

# Analiza dinamičkog odgovora troetažnog okvira izloženog pomicanju podloge

---

**Jozić, Gabriela**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:142157>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-26**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Gabriela Jozić**

**Analiza dinamičkog odgovora troetažnog okvira izloženog pomicanju  
podloge**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2023.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Sveučilišni diplomski studij Građevinarstvo  
Konstrukcije  
Dinamika konstrukcija**

**Gabriela Jozić  
JMBAG: 0114030801**

**Analiza dinamičkog odgovora troetažnog okvira izloženog pomicanju  
podloge**

**Diplomski rad**

**Rijeka, studeni 2023.**

## **IZJAVA**

Diplomski rad izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom i komentoricom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

---

Gabriela Jozić

U Rijeci, 08.11.2023.

## IZJAVA

Završni/Diplomski rad izrađen je u sklopu hrvatsko-kineskog bilateralnog projekta  
**Experimental study of bridge structures considering the asymmetric effect under  
multiple support excitation**

Voditelj projekta	Nina Čeh
Financijer projekta	MZO RH i Ministarstvo znanosti i tehnologije Narodne Republike Kine

U Rijeci, 8. 11. 2023

Mentor:



*Na samom početku želim se zahvaliti svom mentoru prof. dr. sc. Gordanu Jeleniću i komentorici doc. dr. sc. Nini Čeh čije me stručno vodstvo vodilo kroz izradu ovog diplomskog rada: na prenesenom znanju, uloženom trudu, vremenu i susretljivosti.*

*Najveću zahvalnost dugujem roditeljima i bratu koji su me strpljivo pratili na mom putu, čija su ljubav i vjera u mene bili moj vodič kroz sve izazove.*

*I na kraju, ali nikako manje važno, zahvaljujem svojim prijateljima i kolegama. Hvala na nezaboravnim trenucima, smijehu, putovanjima i naravno, neplaniranim 'studiranjima' u kafićima koji su se pretvorili u najljepše uspomene.*

*Hvala svima koji su mi omogućili da danas budem tu gdje jesam.*

## **SAŽETAK**

Diplomski rad "Analiza dinamičkog odgovora troetažnog okvira izloženog pomicanju podloge" istražuje kako se troetažna konstrukcija ponaša kada je izložena potresima. U ovom radu, cilj je bio ispitati model konstrukcije na razne pobude kako bi se proučilo njezino ponašanje pod utjecajem potresa. Prvi dio rada usmjeren je na teorijske osnove i potrebne informacije za računske i eksperimentalne metode koje su korištene. Nakon toga, prikupljeni su podaci putem laboratorijskih ispitivanja u laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci. Zatim se obrađuju podaci kao što su masa, krutost konstrukcije, svojstvene vrijednosti te koeficijenti prigušenja. Ovi parametri temeljni su za daljnju analizu i odziv konstrukcije na dinamička opterećenja te omogućuju razumijevanje osnovnih dinamičkih karakteristika konstrukcije. Također, razvijen je računarski program i dobiveni rezultati uspoređeni su s izmjerenima. Analizirane su razlike između numeričkih i eksperimentalnih rezultata troetažne konstrukcije tijekom potresa, s potencijalnim varijacijama uzrokovanim karakteristikama modela. Ove analize nude važna saznanja za daljnji razvoj u području potresnog inženjeringa i projektiranja.

**KLJUČNE RIJEČI:** laboratorijska ispitivanja, frekvencije, prigušenje, potresna pobuda, troetažna konstrukcija, Newmarkova metoda

## **ABSTRACT**

The thesis "Analysis of dynamic behaviour of a three-storey frame subject to ground motion" explores how a three-storey structure behaves when subjected to earthquakes. The aim of this study was to investigate the construction model under various excitations to understand its behavior under the influence of earthquakes. The first part of the work focuses on the theoretical foundations and essential information for computational and experimental methods that were used. Data collected through laboratory experiments at the Structural Engineering Laboratory of the Faculty of Civil Engineering in Rijeka are presented. The study proceeds to analyze parameters such as mass, structural stiffness, eigenvalues, and damping coefficients. These parameters serve as the basis for further analysis of the structure's response to dynamic loads, enabling an understanding of its fundamental dynamic characteristics. Also, a computer program has been developed, and the obtained results have been compared with the measurements. The differences between numerical and experimental results of the three-storey structure during earthquakes were analyzed, with potential variations caused by model characteristics. These analyses provide valuable insights for further advancement in the field of earthquake engineering and design.

**KEYWORDS:** Laboratory Testing, Frequencies, Damping, Seismic Excitation, Three-Storey Structure, Newmark Method.



## SADRŽAJ

1	UVOD .....	1
2	OPIS MODELA I ODREĐIVANJE GEOMETRIJSKIH I MATERIJALNIH KARAKTERISTIKA....	2
2.1.1	Određivanje mase okvira.....	2
2.1.2	Određivanje krutosti okvira .....	4
3	JEDNADŽBE KRETANJA, VLASTITE FREKVENCije I OBLICI OSCILIRANJA.....	8
3.1	Izvedba matrica masa i krutosti.....	8
3.2	Jednadžbe kretanja .....	11
3.2.1	Slobodne neprigušene oscilacije .....	13
3.2.2	Slobodne prigušene oscilacije.....	13
3.2.3	Prisilne neprigušene oscilacije.....	14
3.2.4	Prisilne prigušene oscilacije.....	14
3.3	Matrice masa i krutosti .....	14
3.3.1	Matrica masa $m$ zadana temeljem mjerenja .....	14
3.3.2	Matrica krutosti $k$ zadana temeljem mjerenja .....	14
3.3.3	Matrica krutosti $k$ zadana računski.....	15
3.4	Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori.....	15
3.4.1	Problem s jednim stupnjem slobode .....	15
3.4.2	Problem s više stupnjeva slobode.....	17
3.5	Vlastite frekvencije i oblici osciliranja .....	18
3.6	Prigušenje .....	20
3.6.1	Rayleighovo prigušenje.....	20
3.6.2	Određivanje prigušenja.....	21
4	NUMERIČKO RJEŠAVANJE JEDNADŽBI KRETANJA .....	23
4.1	Newmarkova metoda integracije.....	23
4.2	Ubrzanja dobivena pomakom baze.....	26
4.3	Algoritam u Pythonu .....	27
5	LABORATORIJSKA OPREMA.....	29
6	EKSPERIMENTALNI I NUMERIČKI REZULTATI.....	31
6.1	Slobodne prigušene oscilacije – nanošenjem pomaka samo na 3.etažu.....	31
6.1.1	Određivanje prigušenja .....	31
6.1.2	Usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata.....	33
6.2	Slobodne prigušene oscilacije u 1. tonu .....	39
6.2.1	Određivanje prigušenja .....	44
6.3	Slobodne prigušene oscilacije u 2. tonu .....	47
6.4	Harmonijska pobuda 1. vlastite frekvencije.....	50

6.4.1	Half- Power Bandwidth metoda .....	51
6.5	Sinesweep ispitivanje .....	55
6.5.1	Eksperimentalni rezultati.....	55
6.5.2	Numerički rezultati .....	58
6.5.3	Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka.....	60
6.5.3.1	Etaža 1. ....	60
6.5.3.2	Etaža 2. ....	62
6.5.3.3	Etaža 3. ....	63
6.6	Potresni zapisi .....	64
6.6.1	Potres Kobe .....	65
6.6.1.1	Eksperimentalni rezultati.....	65
6.6.1.2	Numerički rezultati .....	68
6.6.1.3	Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka .....	70
6.6.2	Potres Northridge.....	75
6.6.2.1	Eksperimentalni rezultati.....	77
6.6.2.2	Numerički rezultati .....	79
6.6.2.3	Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka .....	81
6.6.3	Potres El Centro.....	85
6.6.3.1	Eksperimentalni rezultati.....	86
6.6.3.2	Numerički rezultati .....	89
6.6.3.3	Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka.....	91
6.6.4	Potres Cape Mendocino.....	95
6.6.4.1	Eksperimentalni rezultati.....	95
6.6.4.2	Numerički rezultati .....	97
6.6.4.3	Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka.....	99
7	ZAKLJUČAK.....	104
8	LITERATURA.....	106
9	PRILOZI .....	108
9.1	PRILOG - Kod u Pythonu – pomaci etaža za 1.ton.....	108
9.2	PRILOG - Kod u Pythonu – pomaci etaža za 2.ton.....	109
9.3	PRILOG - Kod u Pythonu – pomaci etaža za 3.ton.....	110
9.4	PRILOG - Kod u Pythonu- za matricu krutosti zadanu temeljem mjerenja, te računanje svojstvenih vrijednosti.....	111
9.5	PRILOG - Kod u Pythonu- za matricu krutosti uz pretpostavku $E= 7 \cdot 10^{10}$ (aluminij) 112	
9.6	PRILOG - Kod u Pythonu - za usporedbu numeričkih i eksperimentalnih rezultata slobodnih prigušenih oscilacija.....	113

9.7	PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – numerički .....	117
9.8	PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – eksperimentalno .....	121
9.9	PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – usporedba apsolutnih pomaka.....	122
9.10	PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – usporedba relativnih pomaka.....	126
9.11	PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – usporedba relativnih pomaka – korigirana vertikalna os .....	130
9.12	PRILOG - Dijagrami Kobe potresnog zapisa .....	134
9.13	PRILOG - Dijagrami Northridge potresnog zapisa.....	137
9.14	PRILOG - Dijagrami El Centro potresnog zapisa.....	141
9.15	PRILOG - Dijagrami Cape Mendocino potresnog zapisa.....	143

## POPIS SLIKA

Slika 1. Troetažni simetrični sustav .....	2
Slika 2. Dimenzije i mase jedne etaže okvira.....	3
Slika 3. Mjerenje krutosti.....	5
Slika 4. Prva nanescena sila .....	5
Slika 5. Zadnja nanescena sila.....	6
Slika 6. DST dijagram troetažnog modela .....	8
Slika 7. DMA dijagram troetažnog modela .....	9
Slika 8. Matrica krutosti – izračunata uz pretpostavku $E = 7 \cdot 10^{10}$ (aluminij) .....	15
Slika 9. Slobodne vibracije bez prigušenja [1] .....	16
Slika 10. Oblici osciliranja, redom: 1.ton, 2.ton, 3.ton.....	18
Slika 11. Newmarkova metoda konstantnog prosječnog ubrzanja [6].....	24
Slika 12. Potresna platforma „Quanser ST-III“ na Građevinskom fakultetu u Rijeci .....	29
Slika 13. Slobodne prigušene oscilacije - etaža 1.....	31
Slika 14. . Slobodne prigušene oscilacije - etaža 2.....	32
Slika 15. Slobodne prigušene oscilacije - etaža 3.....	33
Slika 16. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija.....	34
Slika 17. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - početak osciliranja .....	35
Slika 18. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 2. do 10. s.....	35
Slika 19. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 20. do 30.....	36
Slika 20. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - početak osciliranja .....	37
Slika 21. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 2. do 10. s.....	38
Slika 22. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 20. do 30.....	38
Slika 23. Pomaci troetažnog modela u 1.tonu .....	40
Slika 24. Izvedena samostojeća gipskartonska konstrukcija.....	41
Slika 25. Gipskartonska konstrukcija i troetažni model .....	42
Slika 26. Ucrtavani pomaci na gipskartonskoj konstrukciji.....	42
Slika 27. Istovremeno otpuštanje konstrukcije u 1. tonu.....	43
Slika 28. Osciliranje konstrukcije u prvom tonu .....	44
Slika 29. Slobodne prigušene oscilacije 1.ton pomak 1.etaže.....	44
Slika 30. Slobodne prigušene oscilacije 1.ton pomak 2.etaže.....	45
Slika 31. Slobodne prigušene oscilacije 1.ton pomak 3.etaže.....	46
Slika 32. Pomaci troetažnog modela u 2.tonu .....	47
Slika 33. Istovremeno otpuštanje konstrukcije u 2. tonu.....	48
Slika 34. Slobodne prigušene oscilacije 2.ton pomak 1.etaže.....	48
Slika 35. Slobodne prigušene oscilacije 2.ton pomak 2.etaže.....	49
Slika 36. Početak osciliranja etaže 2. ....	49
Slika 37. Slobodne prigušene oscilacije 2.ton pomak 3.etaže.....	50
Slika 38. Sinusoidalna pobuda 1. ton – eksperimentalni rezultat.....	51
Slika 39. Sinusoidalna pobuda, podijeljena po frekvencijama redom: 2.55, 2.65, 2.75., 2.85 i 2.95 Hz.....	52
Slika 40. Half-Power dijagram.....	53
Slika 41. Cijeli odaziv konstrukcije (sinesweep).....	55
Slika 42. Sinesweep prilikom prolaska kroz 1. frekvenciju.....	56
Slika 43. Sinesweep prilikom prolaska kroz 2. frekvenciju .....	57
Slika 44. Sinesweep funkcija – numerički.....	58
Slika 45. Sinesweep funkcija – numerički 9. – 13. sec .....	59
Slika 46. Sinesweep funkcija – numerički 28.5. – 29.5. sec.....	59
Slika 47. Sinesweep - usporedba apsolutnih pomaka .....	61

Slika 48. Sinesweep - usporedba relativnih pomaka .....	61
Slika 49. Sinesweep - usporedba apsolutnih pomaka .....	62
Slika 50. Sinesweep - usporedba relativnih pomaka .....	62
Slika 51. Sinesweep - usporedba apsolutnih pomaka .....	63
Slika 52. Sinesweep - usporedba relativnih pomaka .....	63
Slika 53. Deformacija konstrukcije - Potres Kobe .....	64
Slika 54. Potresni zapis Kobe – eksperimentalno - pomak baze .....	66
Slika 55. Potresni zapis Kobe – eksperimentalno.....	66
Slika 56. Potresni zapis Kobe – eksperimentalno 24. – 36. sec.....	67
Slika 57. Potresni zapis Kobe - numerički .....	68
Slika 58. Potresni zapis Kobe - numerički - najveće oscilacije.....	69
Slika 59. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže .....	70
Slika 60. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 24. - 36.sec.....	71
Slika 61. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže .....	71
Slika 62. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže - početak zapisa .....	72
Slika 63. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže .....	73
Slika 64. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže - početak zapisa .....	73
Slika 65. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže 24. - 36. sec.....	74
Slika 66. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže - veće prigušenje .....	75
Slika 67. Deformacija konstrukcije - Potres Northridge.....	76
Slika 68. Potresni zapis Northridge – eksperimentalno - pomak baze.....	77
Slika 69. Potresni zapis Northridge – eksperimentalno .....	78
Slika 70. Potresni zapis Northridge – eksperimentalno 4. - 10. sec.....	78
Slika 71. Potresni zapis Northridge – numerički .....	79
Slika 72. Northridge potresni zapis numerički - najveće oscilacije .....	80
Slika 73. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže.....	81
Slika 74. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže 4. -10. sec.....	81
Slika 75. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže.....	82
Slika 76. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže 4. - 10. sec .....	82
Slika 77. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže (veće prigušenje) .....	83
Slika 78. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže 4. -10. sec (veće prigušenje)....	84
Slika 79. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže (veće prigušenje).....	84
Slika 80. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže 4. - 10. sec (veće prigušenje) ..	85
Slika 81. Potresni zapis El Centro – eksperimentalno - pomak baze.....	86
Slika 82. Potresni zapis El Centro – eksperimentalno .....	87
Slika 83. Potresni zapis El Centro – eksperimentalno 10. – 15. sec .....	87
Slika 84. Deformacija konstrukcije - Potres El Centro.....	88
Slika 85. Potresni zapis El Centro – numerički.....	89
Slika 86. Potresni zapis El Centro – numerički -10. -15. sekunde.....	90
Slika 87. El Centro - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže.....	91
Slika 88. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže.....	92
Slika 89. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže 10. - 15. sec.....	93
Slika 90. El Centro - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže (veće prigušenje).....	93
Slika 91. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže (veće prigušenje).....	94
Slika 92. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže 10. - 15. sec (veće prigušenje).....	94
Slika 93. Potresni zapis Cape Mendocino – eksperimentalno - pomak baze.....	95
Slika 94. Potresni zapis Cape Mendocino – eksperimentalno .....	96
Slika 95. Potresni zapis Cape Mendocino – numerički.....	97
Slika 96. Potresni zapis Cape Mendocino – numerički 4. - 8. sec .....	98
Slika 97. Cape Mendocino - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže.....	99

Slika 98. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2.etaže.....	100
Slika 99. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2. etaže 4. - 8. sec.....	100
Slika 100. Cape Mendocino - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže (veće prigušenje) .....	101
Slika 101. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2. etaže (veće prigušenje) .....	102
Slika 102. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2. etaže 4. - 8. sec (veće prigušenje).....	102
Slika 103. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže.....	134
Slika 104. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže 24. - 36.sec.....	134
Slika 105. Kobe - usporedba relativnih pomaka 1.etaže .....	135
Slika 106. Kobe - usporedba relativnih pomaka 1.etaže - početak zapisa .....	135
Slika 107. Kobe - usporedba relativnih pomaka 1.etaže 24. - 36. sec .....	136
Slika 108. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže .....	137
Slika 109. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 1. etaže 4. -10. sec.....	137
Slika 110. Northridge - usporedba relativnih pomaka 1. etaže .....	138
Slika 111. Northridge - usporedba relativnih pomaka 1. etaže 4. - 10. sec.....	138
Slika 112. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže .....	139
Slika 113. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 2. etaže 4. -10. sec.....	139
Slika 114. Northridge - usporedba relativnih pomaka 2. etaže .....	140
Slika 115. Northridge - usporedba relativnih pomaka 2. etaže 4. - 10. sec.....	140
Slika 116. El Centro - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže .....	141
Slika 117. El Centro - usporedba relativnih pomaka 1.etaže .....	141
Slika 118. El Centro - usporedba relativnih pomaka 1.etaže 10. - 15. sec.....	142
Slika 119. Cape Mendocino - usporedba apsolutnih pomaka 1. etaže .....	143
Slika 120. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 1. etaže.....	143
Slika 121. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 1. etaže 4. - 8. sec .....	144

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Izračun krutosti .....	7
Tablica 2. Pomaci etaža .....	18
Tablica 3. Dimenzije i karakteristike potresne platforme „Quanser ST-III“ [7].....	30
Tablica 4. Maksimalni pomaci .....	52

## 1 UVOD

U današnjem kontekstu klimatskih promjena i urbanizacije, razumijevanje dinamičkog ponašanja građevinskih konstrukcija postaje sve važnije. Potresi predstavljaju jedan od najdestruktivnijih prirodnih fenomena koji mogu imati katastrofalne posljedice na građevinske objekte i infrastrukturu. Stoga, ovaj diplomski rad usmjerava svoj fokus na analizu dinamičkog ponašanja simetrične troetažne konstrukcije pod potresnim opterećenjem.

Cilj rada je pružiti sveobuhvatni uvid u dinamičke karakteristike modela troetažne konstrukcije. U prvom dijelu rada, predstavljena je teorijska podloga koja obuhvaća osnove dinamike konstrukcija, relevantne računske metode i eksperimentalne tehnike. Drugi dio rada usmjeren je na eksperimentalna ispitivanja koja su provedena u laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci. Prikupljeni su ključni podaci o masi, krutosti, svojstvenim vrijednostima i koeficijentima prigušenja.

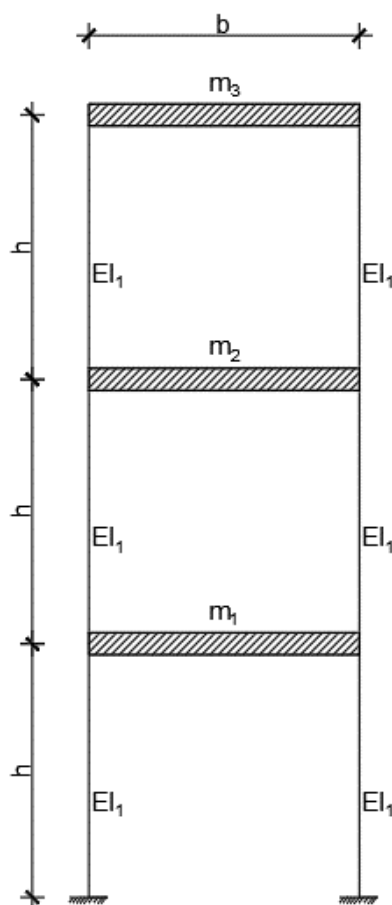
Rad uključuje i numeričko rješavanje jednadžbi kretanja u Pythonu. Korištenjem ovog programskog jezika, primijenjena je Newmarkova numerička metoda za simuliranje potresa. Python omogućava brzu i preciznu analizu podataka te doprinosi sveobuhvatnijem razumijevanju dinamičkog ponašanja troetažnih konstrukcija.

Rezultati ovog rada služe za bolje razumijevanje dinamičkog ponašanja troetažnih konstrukcija.



## 2 OPIS MODELA I ODREĐIVANJE GEOMETRIJSKIH I MATERIJALNIH KARAKTERISTIKA

U diplomskom radu analizira se simetričan troetažni sustav kao što je prikazano na slici 1. (model s tri stupnja slobode). Okvir ima zadane dimenzije širine  $b$ , visine stupova  $h$ , module elastičnosti  $E$  i momente inercije  $I$ . Krutost sustava jednaka je za stupove prve, druge i treće etaže.



Slika 1. Troetažni simetrični sustav

### 2.1.1 Određivanje mase okvira

Konstrukcija se sastoji od šest stupova koji se u modelu zamjenjuju sa šest aluminijskih ploča. Dimenzije aluminijskih ploča su 333 x 108 mm, a njihova masa iznosi 140,6 g. Stupovi su s pločom povezani trima vijcima. Svaki vijak je mase 1,7 g. Takav spoj

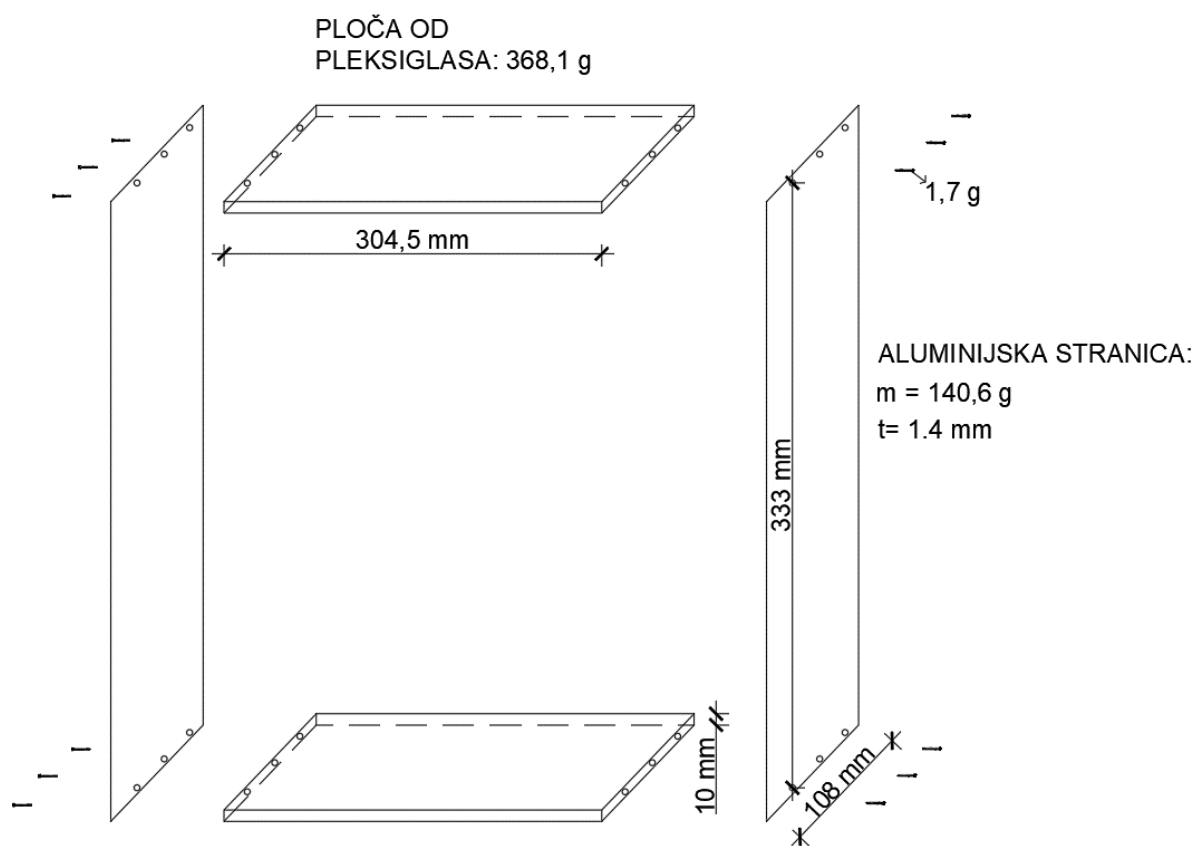
predstavlja krutu vezu ploče i stupa. Ploča je duljine 304,5 mm i ima masu od 368,1 g. Na slici 4. prikazani su elementi troetažne konstrukcije, njihove mase i dimenzije.

Masa prve i druge etaže iznosi 1037,8 g zato što se u obzir uzima masa dviju ploča, dvanaest vijaka te četiri polovice stupova. Masa treće etaže iznosi 518,9 g zato što se u obzir uzima masa jedne ploče, šest vijaka te dviju polovica stupova.

$$m_1 = 2 * 368,1 + 12 * 1,7 + 2 * 140,6 = 1037,8 \text{ g}$$

$$m_2 = m_1 = 2 * 368,1 + 12 * 1,7 + 2 * 140,6 = 1037,8 \text{ g}$$

$$m_3 = 1 * 368,1 + 6 * 1,7 + 140,6 = 518,9 \text{ g}$$



Slika 2. Dimenzije i mase jedne etaže okvira

### **2.1.2 Određivanje krutosti okvira**

U ovom diplomskom radu krutosti su ispitivane dva puta u praktikumu Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Rijeci pomoću okvira (slika 2.) i mjernih uređaja na slici 3.

