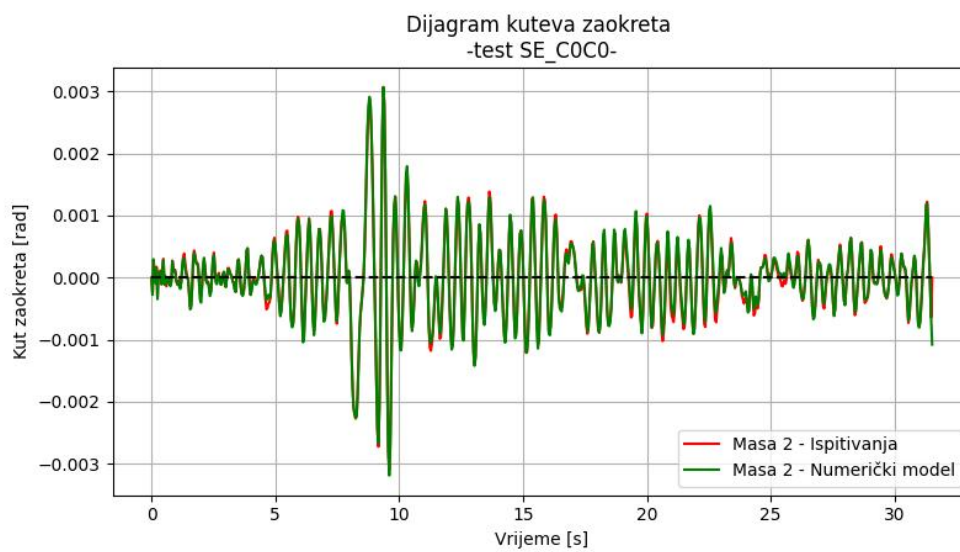


Slika 7.12: Usporedba relativnih pomaka mase 4 - validacija (SE\_C0C0)

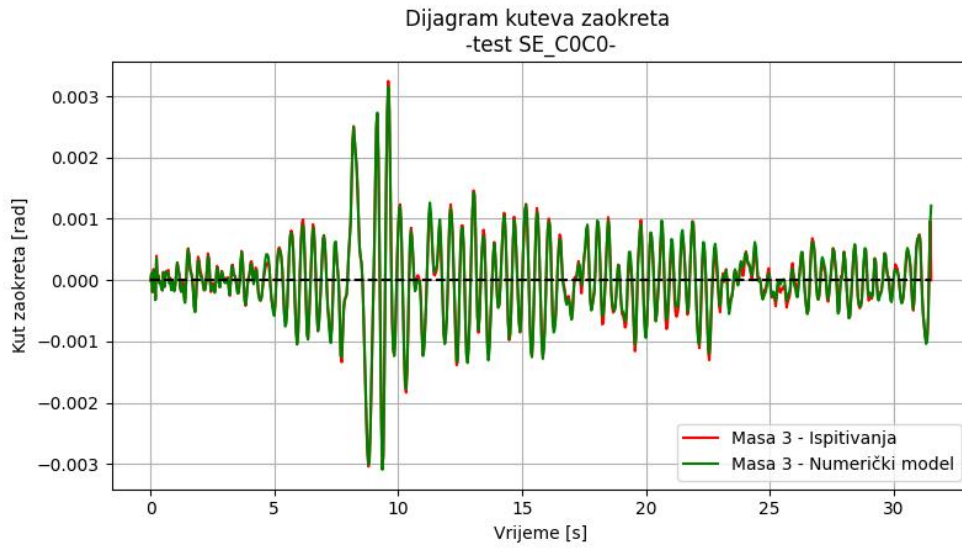
## Dijagrami relativnih kuteva zaokreta



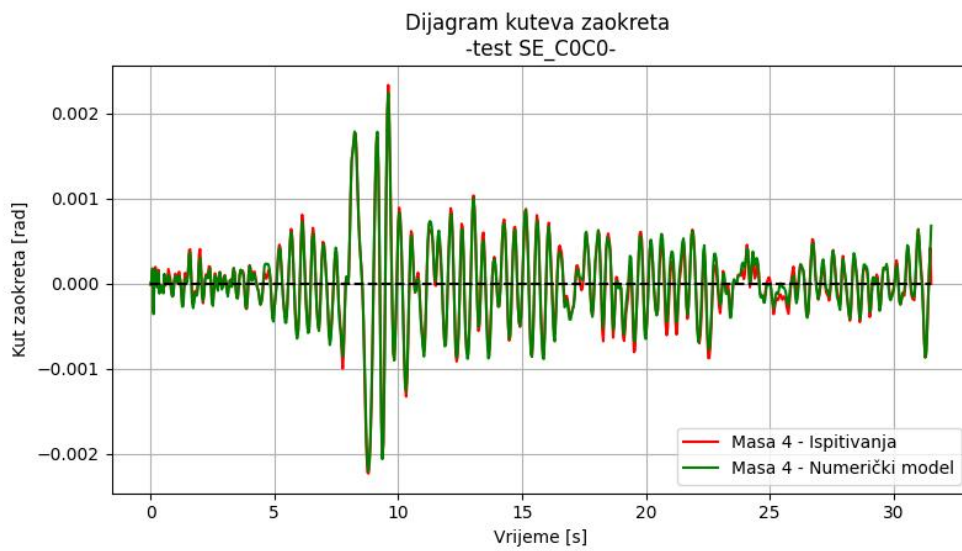
Slika 7.13: Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 1 - validacija (SE\_COC0)



Slika 7.14: Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 2 - validacija (SE\_COC0)



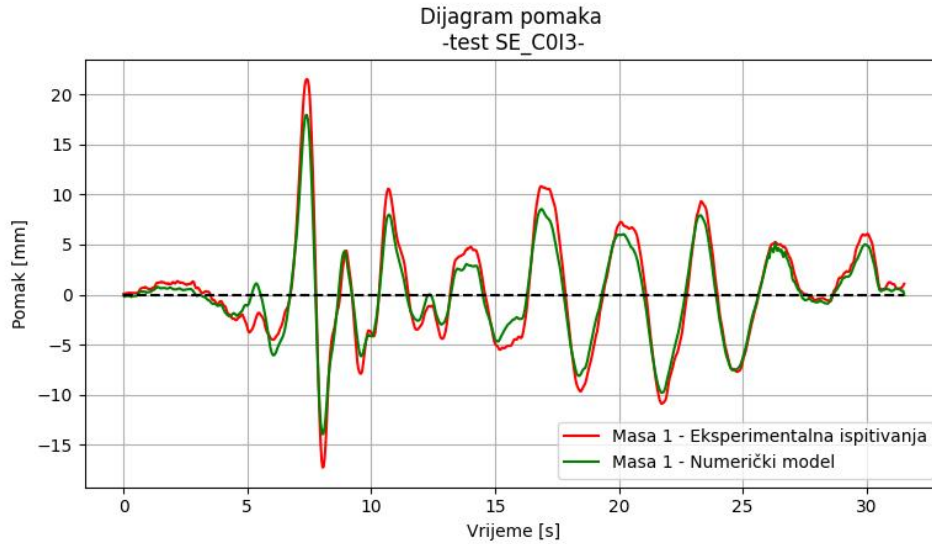
Slika 7.15: Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 3 - validacija (SE\_C0C0)



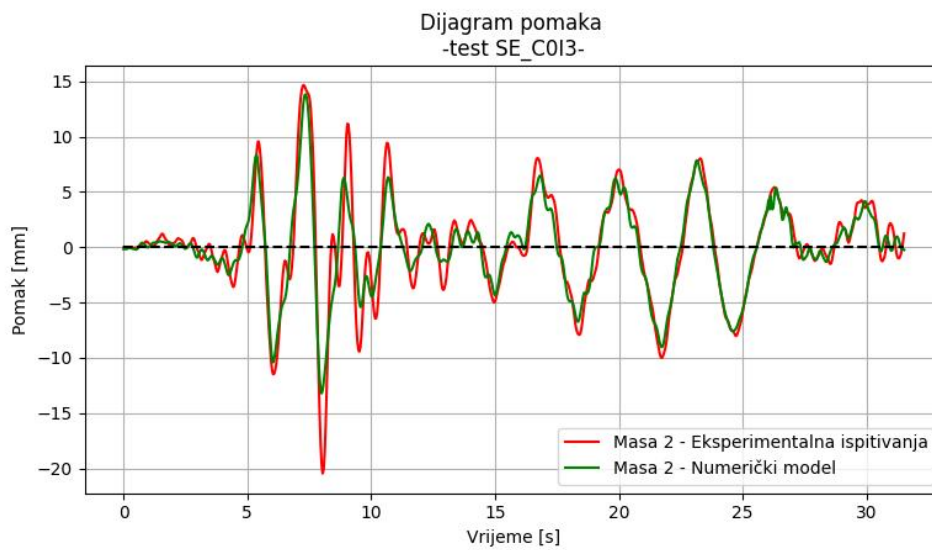
Slika 7.16: Usporedba relativnih kuteva zaokreta mase 4 - validacija (SE\_C0C0)

## Ispitivanje SE\_C013

Usporedbe apsolutnih pomaka dobivenih numeričkom analizom s pomacima iz eksperimentalnih ispitivanja su prikazani na slikama 7.17, 7.18, 7.19 i 7.20.

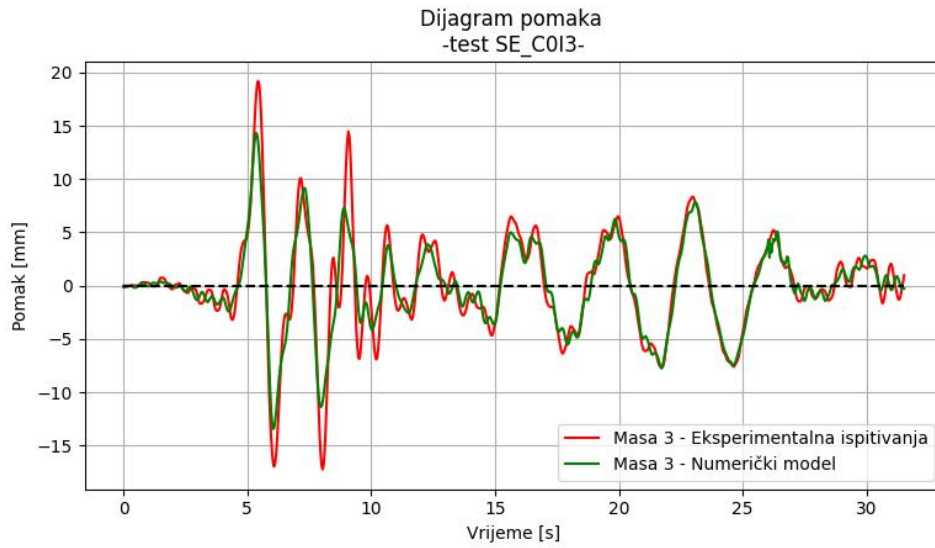


Slika 7.17: Usporedba pomaka mase 1 - validacija (SE\_C013)

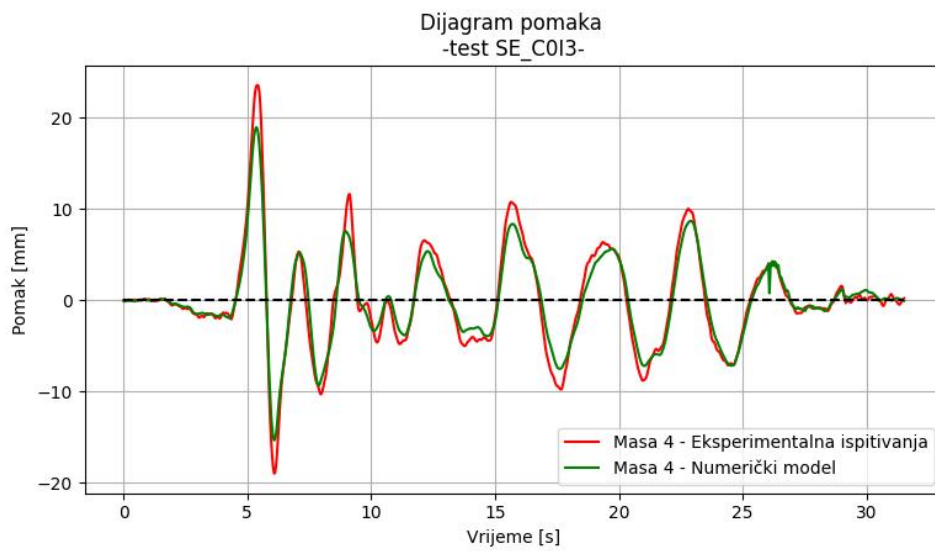


Slika 7.18: Usporedba pomaka mase 2 - validacija (SE\_C013)





Slika 7.19: Usporedba pomaka mase 3 - validacija (SE\_C0I3)



Slika 7.20: Usporedba pomaka mase 4 - validacija (SE\_C0I3)

Ako pogledamo bilo koju priloženu usporedbu rezultata u ovom dijelu, odmah je vidljivo kako numerički model kvalitativno vrlo dobro funkcionira te da su dobiveni rezultati slični onima iz ispitivanja. Međutim, rezultati se ne poklapaju u svim dijelovima dijagrama u jednakoj mjeri. Kod usporedbe apsolutnih pomaka mase 2 i 3 (Slike 7.6, 7.7, 7.18 i 7.19), u vremenu od cca 8. do 12. sekunde je vidljiva jasna razlika u rezultatima numeričkog modela u odnosu na eksperimentalne rezultate dok se u ostalim dijelovima dijagrama rezultati znatno bolje poklapaju, uz određene razlike u amplitudama.

Mogući razlog za to je da se pretpostavljene geometrijske i materijalne karakteristike numeričkog modela ne slažu u dovoljnoj mjeri sa stvarnim karakteristikama.

Kod masa tj. čvorova koji su direktno iznad oslonaca se takve razlike u rezultatima ne pojavljuju, upravo iz razloga što na dinamički odgovor tih čvornih točaka najveći utjecaj ima pobuda oslonca koji je ispod njih, dok je utjecaj oslonca sa druge strane puno manji.

Dijagrami relativnih kuteva zaokreta se jako dobro poklapaju - znatno bolje nego dijagrami apsolutnih, a pogotovo relativnih pomaka (Slike 7.9, 7.10, 7.11 i 7.12). Razlog za to može biti što su ti kutevi zaokreta vrlo mali te ih linearna analiza opisuje na dovoljno točan način.

Numerički model većim dijelom ispunjava svoju zadaću i daje rezultate koji su vrlo slični onima iz eksperimentalnih ispitivanja uz iznimku amplituda pomaka, a za što razlog najvjerojatnije leži u nedovoljno dobro određenom koeficijentu prigušenja. Iz tog razloga možemo reći kako je numerički model u trenutnoj fazi validiran ali je svakako na njemu potreban daljnji rad kako bi se poboljšao.