Mjerenje je provedeno na način da se nanosila sila na okvir [vodilica s lijeve strane (slika 3.)] te očitavala na mjernom uređaju (slika 3. donji desni kut).

Korišteni uređaji su:

- uređaj kojim se nanosi opterećenje,
- mikroura kojom se mjeri pomak,
- jedinica za prikupljanje podataka PA Hilton HDA200.

Opterećenje se nanosilo uređajem koji pretvara silu u električni signal. Koristi se u raznim slučajevima gdje je potrebno precizno mjerenje sile ili opterećenja, za razne testne i istraživačke primjene. U ovom primjeru sila se nanosila ručno.

PA Hilton HDA200 ugrađeni sustav za prikupljanje podataka očitava i prikazuje podatke putem svog integralnog četverolinijskog pozadinski osvijetljenog LCD ekrana. USB-povezano sučelje omogućuje brzo i jednostavno praćenje eksperimenta i može biti montirano na radnoj ploči ili HST1 okviru. [8]

Korištena je i mikroura, Mitutoyo ID-S SERIES ABS DIGIMATIC INDICATOR, za mjerenje pomaka. Ima mjerni raspon od 0 do 0,5" (0 do 12,7 mm), rezoluciju od 0,0005" (0,01 mm) i točnost od +/- 0,0008". Posjeduje LCD ekran s velikim brojevima (9 mm) za lakše čitanje. Mikroura koristi vlastiti ABS (apsolutni) senzor, koji automatski vraća posljednju ishodišnu poziciju kada je indikator uključen. Senzor osigurava da ne nastanu greške zbog prekomjerne brzine, čime se poboljšava pouzdanost. [9]



Slika 3. Mjerenje krutosti



Slika 4. Prva nanescena sila



Slika 5. Zadnja nanesena sila

Na okvir se nanosila sila i mjerio pomak, a na slikama 4. i 5. prikazani su prvi i posljednji naneseni pomaci prilikom laboratorijskog određivanja krutosti.

Kao što se vidi na slici 5. zadnja nanesena sila iznosi 17 N, iz razloga što tada pomak iznosi 12,76 mm, a to je maksimalni pomak koji uređaj može točno očitati.

Na ovaj način krutosti su izmjerene dva puta, a u tablici 1. prikazane su sve nanesene sile 1.ispitivanja [N], očitani pomaci [mm] te dobivene krutosti [N/m] prema formuli:

$$k = \frac{F}{\Delta} \quad (1)$$

gdje su:

$F$  – sila [N],

$\Delta$  – pomak [mm],

$k$  – krutost [N/m].

Tablica 1. Izračun krutosti

$F [N]$	$\Delta [mm]$	$\Delta [m]$	$k[N/m]$
1	0.35	0.00035	2857.142857
2.2	1.21	0.00121	1818.181818
3.2	1.95	0.00195	1641.025641
4.1	2.61	0.00261	1570.881226
5.1	3.39	0.00339	1504.424779
6.1	4.13	0.00413	1476.997579
7.1	4.99	0.00499	1422.845691
8.1	5.73	0.00573	1413.612565
9.2	6.55	0.00655	1404.580153
10.1	7.29	0.00729	1385.459534
11.1	8.08	0.00808	1373.762376
12	8.85	0.00885	1355.932203
13	9.63	0.00963	1349.948079
14.1	10.43	0.01043	1351.869607
15.1	11.28	0.01128	1338.652482
16	11.97	0.01197	1336.675021

$k$ (srednja vrijednost) =	1537.624476
----------------------------	-------------

Isti postupak ponovljen je još jednom, te je dobivena vrijednost izmjerene krutosti :

$k = 1519 \text{ N/m}$ .

### 3 JEDNADŽBE KRETANJA, VLASTITE FREKVENCije I OBLICI OSCILIRANJA

#### 3.1 Izvedba matrica masa i krutosti

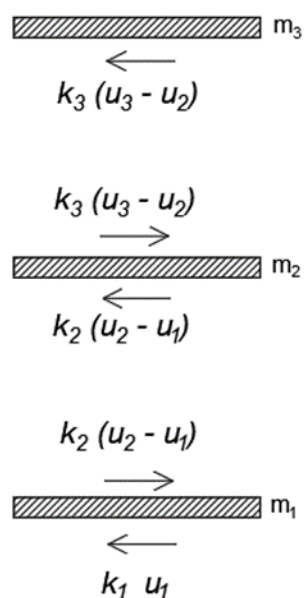
U ovom potpoglavlju bit će objašnjeno dobivanje materijalnih karakteristika konstrukcije, koje služe za dobivanje matrica masa  $m$ , krutosti  $k$  i prigušenja  $c$ .

Pomoću DST [Dijagram slobodnog tijela (slika 6.)] i DMA [Dijagram masa-ubrzanje (slika 7.)] dijagrama troetažnog modela izvest će se matrice masa  $m$  i krutosti  $k$ .

DST dijagram koristi se za prikaz utjecaja sila na elemente građevinske konstrukcije, a u ovom radu primarno potresnih sila. Grafički prikazi koji izoliraju promatrano tijelo od njegove okoline i prikazuju sve vanjske sile koje na njega djeluju, ključni su alati za analiziranje konstrukcija i mehanizama.

DMA dijagram koristi se za prikazivanje odnosa između mase i ubrzanja tijela. Pomaže u razumijevanju kako se konstrukcija ponaša pod dinamičkim opterećenjem i služi za projektiranje seizmički otpornih konstrukcija. [15]

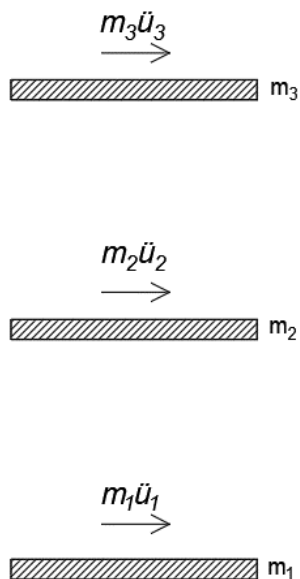
#### DST dijagram



Slika 6. DST dijagram troetažnog modela



## DMA dijagram



Slika 7. DMA dijagram troetažnog modela

Radi toga što se se u ovom diplomskom radu obrađuje troetažna konstrukcija, odnosno sustav s tri stupnja slobode, sustav se sastoji od tri mase  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  povezane etažama krutosti  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$ .

Sustav jednadžbi izveden je iz Newtonovog drugog zakona:

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{u} \quad (2)$$

Primjenom jednadžbe (2) na svaku od tri mase dobije se sustav jednadžbi, odnosno:

$$k_1 \cdot u_1 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = -m_1 \cdot \ddot{u}_1 \quad (3)$$

$$k_2 \cdot (u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) = -m_2 \cdot \ddot{u}_2 \quad (4)$$

$$k_3(u_3 - u_2) = -m_3 \cdot \ddot{u}_3 \quad (5)$$

to jest u matričnom obliku:

$$\mathbf{ku} + \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (6)$$



Pomoću izvedenih jednadžbi matrica krutosti zapisuje se kao:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

matrica masa kao:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},$$

a vektori pomaka i ubrzanja kao:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}.$$

### 3.2 Jednadžbe kretanja

Ranije izvedena jednadžba slobodnog neprigušenog osciliranja u slučaju opterećenja glasi:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F(t), \quad F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

gdje su:

- $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$  – horizontalne sile koje djeluju na mase  $m_1, m_2, m_3$

U stvarno izmjerenim dinamičkim odgovorima konstrukcija, energija se rasipa tijekom vibracija, što se prilikom rješavanja jednadžbi kretanja obično uzima u obzir uvođenjem sile prigušenja  $c\dot{u}$  ovisne o brzini [6]:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \quad (8)$$

gdje su:

- $c$  – matrica prigušenja,
- $\dot{u}$  – vektor brzine.

U ovom radu analizira se problem s tri stupnja slobode, te će biti objašnjeni preostali dijelovi jednadžbe (8):

$c$  je matrica prigušenja, dimenzija 3x3:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

$\dot{\mathbf{u}}(t)$  vektor brzine:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}.$$

Vektor pomaka sastoji se od:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_g(t) + \mathbf{u}_r(t) \quad (9)$$

gdje su:

-  $\mathbf{u}_g(t)$  – pomak baze,

-  $\mathbf{u}_r(t)$  – relativni pomak u odnosu na bazu,

gdje je:

$$\mathbf{u}_g(t) = \begin{Bmatrix} u_g \\ u_g \\ u_g \end{Bmatrix} = u_g(t) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = u_g(t) \mathbf{e} \quad (10)$$

uz  $\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ , slijedi:

$$\mathbf{m}(\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{u}}_r) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{k}\mathbf{u}_r = \mathbf{F}(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{k}\mathbf{u}_r = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g = -\mathbf{m}\mathbf{e}\ddot{u}_g \quad (12)$$

$$\mathbf{F}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{e}\ddot{u}_g \quad (13)$$

gdje su:

$\mathbf{m}$  – matrica masa,

$\mathbf{e}$  – vektor s jedinicama kao komponentama,

$\ddot{u}_g$  – ubrzanje baze prilikom potresne pobude.

Ove jednadžbe međusobno su povezane zbog elemenata koji se nalaze izvan dijagonale u matricama krutosti i prigušenja. Ovi izvan-dijagonalni elementi uvode interakcije između različitih stupnjeva slobode, što komplicira direktno rješavanje jednadžbi. Zbog toga se često koriste numeričke metode integracije, kao što je Newmarkova.

### 3.2.1 Slobodne neprigušene oscilacije

Kada se neko tijelo pomakne iz svoje statičke ravnoteže i potom mu se dopusti da vibrira bez ikakve vanjske dinamičke pobude, ono slobodno oscilira. Sustav u kojem se zanemaruju sile trenja i prigušenja oscilira slobodno i neprigušeno.

Jednadžba kretanja slobodnih neprigušenih oscilacija je:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (14)$$

Oscilacije započinju tako da se masi dodijeli nekakav pomak  $u(0)$  i brzina  $\dot{u}(0)$  u nultom trenutku, odnosno trenutku kada je kretanje započeto.

$$u = u(0) \neq 0 \quad (15)$$

*i/ili*

$$\dot{u} = \dot{u}(0) \neq 0 \quad (16)$$

### 3.2.2 Slobodne prigušene oscilacije

U potpoglavlju 3.2.1. objašnjeno je što su slobodne neprigušene oscilacije. One se dešavaju u idealnim uvjetima bez prigušenja, no iskustvo pokazuje da je nemoguće imati neko tijelo pod tim „idealnim“ uvjetima. Sile trenja ili prigušenja uvijek su prisutne u nekom fizičkom sustavu u kretanju.

Kada na tijelo djeluje i sila otpora, koja je suprotnog smjera od smjera gibanja točke, tada se takve oscilacije nazivaju slobodnim prigušenim oscilacijama.

Jednadžba kretanja slobodnih prigušenih oscilacija je:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (17)$$

### 3.2.3 *Prisilne neprigušene oscilacije*

Jednadžba prisilnih neprigušenih oscilacija je:

$$m\ddot{u} + ku = F(t). \quad (18)$$

U praksi, otporne sile brzo smanjuju slobodne oscilacije do točke gdje one više nemaju utjecaj na ukupno gibanje, stoga prisilne oscilacije imaju primarnu ulogu.

### 3.2.4 *Prisilne prigušene oscilacije*

Smanjivanje amplitude ili gubitak periodičnog kretanja su karakteristike prigušenih oscilacija.

Jednadžba kretanja glasi:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t). \quad (19)$$

## 3.3 Matrice masa i krutosti

### 3.3.1 *Matrica masa m zadana temeljem mjerenja*

$$m = \begin{bmatrix} 1037,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1037,8 & 0 \\ 0 & 0 & 518,9 \end{bmatrix} g$$

### 3.3.2 *Matrica krutosti k zadana temeljem mjerenja*

$$k = \begin{bmatrix} 3074 & -1537 & 0 \\ -1537 & 3074 & -1537 \\ 0 & -1537 & 1537 \end{bmatrix} N/m$$

### 3.3.3 Matrica krutosti $k$ zadana računski

Kodom iz Priloga 9.5 matrica krutosti  $k$  (slika 8.) izračunata je pomoću modula elastičnosti  $E$  za aluminij i momenta inercije  $I$ . Korištena je visina od 31 cm jer je 1 cm stranice zašarafljeno za pleksiglas ploču na vrhu i na dnu.

2785.36	-1392.68	0
-1392.68	2785.36	-1392.68
0	-1392.68	1392.68

Slika 8. Matrica krutosti – izračunata uz pretpostavku  $E = 7 \cdot 10^{10}$  (aluminij)

## 3.4 Svojtvene vrijednosti i svojstveni vektori

### 3.4.1 Problem s jednim stupnjem slobode

Za problem s jednim stupnjem slobode, matrična jednadžba problema, izvedena prije, [jednadžba (6)] može se zapisati kao:

$$\ddot{u} + \omega_n^2 \cdot u = 0, \quad (20)$$

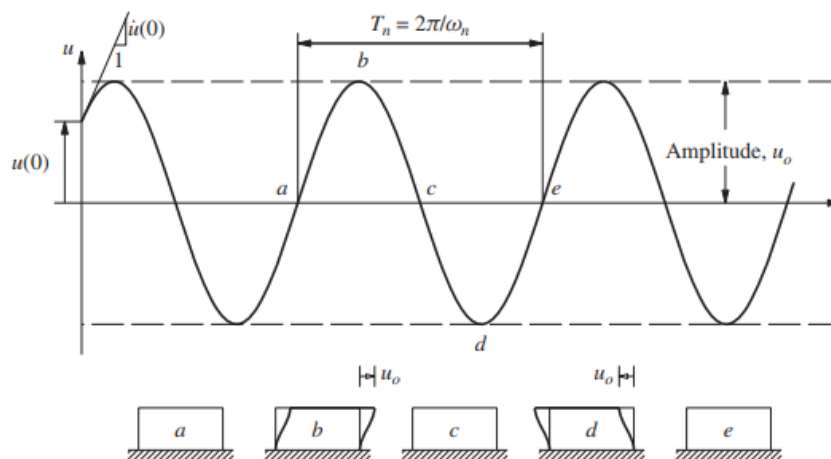
gdje je:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (21)$$

Koeficijent  $\frac{k}{m}$  je kvadrat kružne frekvencije  $\omega_n$ , a kružna frekvencija kao što je vidljivo u jednadžbi (21) ovisi o materijalnim karakteristikama  $k$  i  $m$  oscilacijskog sustava. Ne ovisi o početnim uvjetima gibanja.

Radi toga se  $\omega_n$  naziva prirodna ili vlastita kružna frekvencija slobodnih oscilacija.

Radian je izvedena jedinica za kut i definiran je kao omjer između duljine luka i radijusa (m/m), što ga čini bezdimenzionalnom jedinicom. Zbog toga je mjerna jedinica za kružnu frekvenciju jednostavno recipročna sekunda ( $s^{-1}$ ).



Slika 9. Slobodne vibracije bez prigušenja [1]

Na slici 9. dio krivulje a-b-c-d-e koja prikazuje pomak u funkciji vremena prikazuje jedan ciklus slobodnog osciliranja sistema. Masa se pomiče u desno od svog ravnotežnog ili nedeformiranog položaja na poziciji  $a$ , dosežući svoj maksimalni pozitivni pomak na poziciji  $b$ . U tom trenutku brzina je nula i pomak počinje opadati te se masa zatim vraća natrag prema svojem ravnotežnom položaju u poziciji  $c$ , a u tom trenutku brzina je maksimalna. Masa se nastavlja kretati ulijevo, dosežući svoj minimalni pomak  $-u_0$  na poziciji  $d$ , u kojem trenutku je brzina opet nula i pomak ponovno počinje opadati, a masa se vraća u svoj ravnotežni položaj na poziciji  $e$ . [1]

Vrijeme potrebno neprigušenom sustavu da završi jedan ciklus slobodnih oscilacija je perioda slobodnih neprigušenih oscilacija sustava, koja se označava kao  $T_n$ , mjerena u sekundama.  $T_n$  je povezan s prirodnom kružnom frekvencijom osciliranja.

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad [T_n] = s \quad (22)$$

Period oscilacija  $T_n$  također ne ovisi o početnim uvjetima gibanja.

Recipročna vrijednost periode je frekvencija oscilacija  $f_n$ . Ona označava broj titraja, odnosno broj prijeđenih punih ciklusa čestice u jedinici vremena. [5]

Frekvencija  $f_n$ :

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [f_n] = \text{Hz} \quad (23)$$

Krući od dva sustava jednake mase, imat će veću frekvenciju a kraći period, dok će masivniji a jednake krutosti imati manju frekvenciju a duži period. [1] Zato što je sustav linearan, ove oscilacijske karakteristike neovisne su o početnom pomaku i brzini.

### 3.4.2 Problem s više stupnjeva slobode

Za problem s više stupnjeva slobode, prirodne frekvencije  $\omega_n$  dobivaju se rješavanjem problema vlastitih vrijednosti povezanih s matricnom jednadžbom (14).

Slobodne vibracije neprigušenog sustava mogu se matematički opisati [1]:

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_n \quad (24)$$

Zamjenjujući  $\mathbf{u}(t)$  u jednadžbi (14), dobiva se:

$$(-\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n) q_n(t) = 0. \quad (25)$$

Jednadžba (25) može se riješiti na dva načina. Ili  $q_n(t) = 0$  što implicira da je  $\mathbf{u}(t) = 0$ , odnosno da nema gibanja sustava ili  $\boldsymbol{\phi}_n$  i  $\omega_n^2$  moraju zadovoljiti jednadžbu (26).

Odnosno, za slobodne oscilacije ta jednadžba može zapisati u standardnom obliku vlastitih vrijednosti [1]:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \quad (26)$$

Pojednostavljanjem:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n - \omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n = 0 \quad (27)$$

Odnosno:

$$[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}]\boldsymbol{\phi}_n = 0 \quad (28)$$

Ovdje su  $\omega_n^2$  vlastite vrijednosti, a  $\boldsymbol{\phi}_n$  odgovarajući vlastiti vektori.

Jednadžba (28) ima trivijalno rješenje  $\boldsymbol{\phi}_n = 0$ , koje u ovom slučaju nije korisno jer indicira da kretanja nema. Jednadžba (28) ima netrivialno rješenje ako je [1]:

$$\det [\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}] = 0 \quad (29)$$

Ova jednadžba ima N realnih i pozitivnih korijena za prirodne frekvencije  $\omega_n^2$  zato što su  $\mathbf{m}$  i  $\mathbf{k}$  matrice simetrične i pozitivno određene [1].



Za slučaj u ovom diplomskom radu postoje tri rješenja prirodnih frekvencija  $\omega_n^2$ , radi tri stupnja slobode.

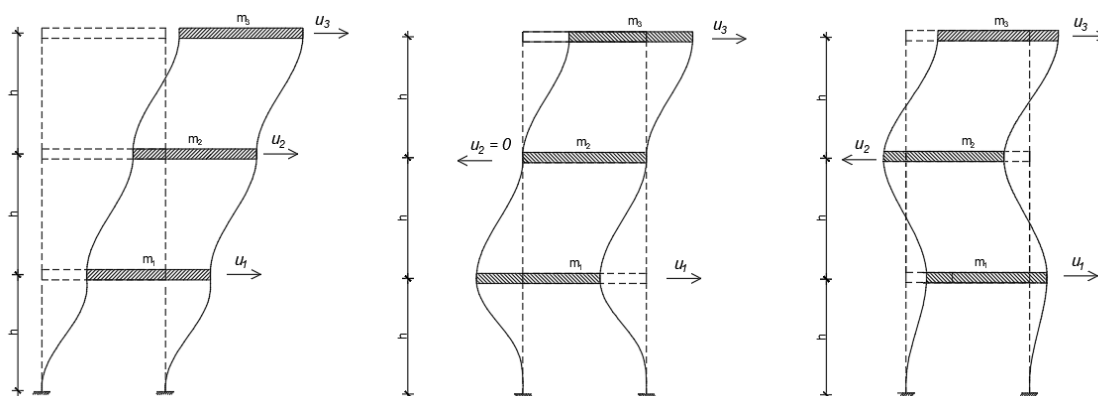
Kada su  $\omega_n^2$  poznate, pomoću jednadžbe (28) proračunavaju se vektori  $\phi_n$ , odnosno oblici osciliranja.

$\omega_n^2$  i  $\phi_n$  se u Prilozima 9.1, 9.2 i 9.3 rješavaju preko funkcije:

„w, v = eigh(k\_matrica, m\_matrica)“

### 3.5 Vlastite frekvencije i oblici osciliranja

U ovom radu koji se bavi analizom troetažne konstrukcije, razmatraju se tri oblika osciliranja (slika 10.).



Slika 10. Oblici osciliranja, redom: 1.ton, 2.ton, 3.ton

Pomaci prilikom sva tri oblika osciliranja izračunati su u Prilozima 9.1, 9.2 i 9.3.

Tablica 2. Pomaci etaža

Pomaci	TON 1	TON 2	TON 3
<b>u1</b>	1.75	-3.5	1.75
<b>u2</b>	3.031089	4.13E-16	-3.03109
<b>u3</b>	3.5	3.5	3.5

Funkcija „eigh“ u programskom jeziku Python služi za računanje svojstvenih vrijednosti i vektora, a te vrijednosti ovise o matrici krutosti  $k$  i matrici masa  $m$ .

Pomoću koda u Prilogu 9.4 dobivaju se prirodne frekvencije  $\omega$  koje iznose:

$$\omega_1 = 19,9208 \frac{rad}{s},$$

$$\omega_2 = 54,4246 \frac{rad}{s},$$

$$\omega_3 = 74.3454 \frac{rad}{s}.$$

Na temelju izračunatih prirodnih frekvencija određuju se odgovarajuće frekvencije titranja:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{19,9208}{2\pi} = 3,170 \text{ Hz},$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{54,4246}{2\pi} = 8,6619 \text{ Hz},$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{74.3454}{2\pi} = 11,8324 \text{ Hz}.$$

Zatim periode:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{19,9208} = 0,3154 \text{ s},$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{54,4246} = 0,11544 \text{ s},$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{74.3454} = 0,0845 \text{ s}.$$

Kao što je već poznato [jednadžba(21)]  $\omega_n$  je prirodna kružna frekvencija sustava. To je prirodna frekvencija kojom bi sustav oscilirao ako je pomaknut iz svoje ravnotežne pozicije i ostavljen da slobodno vibrira, bez vanjskog prigušenja.

### 3.6 Prigušenje

Proces kojim slobodne oscilacije postepeno smanjuju amplitudu naziva se prigušenje. U stvarnim konstrukcijama koje osciliraju prigušenje se ostvaruje na čeličnim spojevima, širenjem i skupljanjem mikropukotina u betonu te trenjem između same konstrukcije i nekonstruktivnih elemenata kao što su pregradni zidovi itd. Nemoguće je identificirati ili točno matematički opisati svaki od ovih utjecaja. Zato se eksperimentalno pokušavaju približno odrediti, a kao rezultat toga prigušenje u stvarnim konstrukcijama obično je prikazano na idealiziran način.

Koeficijent prigušenja iznosi [5]:

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}}, \quad (30)$$

a kritično prigušenje [5]:

$$c_{kr} = 2m\omega. \quad (31)$$

#### 3.6.1 Rayleighovo prigušenje

Rayleighovo prigušenje linearna je kombinacija prigušenja proporcionalnog masi i prigušenja proporcionalnog krutosti. Matrica prigušenja  $\mathbf{c}$  u tom slučaju formirana je na način [1]:

$$\mathbf{c} = \alpha_0 \mathbf{m} + \beta_0 \mathbf{k} \quad (32)$$

gdje su:

$\mathbf{m}$  – matrica masa,

$\mathbf{k}$  – matrica krutosti,

$\alpha_0$  i  $\beta_0$  – konstante.

Konstante se izražavaju preko [1]:

$$\alpha_0 = 2\zeta \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right), \quad (33)$$

$$\beta_0 = 2\zeta \left( \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \right). \quad (34)$$

Gdje su  $\omega_1$  i  $\omega_2$  prva i druga kružna vlastita frekvencija.

### 3.6.2 Određivanje prigušenja

U ovom radu prigušenja su dobivena temeljem analize dijagrama dobivenih iz eksperimentalnih ispitivanja.

Prirodni logaritam odnosa između dviju uzastopnih amplituda prilikom slobodnih prigušenih oscilacija zove se logaritamski dekrement [1]:

$$\delta = \ln \left( \frac{u_i}{u_{i+1}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (35)$$

gdje su:

$u_i, u_{i+1}$  - uzastopne amplitude signala.

Prigušenje je izračunato preko pomaka korištenjem izraza [1]:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} * \ln \left( \frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (36)$$

gdje su:

$u_i, u_{i+j}$  – amplitude izmjerenih signala,

$j$  – broj ciklusa.