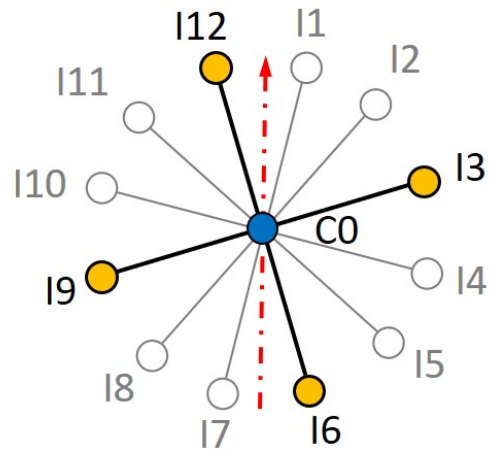
# 8. PROCJENA ODGOVORA KONSTRUKCIJE NA MSE

U ovom poglavlju je na temelju eksperimentalno dobivenih rezultata prikazano na koji način višestruka pobuda oslonaca utječe na dinamički odgovor konstrukcije, nakon čega je na temelju izrađenog i validiranog numeričkog modela prikazan utjecaj samo kašnjenja pobude na dinamički odgovor sustava.

## 8.1 Utjecaj višestruke pobude oslonaca na pomake konstrukcije

U ovom dijelu rada su prikazani i detaljno analizirano rezultati iz eksperimentalnih ispitivanja kako bismo utvrdili na koji način višestruka pobuda oslonaca utječe na dinamički odgovor konstrukcije. U nastavku su prikazani dijagrami relativnih pomaka, koji su izračunati na temelju rezultata eksperimentalnih ispitivanja, iz poglavlja 5, u kojima su prikazani apsolutni pomaci masa. Relativni pomaci masa su dobiveni na temelju izračunate utjecajne matrice, za okvir sa stupovima manje krutosti, koja je prikazana u poglavlju 6.

Ispitivanja tj. bolje rečeno kombinacije ispitivanja koje su korištene za procjenu odgovora konstrukcije na MSE su odabrane iz razloga što su mjerne stanice iz kojih su uzeti ulazni podaci ispitivanja, na gotovo okomitom ili paralelnom pravcu u odnosu na smjer nailaska potresnog vala (smjer nailaska vala je označen crvenom linijom na slici 8.1)

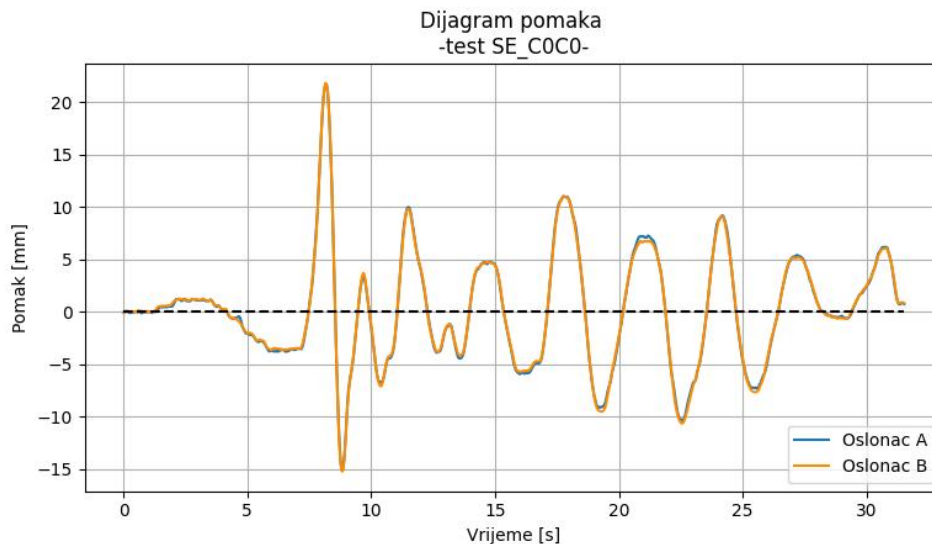


Slika 8.1: Unutarnji prsten SMART 1 sustava

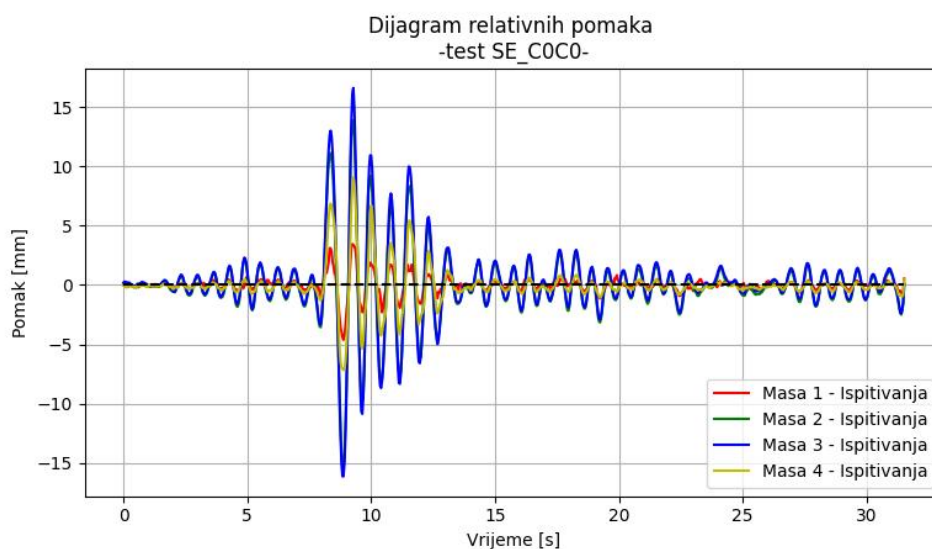
Odabirom kombinacije podataka iz različitih mjernih postaja simuliramo položaj našeg okvirnog modela u odnosu na smjer nailaska stvarnog potresnog vala, čije podatke imamo iz mjernih postaja prikazanih na slici 8.1.

## Ispitivanje SE\_C0C0

Pobude oba oslonca kod ispitivanja jednolikom pobudom SE\_C0C0 su prikazane na slici 8.2, dok su relativni pomaci masa na modelu prikazani na slici 8.3.



Slika 8.2: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0C0)

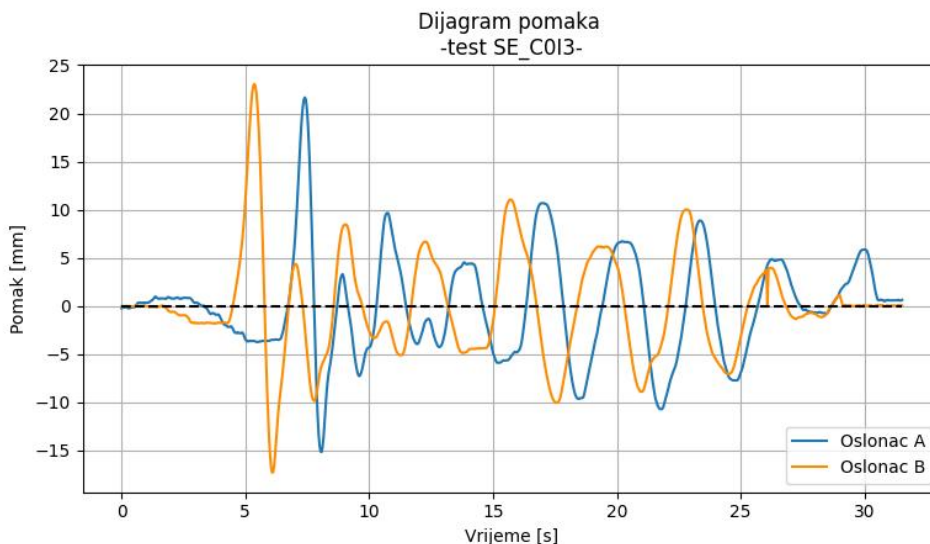


Slika 8.3: Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0C0)

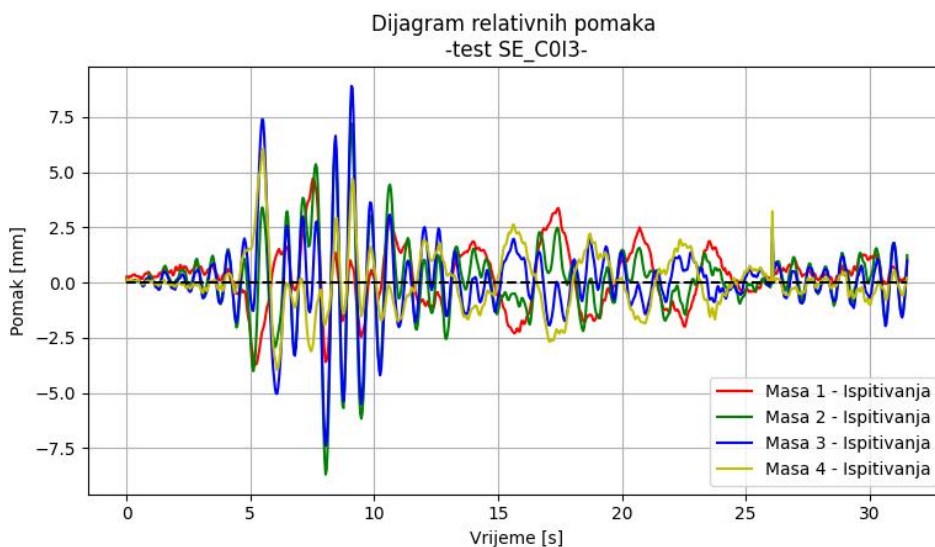
U ovom ispitivanju se oko 9. sekunde vrlo jasno vidi 1. oblik osciliranja, ali vidljivo je i u drugim dijelovima da je 1. ton najdominantniji oblik osciliranja.

## Ispitivanje SE\_C0I3

Pobude oba oslonca kod ispitivanja višestrukom pobudom SE\_C0I3 su prikazane na slici 8.4, dok su relativni pomaci masa na modelu prikazani na slici 8.5. Na slici 8.4 je vidljivo kako je kašnjenje pobude između oslonaca cca 2 s.



Slika 8.4: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I3)

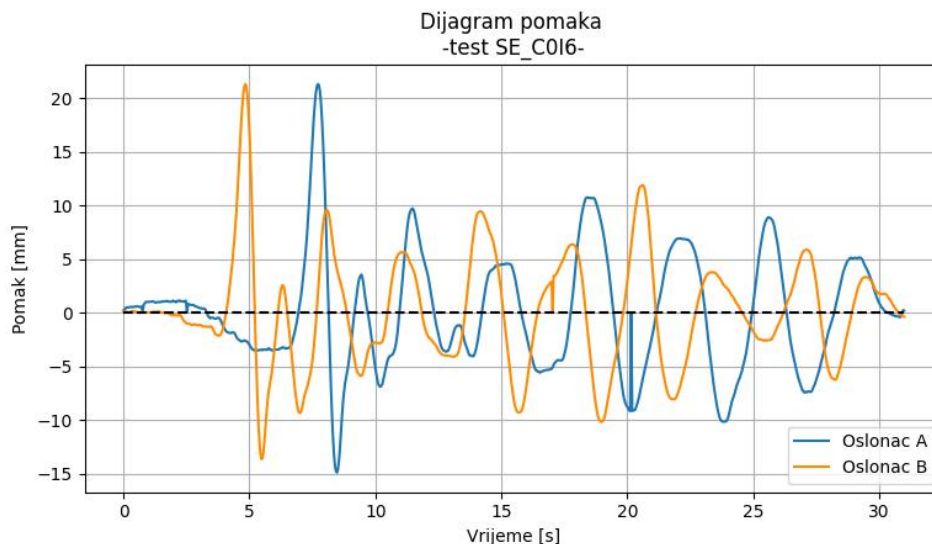


Slika 8.5: Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I3)

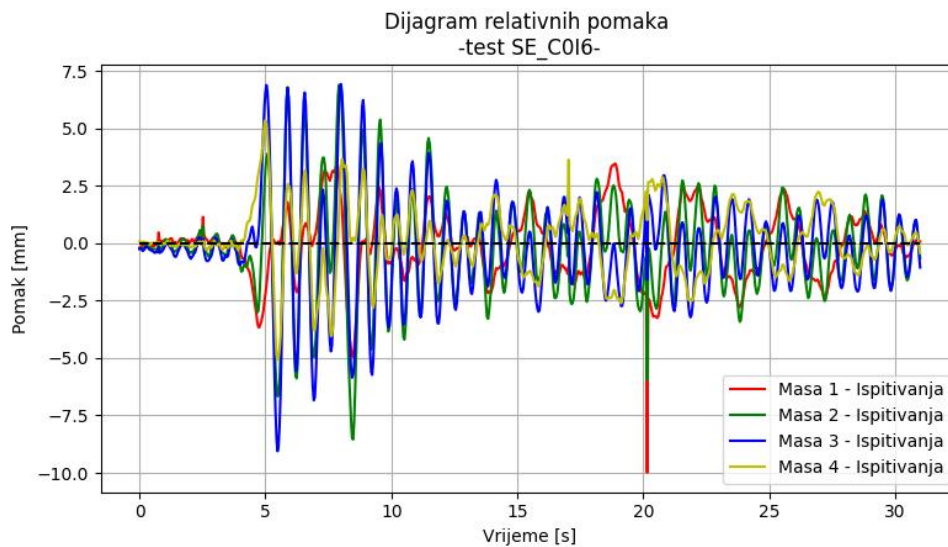
Osim utjecaja 1. oblika osciliranja (cca 9. sekunda), u rezultatima je vidljiv i utjecaj viših tonova. To je najbolje vidljivo u vremenskom trenutku cca 17. sekunde, gdje možemo primijetiti kako su mase 1 i 2 na jednoj strani, a mase 3 i 4 na drugoj strani u odnosu na ravnotežni položaj. Radi se o asimetričnom obliku osciliranja, gdje je vidljiv utjecaj 2. i 4. oblika osciliranja.

## Ispitivanje SE\_C0I6

Pobude oba oslonca kod ispitivanja višestrukom pobudom SE\_C0I6 su prikazane na slici 8.6, dok su relativni pomaci masa na modelu prikazani na slici 8.7. Na slici 8.6 je vidljivo kako je kašnjenje pobude između oslonaca u ovom slučaju cca 4 s.