U sklopu ovog istraživanja, razmatrane su susjedne amplitude, što znači da je član  $j$  u jednadžbi (36) jednak 1. Kao posljedica toga, jednadžba (36) pojednostavljuje se na sljedeći način:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi \cdot 1} * \ln \left( \frac{u_i}{u_{i+1}} \right) \quad (37)$$

## 4 NUMERIČKO RJEŠAVANJE JEDNADŽBI KRETANJA

### 4.1 Newmarkova metoda integracije

1959. godine Newmark je predstavio integracijsku metodu za rješavanje strukturalnih dinamičkih problema za udarno i seizmičko opterećenje. Temelji se na sljedećim pretpostavkama o pomacima i brzinama na kraju vremenskog koraka  $\Delta t$  u ovisnosti o pomacima, brzinama i ubrzanjima na početku te kraju koraka [1]:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1 - \delta)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t, \quad (38)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{u}_t + \alpha\ddot{u}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2, \quad (39)$$

zatim iz (39) slijedi :

$$\alpha\ddot{u}_{t+\Delta t}\Delta t^2 = u_{t+\Delta t} - u_t - \dot{u}_t\Delta t - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{u}_t\Delta t^2, \quad (40)$$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t} - u_t - \dot{u}_t\Delta t}{\alpha\Delta t^2} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_t, \quad (41)$$

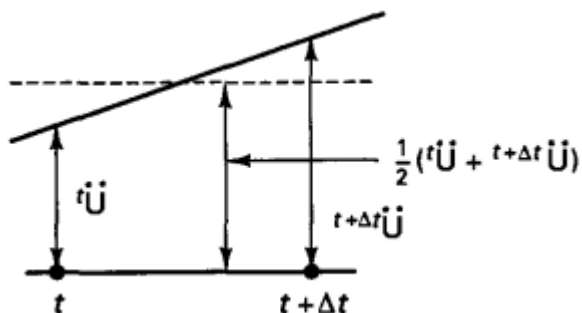
iz (41) u (38):

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \left[(1 - \delta)\ddot{u}_t + \delta\left(\frac{u_{t+\Delta t} - u_t - \dot{u}_t\Delta t}{\alpha\Delta t^2} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_t\right)\right]\Delta t, \quad (42)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + (1 - \delta)\ddot{u}_t\Delta t + \delta\frac{u_{t+\Delta t} - u_t - \dot{u}_t\Delta t}{\alpha\Delta t} - \delta\left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_t\Delta t, \quad (43)$$

u kojima su parametri  $\alpha$  i  $\delta$  odabrani kako bi se postigla točnost i stabilnost integracije. Newmark je izvorno predložio kao bezuvjetno stabilnu shemu, metodu konstantnog prosječnog ubrzanja također poznatu kao trapezno pravilo (slika 11.), kada je [6]:

$$\delta = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{1}{4} \quad (44)$$



Slika 11. Newmarkova metoda konstantnog prosječnog ubrzanja [6]

Uz jednadžbe (38) i (39) za dobivanje pomaka, brzina i ubrzanja u vremenu  $t + \Delta t$  (nakon što su poznati brzina i ubrzanje u vremenu  $t$ ) jednadžba (19) postaje:

$$m\ddot{u}_{t+\Delta t} + c\dot{u}_{t+\Delta t} + ku_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}. \quad (45)$$

Zatim se uz (41) i (43) dobije:

$$\hat{k}u_{t+\Delta t} = \hat{F}_{t+\Delta t} \quad (46)$$

gdje su:

- $\hat{k}$  – efektivna matrica krutosti,
- $\hat{F}_{t+\Delta t}$  – efektivni vektor opterećenja.

Odavde slijedi:

$$u_{t+\Delta t} = \hat{k}^{-1}\hat{F}_{t+\Delta t} \quad (47)$$

Postupak dobivanja rješenja Newmarkovom numeričkom integracijom za sustav s više stupnjeva slobode, korak po korak izgleda [6]:

1. Najprije se formiraju matrice krutosti  $k$ , mase  $m$  i prigušenja  $c$ ,
2. Postave se početni uvjeti za  $u_0$  i  $\dot{u}_0$ , a to su vektorske veličine:

$$u_0 = \begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{Bmatrix}, \quad \dot{u}_0 = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{01} \\ \dot{u}_{02} \\ \dot{u}_{03} \end{Bmatrix}. \quad (48)$$

3. Početna ubrzanja  $\ddot{\mathbf{u}}_0$  izračunaju se iz početnih pomaka, brzina i jednadžbe (45)

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{k}\mathbf{u}_0) \quad (49)$$

gdje je:

$\mathbf{F}_0$  – početna vanjska sila.

3. Odabere se veličina vremenskog koraka  $\Delta t$ , parametri  $\delta$  i  $\alpha$  te izračunaju integracijske konstante:

$$b_1 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \quad b_2 = -\frac{1}{\alpha\Delta t} \quad b_3 = 1 - \frac{1}{2\alpha} \quad b_4 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t} \quad b_5 = 1 - \frac{\delta}{\alpha}$$

$$b_6 = (1 - \frac{\delta}{2\alpha}) \Delta t, \quad (50)$$

Formira se efektivna matrica krutosti:

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + b_1\mathbf{m} + b_4\mathbf{c}, \quad (51)$$

te izvodi njezin inverz:

$$\hat{\mathbf{k}}^{-1}. \quad (52)$$

Nakon toga se za svaki vremenski korak:

1. Izračuna efektivno opterećenje u vremenu  $t + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{m}(b_1\mathbf{u}_t - b_2\dot{\mathbf{u}}_t - b_3\ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{c}(b_4\mathbf{u}_t - b_5\dot{\mathbf{u}}_t - b_6\ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (53)$$

2. Izračunaju se pomaci u vremenu  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{k}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} \quad (54)$$



3. Izračunaju se brzine i ubrzanja:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = b_4(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) + b_5 \dot{\mathbf{u}}_t + b_6 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (55)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = b_1(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) + b_2 \dot{\mathbf{u}}_t + b_3 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (56)$$

Tim istim postupkom proračunava se dalje za sve vremenske korake, vraćajući se u petlju.

Smanjivanjem vremenskog koraka približavamo se točnom rješenju.

#### 4.2 Ubrzanja dobivena pomakom baze

Kada se govori o kretanju objekta pod utjecajem sile, pomak  $u$ , brzina  $\dot{u}$  i ubrzanje  $\ddot{u}$  matematički su povezani. Ubrzanje predstavlja drugu derivaciju pomaka u vremenu, slijedi [1]:

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} \quad (57)$$

Brzina je prva derivacija pomaka u vremenu [1] :

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad (58)$$

U ovom radu, za numerički proračun koristi se dvostruka derivacija pomaka baze. Prvom derivacijom dobiju se brzine u svakom  $t$  (vremenskom koraku):

$$\dot{u} = \frac{u_t - u_{t-1}}{\Delta t} \quad (59)$$

Zatim, drugom derivacijom izračunavaju se ubrzanja u svakom  $t$  (vremenskom koraku):

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}_t - \dot{u}_{t-1}}{\Delta t} \quad (60)$$

Što znači, dvostrukim deriviranjem svih pomaka dobije se vektor ubrzanja podloge. On se u Python kodu koristi kao vektor ubrzanja u jednadžbi (13).

### 4.3 Algoritam u Pythonu

Jednadžbe kretanja za slobodne [jednadžba (17)] i prisilne [jednadžba (19)] prigušene oscilacije riješene su metodama u potpoglavljima 4.1 i 4.2. Svi kodovi nalaze se u Prilozima na kraju rada, dok se rezultati nalaze u sljedećim poglavljima.

Ukratko:

Numerički rezultati u programskom jeziku Python dobiveni su na način da, nakon što su podaci obrađeni u sustavu GOM, deriviranjem pomaka baze dobivene su brzine, a deriviranjem brzina dobivena su ubrzanja, koja predstavljaju vektor ubrzanja podloge (postupak - potpoglavlje 4.2) Ubrzanja su učitana kao *.txt* dokument u kod u Pythonu za dobivanje funkcije opterećenja okvira (Prilog 9.7). Numeričkim rješavanjem pokušava se predvidjeti ponašanje konstrukcije, odnosno preostalih masa, radi toga što su uneseni samo podaci o ubrzanju baza. Numerički rezultati prikazuju relativne pomake mase u odnosu na bazu.

Eksperimentalni podaci prikazani pomoću programskog jezika Python dobiveni su na način da su također učitani podaci koji su obrađeni u sustavu GOM, no u kod se izravno unose očitani podaci o pomacima svake pojedine mase (Prilog 9.8). Eksperimentalni rezultati prikazuju apsolutne pomake.

Dijagrami usporedbi eksperimentalnih i numeričkih rezultata dobiveni su kombinacijom prethodno korištenih kodova. Za apsolutne pomake korišten je kod u Prilogu 9.9 a za relativne u Prilogu 9.10. Za apsolutne pomake masa u kod su dodani pomaci baza u numeričkim rezultatima tako da se govori o jednakim vrijednostima. Usporedba relativnih pomaka je relevantnija jer se njima uspoređuju samo pomaci masa, dok kod apsolutnih pomaka, znatan dio rezultata odnosi se na sam pomak baze.

Navedeni Python kodovi u prilogima jednaki su za sva ispitivanja, mijenjani su samo ulazni Excel dokumenti s ubrzanjima (za numeričke rezultate) te pomacima (za eksperimentalne) svakog pojedinog ispitivanja i vrijeme trajanja simulacije ovisno o svakom potresnom zapisu.

## 5 LABORATORIJSKA OPREMA

Ispitivanja koja su se provodila u laboratoriju Građevinskog fakulteta u Rijeci, izvodila su se na „Quanser ST-III“ (slika 12., tablica 3.) potresnoj platformi. Sustav od dvije potresne platforme „Quanser ST-III“ pokretan je elektromotorom. On je simulator kretanja velikog opterećenja, koji je idealan za naprednije dinamičke analize. Posjeduje veliku snagu, te je pogodan za pokretanje teških tereta pri velikim brzinama i ubrzanjima. „Quanser ST-III“ potresni stol može se programirati kroz vlastiti „Shake Table Software“ ili QUARC software za Simulink. Sastoji se od kontrolne hardware ploče i software-a, te podložne ploče za dvoosne platforme. [7]



Slika 12. Potresna platforma „Quanser ST-III“ na Građevinskom fakultetu u Rijeci

Tablica 3. Dimenzije i karakteristike potresne platforme „Quanser ST-III“ [7]

	Vrijednost	Mjerna jedinica
Tlocrtna dimenzije	625x625	[mm]
Hod platforme	15	[cm]
Raspon radnih frekvencija	0-20	[Hz]
Ubrzanje u dva smjera (maksimalan teret 130 kg)	1	[g]
Ubrzanje u x smjeru (bez tereta)	2,8	[g]
Ubrzanje u y smjeru (bez tereta)	4,5	[g]
Oсна udaljenost platformi	1-2,5	[m]

Za potrebe eksperimentalne analize korišteni je optički mjerni sustav GOM Aramis 4M za mjerenje te softver Correlate za obradu podataka. Aramis je sustav stereo kamera koji mjeri 3D koordinate na temelju stohastičkog uzorka na površini modela ili pomoću mjernih oznaka, tzv. markera. Model je potrebno pripremiti nanošenjem stohastičkog uzorka ili markera.

Zatim se na temelju kalibracije glave 3D senzora može napraviti triangulacija za izvođenje 3D koordinata s površine modela na temelju uzorka ili s pojedinačnih točaka. Koordinate koje se dobiju kao rezultati koriste se za izračun 3D pomaka, deformacija i brzina. Sve se vrijednosti mogu prikazati i obrađivati u Excel-u. Za potrebe ovog ispitivanja korišteni su markeri na krutim pločama konstrukcije čiji su se pomaci mjerili u vremenu. Sustav je postavljen s frekvencijom okidanja 100 fotografija u sekundi. Nakon ispitivanja slijedi obrada podataka u softveru GOM Correlate. GOM Correlate je softver koji se koristi za obradu podataka, odnosno za korelaciju digitalne slike te evaluaciju ispitivanja materijala i komponenti. Softver može izračunati promjene položaja markera na površini objekta, dopuštajući široku primjenu kod analize materijala. [17]

Podaci koji su dobiveni u ovim mjerenjima su pomaci u vremenu baze konstrukcije te triju etaža. Dobiveni pomaci služe za daljnju obradu u Excel-u a mjereni pomaci baze/potresnog stola služe kao funkcija opterećenja za daljnji proračun numeričkim rješavanjem u Pythonu.

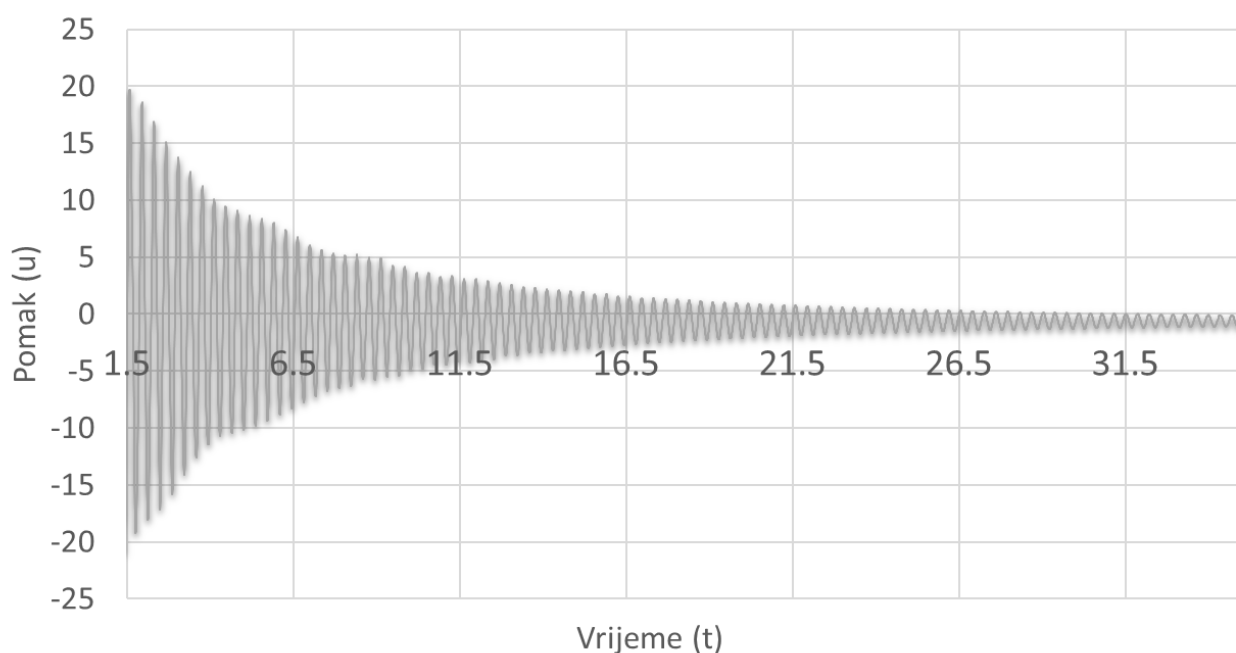
## 6 EKSPERIMENTALNI I NUMERIČKI REZULTATI

### 6.1 Slobodne prigušene oscilacije – nanošenjem pomaka samo na 3.etažu

Ispitivanje je provedeno na način da je nanesen pomak posljednje etaže rukom, ali ne u točnim omjerima za 1. ili 2.ton kao u potpoglavljima 6.2 i 6.3., nego statički pomak koji je sličan ali ne u potpunosti jednak 1.tonu osciliranja.

#### 6.1.1 Određivanje prigušenja

Pobuda je zadana ručnim nanošenjem pomaka na treću etažu modela (slika 1.) Dijagrami slobodnih prigušenih oscilacija (slike 13., 14. i 15.) dobiveni su očitavanjem i obradom podataka u software-skom programu GOM Aramis. Pomaci ( $u$ ) izraženi su u milimetrima, a vrijeme ( $t$ ) u sekundama.

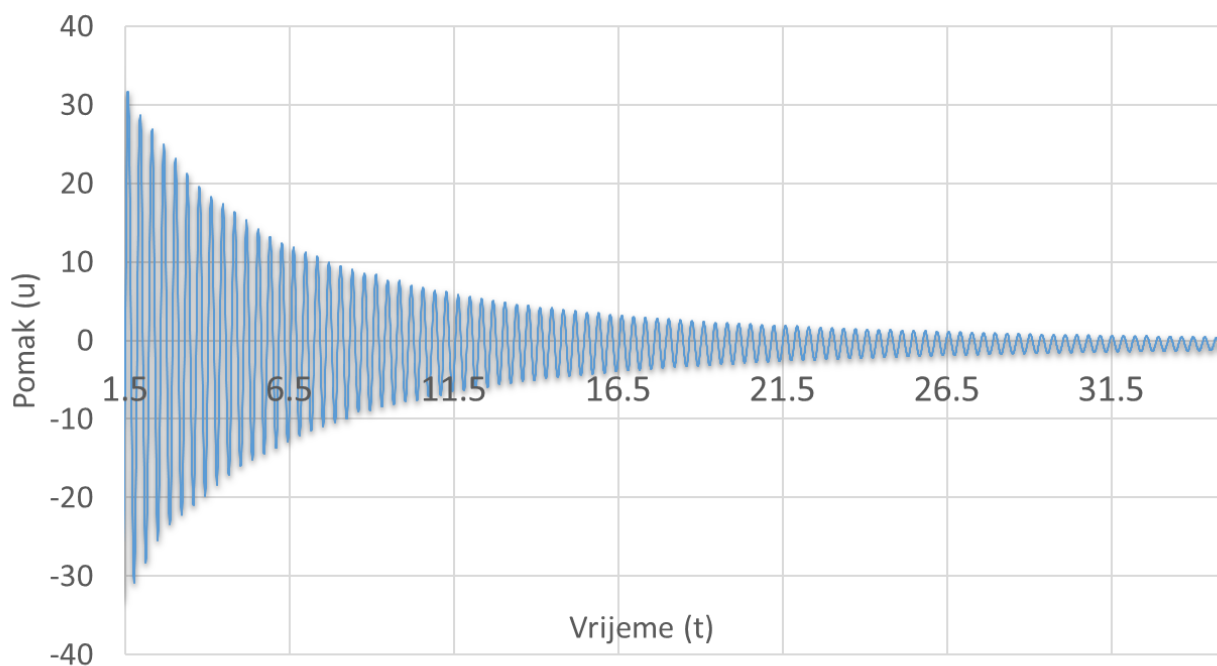


Slika 13. Slobodne prigušene oscilacije - etaža 1

Izračunato na temelju pomaka sa slike 13. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 1.

Prigušenje etaže 1. iznosi:

$$\zeta_1 = 0.007254325$$

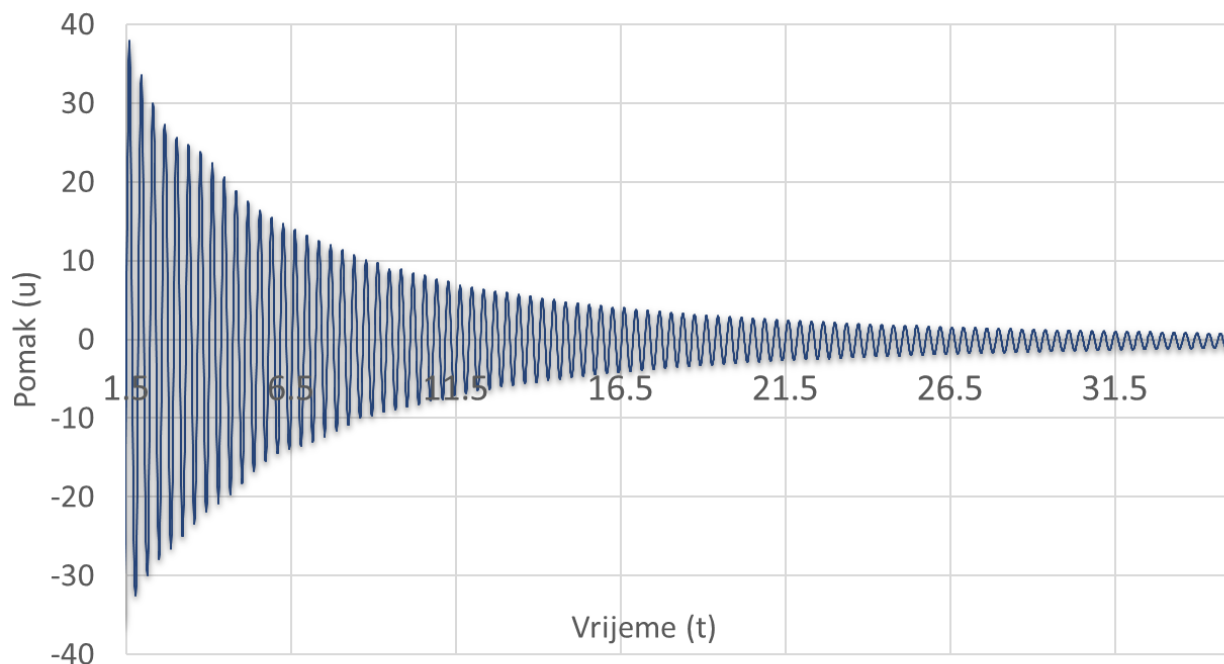


Slika 14.. Slobodne prigušene oscilacije - etaža 2

Izračunato na temelju pomaka sa slike 14. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 2.

Prigušenje etaže 2. iznosi:

$$\zeta_2 = 0.00760373$$



Slika 15. Slobodne prigušene oscilacije - etaža 3

Izračunato na temelju pomaka sa slike 15. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže .

Prigušenje etaže 3. iznosi:

$$\zeta_3 = 0.007827586$$

Srednja vrijednost sva tri prigušenja iznosi:

$$\zeta = 0.00756188$$

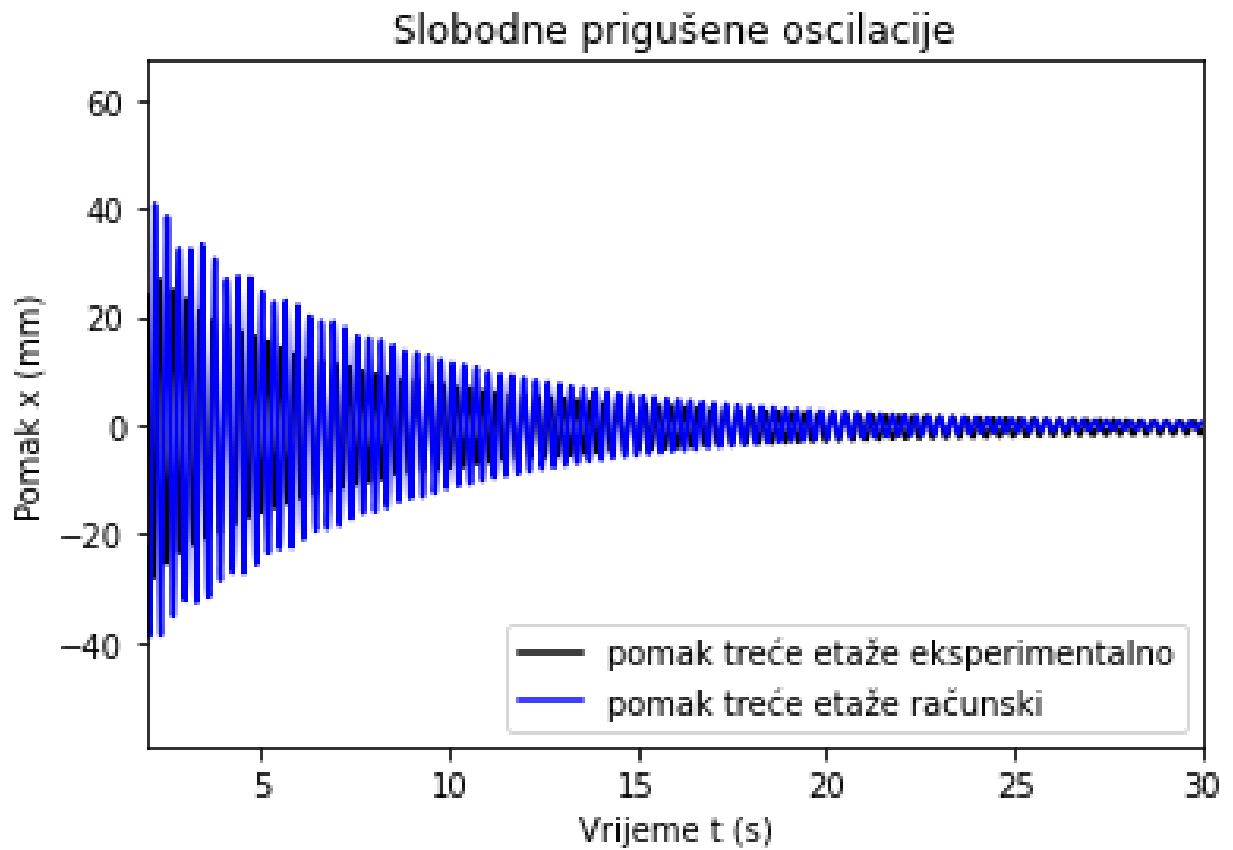
### 6.1.2 Usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata

U Prilogu 9.6 nalazi se kod u Pythonu za numeričku simulaciju istog problema i usporedbu rezultata. Kod je napravljen kako bi se na jednom dijagramu mogle vidjeti razlike između numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Numeričko rješenje dobiva se unošenjem srednje vrijednosti prigušenja  $\zeta$  iz prethodnog poglavlja, 6.1.1. i zadanih početnih uvjeta koji su iščitani sa eksperimentalno dobivenog dijagrama:

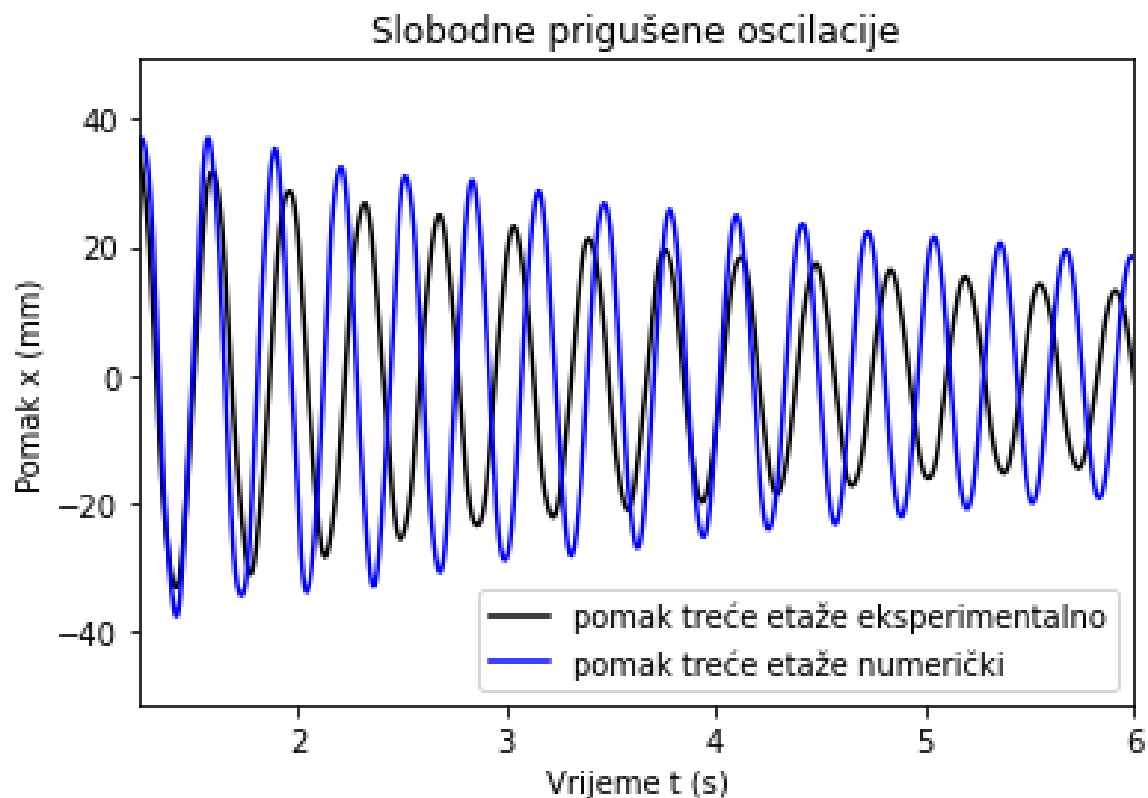


„ $x[:, 0] = [22.16, 43.19, 61.82]$ “ #početni pomaci.