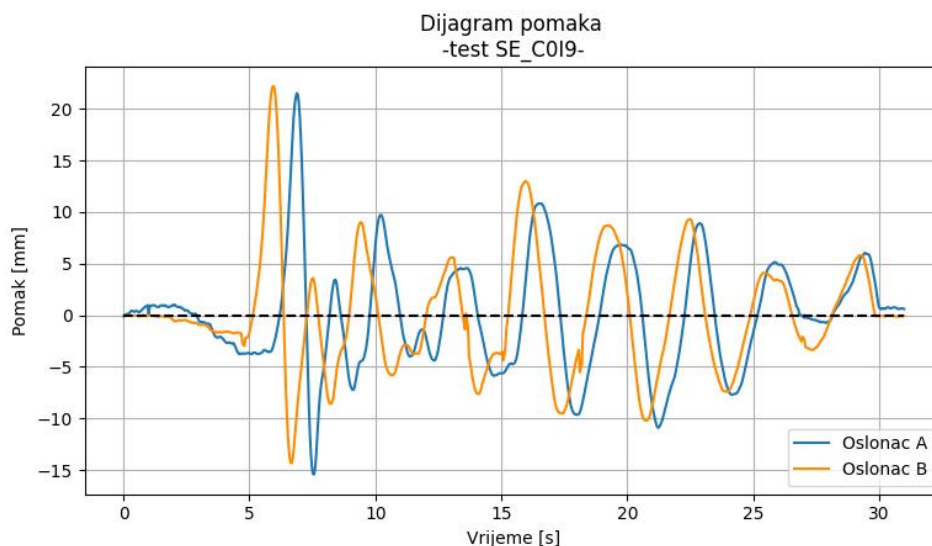
Slika 8.6: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I6)



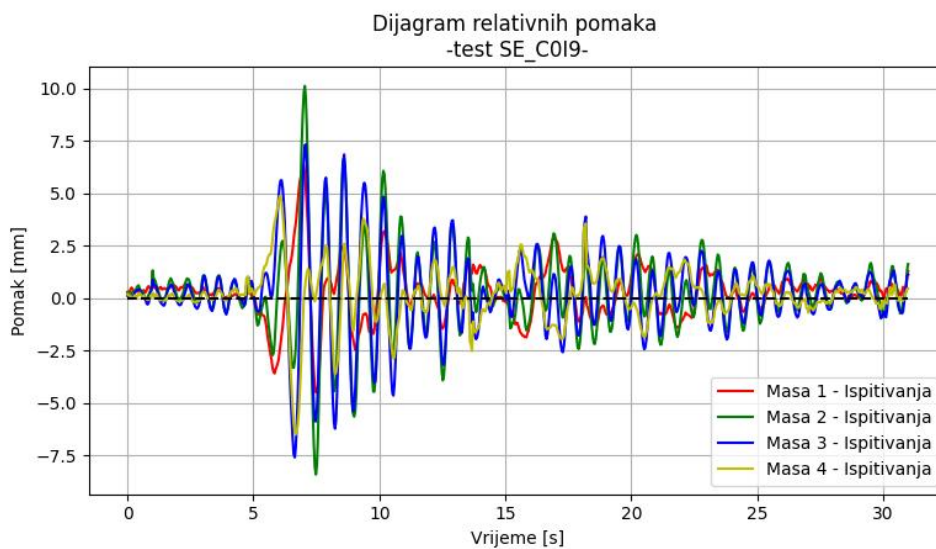
Slika 8.7: Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I6)

## Ispitivanje SE\_C019

Pobude oba oslonca kod ispitivanja višestrukom pobudom SE\_C019 su prikazane na slici 8.8, dok su relativni pomaci masa na modelu prikazani na slici 8.9. U ovom slučaju, kašnjenje pobude između oslonaca iznosi cca 1 s.



Slika 8.8: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C019)



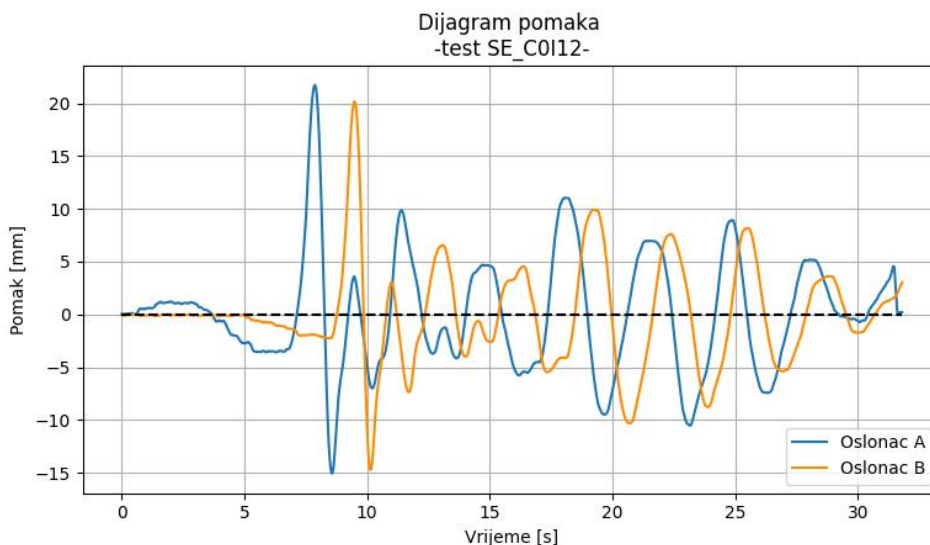
Slika 8.9: Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C019)

U ovom slučaju su također vidljivi asimetrični oblici osciliranja, najprije oko 6. sekunde a zatim oko 15. sekunde.

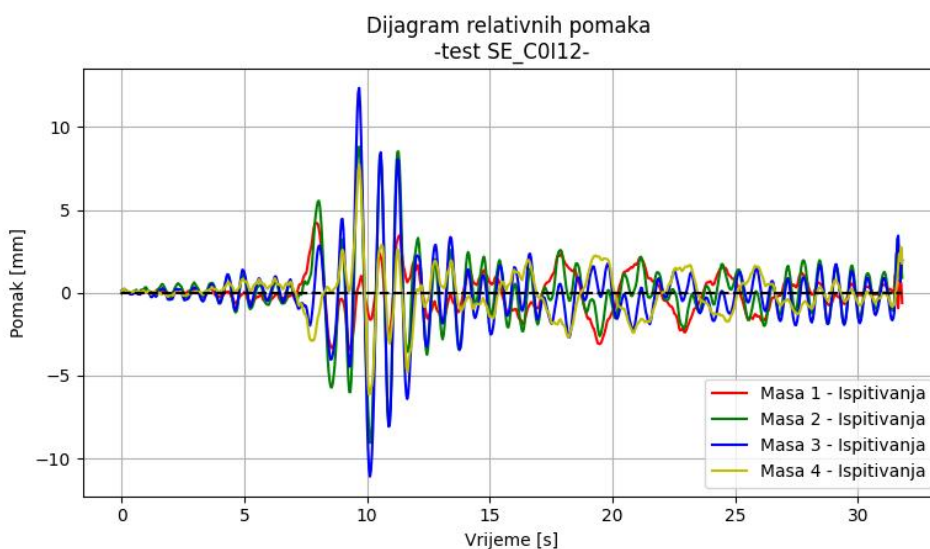


## Ispitivanje SE\_C0I12

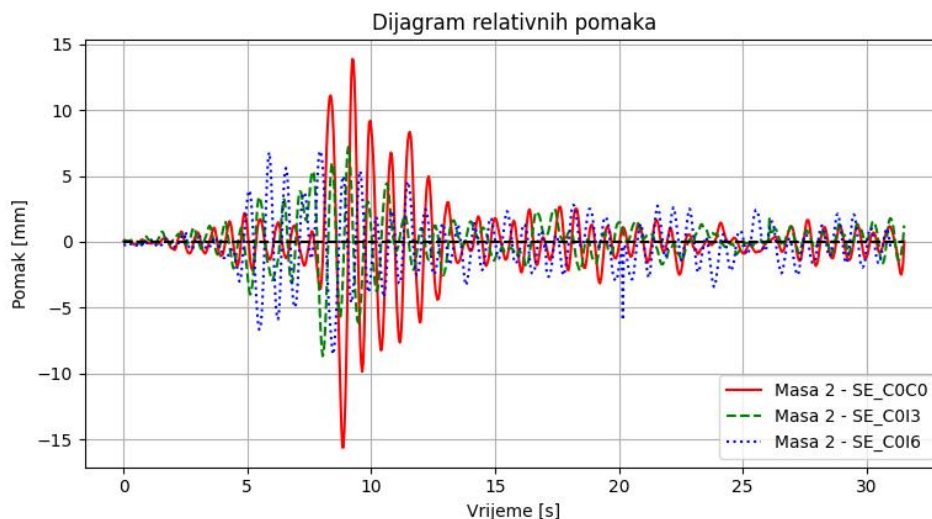
Pobude oba oslonca kod ispitivanja višestrukom pobudom SE\_C0I12 su prikazane na slici 8.10, dok su relativni pomaci masa na modelu prikazani na slici 8.11. U ovom slučaju, kašnjenje pobude između oslonaca iznosi cca 2 s, ali u odnosu na prošla ispitivanja vidljivo je kako sada pobuda desnog oslonca (oslonac B) kasni u odnosu na lijevi (oslonac A). To je i logično ako pogledamo sliku 8.1 i smjer nailaska potresnog vala u odnosu na položaj mjernih stanica C0 te I12.



Slika 8.10: Dijagram pomaka oba oslonca - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I12)



Slika 8.11: Dijagram relativnih pomaka svih masa - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0I12)



Slika 8.12: Dijagram relativnih pomaka mase 2 - eksperimentalna ispitivanja (SE\_C0C0), (SE\_C0I3), (SE\_C0I6)

Promatrajući relativne pomake određene mase, možemo uočiti razlike u dinamičkom odgovoru konstrukcije izložene višestrukoj pobudi oslonaca u odnosu na jednoliku pobudu. Bitan naglasak je na riječi "višestruka" pobuda oslonaca, jer se ovdje ne radi o identičnoj pobudi na oba oslonca gdje je razlika samo u kašnjenju pobude, već je riječ o razlikama unutar samog potresnog vala tj. pobude, koje se događaju zbog prolaska vala kroz materijal različitih svojstava.

Slika 8.12 prikazuje usporedbu pomaka mase 2 za različita provedena ispitivanja. U svim ispitivanjima, osim u ispitivanju SE\_C0C0, se radi o višestrukoj pobudi oslonaca te jasno možemo vidjeti kako su maksimalni relativni pomaci najveći za slučaj gdje nema zakašnjenja pobude između oslonaca. Ova serija ispitivanja je pokazala da se pojavljuju značajne razlike u dinamičkom odgovoru konstrukcije prilikom višestruke pobude oslonaca, a kako bismo ih bolje razumjeli u nastavku će se na temelju simulacija razvijenim numeričkim modelom analizirati samo utjecaj kašnjenja potresnog vala između oslonaca.

## 8.2 Utjecaj kašnjenja potresne pobude na pomake konstrukcije

U prethodnom dijelu smo vidjeli kakve su razlike u dinamičkom odgovoru kod višestruke pobude oslonaca (MSE) u odnosu na jednoliku pobudu. U ovom dijelu rada ćemo vidjeti kakav je samo utjecaj kašnjenja pobude na pomake konstrukcije. Bitno napomena je da frekvencijski sadržaj potresnog zapisa neće biti mijenjan, već je samo uvedeno kašnjenje pobude. Validacijom numeričkog modela smo uklonili potrebu za provođenjem dodatnih eksperimentalnih ispitivanja, pošto sada numeričkom analizom možemo doći do korisnih rezultata. Iz tog je razloga u ovom poglavlju provedena serija numeričkih analiza, koristeći se stvarnim potresnim zapisima koji su uvedeni u model s određenim kašnjenjem između oslonaca.

Korištena su četiri različita potresna zapisa, od kojih su samo za jedan provedena povezana eksperimentalna ispitivanja u ovom radu; za preostala tri potresna zapisa nisu provedena eksperimentalna ispitivanja u sklopu ovog rada. Numerička analiza je provedena pomoću sljedećih potresnih zapisa:

- SE\_C0C0,
- Norridge 360,
- El Centro 140,
- Kobe 090.

Numerički model koji je korišten u analizi je onaj okvira sa 4 dodane mase na gredi, koji ima stupove manje krutosti. U svim provedenim analizama se radi o višestrukoj pobudi oslonaca, gdje su oba oslonca pobuđena istim potresnim zapisom ali s određenim zakašnjenjem između oslonaca te bez njega. Kašnjenja pobude između oslonaca se kreću od 0 s sve do prvog perioda sustava ( $T_1$ ), u inkrementima od 0.25 s.

Prvi period sustava je određen pomoću prve prirodne frekvencije sustava, koja iznosi:

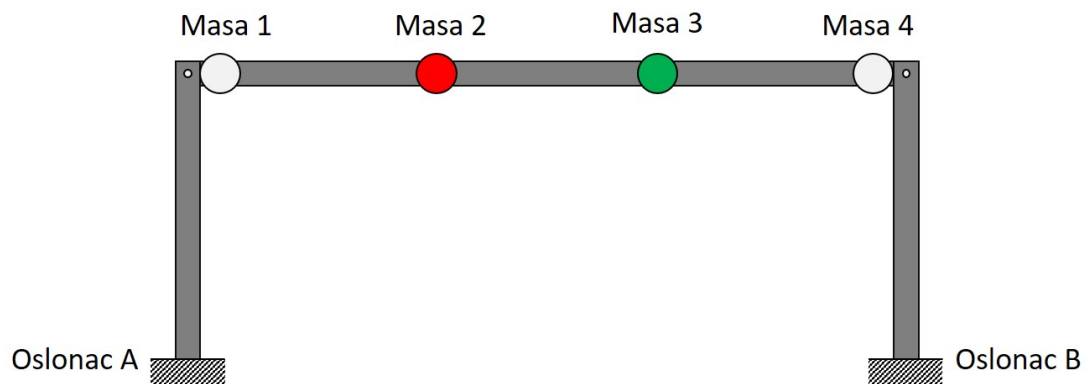
$$f_1 = 1.338 \text{ Hz}$$

pa je prema tome prvi period:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{1.338} = 0.75 \text{ s}$$

Dakle, sveukupno je provedeno 16 numeričkih analiza gdje je za svako ispitivanje uvedeno kašnjenje pobude između oslonaca u iznosima od: 0, 0.25, 0.5 te 0.75 s. Kašnjenje

pobude je uvijek zadavano na desnom osloncu (Oslonac B) te su promatrani relativni pomaci masa 2 i 3. Zbog lakšeg praćenja na slici 8.13 je prikazan okvir s 4 mase, gdje su pomaci mase 2 i 3 podijeljeni po bojama te rezultati u nastavku prate ovu podjelu.