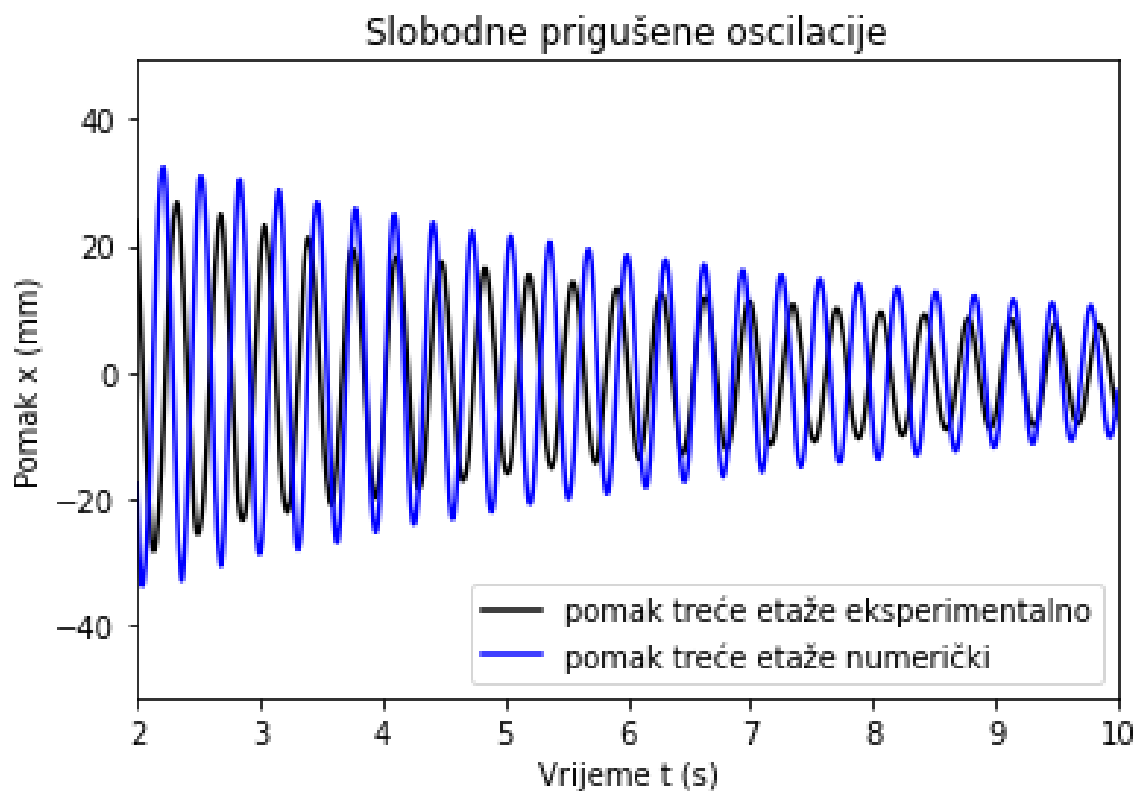
Uz jednadžbe za Newmarkovu integraciju (poglavlje 4.) kod dalje proračunava pomake, brzine i ubrzanja u petlji.



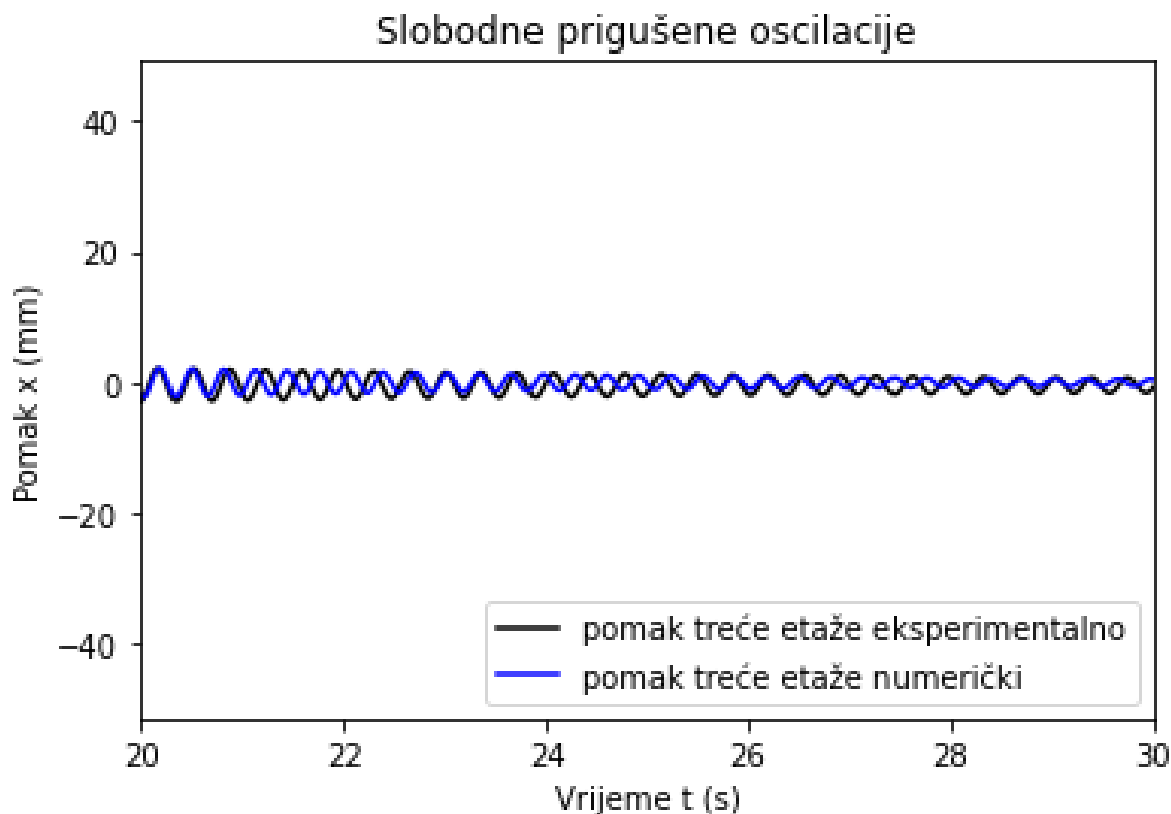
Slika 16. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija



Slika 17. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - početak osciliranja



Slika 18. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 2. do 10. s



Slika 19. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 20. do 30.

Na slici 17. primijeti se da su početni uvjeti jednaki, no odmah nakon početnih pomaka numerički i eksperimentalni rezultati se razlikuju. Zatim kako se osciliranje nastavlja do 10 sekunde (slika 18.) amplitude pomaka još se više razlikuju. Amplitude rezultata dobivenih numerički priguše se sporije nego amplitude eksperimentalnih rezultata. Također je velika razlika i u periodama, što navodi na pretpostavku da je krutost precijenjena. Naime, eksperimentalno mjerenje krutosti izvedeno je na pojedinačnom okviru koji je na četiri ruba konstrukcije povezan s ukupno 12 vijaka. Međutim, naša stvarna konstrukcija je troetažna, što znači da postoji tri puta veći broj spojeva. Svaki od spojeva potencijalno umanjuje krutost zbog mogućnosti mikropomaka i deformacija koje nisu uzete u obzir u prvotnom izračunu. Dodatna povezanost etaža unosi nove varijable koje su također mogle biti zanemarene, a koje smanjuju krutost konstrukcije u odnosu na onu izračunatu.

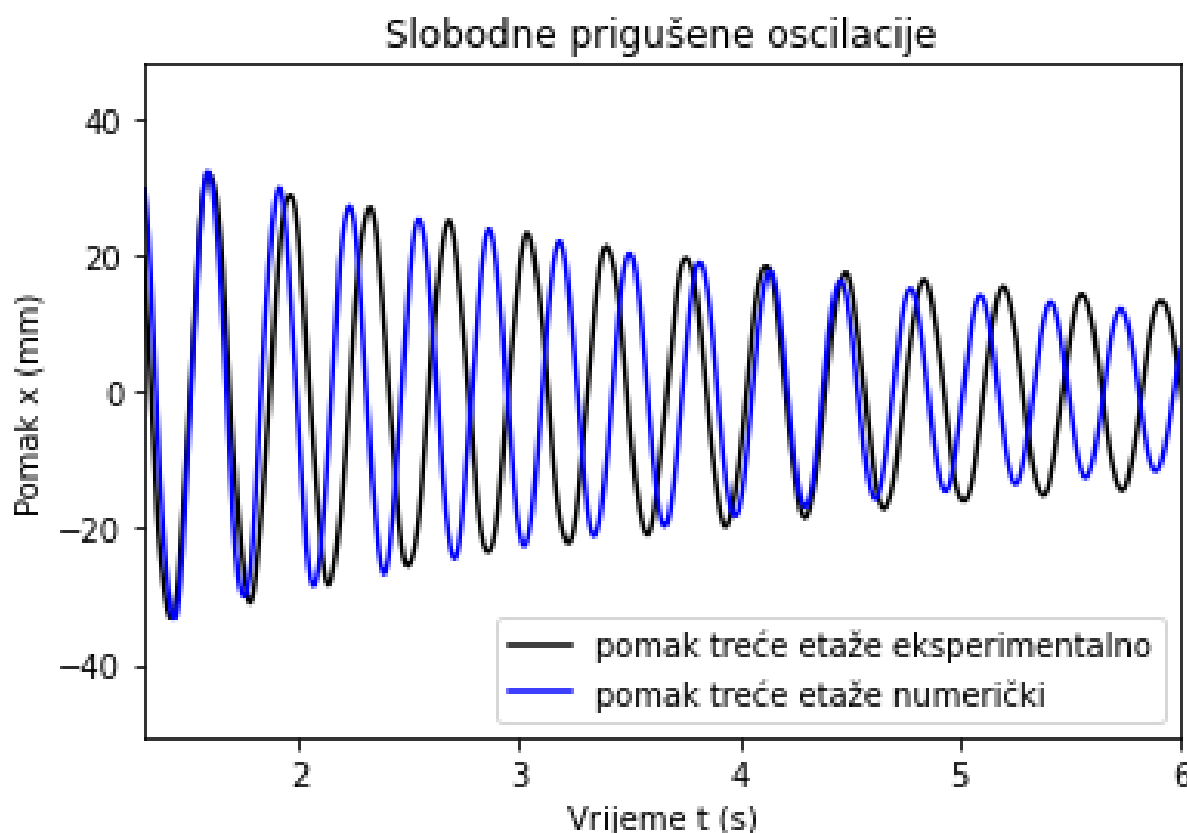
Na slici 19. od otprilike 23. do 24. sekunde te od 25.5 do 26.5, vidljive su vrlo slične veličine amplitude. U ostalom vremenskom intervalu to nije slučaj, no bitno je naglasiti da je iz toga vidljivo da do smirivanja konstrukcije dolazi u približno istom trenutku.

Konstrukcija se nije u potpunosti smirila, ali je trend opadanja sličan u oba prikaza (eksperimentalno i numerički).

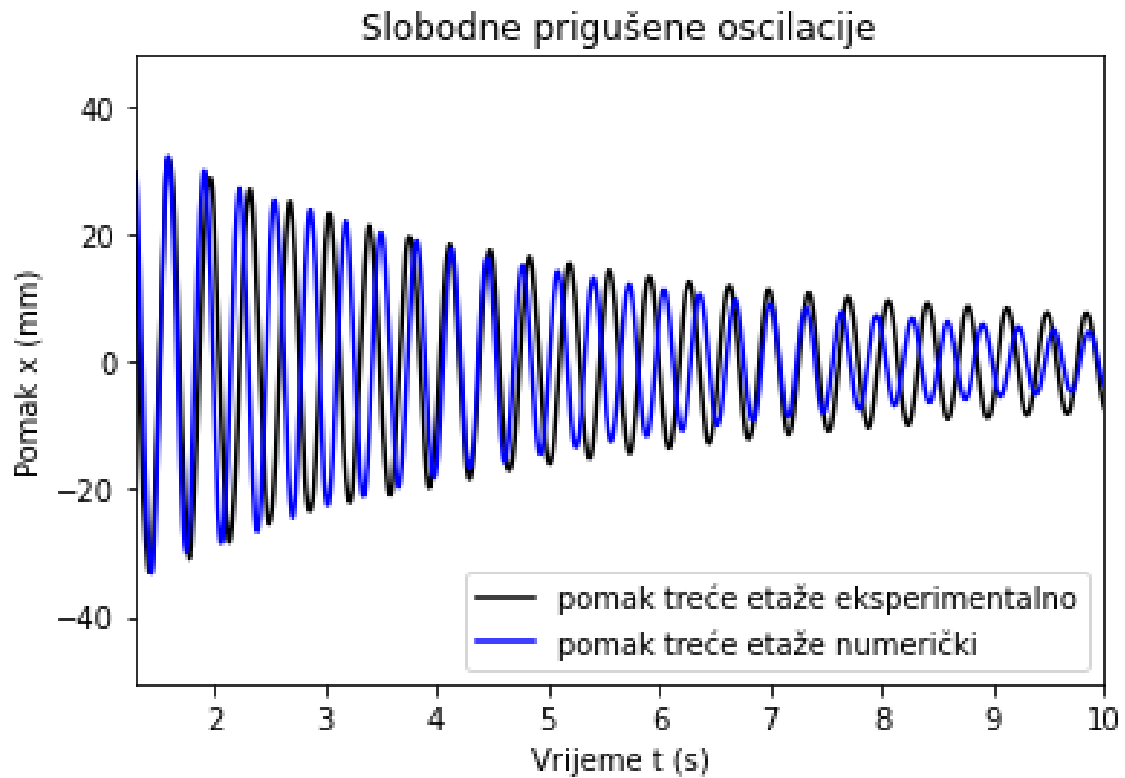
Moguće je da do razlika u amplitudama dolazi i radi toga jer proračun u Pythonu za numeričke rezultate primjenjuje jednako prigušenje u svakom vremenskom koraku, dok se ono u dijagramu dobivenom eksperimentalno ipak razlikuje. Sljedeća pretpostavka je da je korištena vrijednost srednjeg prigušenja konstrukcije zapravo neadekvatna, te da je stvarno prigušenje veće.

Kako bi provjerili pretpostavke za krutost, te prigušenje, u sljedećem koraku korištena je krutost dobivena drugim ispitivanjem koja iznosi  $k = 1519 \text{ N/m}$ . Također korišteno je i novo prigušenje koje je dobiveno postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, ali samo u vremenu do 7 sekunde, gdje je prigušenje veće nego u ostatku ispitivanja. Prigušenje je izračunato za sve tri etaže, te je uzeta srednja vrijednost koja iznosi:

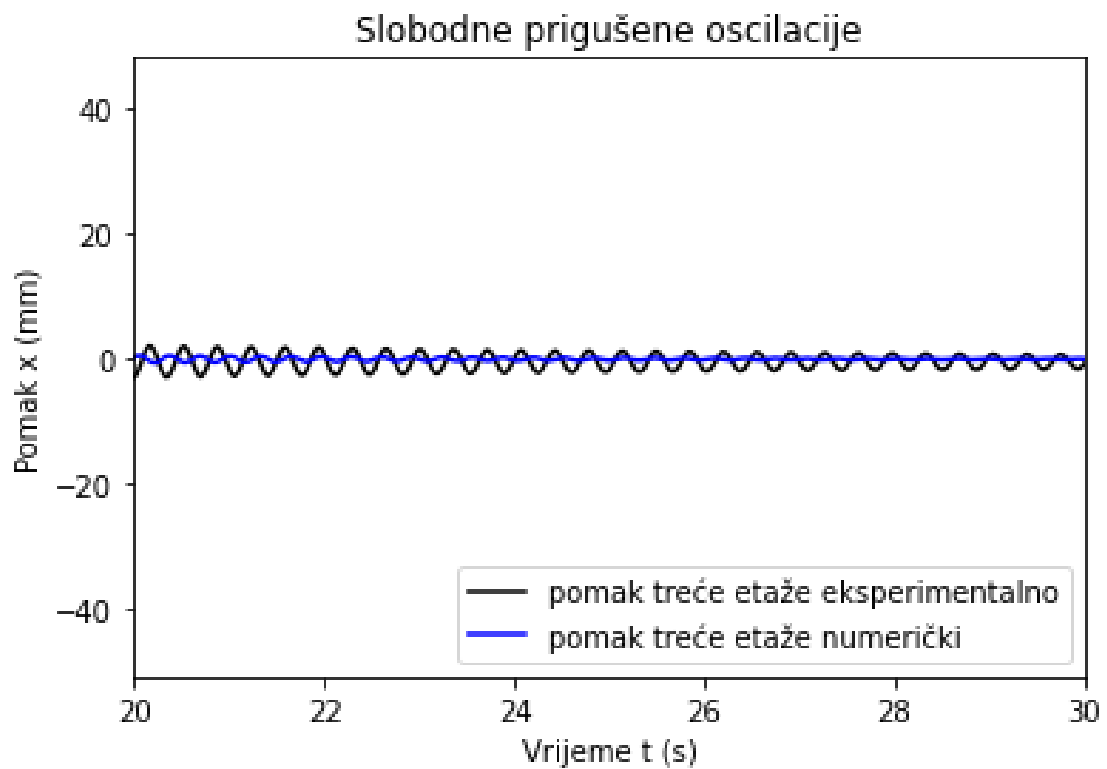
$$\zeta = 0.011777$$



Slika 20. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - početak osciliranja



Slika 21. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 2. do 10. s



Slika 22. Usporedba slobodnih prigušenih oscilacija - od 20. do 30.

Na slikama 20. i 21. vidljivo je da su pretpostavke o precijenjenoj krutosti i premalenom prigušenju bile istinite. Iako rezultati i dalje nisu identični, eksperimentalni i numerički rezultati, odnosno njihove amplitude i periode su približnije.

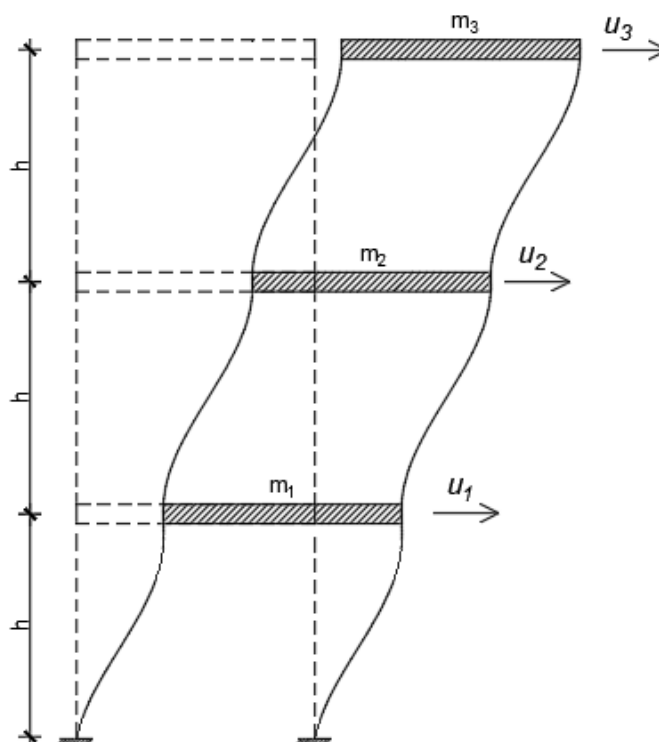
Međutim, na slici 22. zapaža se veća razlika. Numerički rezultati pokazuju ranije smirivanje konstrukcije, kao posljedicu većeg prigušenja.

Iz ovih usporedbi može se zaključiti da se numerički ne može točno odrediti ponašanje konstrukcije, zato jer se njezino stvarno prigušenje ne događa u potpunosti jednako u svim vremenskim intervalima, niti jednako kontinuirano kroz cijelo njezino osciliranje.

## **6.2 Slobodne prigušene oscilacije u 1. tonu**

U ovom eksperimentu cilj je bio eksperimentalno pobuditi slobodne prigušene oscilacije prvog tona, koristeći precizno definirane i primijenjene pomake.

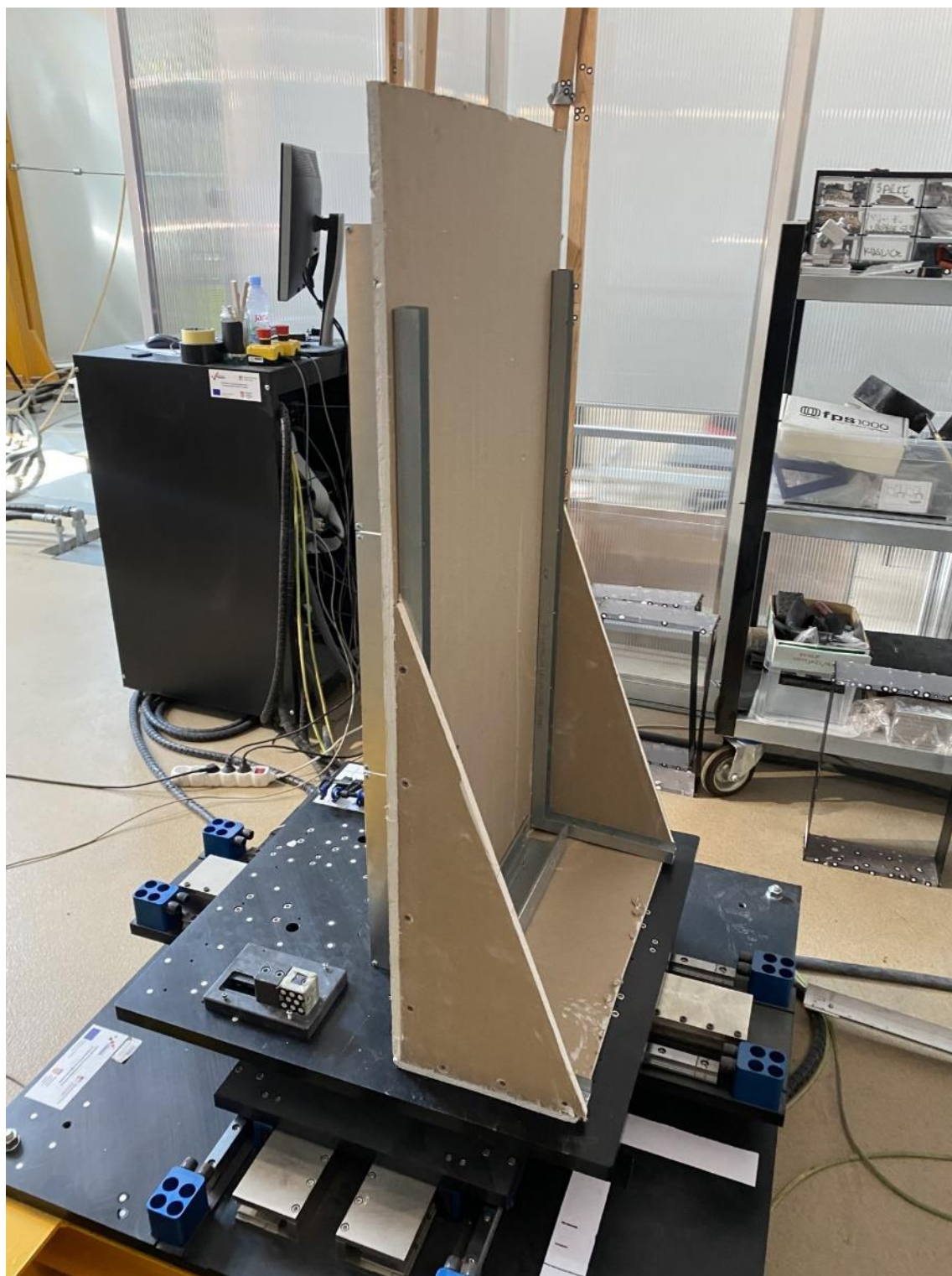
Prvi korak za početak eksperimenta bio je odrediti početne pomake svake etaže za pobuđivanje 1.tona. Pomaci su izračunati u programskom jeziku Python (Prilog 9.1, slika 23. i tablica 2.)