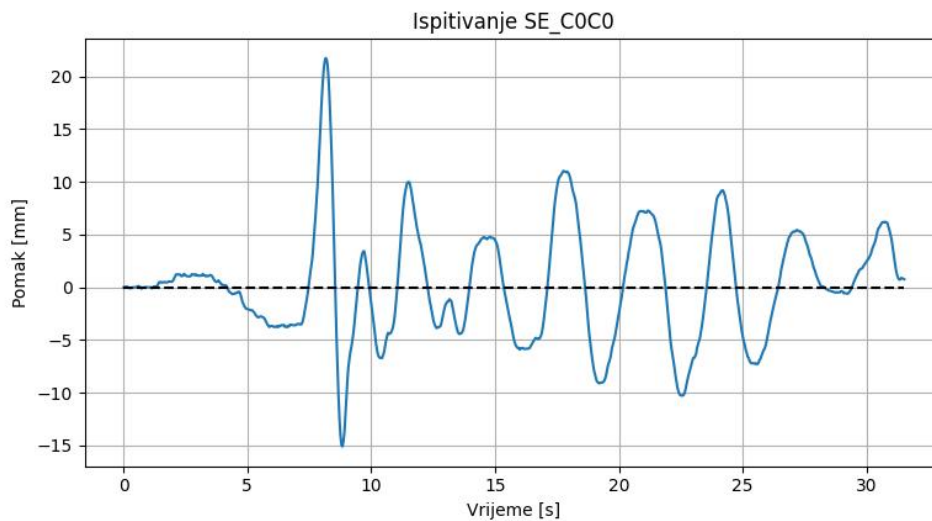


Slika 8.13: Podjela pomaka masa po bojama - okvir s 4 mase

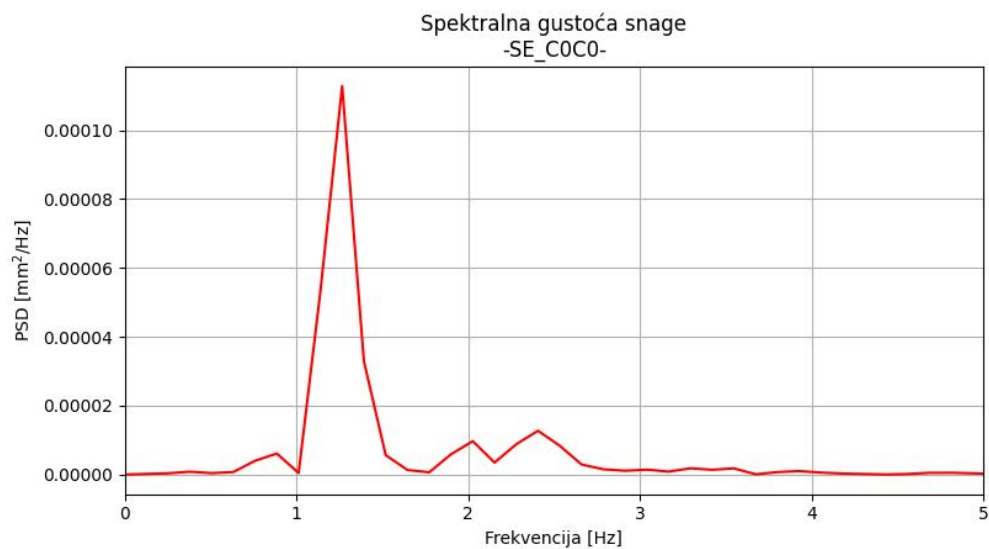
U nastavku su prikazani rezultati analize zajedno s usporedbama rezultata te potresnim zapisima koji su korišteni u numeričkoj analizi.

## Ispitivanje SE\_C0C0

Potresna pobuda korištena u numeričkoj analizi je prikazana na slici 8.14 dok je na slici 8.15 prikazano od kojih se frekvencija potresni zapis sastoji.

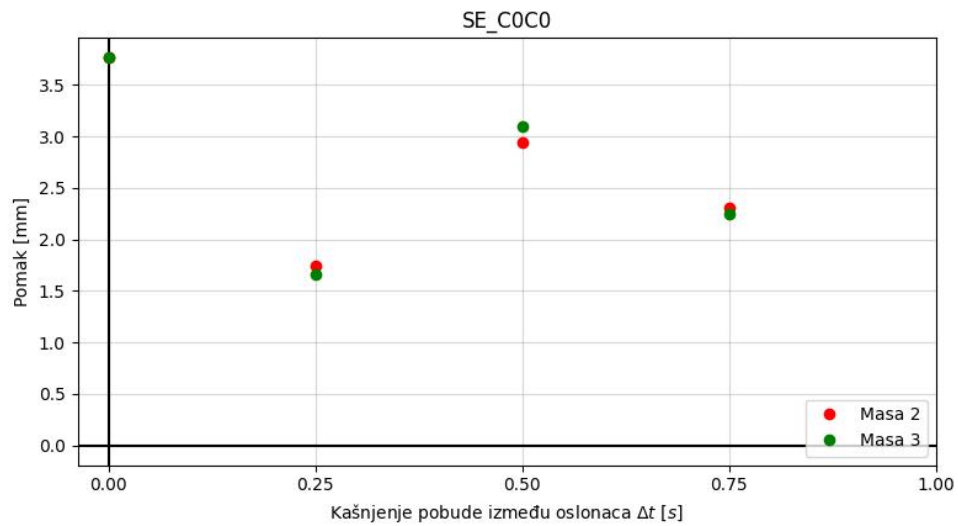


Slika 8.14: Potresni zapis SE\_C0C0



Slika 8.15: Graf spektralne analize - potresni zapis SE\_C0C0

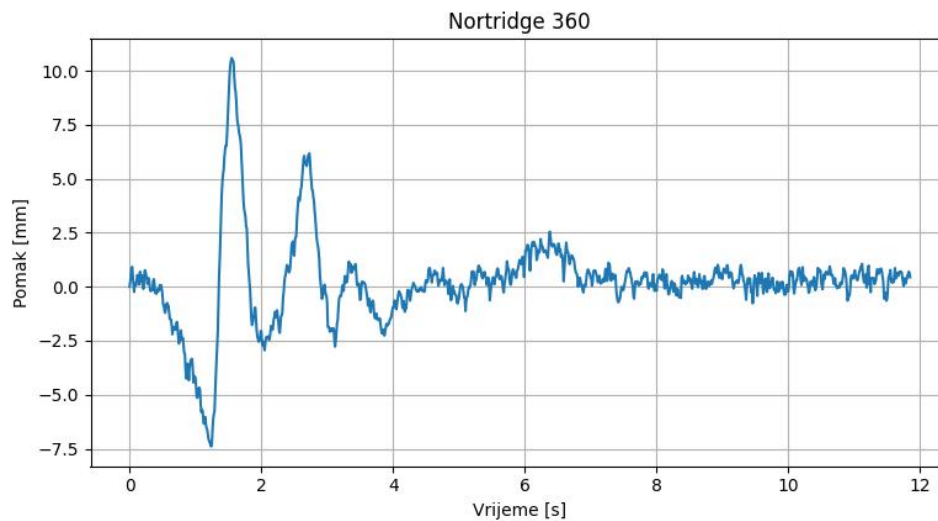
U nastavku su prikazani rezultati provedene numeričke analize, za 4 različita slučaja kašnjenja potresne pobude između oslonaca (Slika 8.16). Treba napomenuti kako se neke točke preklapaju pa su zbog toga grafovi odvojeni te prikazani u priložima na kraju rada.



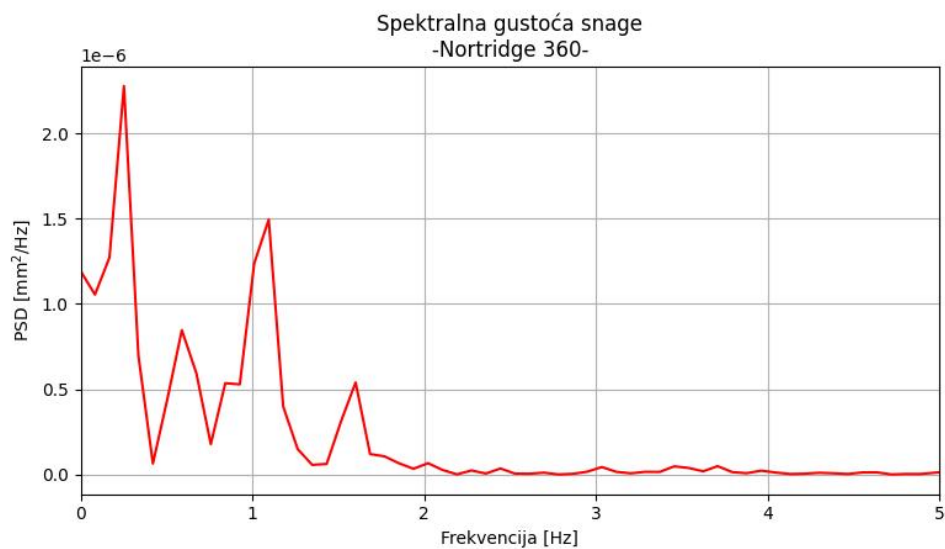
Slika 8.16: Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (SE\_C0C0)

## Norridge 360

Potresna pobuda korištena u numeričkoj analizi je prikazana na slici 8.17 dok je na slici 8.18 prikazano od kojih se frekvencija potresni zapis sastoji.

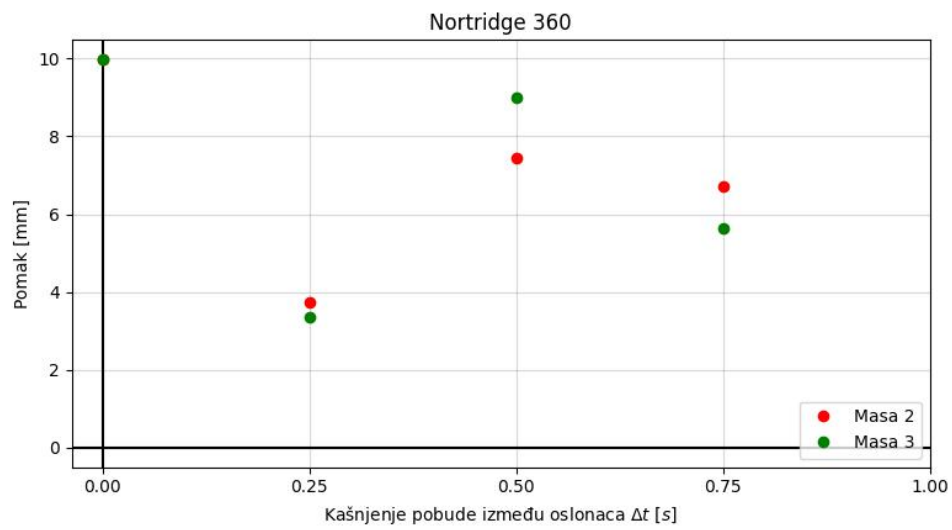


Slika 8.17: Potresni zapis Norridge 360



Slika 8.18: Graf spektralne analize - potresni zapis Norridge 360

U nastavku su prikazani rezultati provedene numeričke analize, za 4 različita slučaja kašnjenja potresne pobude između oslonaca (Slika 8.19).

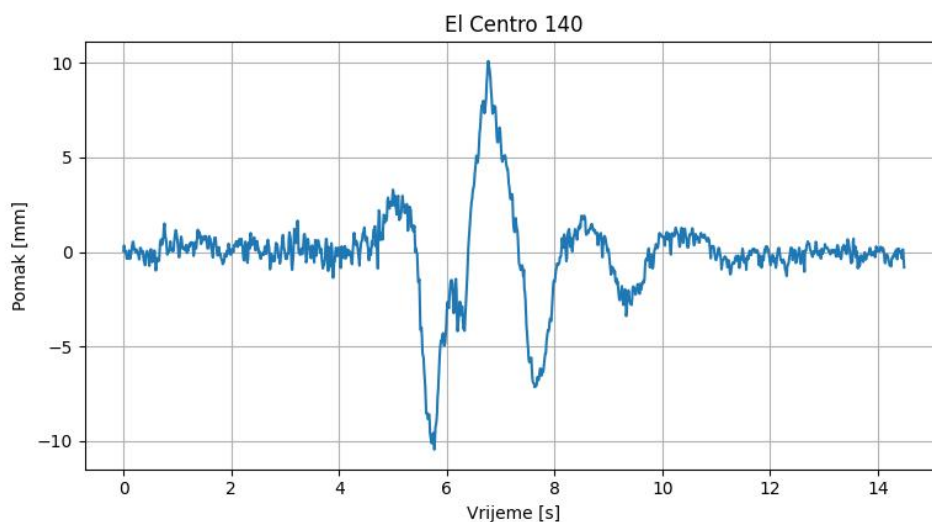


Slika 8.19: Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (Norridge 360)

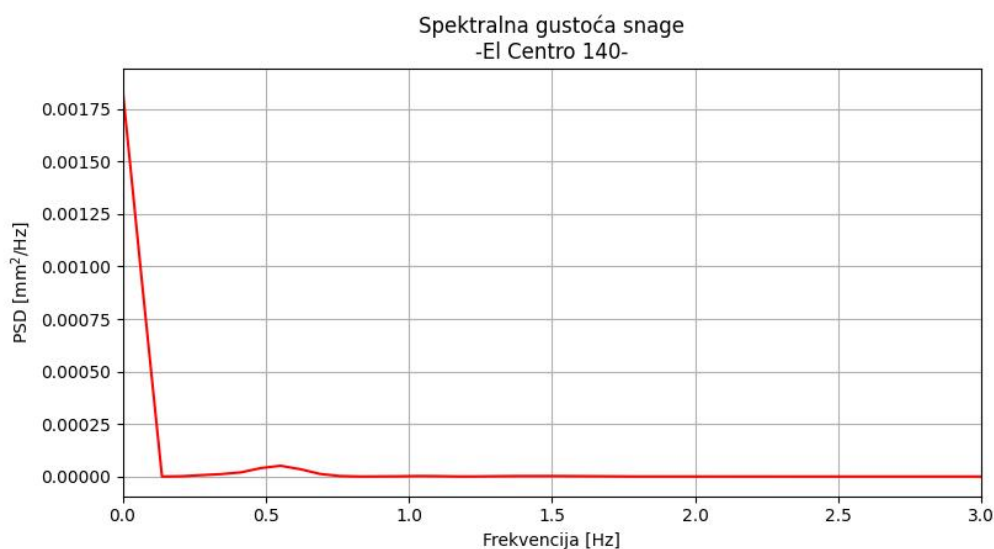


## El Centro 140

Potresna pobuda korištena u numeričkoj analizi je prikazana na slici 8.20 dok je na slici 8.21 prikazano od kojih se frekvencija potresni zapis sastoji.



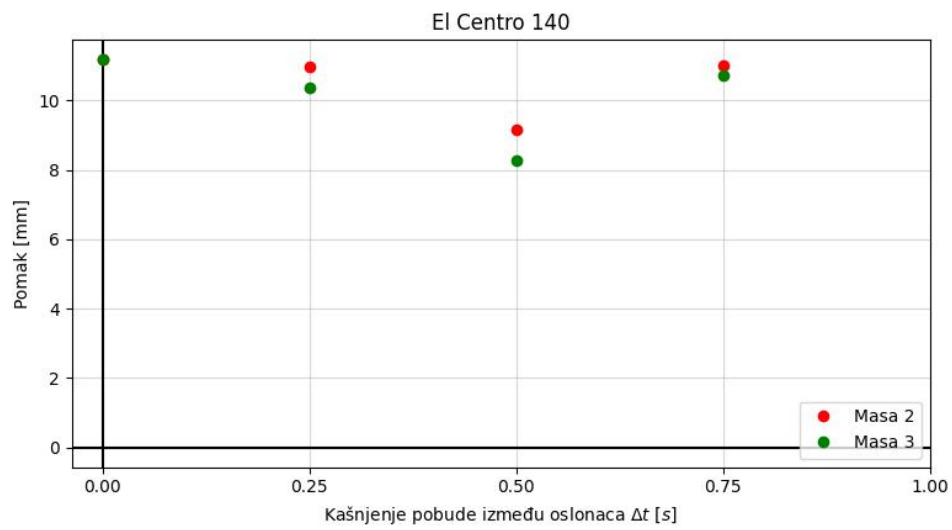
Slika 8.20: Potresni zapis El Centro 140



Slika 8.21: Graf spektralne analize - potresni zapis El Centro 140

U ovome ispitivanju je zanimljivo kako se u grafu spektralne analize ne pojavljuju frekvencije koje su bliske prvoj frekvenciji okvirnog modela ( $f_1 = 1.33 \text{ Hz}$ ).