Slika 23. Pomaci troetažnog modela u 1.tonu

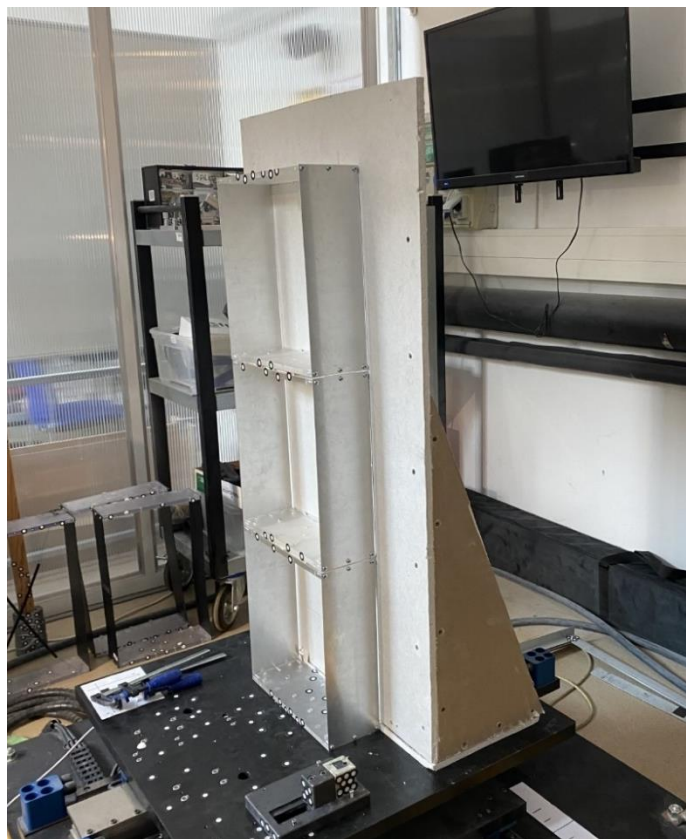
Zatim je osmišljen način kako na točnim udaljenostima postaviti etaže modela troetažne konstrukcije, te ih u jednako vrijeme otpustiti (slika 27.).

Izrađen je model od gipskartonskih ploča (slike 24., 25. i 26.), visine 110 cm, te širine 60 cm, kako bi se na njega mogli ucrtati pomaci i prema tome deformirati troetažni okvir. Model samostalno stoji na fiksiranom potresnom stolu pod pravim kutom te je na njega naslonjen model troetažne konstrukcije.



Slika 24. Izvedena samostojeća gipskartonska konstrukcija





Slika 25. Gipskartonska konstrukcija i troetažni model



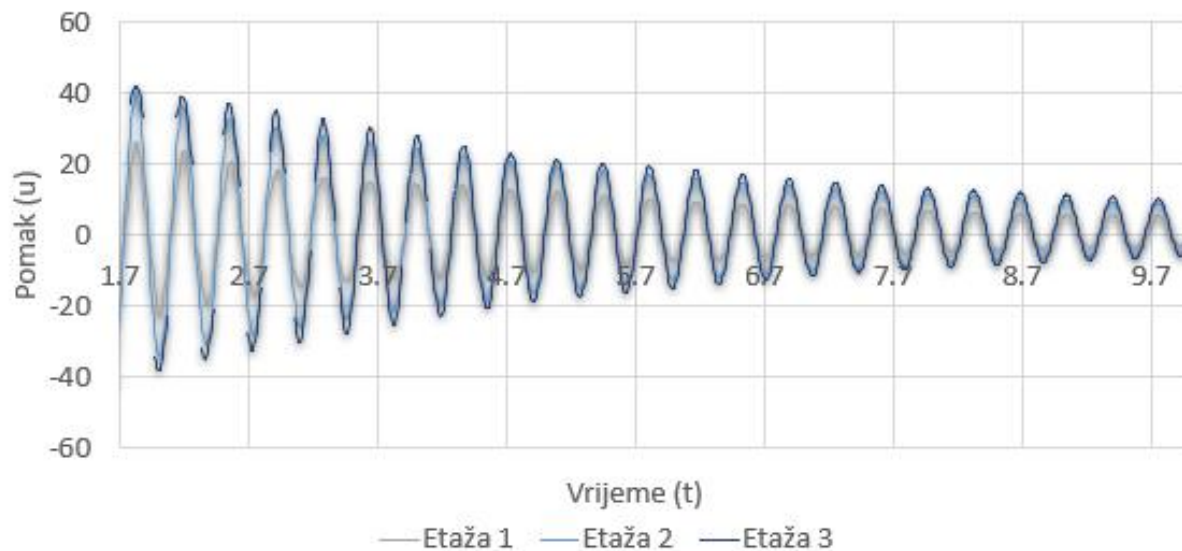
Slika 26. Uctavani pomaci na gipskartonskoj konstrukciji

Pomaci za prvi ton dobiveni su povlačenjem, odnosno deformiranjem troetažne konstrukcije na točno označene pozicije (slika 27.). Sile su nanosene istovremeno u jednakim smjerovima za svaku etažu zasebno.



Slika 27. Istovremeno otpuštanje konstrukcije u 1. tonu

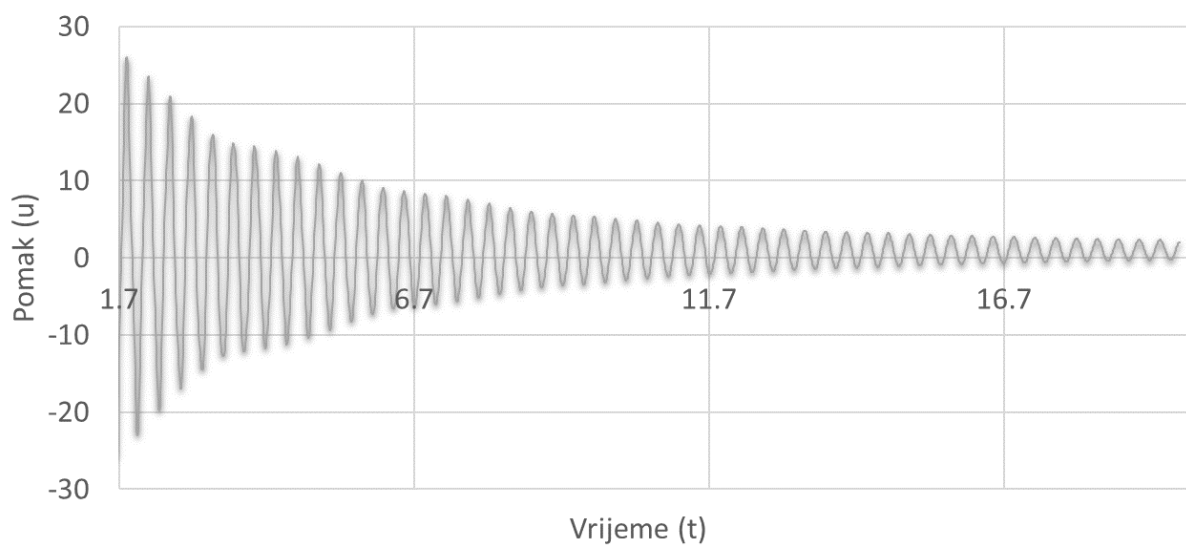
Eksperiment je uspješno proveden, cijela konstrukcija oscilira zajedno (slika 28.), a to dokazuje da konstrukcija oscilira u prvom tonu.



Slika 28. Osciliranje konstrukcije u prvom tonu

### 6.2.1 Određivanje prigušenja

Kao i u potpoglavlju 6.1.1. izračunata su srednja prigušenja za svaku etažu.

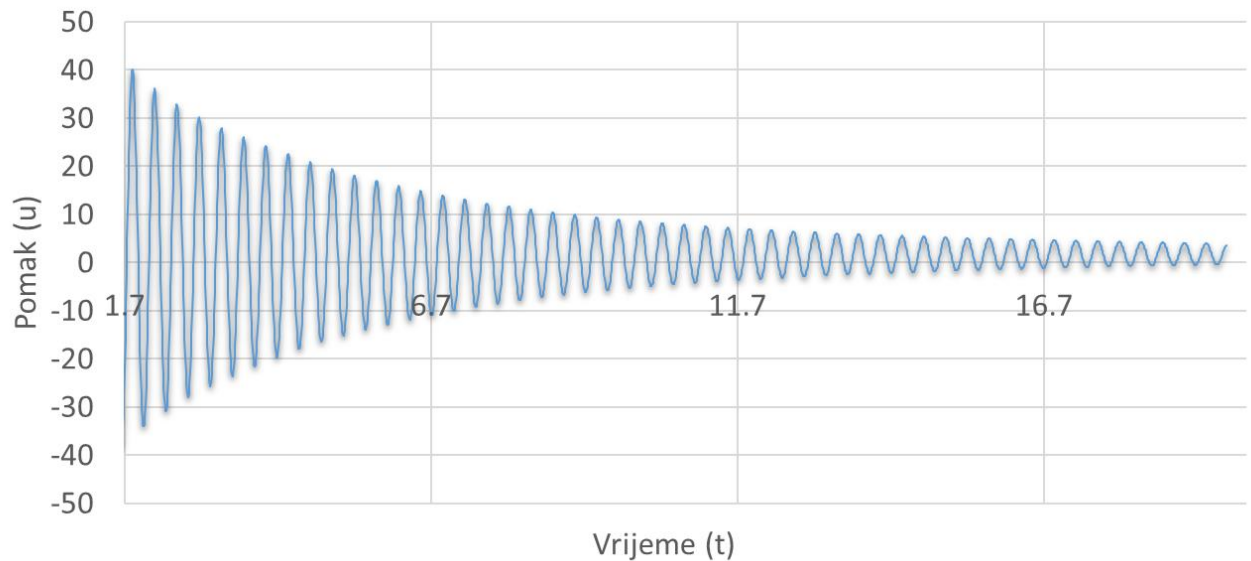


Slika 29. Slobodne prigušene oscilacije 1.ton pomak 1.etaže

Izračunato na temelju pomaka sa slike 29. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 1.

Prigušenje etaže 1. iznosi:

$$\zeta_1 = 0.007862125$$

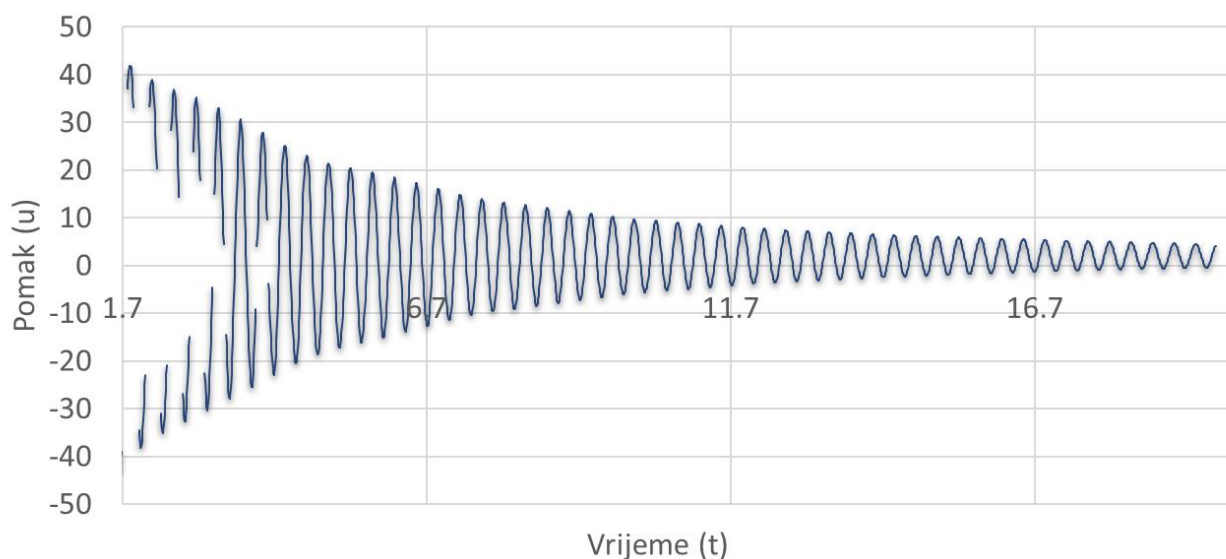


Slika 30. Slobodne prigušene oscilacije 1.ton pomak 2.etaže

Izračunato na temelju pomaka sa slike 30. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 2.

Prigušenje etaže 2. iznosi:

$$\zeta_2 = 0.007495948$$



Slika 31. Slobodne prigušene oscilacije 1.ton pomak 3.etaže

Izračunato na temelju pomaka sa slike 31. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 3.

Prigušenje etaže 3. iznosi:

$$\zeta_3 = 0.007210483$$

Srednja vrijednost sva tri prigušenja iznosi:

$$\zeta = 0.007522852$$

Za relevantnu vrijednost prigušenja u ostatku rada korištena je srednja vrijednost prigušenja iz razloga što je ovim ispitivanjem: zadavanjem pomaka te otpuštanjem konstrukcije u istom trenutku dovoljno precizno zadan točno 1. ton, dok je u prethodnom primjeru (potpoglavlje 6.1) zadana statička deformacija koja je slična ali ne i jednaka 1. tonu.

Ta dva prigušenja razlikuju se za 0,52 %. Time se dolazi do zaključka da je prigušenje dobiveno nanošenjem statičke deformacije gotovo pa jednako 1. tonu osciliranja konstrukcije, ali ne u potpunosti.

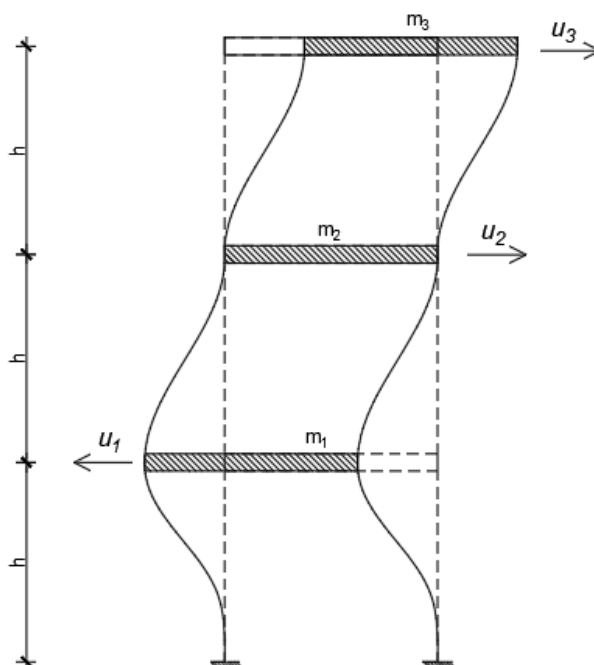
### 6.3 Slobodne prigušene oscilacije u 2. tonu

Jednakim postupkom i opremom kao i u prethodnom poglavlju napravljen je eksperiment za postizanje slobodnih prigušenih oscilacija konstrukcije u drugom tonu. (slike 32. i 33.)

Pomaci (Prilog 9.2, tablica 2.) za drugi ton dobiveni su nanošenjem horizontalnih sila na troetažnu konstrukciju. Sile su nanosene istovremeno u suprotnim smjerovima za svaku etažu zasebno (slika 33.).

Nažalost 2. ton nije uspješno postignut, što je najbolje vidljivo na slici 35. gdje je prikazan pomak etaže 2 koji bi zapravo trebao iznositi 0 (slika 32.).

Dijagram osciliranja 2. etaže sadrži pomake zato što su ovakvi eksperimenti jako osjetljivi na početne zadane parametre. U ovom slučaju bilo je nemoguće u jednakoj milisekundi otpustiti konstrukciju, te se zato na ovim grafovima javljaju i prvi i drugi ton osciliranja.

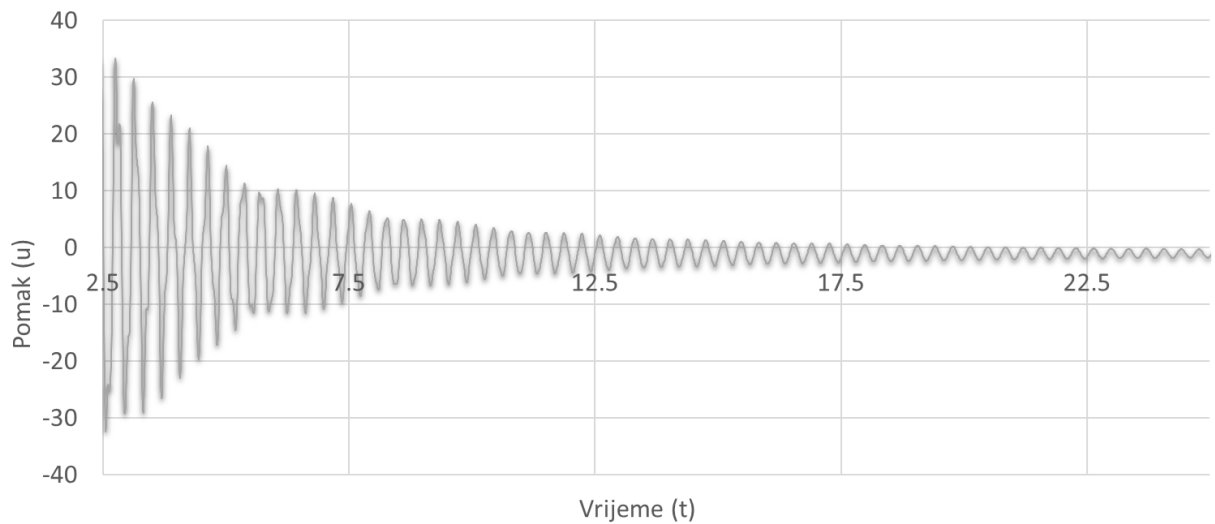


Slika 32. Pomaci troetažnog modela u 2.tonu





Slika 33. Istovremeno otpuštanje konstrukcije u 2. tonu

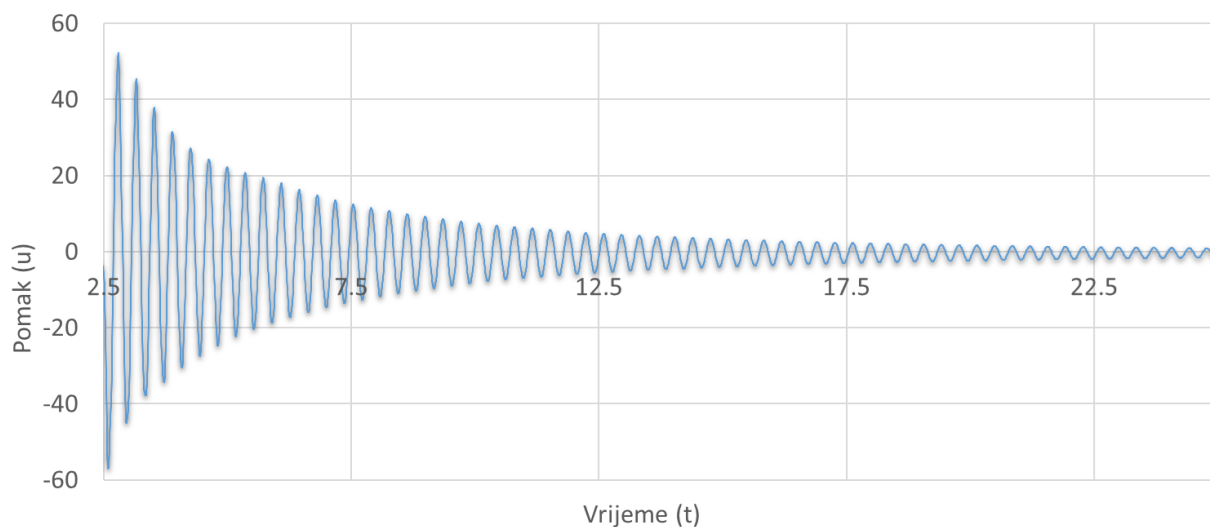


Slika 34. Slobodne prigušene oscilacije 2.ton pomak 1.etaže

Izračunato na temelju pomaka sa slike 34. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 1.

Prigušenje etaže 1. iznosi:

$$\zeta_1 = 0.007450446$$

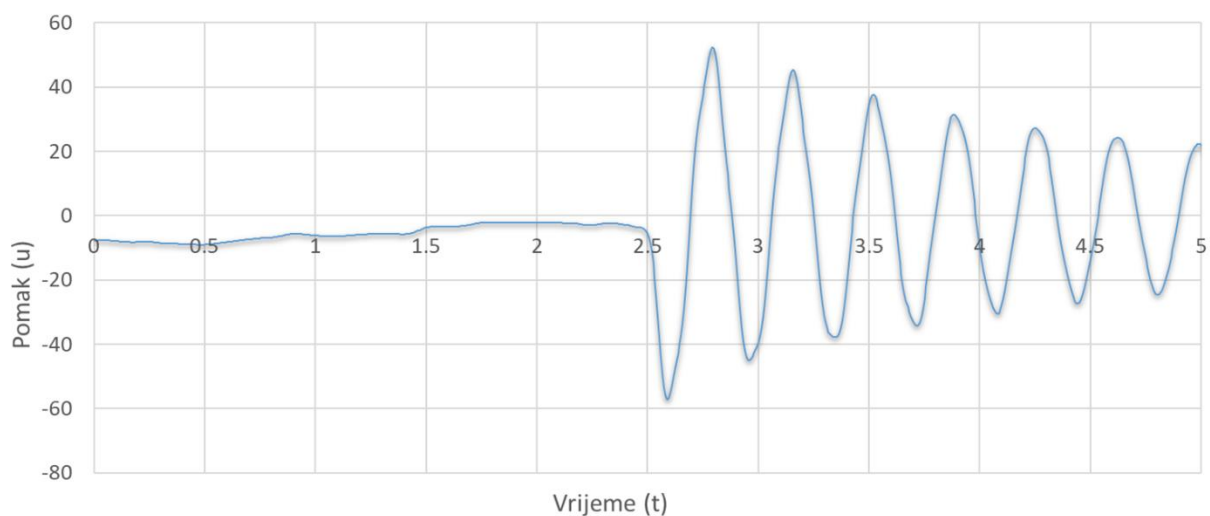


Slika 35. Slobodne prigušene oscilacije 2.ton pomak 2.etaže

Izračunato na temelju pomaka sa slike 35. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 2.

Prigušenje etaže 2. iznosi:

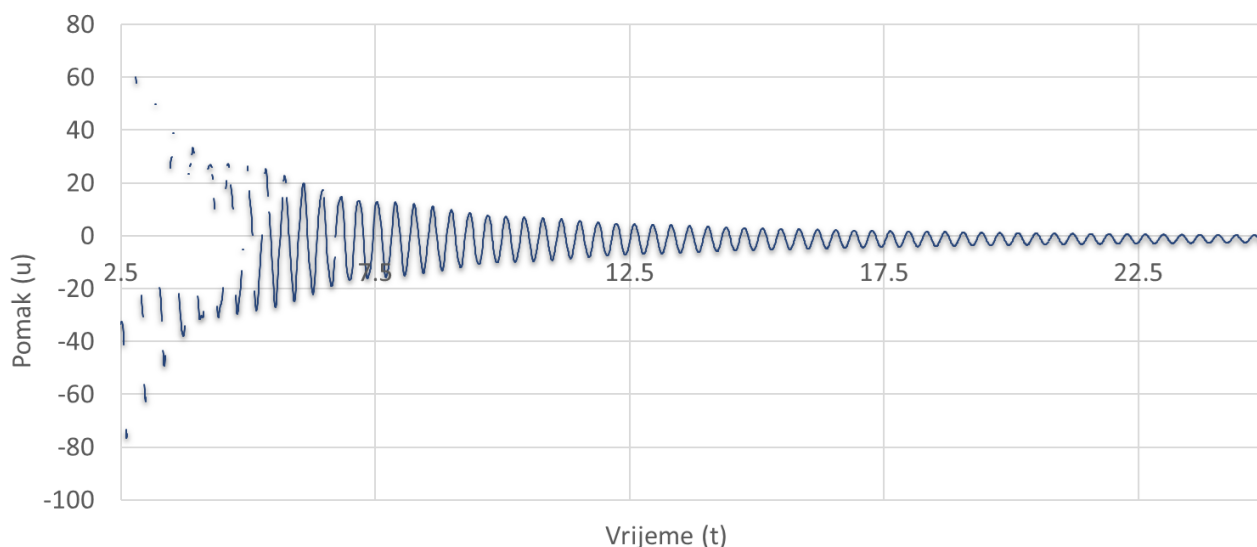
$$\zeta_2 = 0.009201841$$



Slika 36. Početak osciliranja etaže 2.

Na slici 36. vidljivo je da je dijagram krenuo od vrijednosti koja je približno jednaka 0. Unatoč tome što su na početku nanoseni pomaci koji stvarno približno odgovaraju 2. tonu očigledno je da on nije u potpunosti postignut te da se odmah na početku osciliranja pretvorio u oscilaciju uglavnom u prvom tonu, jer tri etaže nisu istovremeno otpuštene.





Slika 37. Slobodne prigušene oscilacije 2.ton pomak 3.etaže

Izračunato na temelju pomaka sa slike 37. te postupkom [jednadžba (37)], računajući prigušenja svih susjednih amplituda, određeno je srednje prigušenje etaže 3.

Prigušenje etaže 3. iznosi:

$$\zeta_3 = 0.009201841$$

Srednja vrijednost sva tri prigušenja iznosi:

$$\zeta_1 = 0.008440584$$

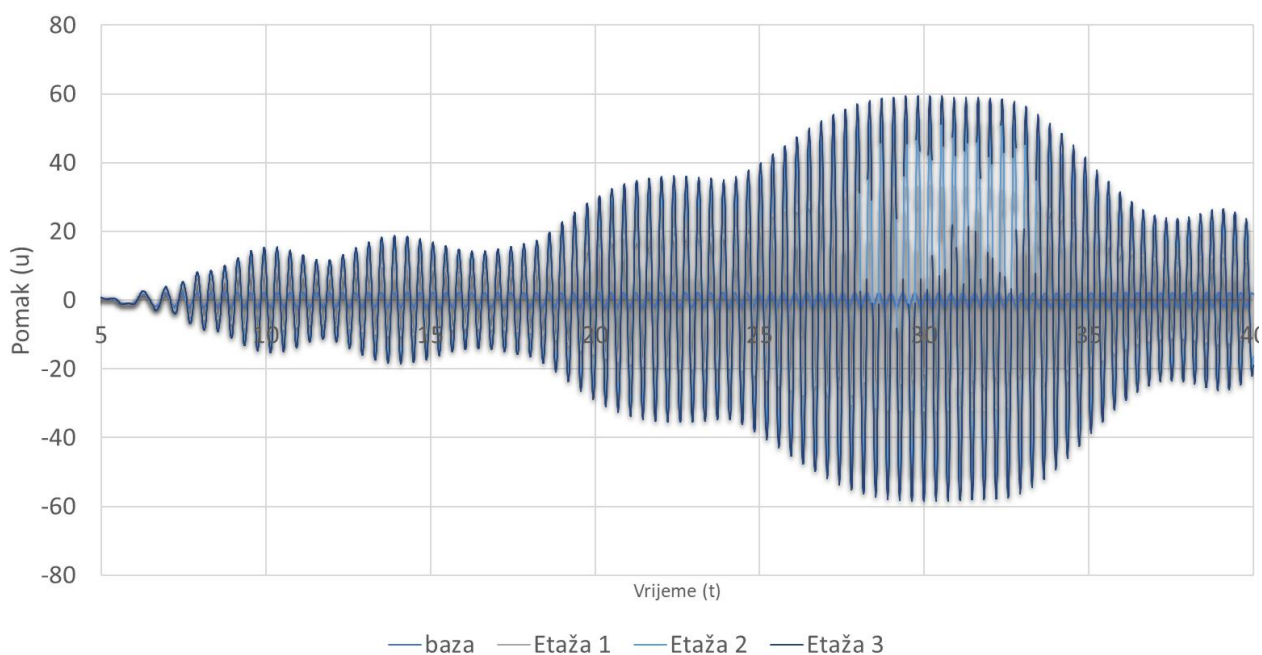
#### 6.4 Harmonijska pobuda 1. vlastite frekvencije

Sinusoidalna pobuda je harmonijska, vremenski varijabilna funkcija koja slijedi oblik sinusne krivulje.

Slika 38. prikazuje odziv konstrukcije na različite frekvencijske pobude (frekvencije 2.55, 2.65, 2.75, 2.85, 2.95) na potresnom stolu. Kao sredstvo za primjenu sinusoidalnih pobuda koristio se potresni stol jer omogućava precizno kontroliranje frekvencija na kojima se podloga (a time i konstrukcija postavljena na njoj) kretala. U programu koji upravlja potresnim stolom, zadane su specifične frekvencije (1.ton). Na

temelju tih frekvencija, stol se kretao sinusoidalno, simulirajući utjecaj takvih vibracija na konstrukciju.

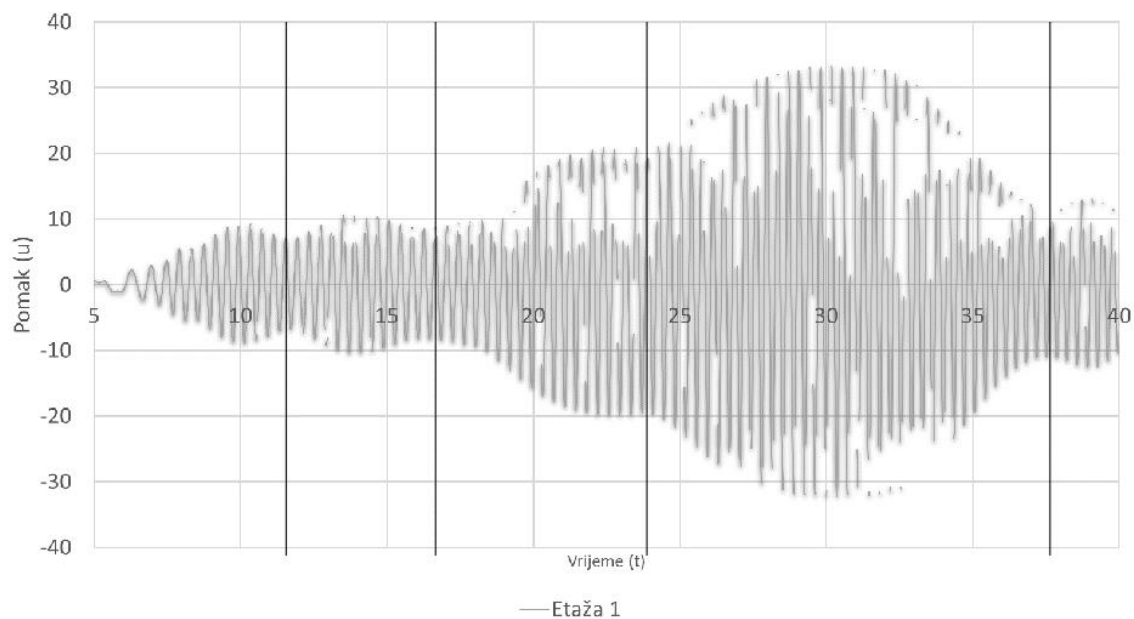
Dok se stol kretao na zadanim frekvencijama, mjerili su se pomaci konstrukcije. Ovi pomaci rezultat su dinamičkog odziva konstrukcije na pobudu s potresnog stola. Na vertikalnoj osi grafa prikazani su pomaci konstrukcije, dok horizontalna os predstavlja vremenski tijek.



Slika 38. Sinusoidalna pobuda 1. ton – eksperimentalni rezultat

#### 6.4.1 Half-Power Bandwidth metoda

Half- Power Bandwidth metoda još je jedan način za određivanje prigušenja. U ovom primjeru eksperimentom su se mijenjale vrijednosti pobude za  $0.1 \text{ Hz}$  unutar raspona od  $2,55 \text{ Hz}$  do  $2,95 \text{ Hz}$ . ( $2.55, 2.65, 2.75, 2.85$  i  $2.95$ )



Slika 39. Sinusoidalna pobuda, podijeljena po frekvencijama redom: 2.55, 2.65, 2.75., 2.85 i 2.95 Hz

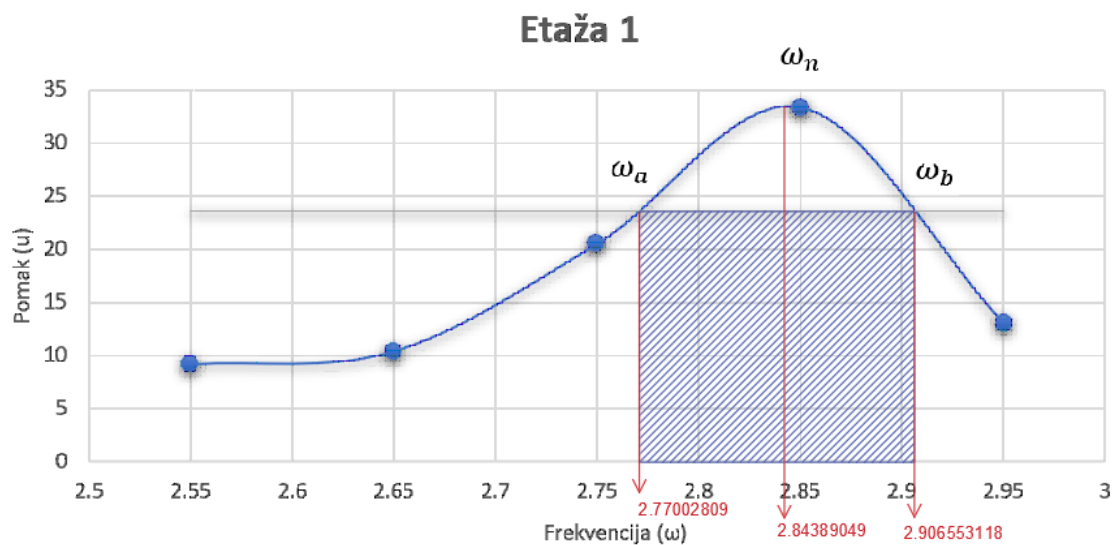
Iz dijagrama za sinusoidalnu pobudu očitani su maksimalni pomaci u svakom području frekvencije.

Tablica 4. Maksimalni pomaci

<b>Etaža 1</b>	
<b>vrijeme (t)</b>	<b>Pomak (u)</b>
2.55	9.172117
2.65	10.385471
2.75	20.482954
2.85	33.332858
2.95	13.077463

Prigušenje se određuje na način da se s grafa odredi rezonantna frekvencija  $\omega_n$  (frekvencija na kojoj sustav oscilira s maksimalnom amplitudom), te se zatim dijeli sa  $\sqrt{2}$  (plavo iscrtano područje slika 40.) kako bi se odredile frekvencije  $\omega_a$  i  $\omega_b$  s kojima se postupa dalje u proračun [1].

Sukladno tome dobiven je graf na slici 40.



Slika 40. Half-Power dijagram

Polazna točka za dobivanje prigušenja postupkom Half- Power Bandwidth metode je najprije omjer frekvencije pobude i prirodne frekvencije [1]:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \quad (61)$$

Zatim:

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (62)$$

gdje su:

- $R_d$  - dinamički faktor,
- $\omega$  - frekvencija pobude.

U Half- Power metodi:

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (63)$$

zatim iz (63) u (62):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (64)$$

kvadriranjem:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \quad (65)$$

U kontekstu dinamike sustava i odziva na harmonijsku pobudu, razmatra se odnos frekvencije pobude  $\omega$  i vlastite frekvencije sustava  $\omega_n$ , a kvadrat tog odnosa je:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (66)$$

Kvadrirana jednadžba (65) je kvadratna jednadžba prikazana preko (66), a rješavanjem se dobiva:

$$(\omega / \omega_n)^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (67)$$

Pojednostavljenjem[1]:

$$\omega / \omega_n \approx (1 \pm 2\zeta)^{1/2} \quad (68)$$

ili

$$\omega / \omega_n \approx 1 \pm \zeta \quad (69)$$

Oduzimanjem manjeg korijena od većeg dobije se[1]:

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} = 2\zeta \quad (70)$$

Iz tog izraza proračunava se prigušenje:

$$\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} = \frac{2,906553118 - 2,77002809}{2 \cdot 2,84389049} = 0,02400$$

U ovom radu koristilo se prigušenje dobiveno eksperimentalno u potpoglavlju 6.2.1., koje iznosi  $\zeta = 0.007522852$ .

Od prigušenja dobivenog Half-Power Bandwidth metodom razlikuje se za 219 %.

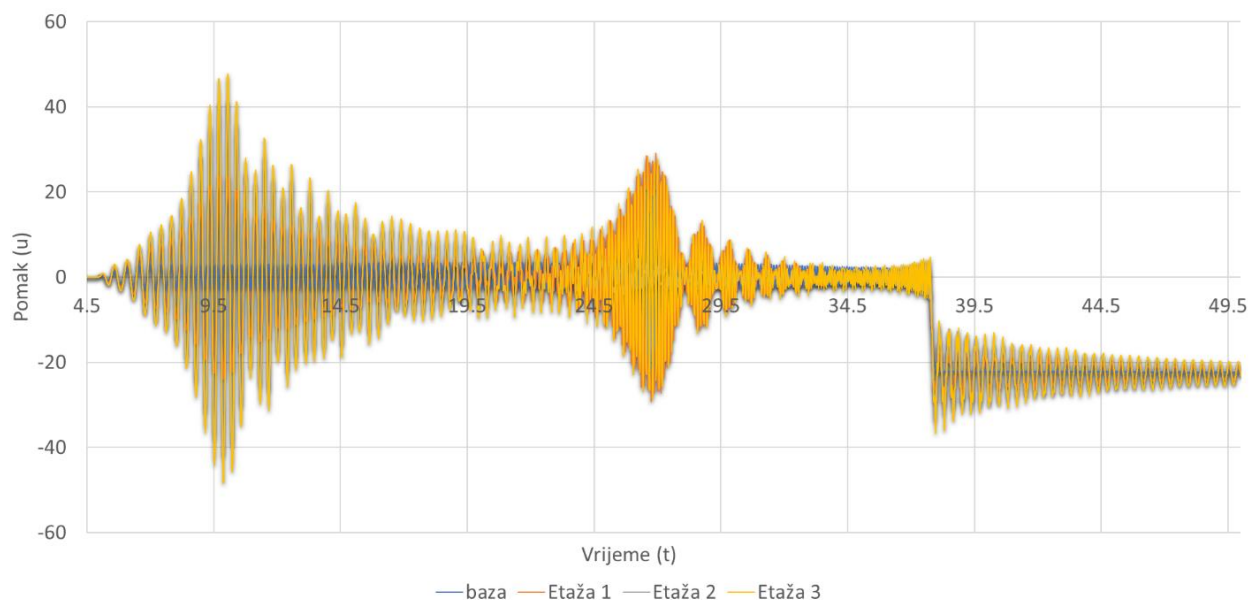
Ovo prigušenje nije relevantno iz razloga što ukoliko nije postignuta vlastita frekvencija, nisu detektirani ekstremi te se dijagram sa slike 40. ne može uzeti u obzir.

## 6.5 Sinesweep ispitivanje

Sinesweep je vrsta opterećenja kod kojeg se kontinuirano prolazi kroz cijeli raspon frekvencija. U ovom slučaju, pomoću funkcije sinesweep te pripadajućeg dijagrama, okvirno su procijenjene 1. i 2. frekvencija te uspoređene s računskim. Nije bilo moguće eksperimentalno pobuditi 3. frekvenciju, jer potresni stol može postići frekvenciju samo do približno 10 Hz (ubrzanja se mjere sa GOM Correlate-om), a poznato je da je 3. frekvencija veća (potpoglavlje 3.5).

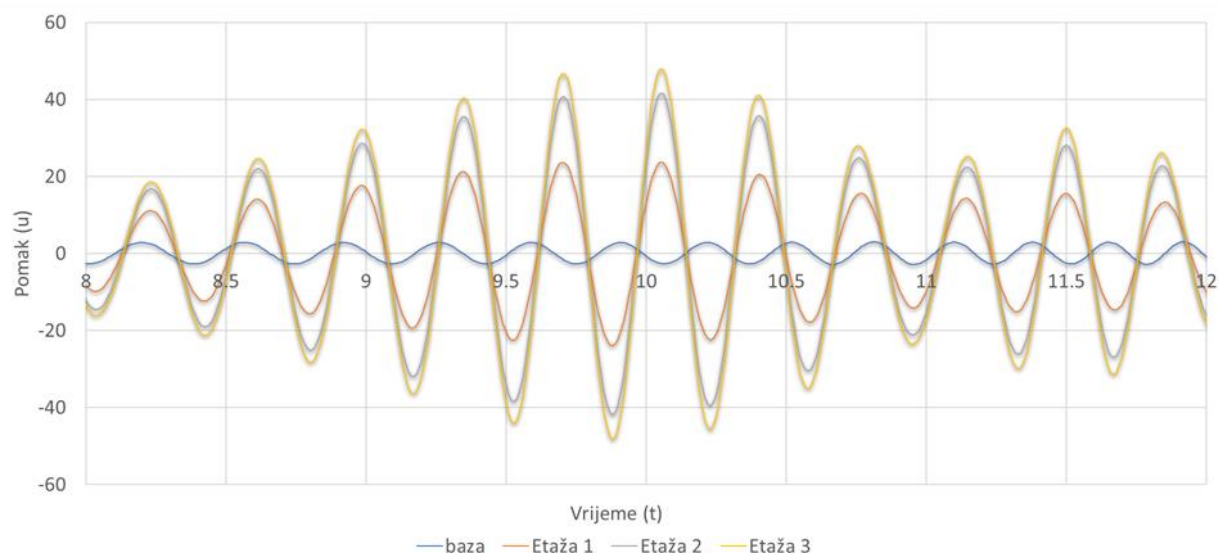
### 6.5.1 Eksperimentalni rezultati

Dijagrami eksperimentalnih rezultata prikazuju apsolutne pomake.



Slika 41. Cijeli odziv konstrukcije (sinesweep)

Na slici 41. vidljiv je dijagram dobiven sinesweep funkcijom, no nakon otprilike 38. sekunde vidi se nagli pad dijagrama zbog naglog zaustavljanja potresnog stola. Naime, u tom trenutku prekinuto je pomjeranje potresnog stola vanjskom pobudom. Dok se konstrukcija ne prestane gibati u potpunosti, potrebno joj je proći i kroz područje slobodnih prigušenih oscilacija (od 38. do 50. sekunde). Dio odaziva koji slijedi karakterizira se kao faza slobodnih prigušenih oscilacija, jer nema dodatnih vanjskih sila koje potiču kretanje. Umjesto toga, amplitude se postupno smanjuju sve dok kretanje ne prestane.

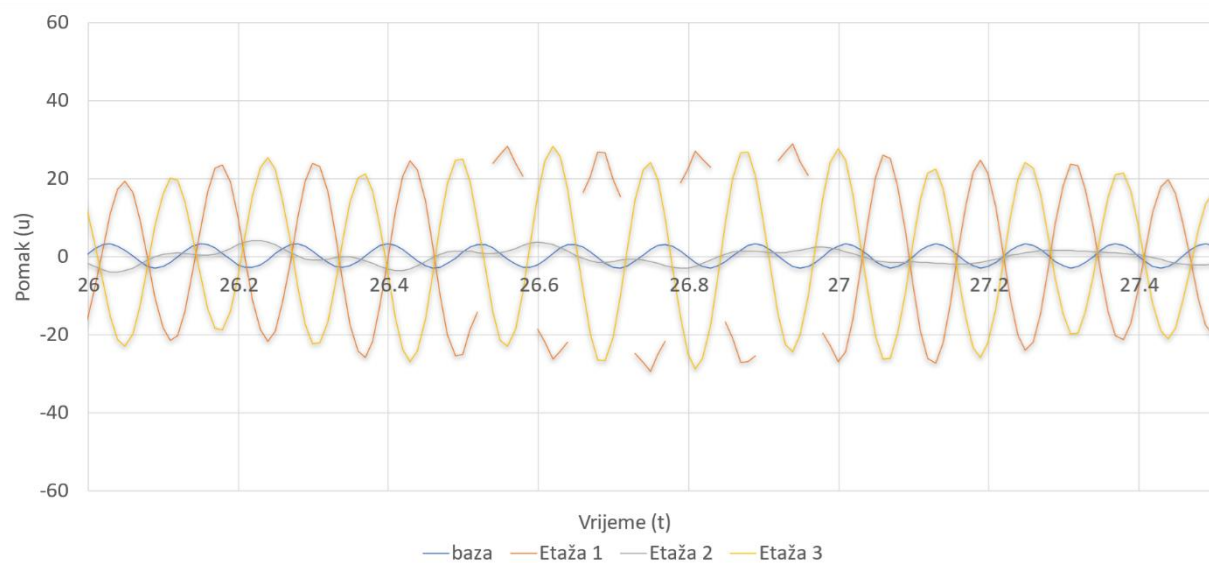


Slika 42. Sinesweep prilikom prolaska kroz 1. frekvenciju

Na slici 42. prikazan je dijagram oscilacija etaža 1., 2. i 3., te je vidljivo kako cijela konstrukcija oscilira zajedno, a kada dođe do rezonancije oko 10. sekunde ona se kreće u 1. tonu. Iz dijagrama su očitane vrijednosti perioda osciliranja  $T$  (na području gdje je pomak najveći) a zatim izračunata frekvencija osciliranja. Period osciliranja očitao je za udaljenosti između najvećih amplituda te je dobivena vrijednost  $T_1 = 0,35$  s. Pomoću perioda osciliranja izračunata je frekvencija osciliranja prema formuli [jednadžba (23)]:

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,35} = 2,86 \text{ Hz}$$

Rezultat dobiven proračunom u potpoglavlju 3.5 i ovaj dobiven eksperimentalno razlikuju se za 10,84%.



Slika 43. Sinesweep prilikom prolaska kroz 2. frekvenciju

Na slici 43. do rezonancije dolazi oko 26,6. sekunde te se tada konstrukcija kreće u 2. tonu. Na slici 43. prikazan je dijagram oscilacija etaža 1., 2. i 3., te su iz dijagrama očitane vrijednosti perioda osciliranja  $T$  (na području gdje je pomak najveći) a zatim je izračunata frekvencija osciliranja.

Period osciliranja očitao je za udaljenosti između najvećih amplituda te je dobivena vrijednost  $T_2 = 0,13$  s. Pomoću perioda osciliranja izračunata je frekvencija osciliranja prema formuli [jednadžba (23)]:

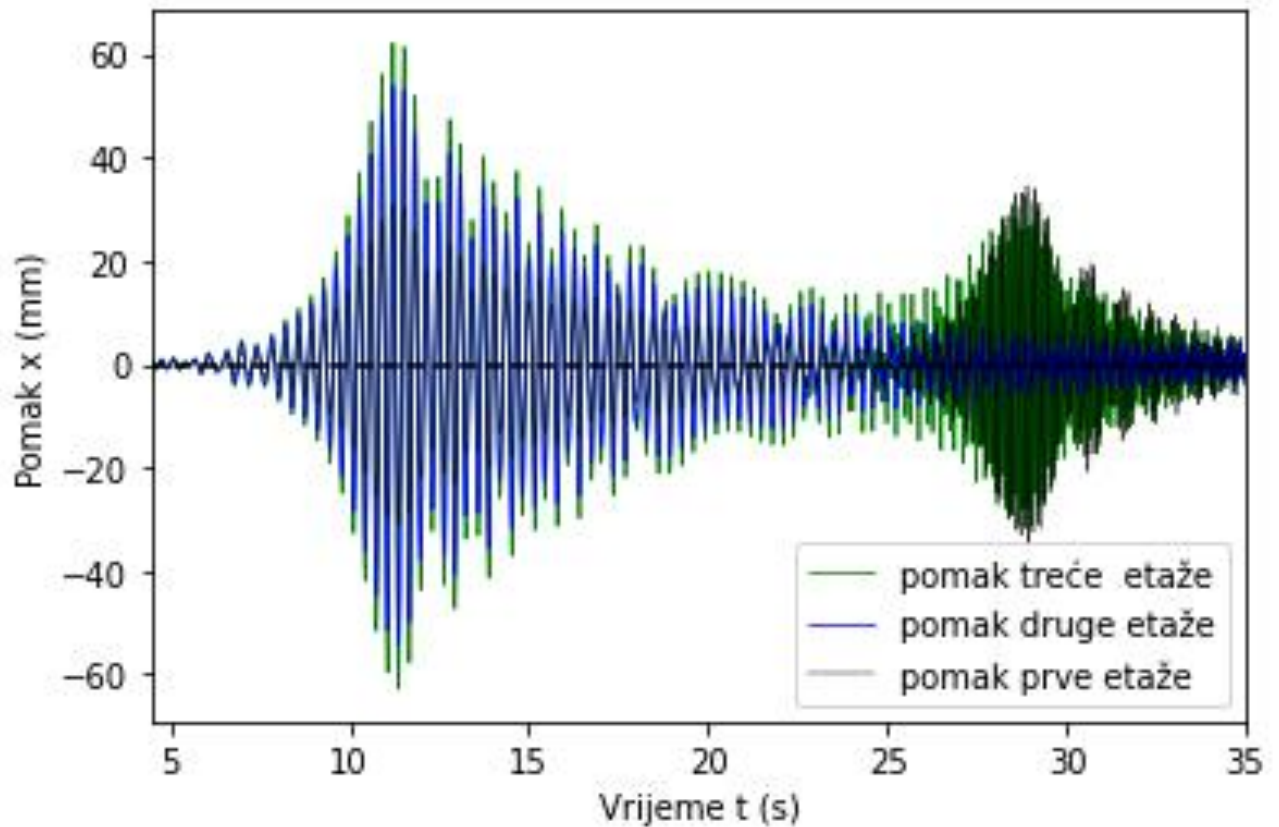
$$f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,13} = 7,69 \text{ Hz}$$

Rezultat dobiven proračunom u potpoglavlju 3.5 i ovaj dobiven eksperimentalno razlikuju se za 12,61 %.



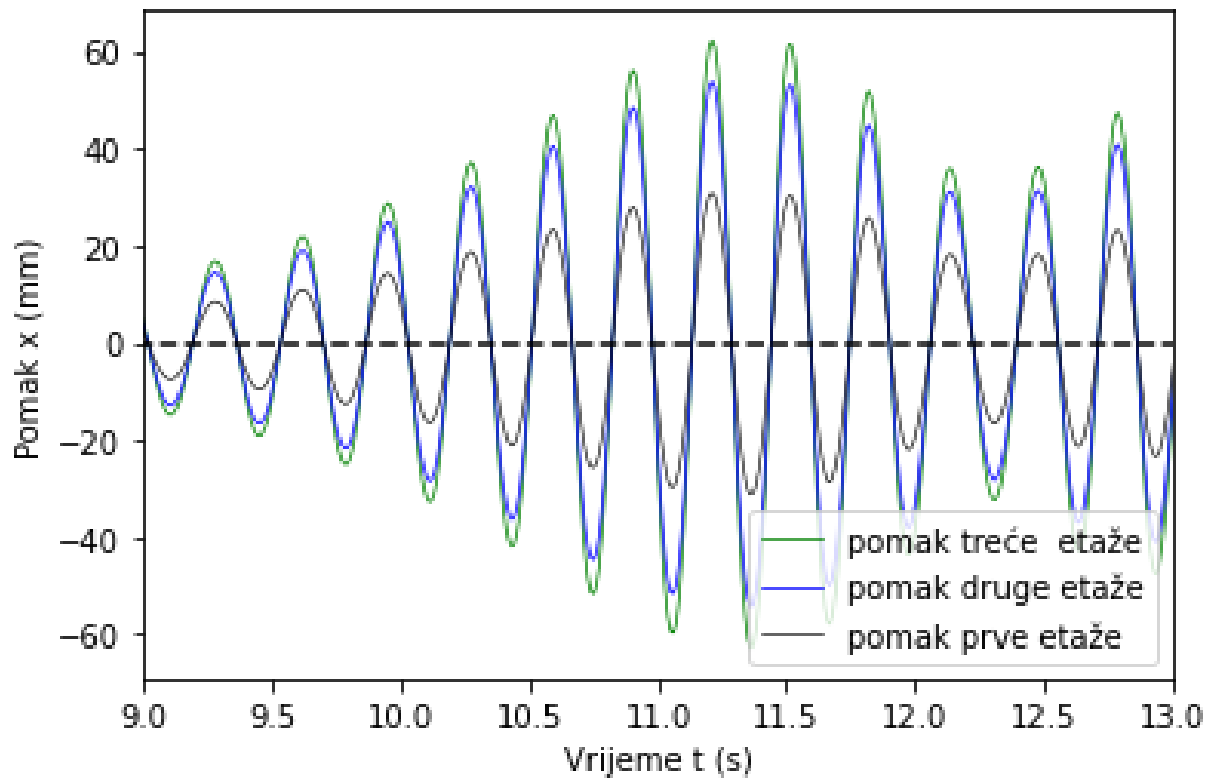
### 6.5.2 Numerički rezultati

Numerički rezultati prikazuju relativne pomake.