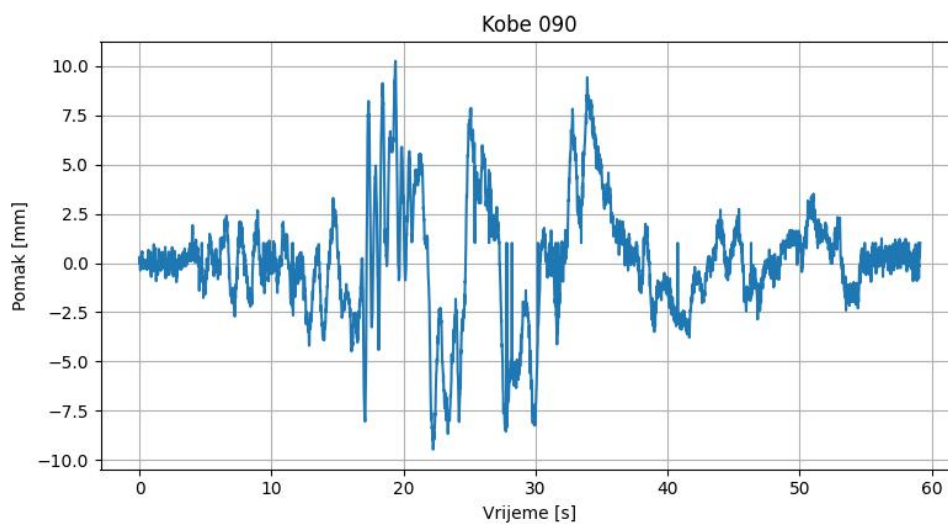
U nastavku su prikazani rezultati provedene numeričke analize, za 4 različita slučaja kašnjenja potresne pobude između oslonaca (Slika 8.22).



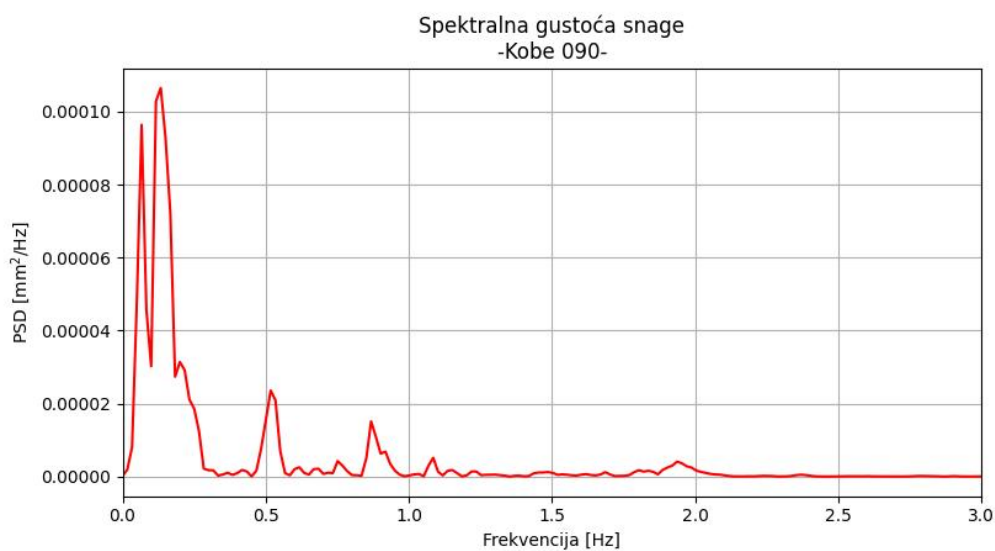
Slika 8.22: Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (El Centro 140)

## Kobe 090

Potresna pobuda korištena u numeričkoj analizi je prikazana na slici 8.23 dok je na slici 8.24 prikazano od kojih se frekvencija potresni zapis sastoji.

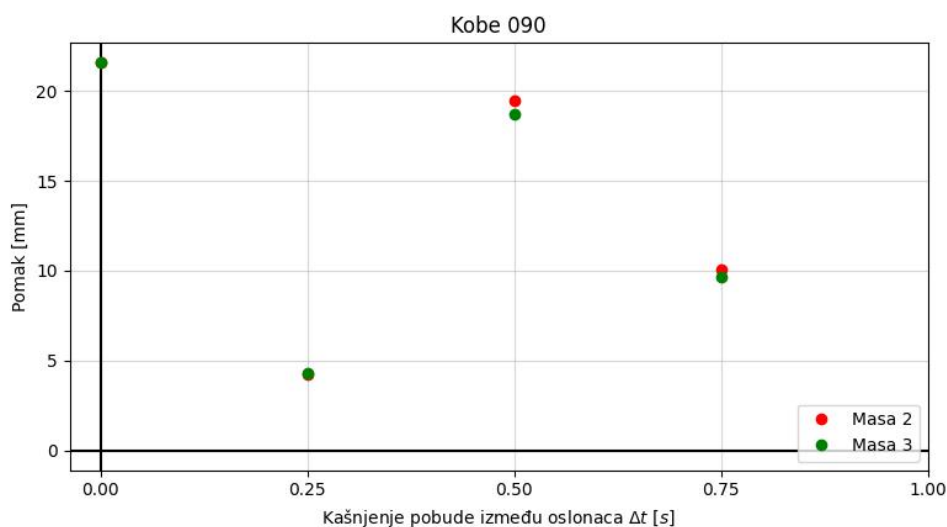


Slika 8.23: Potresni zapis Kobe 090



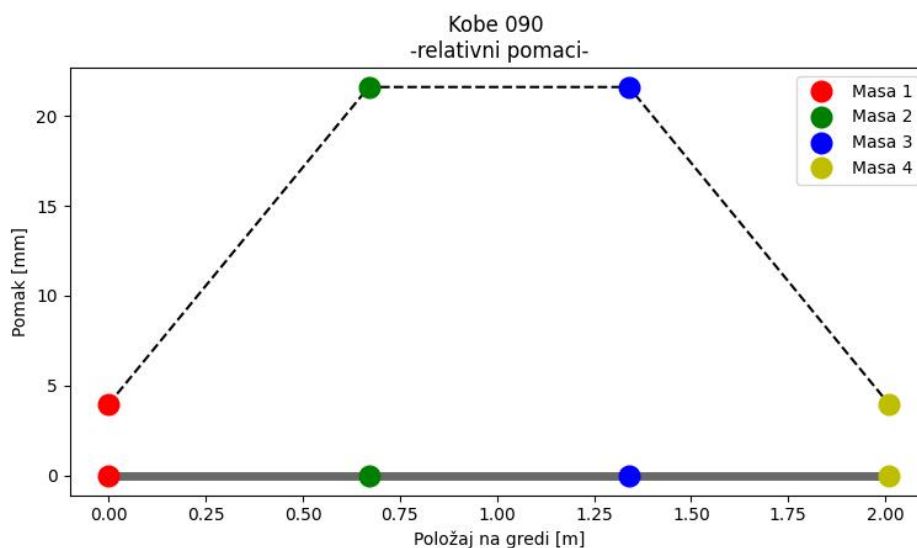
Slika 8.24: Graf spektralne analize - potresni zapis Kobe 090

U nastavku su prikazani rezultati provedene numeričke analize, za 4 različita slučaja kašnjenja potresne pobude između oslonaca (Slika 8.25).



Slika 8.25: Usporedba maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3 - (Kobe 090)

Treba napomenuti kako se u svim dijagramima usporedbe maksimalnih relativnih pomaka, pomaci mase 2 i 3 preklapaju za slučaj gdje ne postoji kašnjenje pobude između oslonaca. Razlog za to je zbog simetričnog položaja dviju masa te zato jer se radi o jednolikoj pobudi bez kašnjenja između oslonaca koja predstavlja simetrično opterećenje. Iz tog se razloga na zajedničkim dijagramima ne vide dvije točke nego jedna, za slučaj gdje nema kašnjenja pobude.



Slika 8.26: Deformirani oblik grede za slučaj maksimalnih pomaka mase 2 i 3 - potresni zapis Kobe 090

Na slici 8.26 je prikazan deformirani oblik grede za slučaj gdje se pojavljuju maksimalni pomaci mase 2 i 3 prilikom opterećenja potresnim zapisom Kob 090. Vidljivo je

da je u tom vremenskom trenutku jasno pobuđen prvi ton osciliranja. Treba napomenuti kako je ovo slučaj gdje nema kašnjenja pobude između oslonaca te se iz tog razloga pojavljuju simetrični pomaci bočnih masa (masa 1 i 4) te središnjih masa (masa 2 i 3).

Nakon provedene analize, vidljivo je kako kašnjenje pobude oslonaca ima značajan utjecaj na dinamički odgovor sustava. U svakom se ispitivanju pojavljuju najveći pomaci mase 2 i 3 za slučaj gdje je kašnjenje pobude 0 s tj. gdje je model jednoliko opterećen. U svim ostalim slučajevima, maksimalni pomaci mase 2 i 3 su manji, u većoj ili manjoj mjeri, od pomaka gdje nema zakašnjenja. Također je primijećeno kako se maksimalni pomak obje mase najviše smanjio za slučaj gdje je kašnjenje pobude između oslonaca bilo 0.25 s.

$\Delta_t$	Masa 2				Masa 3			
	SE_C0C0	N360	EC140	K090	SE_C0C0	N360	EC140	K090
<b>0 s</b>	3,77	9,99	11,19	21,61	3,77	9,99	11,19	21,61
<b>0.25 s</b>	1,74	3,73	10,98	4,24	1,66	3,34	10,38	4,31
<b>0.5 s</b>	2,94	7,44	9,17	19,45	3,10	9,00	8,26	18,70
<b>0.75 s</b>	2,31	6,70	10,99	10,10	2,25	5,64	10,72	9,69

Tablica 8.1: Pomaci mase 2 i 3 u [mm] za različite potresne pobude i zakašnjenja pobude između oslonaca

U slučaju potresnog zapisa Kobe 090 (Slika 8.23), pomaci mase 2 i 3 uz kašnjenje pobude od 0.25 s su se smanjili, u odnosu na pomak bez zakašnjenja, za čak 80%. Pomaci mase 2 su se smanjili sa 21.61 mm na 4.24 mm dok su se pomaci mase 3 sa 21.61 mm smanjili na 4.31 mm (Slika 8.25). Međutim, kod zakašnjenja pobude od 0.5 s, pomaci obje mase odmah skaču na 19.45 mm (masa 2) te na 18.7 mm (masa 3). To nam govori da je dinamički odgovor konstrukcija vrlo osjetljiv na veličinu kašnjenja pobude te u određenim slučajevima može znatno smanjiti pomake (dok u drugim slučajevima može povećati, što su pokazala druga istraživanja).

S druge strane, ako promotrimo promjene u pomacima mase 2 i 3, za slučaj gdje je okvir izložen El Centro 140 potresnom zapisu (Slika 8.20), vidimo da nema tako drastične promjene u pomacima, kao kod ostalih ispitivanja. U slučaju El Centro 140 potresne pobude se pomaci masa najviše smanjuju za slučaj gdje je kašnjenje pobude između oslonaca 0.5 s (Slika 8.22), što nije slučaj kod ostalih ispitivanja. Također u grafu spektralne analize je vidljivo da je sadržaj frekvencija bliske  $f_1$  zanemariv.

Ako pogledamo tablicu 8.1 možemo primijetiti kako se u svim ispitivanjima, za slučaj gdje nema kašnjenja, pojavljuju jednaki maksimalni pomaci mase 2 i 3. Takvo ponašanje je očekivano pošto su masa 2 i 3 na zrcalno simetričnim položajima u odnosu na vertikalnu te su oslonci opterećeni istom pobudom bez zakašnjenja.

## 9. ZAKLJUČAK

Cilj ovoga rada je bio utvrditi na koji način te uolikoj mjeri višestruka pobuda oslonaca utječe na dinamički odgovor konstrukcija s velikim razmacima između oslonaca. Za te su potrebe izrađena dva okvirna modela s različitim karakteristikama: okvir s krutim stupovima i tri utega na gredi te okvir sa stupovima manje krutosti sa četiri dodana utega na gredi.

Na početku je postavljena teorijska podloga koja stoji iza svake dinamičke analize sustava s jednim ili više stupnjeva slobode. Prikazani su sažeti izvodi jednadžbe dinamičke ravnoteže za sustav s jednim stupnjem slobode, što je kasnije prošireno na sustav s više stupnjeva slobode. Također je prikazan kratki pregled dinamičkih opterećenja te vrsta vibracija konstrukcija. Na temelju svega navedenog te nakon prikazane numeričke procedure za rješavanje jednadžbe dinamičke ravnoteže, izrađen je numerički model koji je na temelju usporedbe rezultata kasnije i validiran.

Eksperimentalna ispitivanja su provedena na oba okvirna modela, međutim numerički model je validiran na temelju rezultata dobivenih za okvir sa stupovima manje krutosti te četiri dodane mase. Razlog za to je što okvir s krutim stupovima nije bio izložen potresnim zapisima nego harmonijskoj pobudi (*Sinewsweep*), na temelju koje je vrlo teško validirati numerički model.

Međusobno su uspoređivani apsolutni pomaci sve četiri mase te se numerički dobiveni rezultati vrlo lijepo poklapaju sa rezultatima eksperimentalnih ispitivanja, ali ne u svim dijelovima. Validacija numeričkog modela je vrlo zahtjevan postupak, koji zahtijeva kontinuiran rad na modelu nebi li se pronašle i ispravile eventualne greške. Unatoč tome, poklapanja rezultata su dovoljno dobra u ovoj fazi izrade modela te je zato numerički model korišten za procjenu odgovora konstrukcije na MSE (*Multiple support effect*).

Numerički model je iz tog razloga izložen potresnim zapisima za koja nisu provedena eksperimentalna ispitivanja. Potresna pobuda je unesena s određenim kašnjenjem između oslonaca, od 0 s sve do prvog perioda okvira, te je na temelju rezultata primijećen značajan pad u maksimalnim relativnim pomacima mase 2 i 3 pri određenom kašnjenju pobude. Također je primijećeno da se maksimalni relativni pomaci mase 2 i 3 u ovakvom sustavu pojavljuju za slučaj jednolike pobude oslonaca tj. za slučaj gdje nema zakašnjenja pobude.

Iako su dobiveni rezultati vrlo slični onima iz eksperimentalnih ispitivanja, ne poklapaju se u svim djelovima. Numerički model u ovoj fazi funkcionira, međutim potrebna su mu daljnja poboljšanja. Sljedeći korak kojime bismo numerički model poboljšali je implementacijom nelinearne analize u model. Ne znači nužno da se razlike u rezultatima pojavljuju zbog korištenja linearne analize, ali i to je jedan od mogućih razloga na koji treba obratiti pažnju. Također, bilo bi poželjno dodatno izmjeriti koeficijent prigušenja.

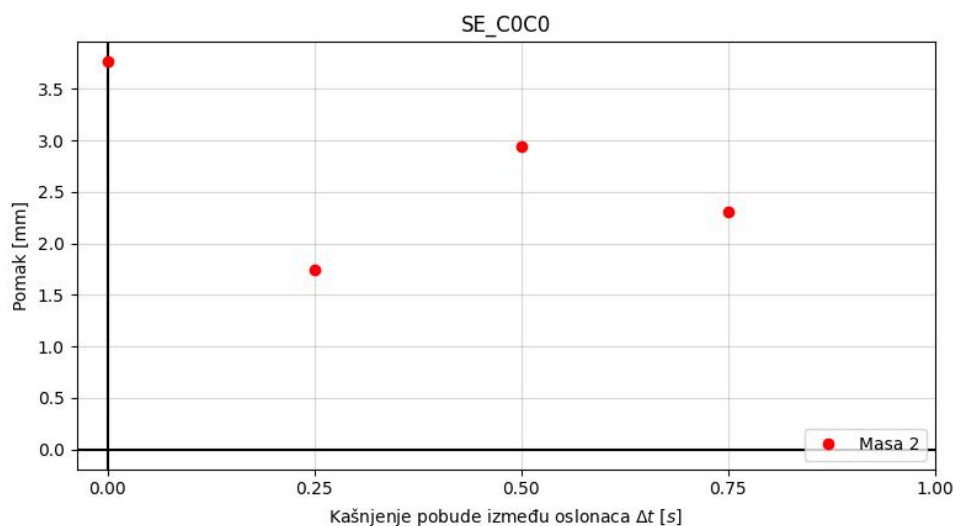
Pokazalo se da kod ovakvog sustava kašnjenje pobude u istraženim vremenskim rasponima izaziva manje pomake od jednolike pobude. To ne mora uvijek biti slučaj te ako želimo biti na strani sigurnosti potrebno je provjeriti kako kašnjenje seizmičke pobude utječe na dinamički odgovor konstrukcije.



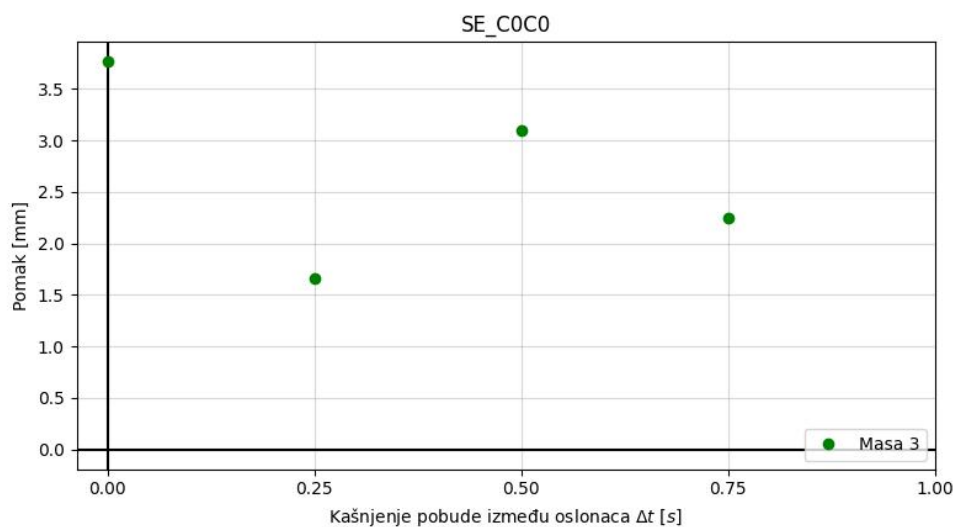
# PRILOZI

## Prilog 1. Dijagrami maksimalnih relativnih pomaka mase 2 i 3

Ispitivanje SE\_COC0

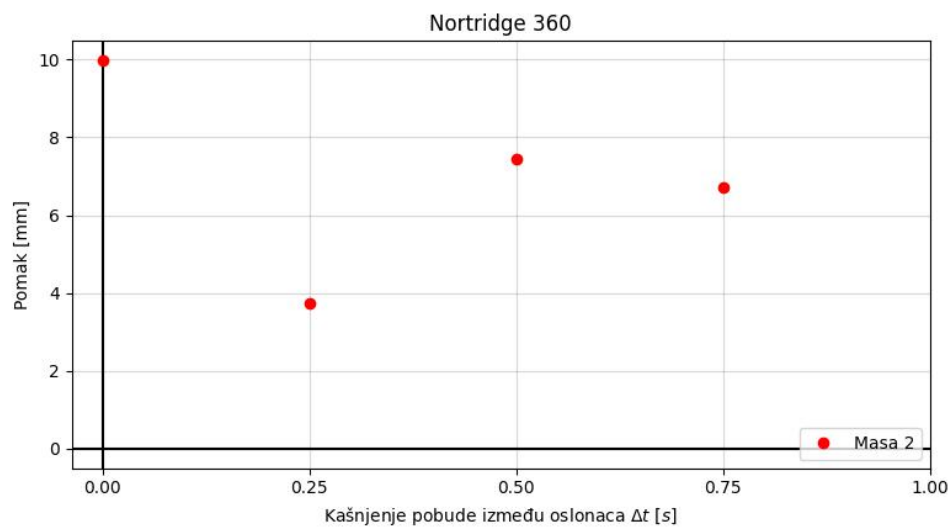


Slika 9.1: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (SE\_COC0)

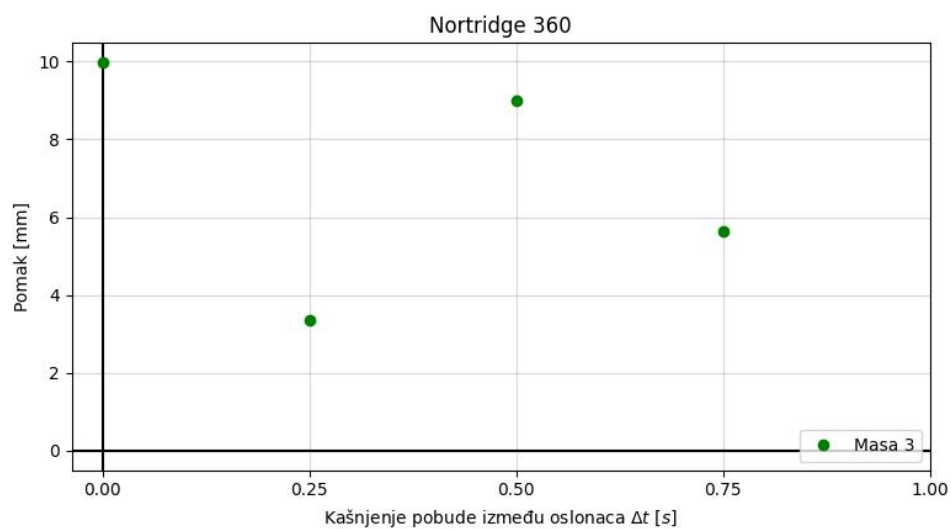


Slika 9.2: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (SE\_COC0)

Norridge 360

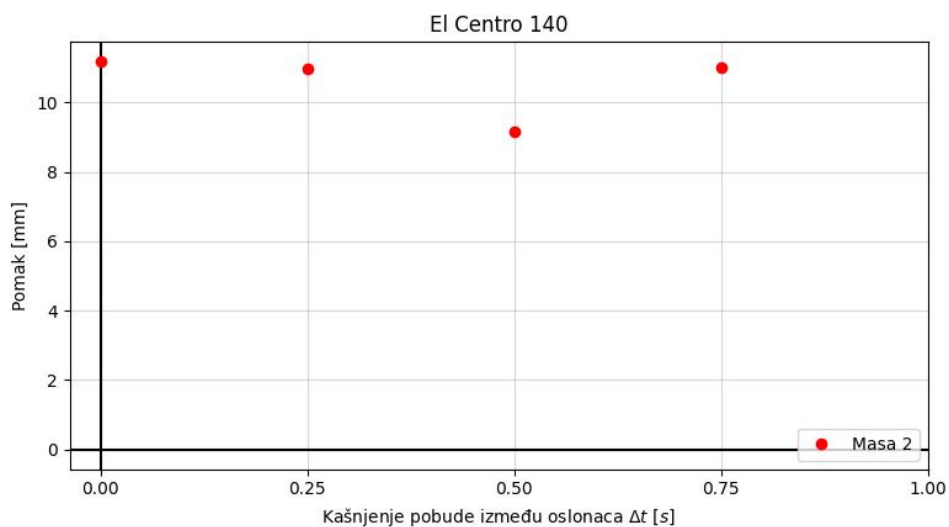


Slika 9.3: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (Norridge 360)

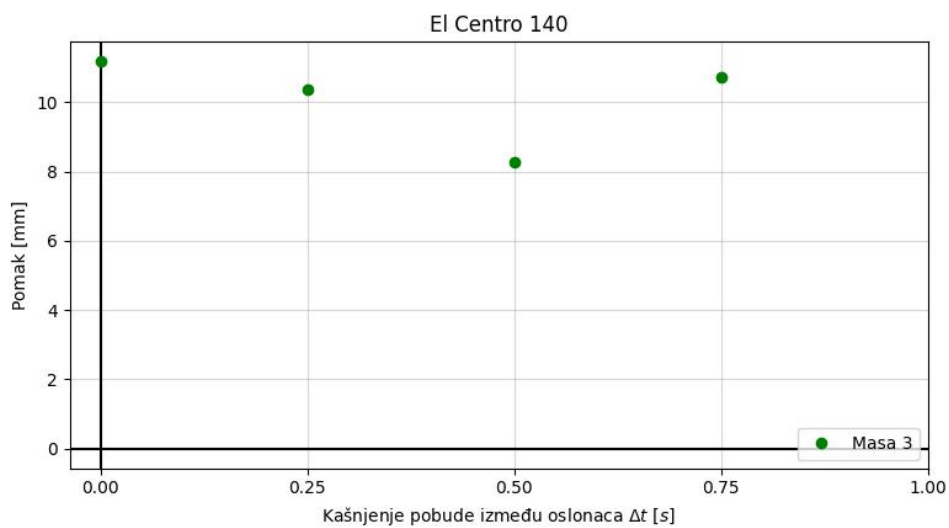


Slika 9.4: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (Norridge 360)

*El Centro 140*

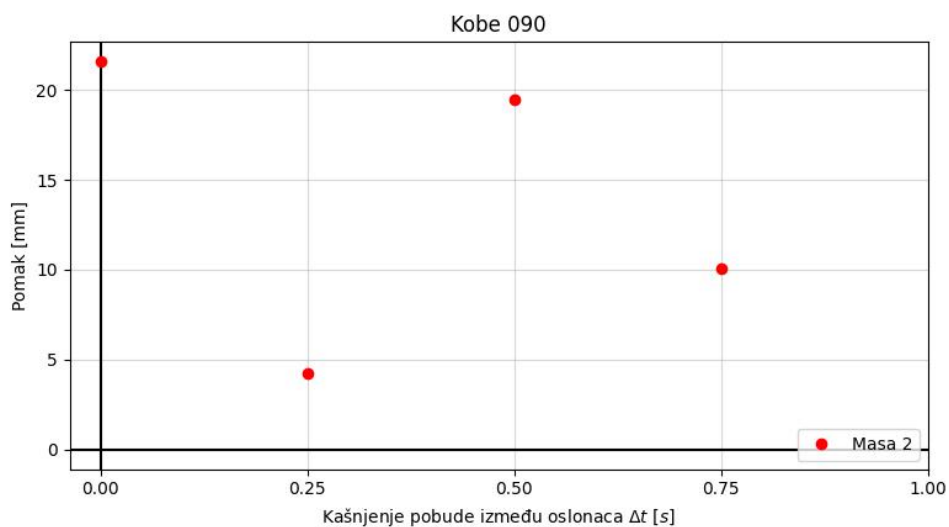


Slika 9.5: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (El Centro 140)

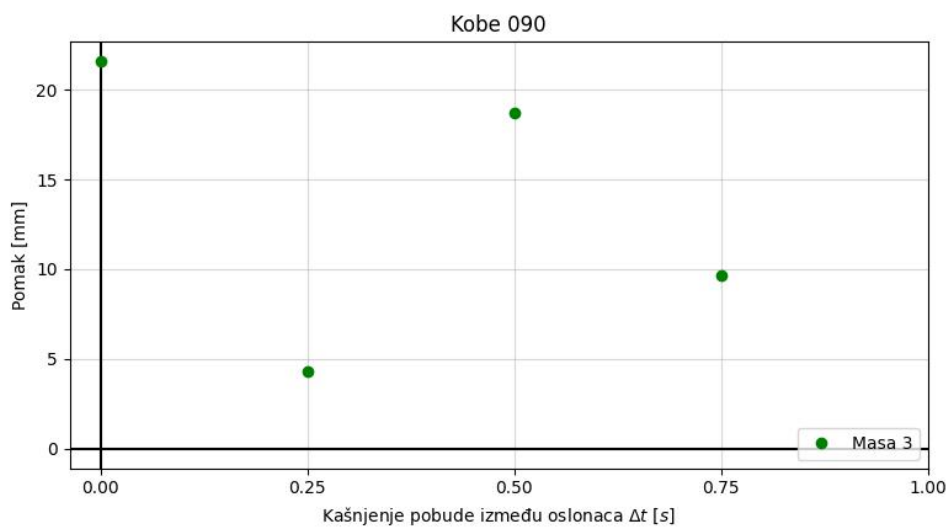


Slika 9.6: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (El Centro 140)

Kobe 090



Slika 9.7: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 2 - (Kobe 090)



Slika 9.8: Dijagram maksimalnih relativnih pomaka mase 3 - (Kobe 090)