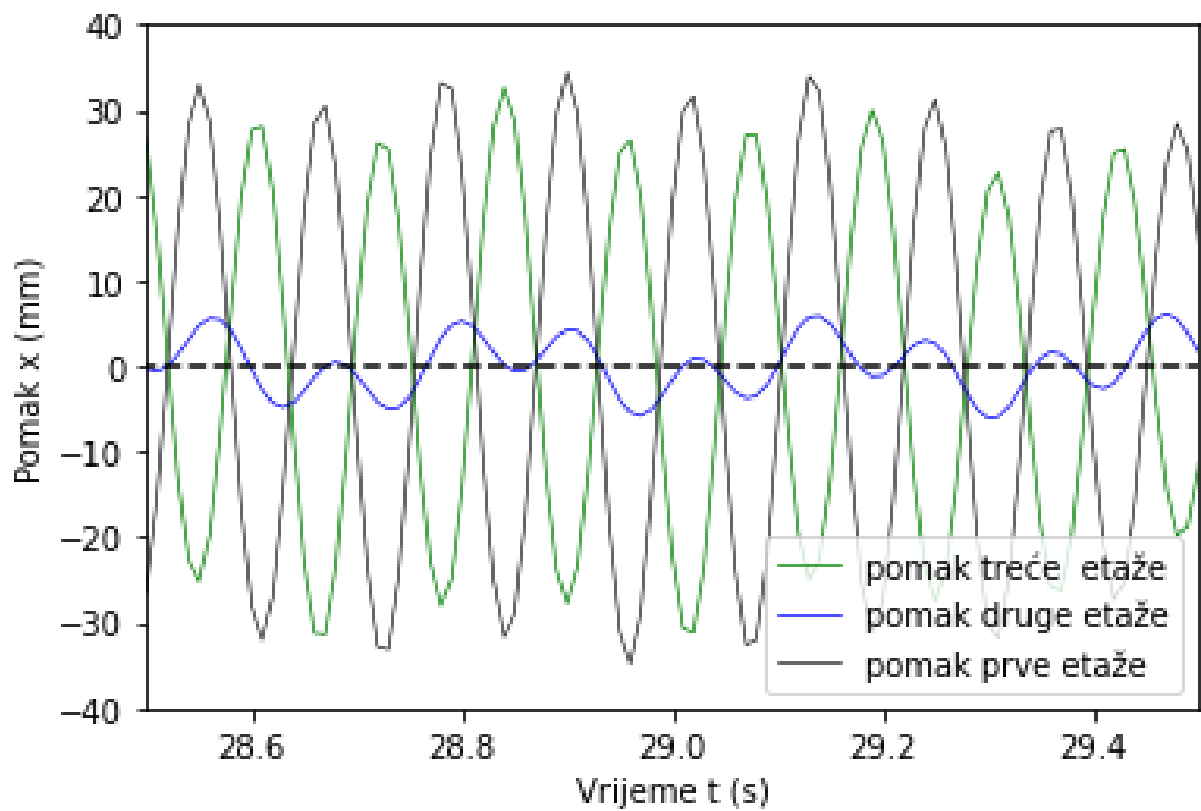


Slika 44. Sinesweep funkcija – numerički

Na slici 44. također je prikazana sinesweep funkcija, no dobivena u Pythonu – numerički, a na slikama 45. i 46. prikazuju se područja proslaska kroz prvu i drugu frekvenciju. Područja su kao na slikama 42. i 43., ali dobivena numerički.



Slika 45. Sinesweep funkcija - numerički 9. - 13. sec



Slika 46. Sinesweep funkcija - numerički 28.5. - 29.5. sec

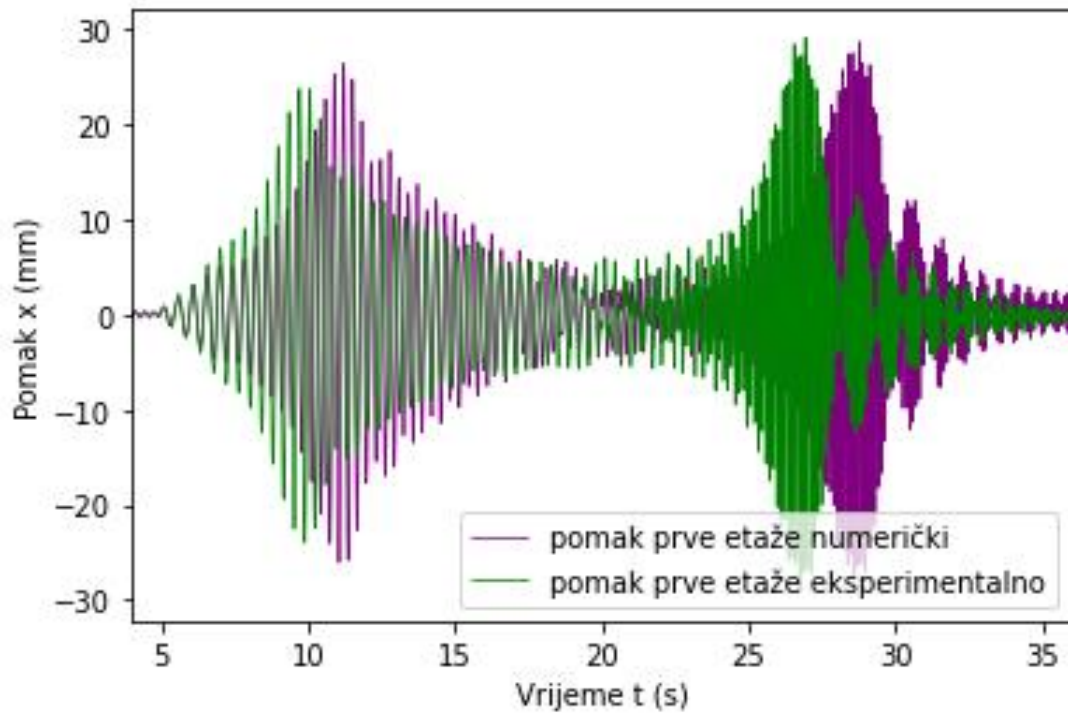
### **6.5.3 Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka**

Amplitude u dijagramima apsolutnih i relativnih pomaka na sljedećim slikama izgledaju približno jednako jer pomak baze koji je dodan kod apsolutnih pomaka je u rasponu do 0,2 mm te to nije vidljivo golim okom.

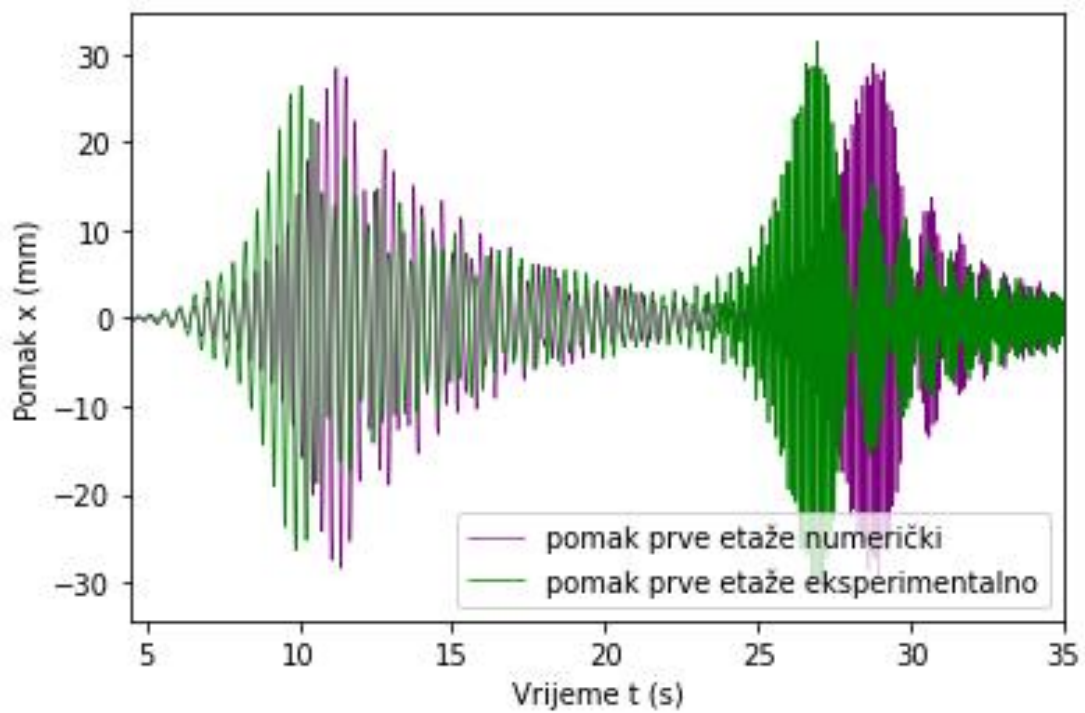
Relativni pomak je pomak izmjeren u odnosu na referentnu točku, u ovom slučaju bazu. Relativni pomak je važan jer nam govori koliko se jedan dio zgrade pomaknuo u odnosu na drugi. To je ključno za razumijevanje zahtjeva deformacije na konstrukciji i njezinim komponentama tijekom seizmičkih događaja. Na primjer, može pružiti informacije o pomaku između katova, koji je kritičan parametar za procjenu oštećenja zgrada tijekom potres dok je apsolutni pomak izmjeren u odnosu na fiksnu, nepokretnu referentnu točku, kao što je tlo. Apsolutni pomak može dati informacije o ukupnom pomaku konstrukcije tijekom seizmičkog događaja.

#### **6.5.3.1 Etaža 1.**

Na slikama 47. i 48. uspoređeni su izmjereni i izračunati pomaci prve etaže. Numerički i eksperimentalni dijagrami približno su jednaki, postoji malena razlika u odmaku te u veličini amplituda u obje usporedbe (isto će biti vidljivo i u prikazu preostalih etaža). To može proizlaziti iz podcijenjenog prigušenja i radi toga što numerički modeli koriste idealizirane pretpostavke o materijalima, geometriji i rubnim uvjetima. Idealizacija u modelu je često nužna za računanje, ali uvijek treba provjeriti i usporediti s eksperimentalnim rezultatima kako bi se osigurala njihova valjanost te izvršile potrebne korekcije. Eksperimentalni, s druge strane, uključuju stvarne materijale i rubne uvjete koji se možda ne poklapaju točno s pretpostavkama modela.



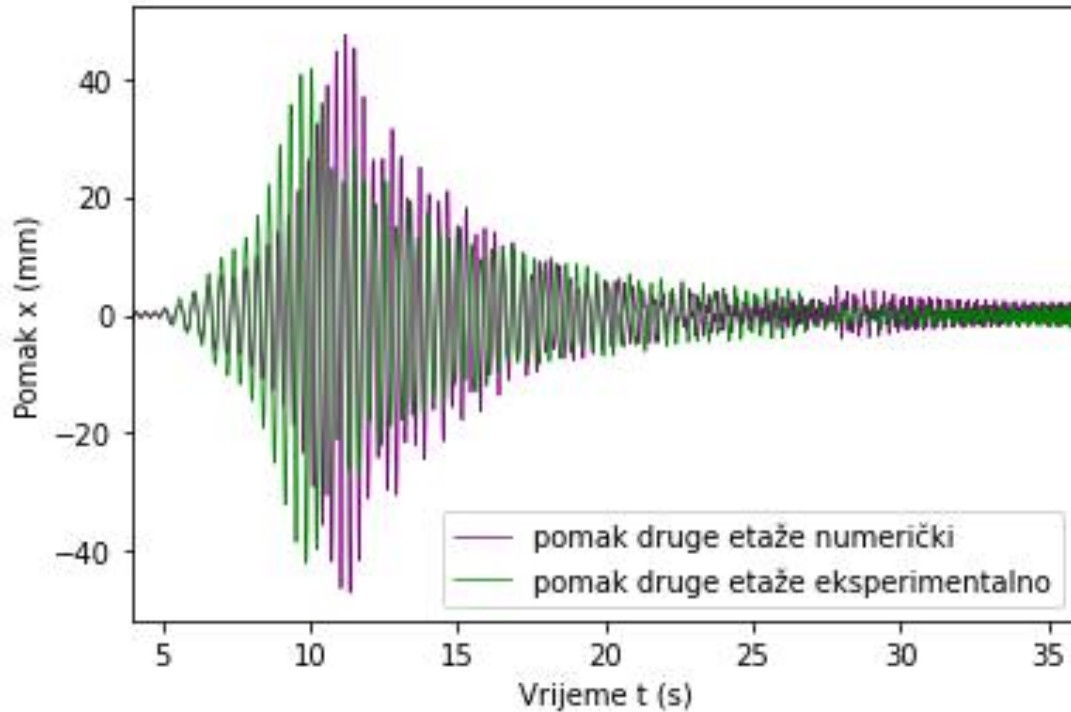
Slika 47. Sinesweep - usporedba apsolutnih pomaka



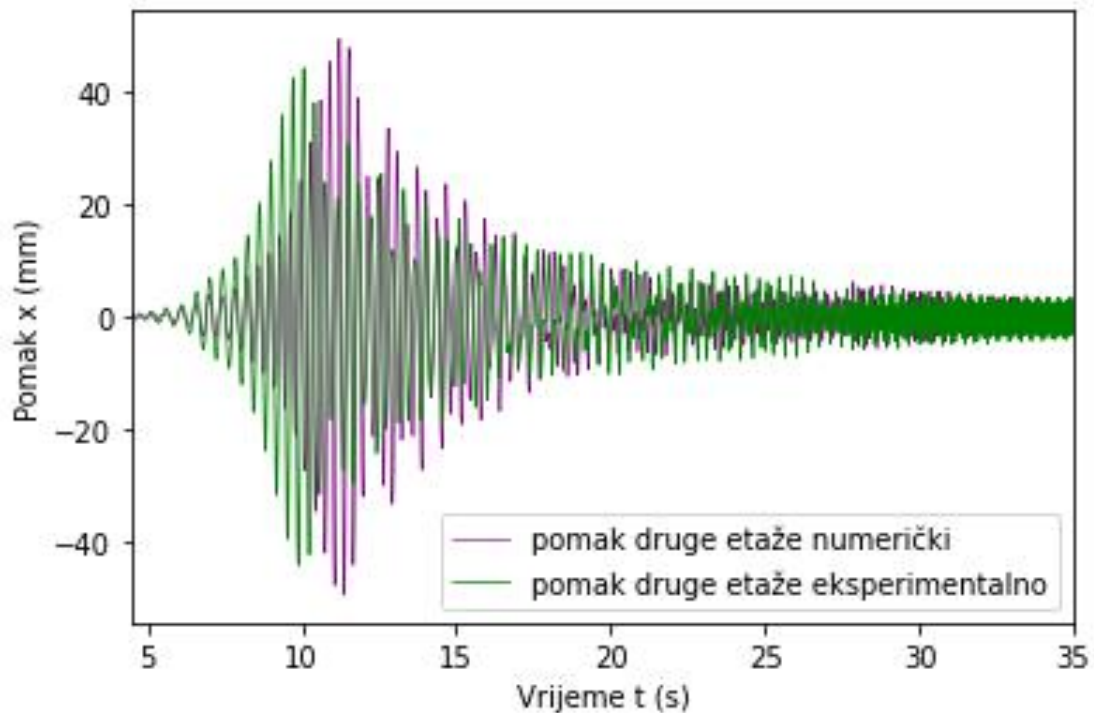
Slika 48. Sinesweep - usporedba relativnih pomaka

### 6.5.3.2 *Etaža 2.*

Na slikama 49. i 50. prikazane su usporedbe izmjerenih i izračunatih pomaka druge etaže.



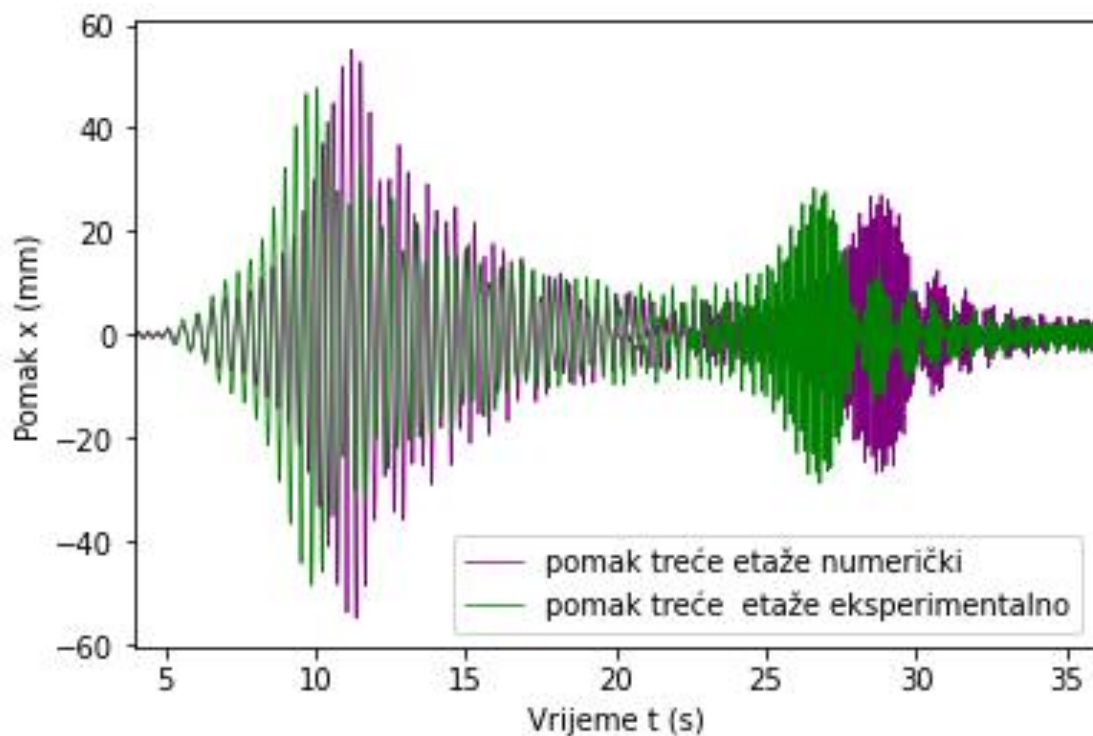
Slika 49. Sinesweep - usporedba apsolutnih pomaka



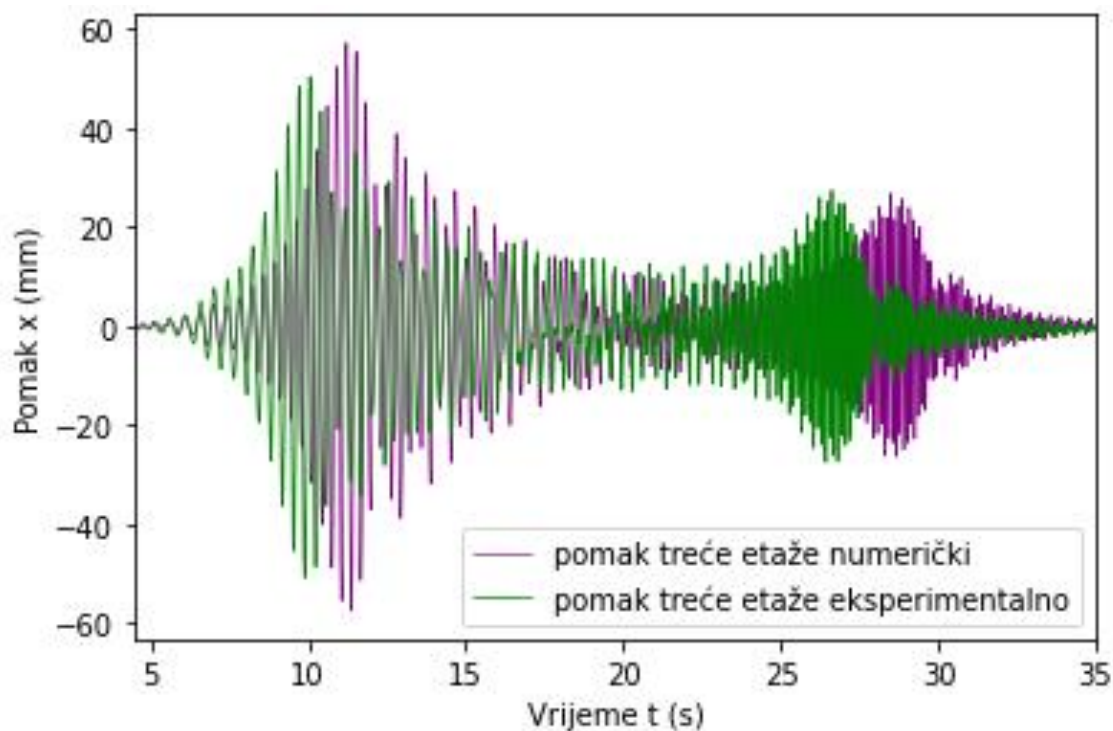
Slika 50. Sinesweep - usporedba relativnih pomaka

### 6.5.3.3 *Etaža 3.*

Na slikama 51. i 52. prikazane su usporedbe izmjerenih i izračunatih pomaka treće etaže.



Slika 51. Sinesweep - usporedba apsolutnih pomaka

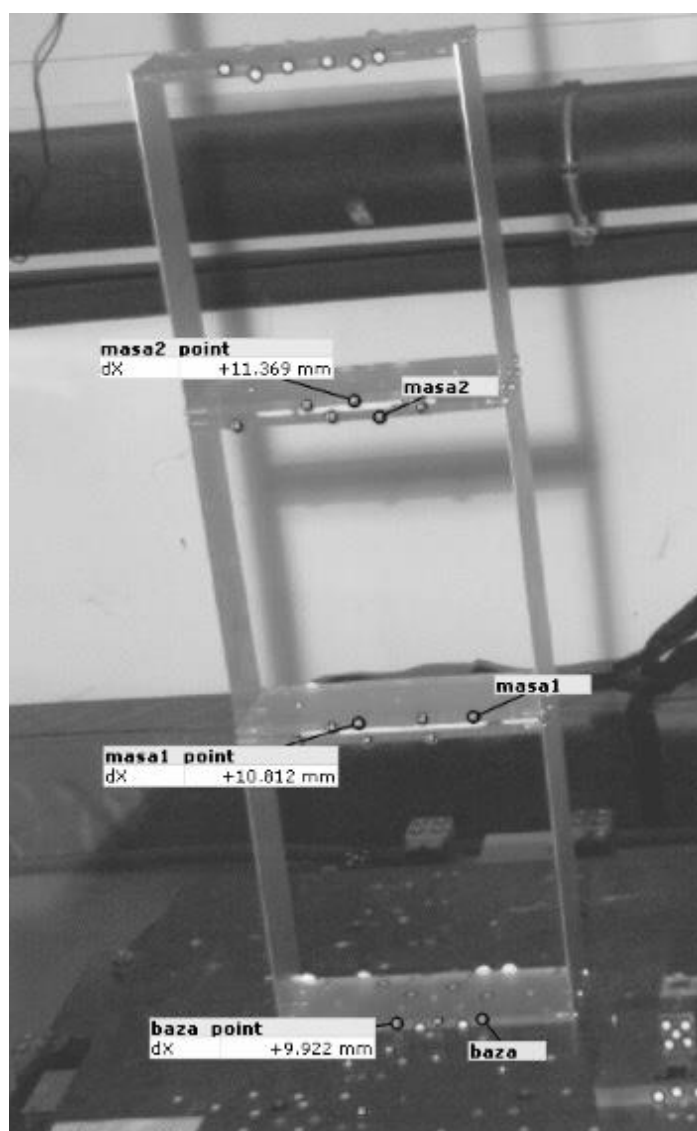


Slika 52. Sinesweep - usporedba relativnih pomaka

## 6.6 Potresni zapisi

U ovom diplomskom radu, troetažna konstrukcija je na kraju podvrgnuta četirima povijesnim razornim potresnim zapisima. U slijedećim potpoglavljima bit će prikazani dijagrami pomak - vrijeme za potrese Kobe, Cape Mendocino, Northridge i El centro.

Prilikom očitavanja rezultata u Software sustavu GOM, za potresne zapise Kobe, El Centro te Cape Mendocino nije bilo moguće očitati pomake za etažu 3., radi loše rezolucije snimka (slika 53.), dok su za potresni zapis Northridge, podaci za sve tri etaže bili dostupni.



Slika 53. Deformacija konstrukcije - Potres Kobe



### **6.6.1 Potres Kobe**

Kobe se nalazi na granici između nekoliko tektonskih ploča, a tip tla i podloge igrali su veliku ulogu u razmjeru oštećenja. Inženjeri sada obraćaju više pažnje na lokalne geološke uvjete prilikom projektiranja građevina.