## Prilog 2. Programski kod za formiranje matrice masa sustava

```
import numpy as np

#####
# Ulazni parametri
#####

L_b = 2.01          # Duljina grede [m]
n_b = 4            # Broj cvorova na gredi
H_c1 = 0.5         # Visina lijevog stupa [m]
n_c1 = 4           # Broj cvorova na lijevom stupu
H_c2 = 0.5         # Visina desnog stupa [m]
n_c2 = 4           # Broj cvorova na desnom stupu
b = 0.004          # Sirina grede [m]
h = 0.04           # Visina grede [m]
rho = 2700         # Gustoca aluminijske grede [kg/m^3]
A_b = b*h          # Povrsina popreznog presjeka grede [m^2]
J_b = 2.154667E-8 # Polarni moment inercije grede [m^4]
A_c = 1.2E-4       # Povrsina popreznog presjeka stupa [m^2]
J_c = 1.012E-8    # Polarni moment inercije stupa [m^4]
m1 = 4/9.81       # Masa 1 [kg]
m2 = 4/9.81       # Masa 2 [kg]
m3 = 4/9.81       # Masa 3 [kg]
m4 = 4/9.81       # Masa 4 [kg]
#####
# Greda - matrica masa
#####

l_b = L_b/(n_b-1) # Duljina konacnih elemenata grede
M_beam = np.zeros((3*n_b, 3*n_b), float)

for i in range(0, 3*n_b, 1):
    m_loc = np.array([[156, 0, -22*l_b, 54, 0, 13*l_b],
                      [0, (140*J_b)/A_b, 0, 0, (70*J_b)/A_b, 0],
                      [-22*l_b, 0, 4*l_b**2, -13*l_b, 0, -3*l_b**2],
                      [54, 0, -13*l_b, 156, 0, 22*l_b],
                      [0, (70*J_b)/A_b, 0, 0, (140*J_b)/A_b, 0],
                      [13*l_b, 0, -3*l_b**2, 22*l_b, 0, 4*l_b**2]])
    m_loc = ((rho*A_b*l_b)/420) * m_loc

    M_beam[0:3,0:6] = m_loc[0:3,0:6]
    M_beam[3:6,0:3] = m_loc[3:6,0:3]
    M_beam[3*n_b-3:3*n_b,3*n_b-6:3*n_b] = m_loc[3:6,0:6]
    M_beam[3*n_b-6:3*n_b-3,3*n_b-3:3*n_b] = m_loc[0:3,3:6]
```

```

    if i >= 3 and i <= 3*n_b-4:
        for i in range(3, 3*n_b-4, 3):
            M_beam[i:i+3,i:i+3] = m_loc[3:6,3:6] + m_loc[0:3,0:3]
            M_beam[i+3:i+6,i:i+3] = m_loc[3:6,0:3]
            M_beam[i:i+3,i+3:i+6] = m_loc[0:3,3:6]

M_beam[0, 0] = M_beam[0, 0] + m1
M_beam[3, 3] = M_beam[3, 3] + m2
M_beam[6, 6] = M_beam[6, 6] + m3
M_beam[9, 9] = M_beam[9, 9] + m4

#####
# Lijevi stup - matrica masa
#####

l_c1 = H_c1/(n_c1-1) # Duljina konacnih elemenata lijevog stupa
M_column1 = np.zeros((3*n_c1, 3*n_c1), float)

for i in range(0, 3*n_c1, 1):
    m_loc = np.array([[156, 0, -22*l_c1, 54, 0, 13*l_c1],
                      [0, (140*J_c)/A_c, 0, 0, (70*J_c)/A_c, 0],
                      [-22*l_c1, 0, 4*l_c1**2, -13*l_c1, 0, -3*l_c1
                       **2],
                      [54, 0, -13*l_c1, 156, 0, 22*l_c1],
                      [0, (70*J_c)/A_c, 0, 0, (140*J_c)/A_c, 0],
                      [13*l_c1, 0, -3*l_c1**2, 22*l_c1, 0, 4*l_c1
                       **2]])
    m_loc = ((rho*A_c*l_c1)/420) * m_loc

M_column1[0:3,0:6] = m_loc[0:3,0:6]
M_column1[3:6,0:3] = m_loc[3:6,0:3]
M_column1[3*n_c1-3:3*n_c1,3*n_c1-6:3*n_c1] = m_loc[3:6,0:6]
M_column1[3*n_c1-6:3*n_c1-3,3*n_c1-3:3*n_c1] = m_loc[0:3,3:6]

    if i >= 3 and i <= 3*n_c1-4:
        for i in range(3, 3*n_c1-4, 3):
            M_column1[i:i+3,i:i+3] = m_loc[3:6,3:6] + m_loc[0:3,0:3]
            M_column1[i+3:i+6,i:i+3] = m_loc[3:6,0:3]
            M_column1[i:i+3,i+3:i+6] = m_loc[0:3,3:6]

#####
# Desni stup - matrica masa
#####

l_c2 = H_c2/(n_c2-1) # Duljina konacnih elemenata desnog stupa
M_column2 = np.zeros((3*n_c2, 3*n_c2), float)

```

```

for i in range(0, 3*n_c2, 1):
    m_loc = np.array([[156, 0, -22*l_c2, 54, 0, 13*l_c2],
                      [0, (140*J_c)/A_c, 0, 0, (70*J_c)/A_c, 0],
                      [-22*l_c2, 0, 4*l_c2**2, -13*l_c2, 0, -3*l_c2
                        **2],
                      [54, 0, -13*l_c2, 156, 0, 22*l_c2],
                      [0, (70*J_c)/A_c, 0, 0, (140*J_c)/A_c, 0],
                      [13*l_c2, 0, -3*l_c2**2, 22*l_c2, 0, 4*l_c2
                        **2]])
    m_loc = ((rho*A_c*l_c2)/420) * m_loc

M_column2[0:3,0:6] = m_loc[0:3,0:6]
M_column2[3:6,0:3] = m_loc[3:6,0:3]
M_column2[3*n_c2-3:3*n_c2,3*n_c2-6:3*n_c2] = m_loc[3:6,0:6]
M_column2[3*n_c2-6:3*n_c2-3,3*n_c2-3:3*n_c2] = m_loc[0:3,3:6]

if i >= 3 and i <= 3*n_c2-4:
    for i in range(3, 3*n_c2-4, 3):
        M_column2[i:i+3,i:i+3] = m_loc[3:6,3:6] + m_loc[0:3,0:3]
        M_column2[i+3:i+6,i:i+3] = m_loc[3:6,0:3]
        M_column2[i:i+3,i+3:i+6] = m_loc[0:3,3:6]

#####
# Globalna matrica masa
#####

n_global = ((n_c1 + n_b + n_c2) - 2) # Ukupan broj cvorova na sustavu

M_global = np.zeros((3*n_global, 3*n_global), float)

# Polozaj matrice masa lijevog stupa u globalnoj matrici masa
M_global[0:len(M_column1), 0:len(M_column1)] = M_column1

# Polozaj matrice masa grede u globalnoj matrici masa
M_global[len(M_column1)-3:3*n_global - (len(M_column2)-3), len(
    M_column1)-3:3*n_global - (len(M_column2)-3)] = M_beam

# Polozaj matrice masa desnog stupa u globalnoj matrici masa
M_global[3*n_global-len(M_column2):3*n_global, 3*n_global-len(
    M_column2):3*n_global] = M_column2

# Polozaj i zbrajanje clanova matrice masa lijevog stupa i grede koji
se preklapaju
M_global[len(M_column1)-3:len(M_column1), len(M_column1)-3:len(
    M_column1)] = M_column1[len(M_column1)-3:len(M_column1), len(
    M_column1)-3:len(M_column1)] + M_beam[0:3, 0:3]

```

```

# Polozaj i zbrajanje clanova matrice masa grede i desnog stupa koji
# se preklapaju
M_global[3*n_global - len(M_column2):3*n_global - len(M_column2) + 3,
         3*n_global - len(M_column2):3*n_global - len(M_column2) + 3] =
M_beam[len(M_beam) - 3:len(M_beam), len(M_beam) - 3:len(M_beam)] +
M_column2[0:3, 0:3]

#####
# Reducirana matrica masa
#####

M_red = M_global
M_red = np.delete(M_red, [0, 1, 2, -3, -2, -1], 0)
M_red = np.delete(M_red, [0, 1, 2, -3, -2, -1], 1)

```



### Prilog 3. Programski kod za formiranje matrice krutosti sustava

```
import numpy as np
from numpy.linalg import inv
#####
# Ulazni parametri
#####

L_b = 2.01          # Duljina grede [m]
n_b = 4            # Broj cvorova na gredi
H_c1 = 0.5         # Visina lijevog stupa [m]
n_c1 = 4           # Broj cvorova na lijevom stupu
H_c2 = 0.5         # Visina desnog stupa [m]
n_c2 = 4           # Broj cvorova na desnom stupu
b = 0.004          # Sirina grede [m]
h = 0.04           # Visina grede [m]
I_b = (h*b**3)/12  # Moment inercije grede oko slabije osi [m^4]
J_b = 2.154677E-8  # Polarni moment inercije grede [m^4]
I_c = 1.12E-9      # Moment inercije stupa [m^4]
J_c = 1.012E-8     # Polarni moment inercije stupa [m^4]
E = 70000000000    # Modul elasticnosti [N/m^2]
v = 0.3            # Poissonov koeficijent
G = E/(2*(1+v))    # Modul posmika [N/m^2]

#####
# Greda - matrica krutosti
#####

l_b = L_b/(n_b-1) # Duljina konacnih elemenata grede
K_beam = np.zeros((3*n_b, 3*n_b), float)

for i in range(0, 3*n_b, 1):
    k_loc = np.array([[ (12*E*I_b)/l_b**3, 0, -(6*E*I_b)/l_b**2, -(12*
        E*I_b)/l_b**3, 0, -(6*E*I_b)/l_b**2],
        [0, (G*J_b)/l_b, 0, 0, -(G*J_b)/l_b, 0],
        [-(6*E*I_b)/l_b**2, 0, (4*E*I_b)/l_b, (6*E*I_b)
            /l_b**2, 0, (2*E*I_b)/l_b],
        [-(12*E*I_b)/l_b**3, 0, (6*E*I_b)/l_b**2, (12*E
            *I_b)/l_b**3, 0, (6*E*I_b)/l_b**2],
        [0, -(G*J_b)/l_b, 0, 0, (G*J_b)/l_b, 0],
        [-(6*E*I_b)/l_b**2, 0, (2*E*I_b)/l_b, (6*E*I_b)
            /l_b**2, 0, (4*E*I_b)/l_b]])

    K_beam[0:3,0:6] = k_loc[0:3,0:6]
    K_beam[3:6,0:3] = k_loc[3:6,0:3]
    K_beam[3*n_b-3:3*n_b,3*n_b-6:3*n_b] = k_loc[3:6,0:6]
```

```

K_beam[3*n_b-6:3*n_b-3,3*n_b-3:3*n_b] = k_loc[0:3,3:6]

if i >= 3 and i <= 3*n_b-4:
    for i in range(3, 3*n_b-4, 3):
        K_beam[i:i+3,i:i+3] = k_loc[3:6,3:6] + k_loc[0:3,0:3]
        K_beam[i+3:i+6,i:i+3] = k_loc[3:6,0:3]
        K_beam[i:i+3,i+3:i+6] = k_loc[0:3,3:6]

#####
# Lijevi stup - matrica krutosti
#####

l_c1 = H_c1/(n_c1-1) # Duljina konacnih elemenata lijevog stupa
K_column1 = np.zeros((3*n_c1, 3*n_c1), float)

for i in range(0, 3*n_c1, 1):
    k_loc = np.array([[ (12*E*I_c)/l_c1**3, 0, -(6*E*I_c)/l_c1**2,
                        -(12*E*I_c)/l_c1**3, 0, -(6*E*I_c)/l_c1**2],
                      [0, (G*J_c)/l_c1, 0, 0, -(G*J_c)/l_c1, 0],
                      [-(6*E*I_c)/l_c1**2, 0, (4*E*I_c)/l_c1, (6*E*I_c)/l_c1**2, 0, (2*E*I_c)/l_c1],
                      [-(12*E*I_c)/l_c1**3, 0, (6*E*I_c)/l_c1**2,
                        (12*E*I_c)/l_c1**3, 0, (6*E*I_c)/l_c1**2],
                      [0, -(G*J_c)/l_c1, 0, 0, (G*J_c)/l_c1, 0],
                      [-(6*E*I_c)/l_c1**2, 0, (2*E*I_c)/l_c1, (6*E*I_c)/l_c1**2, 0, (4*E*I_c)/l_c1]])

    K_column1[0:3,0:6] = k_loc[0:3,0:6]
    K_column1[3:6,0:3] = k_loc[3:6,0:3]
    K_column1[3*n_c1-3:3*n_c1,3*n_c1-6:3*n_c1] = k_loc[3:6,0:6]
    K_column1[3*n_c1-6:3*n_c1-3,3*n_c1-3:3*n_c1] = k_loc[0:3,3:6]

if i >= 3 and i <= 3*n_c1-4:
    for i in range(3, 3*n_c1-4, 3):
        K_column1[i:i+3,i:i+3] = k_loc[3:6,3:6] + k_loc[0:3,0:3]
        K_column1[i+3:i+6,i:i+3] = k_loc[3:6,0:3]
        K_column1[i:i+3,i+3:i+6] = k_loc[0:3,3:6]

#####
# Desni stup - matrica krutosti
#####

l_c2 = H_c2/(n_c2-1) # Duljina konacnih elemenata desnog stupa
K_column2 = np.zeros((3*n_c2, 3*n_c2), float)

for i in range(0, 3*n_c2, 1):
    k_loc = np.array([[ (12*E*I_c)/l_c2**3, 0, -(6*E*I_c)/l_c2**2,

```

```

-(12*E*I_c)/1_c2**3, 0, -(6*E*I_c)/1_c2**2],
    [0, (G*J_c)/1_c2, 0, 0, -(G*J_c)/1_c2, 0],
    [-(6*E*I_c)/1_c2**2, 0, (4*E*I_c)/1_c2, (6*E*
        I_c)/1_c2**2, 0, (2*E*I_c)/1_c2],
    [-(12*E*I_c)/1_c2**3, 0, (6*E*I_c)/1_c2**2,
        (12*E*I_c)/1_c2**3, 0, (6*E*I_c)/1_c2**2],
    [0, -(G*J_c)/1_c2, 0, 0, (G*J_c)/1_c2, 0],
    [-(6*E*I_c)/1_c2**2, 0, (2*E*I_c)/1_c2, (6*E*
        I_c)/1_c2**2, 0, (4*E*I_c)/1_c2]])

K_column2[0:3,0:6] = k_loc[0:3,0:6]
K_column2[3:6,0:3] = k_loc[3:6,0:3]
K_column2[3*n_c2-3:3*n_c2,3*n_c2-6:3*n_c2] = k_loc[3:6,0:6]
K_column2[3*n_c2-6:3*n_c2-3,3*n_c2-3:3*n_c2] = k_loc[0:3,3:6]

if i >= 3 and i <= 3*n_c2-4:
    for i in range(3, 3*n_c2-4, 3):
        K_column2[i:i+3,i:i+3] = k_loc[3:6,3:6] + k_loc[0:3,0:3]
        K_column2[i+3:i+6,i:i+3] = k_loc[3:6,0:3]
        K_column2[i:i+3,i+3:i+6] = k_loc[0:3,3:6]

#####
# Globalna matrica krutosti
#####

n_global = ((n_c1 + n_b + n_c2) - 2) # Ukupan broj cvorova na sustavu

K_global = np.zeros((3*n_global, 3*n_global), float)

# Polozaj matrice krutosti lijevog stupa u globalnoj matrici krutosti
K_global[0:len(K_column1), 0:len(K_column1)] = K_column1

# Polozaj matrice krutosti grede u globalnoj matrici krutosti
K_global[len(K_column1)-3:3*n_global - (len(K_column2)-3), len(
    K_column1)-3:3*n_global - (len(K_column2)-3)] = K_beam

# Polozaj matrice krutosti desnog stupa u globalnoj matrici krutosti
K_global[3*n_global-len(K_column2):3*n_global, 3*n_global-len(
    K_column2):3*n_global] = K_column2

# Polozaj i zbrajanje clanova matrice krutosti lijevog stupa i grede
  koji se preklapaju
K_global[len(K_column1)-3:len(K_column1), len(K_column1)-3:len(
    K_column1)] = K_column1[len(K_column1)-3:len(K_column1), len(
    K_column1)-3:len(K_column1)] + K_beam[0:3, 0:3]

# Polozaj i zbrajanje clanova matrice krutosti grede i desnog stupa

```

```

    koji se preklapaju
K_global[3*n_global - len(K_column2):3*n_global - len(K_column2) + 3,
        3*n_global - len(K_column2):3*n_global - len(K_column2) + 3] =
    K_beam[len(K_beam)-3:len(K_beam), len(K_beam)-3:len(K_beam)] +
    K_column2[0:3, 0:3]

#####
# Reducirana matrica krutosti
#####

K_red = K_global
K_red = np.delete(K_red, [0, 1, 2, -3, -2, -1], 0)
K_red = np.delete(K_red, [0, 1, 2, -3, -2, -1], 1)

```

## Prilog 4. Programski kod za formiranje utjecajne matrice

```
import numpy as np
from numpy.linalg import det
from numpy.linalg import inv
from stiffness_matrix import n_global, K_global

k = np.zeros((3*n_global-2, 3*n_global-2))
kg = np.zeros((3*n_global-2, 2))

k[0:-2, 0:-2] = K_global[1:-3, 1:-3]
k[-2:len(k)+1, 0:-2] = K_global[-2:len(K_global)+1, 1:-3]
k[0:-2, -2:len(k)+1] = K_global[1:-3, -2:len(K_global)+1]
k[-2:len(k)+1, -2:len(k)+1] = K_global[-2:len(K_global)+1, -2:len(
    K_global)+1]

kg[0:-2, 0] = K_global[1:-3, 0]
kg[-2:len(kg)+1, 0] = K_global[-2:len(K_global)+1, 0]
kg[0:-2, 1] = K_global[1:-3, -3]
kg[-2:len(kg)+1, 1] = K_global[-2:len(K_global)+1, -3]

inf = np.dot(-np.linalg.pinv(k), kg)

# Reducirana utjecajna matrica
inf = np.delete(inf, [0, 1, -2, -1], 0)
```

## Prilog 5. Programski kod za prognošćivanje postojećih podataka pomoću linearne aproksimacije

```
import numpy as np

def linear_approx(dt, test):
    # Unos podataka iz ispitivanja
    exp_data = np.genfromtxt(test, delimiter=",", names=("Time", "M1",
        "M2", "M3", "M4", "TA", "TB"), missing_values = None,
        filling_values = 0.0)
    time = list(np.arange(0, len(exp_data)*4, 4)/100) # Vrijeme
    m_1 = exp_data["M1"] # Pomaci mase
    1
    m_2 = exp_data["M2"] # Pomaci mase
    2
    m_3 = exp_data["M3"] # Pomaci mase
    3
    m_4 = exp_data["M4"] # Pomaci mase
    4
    t_a = exp_data["TA"] # Pomaci
    lijevog oslonca
    t_b = exp_data["TB"] # Pomaci
    desnog oslonca

    # Stvaranje vektora gdje ce biti spremana rjesenja
    t = []
    m1 = []
    m2 = []
    m3 = []
    m4 = []
    ta = []
    tb = []

    # Petlja koja racuna nove podatke na temelju postojećih podataka
    for i in range(0, len(time)-1, 1):
        for j in list(np.arange(int(time[i] * 1000), int(time[i+1] *
            1000), int(dt * 1000))/1000): # mnozenje s 1000 jer np.
            arange() nemoze imati vremenski korak kao float
            t.append(j)
            m1.append(m_1[i] + ((m_1[i+1] - m_1[i]) * ((j - time[i])
                /(time[i+1] - time[i]))))
            m2.append(m_2[i] + ((m_2[i+1] - m_2[i]) * ((j - time[i])
                /(time[i+1] - time[i]))))
            m3.append(m_3[i] + ((m_3[i+1] - m_3[i]) * ((j - time[i])
                /(time[i+1] - time[i]))))
            m4.append(m_4[i] + ((m_4[i+1] - m_4[i]) * ((j - time[i])
```

```

        /((time[i+1] - time[i])))
    ta.append(t_a[i] + ((t_a[i+1] - t_a[i]) * ((j - time[i])
        /((time[i+1] - time[i])))
    tb.append(t_b[i] + ((t_b[i+1] - t_b[i]) * ((j - time[i])
        /((time[i+1] - time[i])))
t = np.array(t)
m1 = np.array(m1)
m2 = np.array(m2)
m3 = np.array(m3)
m4 = np.array(m4)
ta = np.array(ta)
tb = np.array(tb)

return(t, m1, m2, m3, m4, ta, tb)

```

## Prilog 6. Programski kod za numeričku analizu slobodnih prigušenih oscilacija

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eig
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt
from stiffness_matrix import K_red as K
from mass_matrix import M_red as M

# Svojtvene vrijednosti i svojstveni vektori
w, v = eig(K, M)

omega = np.sqrt(w)
freq = omega/(2*np.pi)

phi_1 = v[:,0]
phi_2 = v[:,1]
phi_3 = v[:,2]

# Koeficijent prigusenja
zeta = 0.006938
a0 = zeta * ((2*omega[0] * omega[1])/(omega[0] + omega[1]))
a1 = zeta * (2/(omega[0] + omega[1]))

# Matrica prigusenja
C = a0*M + a1*K

# Rjesavanje jednadzbe kretanja
t_end = 31.23
dt = 0.01
n = int(t_end/dt)

# Newmarkovi parametri
delta = 1/2
alpha = 1/4
b1 = 1/(alpha*dt**2)
b2 = -1/(alpha*dt)
b3 = 1 - 1/(2*alpha)
b4 = delta/(alpha*dt)
b5 = 1 - delta/alpha
b6 = (1 - delta/(2*alpha))*dt

x = np.zeros([15,n])
v = np.zeros([15,n])
a = np.zeros([15,n])
```



```

# Import podataka iz ispitivanja
exp_data = np.genfromtxt("test1_novo.txt", delimiter=",", names=(
    "Time", "CA", "CB", "M1", "M2", "M3", "TA", "TB"), missing_values =
    None, filling_values = 0.0)
t = exp_data["Time"]           # Vrijeme
ca = exp_data["CA"] * 0.001    # Pomaci lijevog spoja stupa i grede
cb = exp_data["CB"] * 0.001    # Pomaci desnog spoja stupa i grede
m1 = exp_data["M1"] * 0.001    # Pomaci mase 1
m2 = exp_data["M2"] * 0.001    # Pomaci mase 2
m3 = exp_data["M3"] * 0.001    # Pomaci mase 3
ta = exp_data["TA"] * 0.001    # Pomaci lijevog oslonca
tb = exp_data["TB"] * 0.001    # Pomaci desnog oslonca

# Pocetni uvjeti:
x[2,0] = ca[0]
x[3, 0] = m1[0]
x[6, 0] = m2[0]
x[9, 0] = m3[0]
x[12, 0] = cb[0]
a[:,0] = np.dot(inv(M), (np.dot(-C, v[:,0]) + np.dot(-K, x[:,0])))

# Efektivna matrica krutosti:
K_eff = b1*M + K + b4*C
K_eff_inv = inv(K_eff)

# Petlja kojom koracamo u vremenu i racunamo nepoznate pomake, brzine
# i ubrzanja u svakom trenutku:
for i in range(n-1):

    # Efektivni vektor opterecenja:
    F_eff = np.dot(M, (b1*x[:,i] - b2*v[:,i] - b3*a[:,i])) + np.dot(C
        , (b4*x[:,i] - b5*v[:,i] - b6*a[:,i]))

    # Pomaci:
    x[:,i+1] = np.dot(K_eff_inv, F_eff)

    # Brzine:
    v[:,i+1] = b4*(x[:,i+1] - x[:,i]) + b5*v[:,i] + b6*a[:,i]

    # Ubrzanja:
    a[:,i+1] = b1*(x[:,i+1] - x[:,i]) + b2*v[:,i] + b3*a[:,i]

```

## Prilog 7. Programski kod za numeričku analizu prisilnih prigušenih oscilacija

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt
from stiffness_matrix import K_red as K
from mass_matrix import M_red as M
from influence_matrix import inf

# Svojtstvene vrijednosti i svojstveni vektori
w, v = eigh(K, M)

omega = np.sqrt(w)
freq = omega/(2*np.pi)

phi_1 = v[:,0]
phi_2 = v[:,1]
phi_3 = v[:,2]
phi_4 = v[:,3]

# Koeficijent prigusenja
zeta = 0.02901
a0 = zeta * ((2*8.407 * 22.789)/(8.407 + 22.789))
a1 = zeta * (2/(8.407 + 22.789))

# Matrica prigusenja
C = a0*M + a1*K

# Rjesavanje jednadzbe kretanja
t_end = 31.56
dt = 0.04
n = int(t_end/dt)

# Newmarkovi parametri
delta = 1/2
alpha = 1/4
b1 = 1/(alpha*dt**2)
b2 = -1/(alpha*dt)
b3 = 1 - 1/(2*alpha)
b4 = delta/(alpha*dt)
b5 = 1 - delta/alpha
b6 = (1 - delta/(2*alpha))*dt

x = np.zeros([24,n])
v = np.zeros([24,n])
```

```

a = np.zeros([24,n])

# Import podataka iz ispitivanja
exp_data = np.genfromtxt("test3_novo.txt", delimiter=",", names=(
    "Time", "M1", "M2", "M3", "M4", "TA", "TB"), missing_values = None
    , filling_values = 0.0)
t = exp_data["Time"]           # Vrijeme
m1 = exp_data["M1"] * 0.001   # Pomaci mase 1
m2 = exp_data["M2"] * 0.001   # Pomaci mase 2
m3 = exp_data["M3"] * 0.001   # Pomaci mase 3
m4 = exp_data["M4"] * 0.001   # Pomaci mase 4
ta = exp_data["TA"] * 0.001   # Pomaci lijevog oslonca
tb = exp_data["TB"] * 0.001   # Pomaci desnog oslonca

# Brzine i ubrzanja potresnih stolova (oslonaca)
vel_ta = []                   # Brzine lijevog oslonca [m/s]
vel_tb = []                   # Brzine desnog oslonca [m/s]
for i in range(0, len(ta)-1, 1):
    vel_ta.append((ta[i+1] - ta[i])/dt)
    vel_tb.append((tb[i+1] - tb[i])/dt)
vel_ta.append(0)
vel_tb.append(0)

acc_ta = []                   # Ubrzanja lijevog oslonca [m/s^2]
acc_tb = []                   # Ubrzanja desnog oslonca [m/s^2]
for i in range(0, len(ta)-2, 1):
    acc_ta.append((vel_ta[i+1] - vel_ta[i])/dt)
    acc_tb.append((vel_tb[i+1] - vel_tb[i])/dt)
acc_ta.append(0)
acc_tb.append(0)
acc_ta = np.array(acc_ta)
acc_tb = np.array(acc_tb)

a_g = np.zeros([len(acc_ta), 2])
a_g[:, 0] = acc_ta
a_g[:, 1] = acc_tb
a_g = a_g.transpose()        # Matrica sa ubrzanjima oslonaca

# Pocetni uvjeti
x[6, 0] = m1[0]
x[9, 0] = m2[0]
x[12, 0] = m3[0]
x[15, 0] = m4[0]
a[:,0] = np.dot(inv(M), (np.dot(-C, v[:,0]) + np.dot(-K, x[:,0])))

# Efektivna matrica krutosti
K_eff = b1*M + K + b4*C

```

```

K_eff_inv = inv(K_eff)

# Petlja kojom koracamo u vremenu i racunamo nepoznate pomake, brzine
# i ubrzanja u svakom trenutku
for i in range(n-1):

    # Vektor vanjskog opterecenja
    F = np.dot((np.dot(-M, inf)), a_g[:, i])

    # Efektivni vektor opterecenja
    F_eff = F + np.dot(M, (b1*x[:, i] - b2*v[:, i] - b3*a[:, i])) + np.
        dot(C, (b4*x[:, i] - b5*v[:, i] - b6*a[:, i]))

    # Pomaci
    x[:, i+1] = np.dot(K_eff_inv, F_eff)

    # Brzine
    v[:, i+1] = b4*(x[:, i+1] - x[:, i]) + b5*v[:, i] + b6*a[:, i]

    # Ubrzanja
    a[:, i+1] = b1*(x[:, i+1] - x[:, i]) + b2*v[:, i] + b3*a[:, i]

# Dodavanje statickih pomaka sustava na relativne pomake dobivene
# numerickim modelom (Apsolutni pomaci)
for i in range(0, n-1, 1):
#     x[6, i] = x[6, i] + 0.8339*ta[i] + 0.1661*tb[i]           # Masa 1
#     x[9, i] = x[9, i] + 0.6113*ta[i] + 0.3887*tb[i]           # Masa 2
#     x[12, i] = x[12, i] + 0.3887*ta[i] + 0.6113*tb[i]         # Masa 3
#     x[15, i] = x[15, i] + 0.1661*ta[i] + 0.8339*tb[i]         # Masa 4

# Oduzimanje statickih pomaka od apsolutnih pomaka iz
# eksperimentalnih ispitivanja (Relativni pomaci)
for i in range(0, n-1, 1):
#     m1[i] = m1[i] - (0.8339*ta[i] + 0.1661*tb[i])           # Masa 1
#     m2[i] = m2[i] - (0.6113*ta[i] + 0.3887*tb[i])           # Masa 2
#     m3[i] = m3[i] - (0.3887*ta[i] + 0.6113*tb[i])           # Masa 3
#     m4[i] = m4[i] - (0.1661*ta[i] + 0.8339*tb[i])           # Masa 4

# Relativni kutevi zaokreta iz eksperimentalnih ispitivanja
# m1_rot = []
# m2_rot = []
# m3_rot = []
# m4_rot = []
# for i in range(0, n-1, 1):
#     m1_rot.append (x[8, i] - (0.3322*ta[i] + (-0.3322*tb[i])))
#         # Masa 1
#     m2_rot.append (x[11, i] - (0.3322*ta[i] + (-0.3322*tb[i])))

```

```
    # Masa 2
# m3_rot.append (x[14,i] - (0.3322*ta[i] + (-0.3322*tb[i])))
    # Masa 3
# m4_rot.append (x[17,i] - (0.3322*ta[i] + (-0.3322*tb[i])))
    # Masa 4
```

# LITERATURA

- [1] Clough, Ray W. and Penzien, Joseph. *Dynamics of structures*. 2003.
- [2] Logan, Daryl L. *A first course in the finite element method*, volume 3. University of Wisconsin, Plateville, Nelson, a division of Thomas Canada Limited, 4th edition, 2007.
- [3] Chopra, Anil K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. 2014.
- [4] Qin, Han and Li, Luyu. A modified gaussian model for spectral amplitude variability of the smart 1 array records. *Applied Sciences (Switzerland)*, 12, 12 2022. ISSN 20763417. doi: 10.3390/app122312067.
- [5] Fabijan, Paolo. Utjecaj višestruke seizmičke pobude oslonaca na vitke dugačke konstrukcije, 2021.
- [6] Radnić, Jure. Platforma za protupotresna ispitivanja po mogućnostima među prvih pet u europi. *Građevinar*, pages 583–586, 2013.
- [7] Sažeti pregled važnije opreme laboratorija za ispitivanje konstrukcija.
- [8] Katalog laboratorijske i terenske opreme građevinskog fakulteta u rijeci, 2017.
- [9] En 1998-2: Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – part 2: Bridges, 2005.
- [10] Papadopoulos, Savvas P. and Sextos, Anastasios G. Simplified design of bridges for multiple-support earthquake excitation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 131, 4 2020. ISSN 02677261. doi: 10.1016/j.soildyn.2019.106013.
- [11] Abrahamson, N.A., Bolt, B.A., Darragh, R.B., Penzien, J., and Tsai, Y.B. The smart 1 accelerograph array (1980-1987): A review. *Earthquake Spectra*, 3:263–287, 1987.
- [12] Stewart, Jonathan P, Chiou, Shyh-Jeng, Bray, Jonathan D, Graves, Robert W, Somerville, Paul G, and Abrahamson, Norman A. Ground motion evaluation procedures for performance-based design, 2002.

- [13] L., Edward Wilson. *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering*. 3rd edition, 2002.