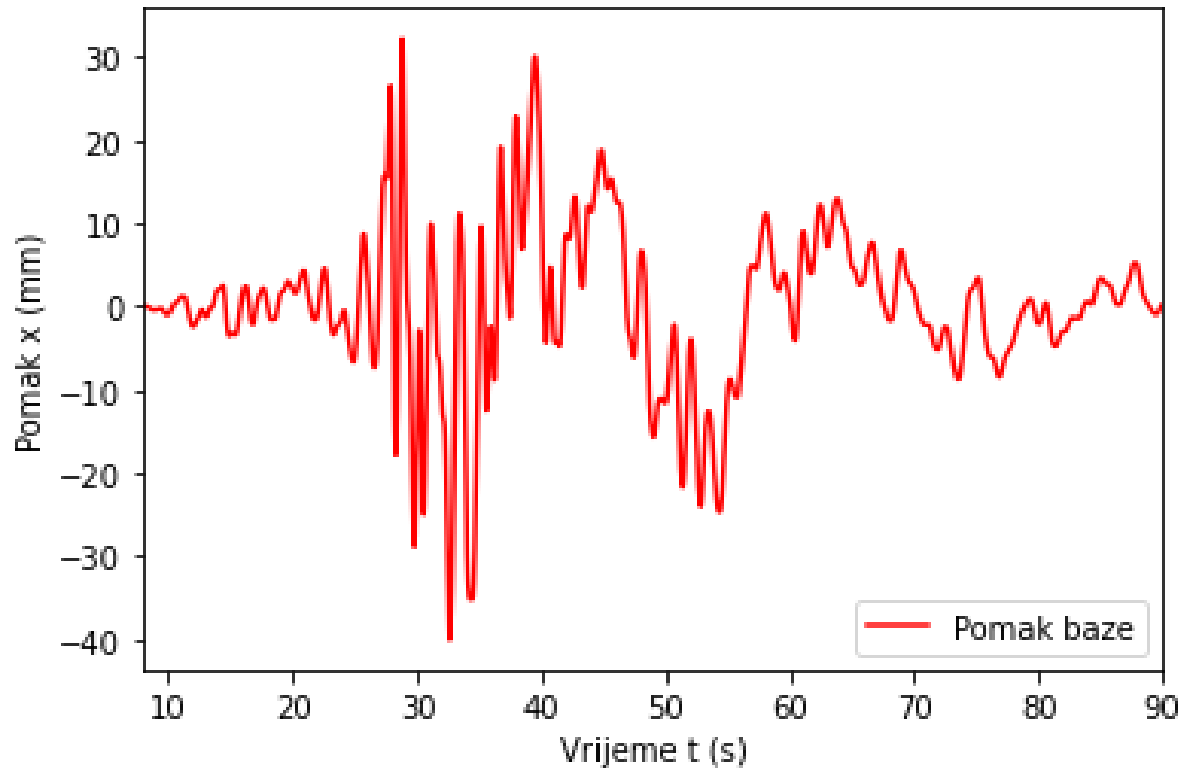
Potres se dogodio 17. siječnja 1995. godine oko 5:46 ujutro po lokalnom vremenu. Epicentar se nalazio blizu otoka Awaji, otprilike 20 kilometara od obale Kobeja, Japana. Potres je imao magnitudu od 6,9 po Richterovoj ljestvici, te je izazvao razarajuću štetu, posebno u gradu Kobe i okolnim područjima. Infrastrukturni objekti poput zgrada, autoputova i željezničkih pruga pretrpjeli su oštećenja ili su potpuno uništeni. Mnoge građevine koje su bile smatrane "otpornima na potrese" također su oštećene, što je dovelo do reevaluacije građevinskih normi i inženjerskih praksi. Grad je iznimno brzo obnovljen, a proces oporavka uključivao je niz inovativnih inženjerskih i urbanističkih rješenja. Potres Kobe opsežno je proučavan kako bi se bolje razumjela dinamika potresa, otpornost građevina i učinkovit odgovor na katastrofu [10].

#### **6.6.1.1 Eksperimentalni rezultati**

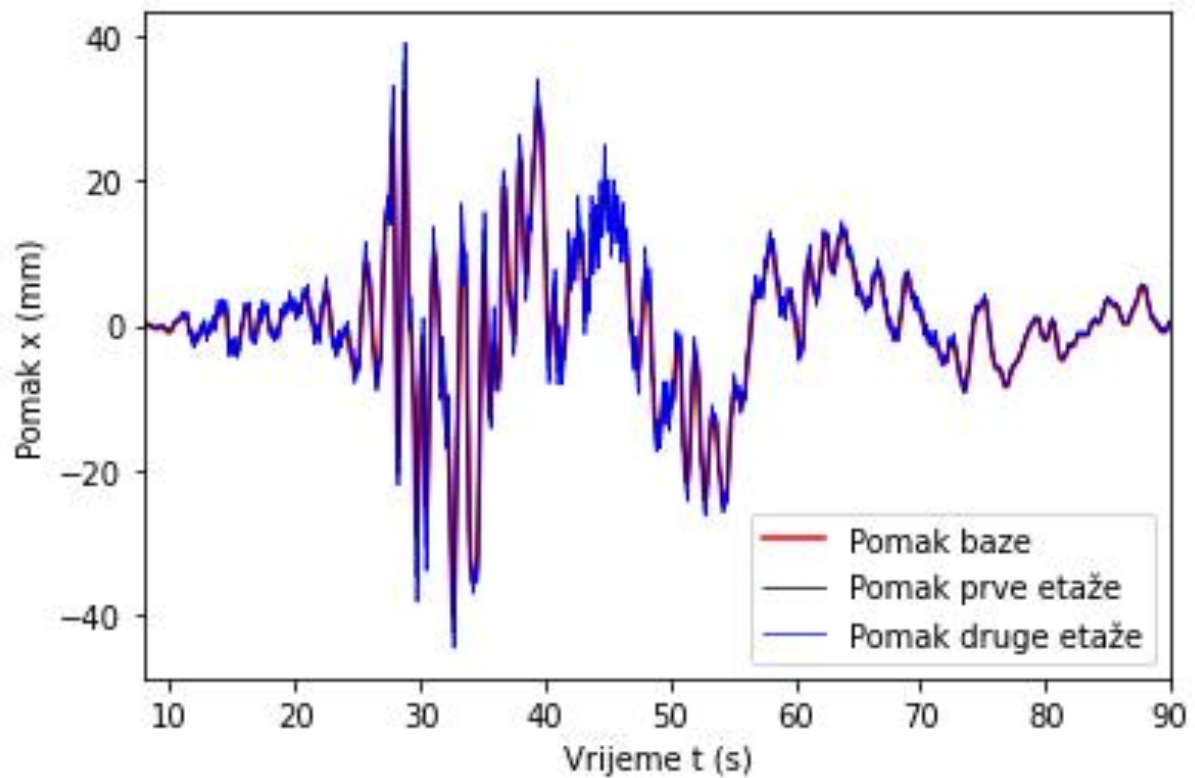
Dijagrami eksperimentalnih rezultata prikazuju apsolutne pomake.

Na slici 54. prikazan je pomak baze, a na slikama 55. i 56. pomaci preostalih dviju etaža zajedno s pomakom baze.



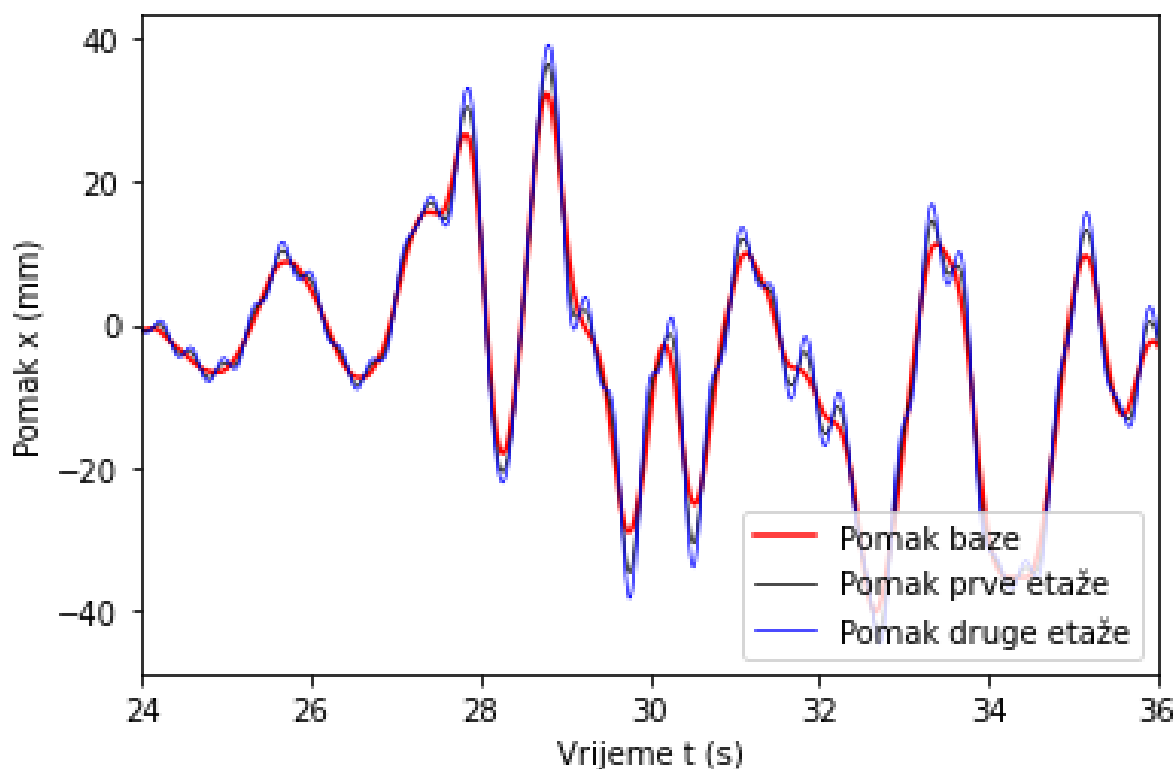


Slika 54. Potresni zapis Kobe – eksperimentalno - pomak baze



Slika 55. Potresni zapis Kobe – eksperimentalno

Na slici 56. može se vidjeti potresni zapis u intervalu od 24. do 36. sekunde, jer su u tom razdoblju zabilježeni najveći pomaci.



Slika 56. Potresni zapis Kobe – eksperimentalno 24. – 36. sec

Iz dijagrama na slici 56. izračunati su relativni pomaci etaža 1. i 2., ovisno o pomaku baze (u trenutku oko 28,8 sec):

$$u_1 = 4.253651 \text{ mm}$$

$$u_2 = 6.756522 \text{ mm}$$

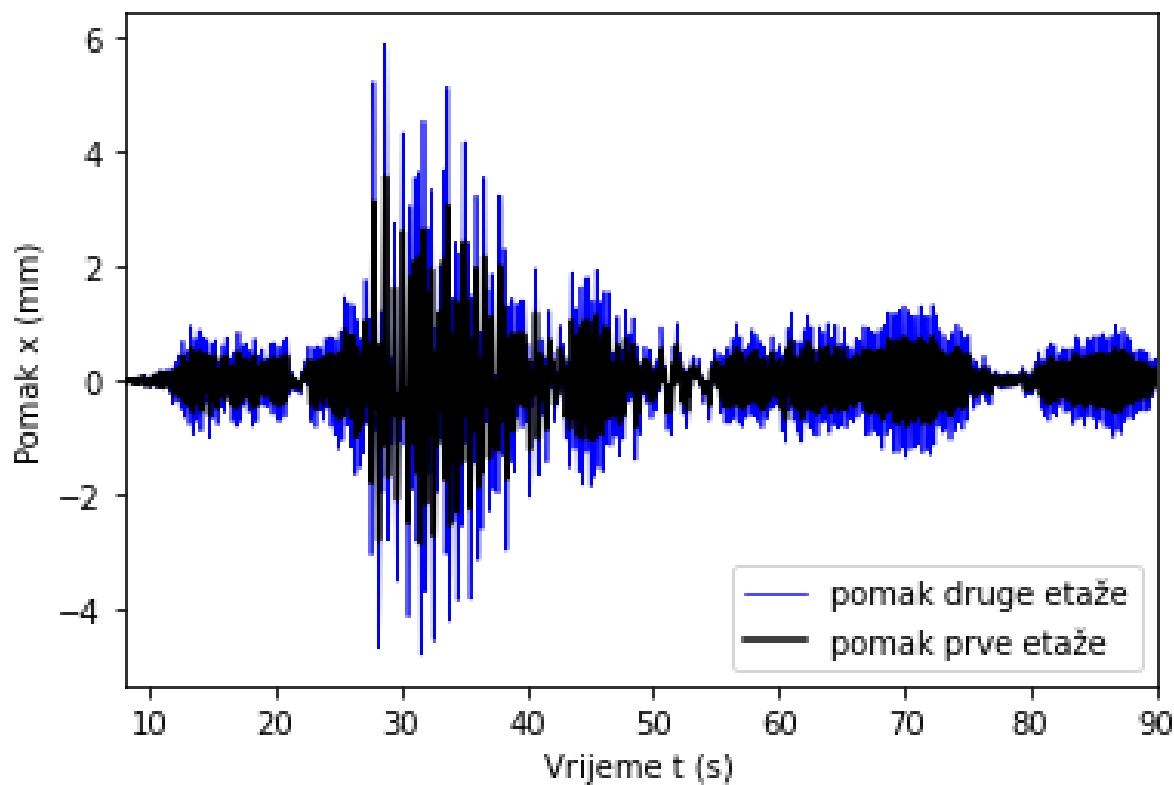
Relativni pomak druge etaže veći je u odnosu na relativni pomak prve što znači da je ona podložnija dinamičkim utjecajima od prve etaže, odnosno druga etaža je više reaktivna ili osjetljiva na dinamička opterećenja koja izazivaju oscilacije. Pobuđen je prvi ton osciliranja.

Potresni zapis Kobe ima vrlo niske frekvencije, golim okom je bilo vidljivo da se troetažna konstrukcija prilikom pobude ovim potresnim zapisom kreće gotovo kao kruto tijelo. Ovo je potresni zapis u kojem se ne događaju nagle promjene, pa sadrži niske frekvencije.

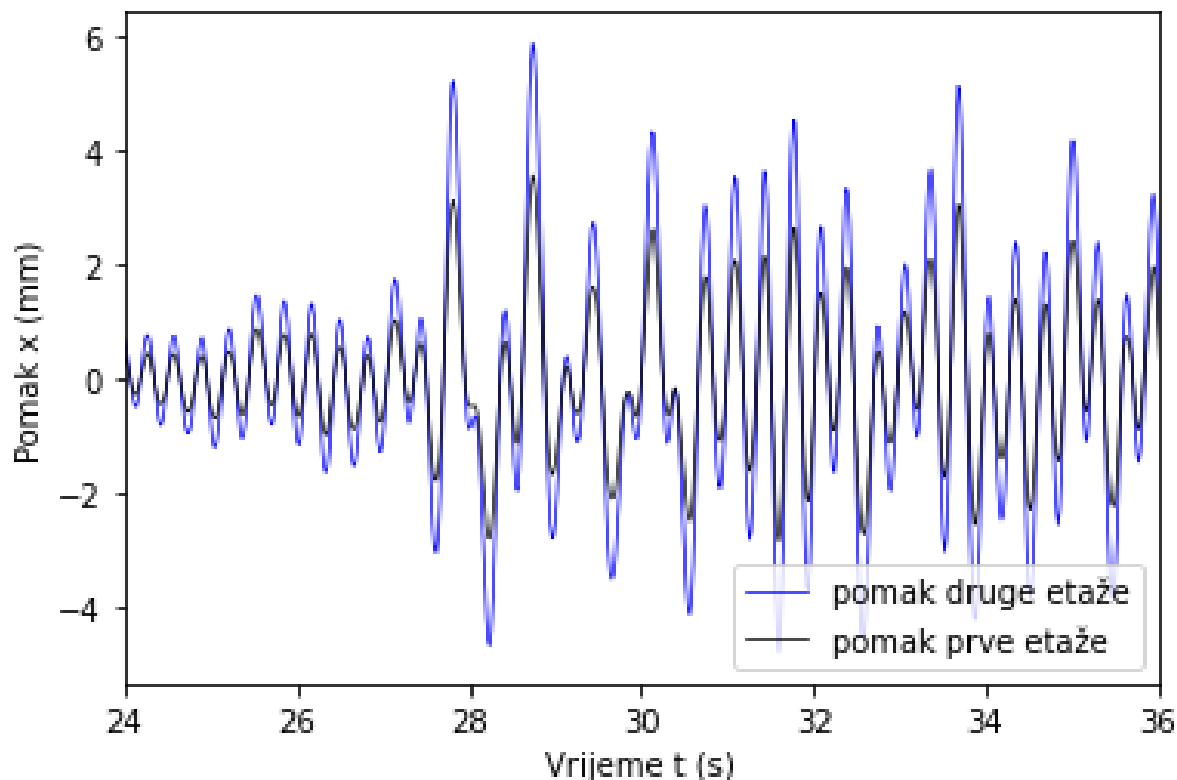
### 6.6.1.2 Numerički rezultati

Numerički rezultati potresnog zapisa prikazuju relativne pomake.

Na slici 57. prikazan je također potresni zapis Kobe, ali dobiven numeričkim postupkom.



Slika 57. Potresni zapis Kobe - numerički



Slika 58. Potresni zapis Kobe - numerički - najveće oscilacije

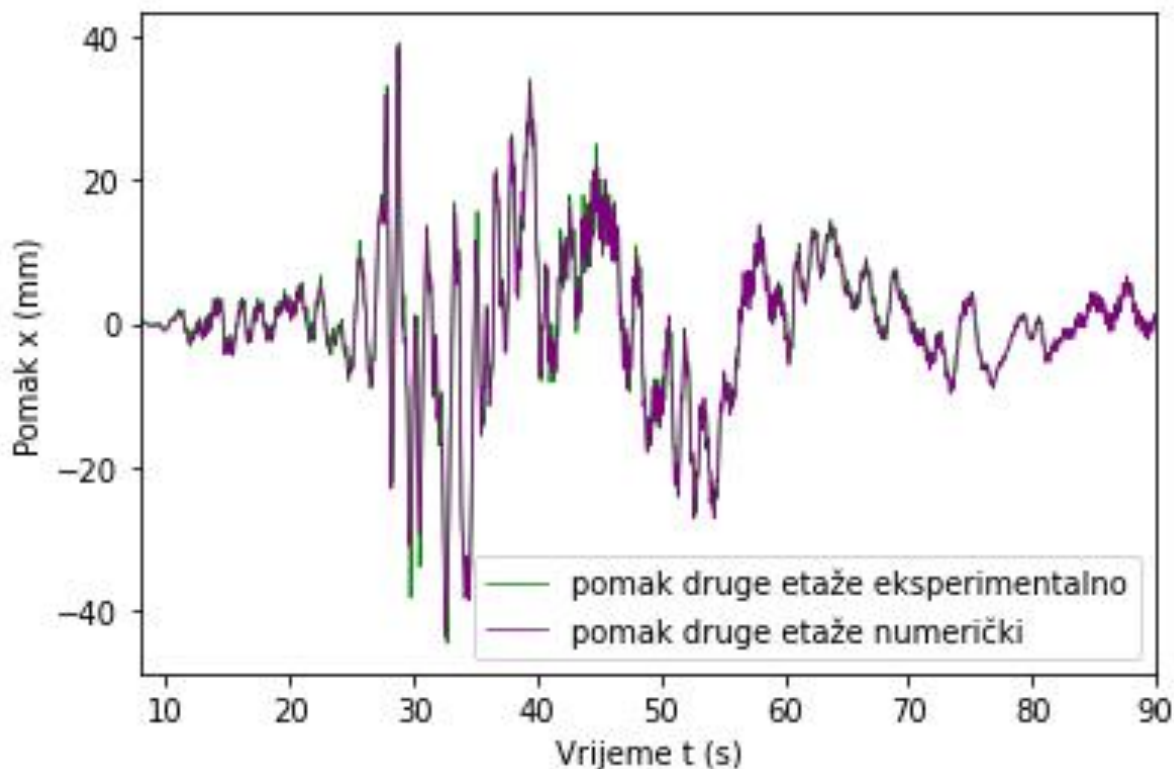
Sa slike 58. za udaljenosti između najvećih amplituda očitana je period osciliranja te je dobivena vrijednost  $T = 0,33$  s. Pomoću perioda osciliranja izračunata je frekvencija osciliranja prema formuli [jednadžba (23)]:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,33} = 3,03 \text{ Hz}$$

U potpoglavlju 3.5. izračunate su frekvencije za svaki ton osciliranja, a frekvencija osciliranja u 1. om tonu iznosi  $3,17 \text{ Hz}$ , što znači da se konstrukcija prilikom najvećih pomaka prilikom potresa Kobe nalazi u 1. tonu osciliranja uz razliku od 4,62 %.

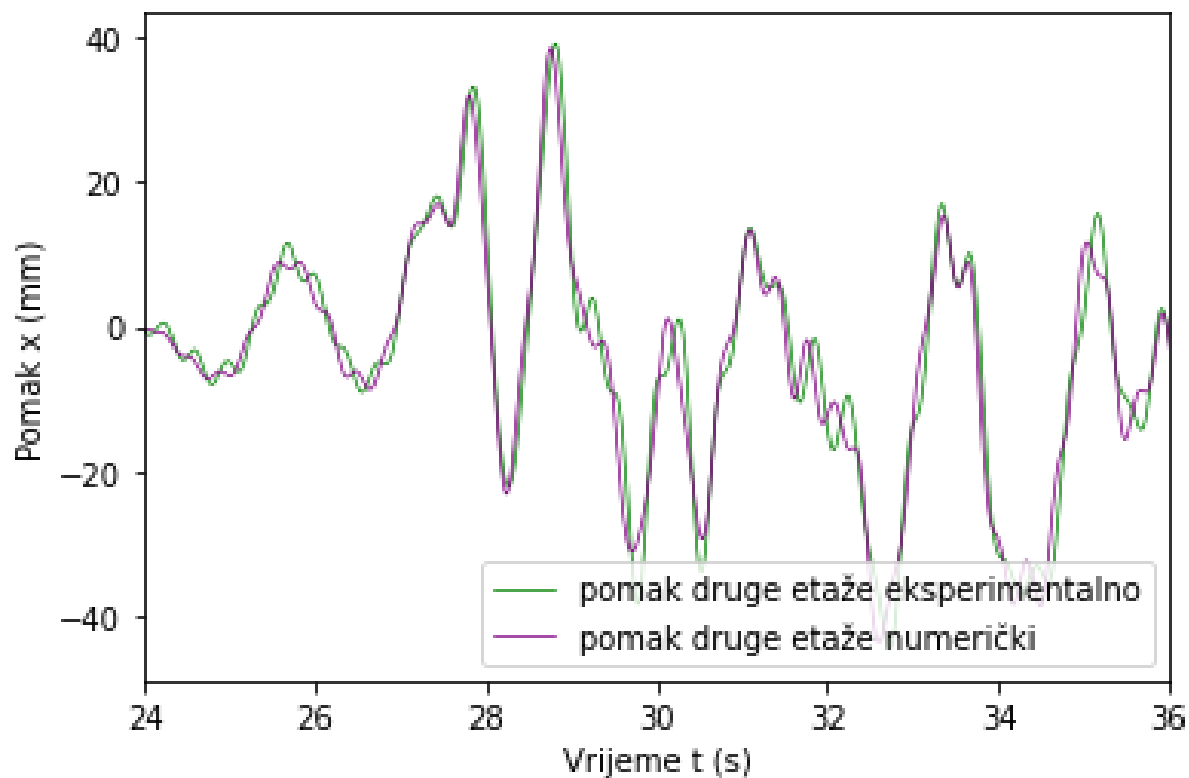
### 6.6.1.3 Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka

Na slikama 59. i 60. prikazani su dijagrami koji uspoređuju apsolutne i relativne pomake druge etaže. Za prikaz je izdvojena druga etaža jer ima najveće pomake. Dijagrami usporedbi prve etaže nalaze se u Prilogu 9.12.

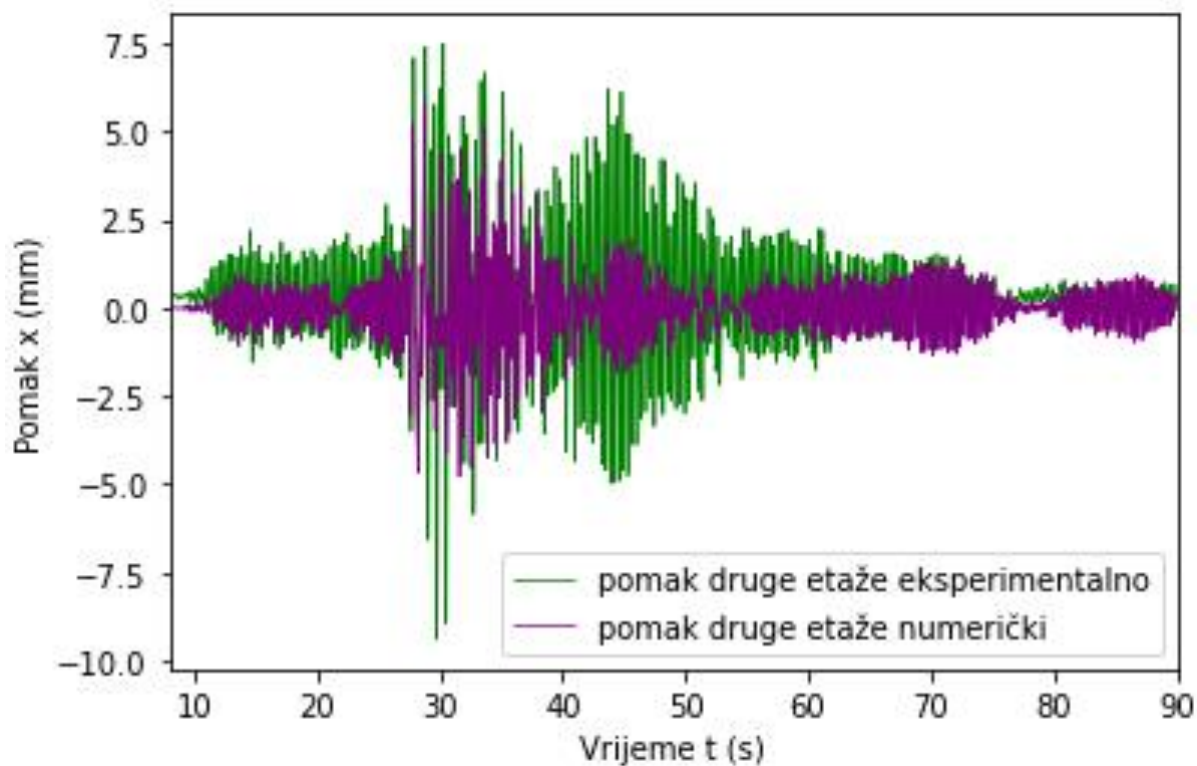


Slika 59. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže

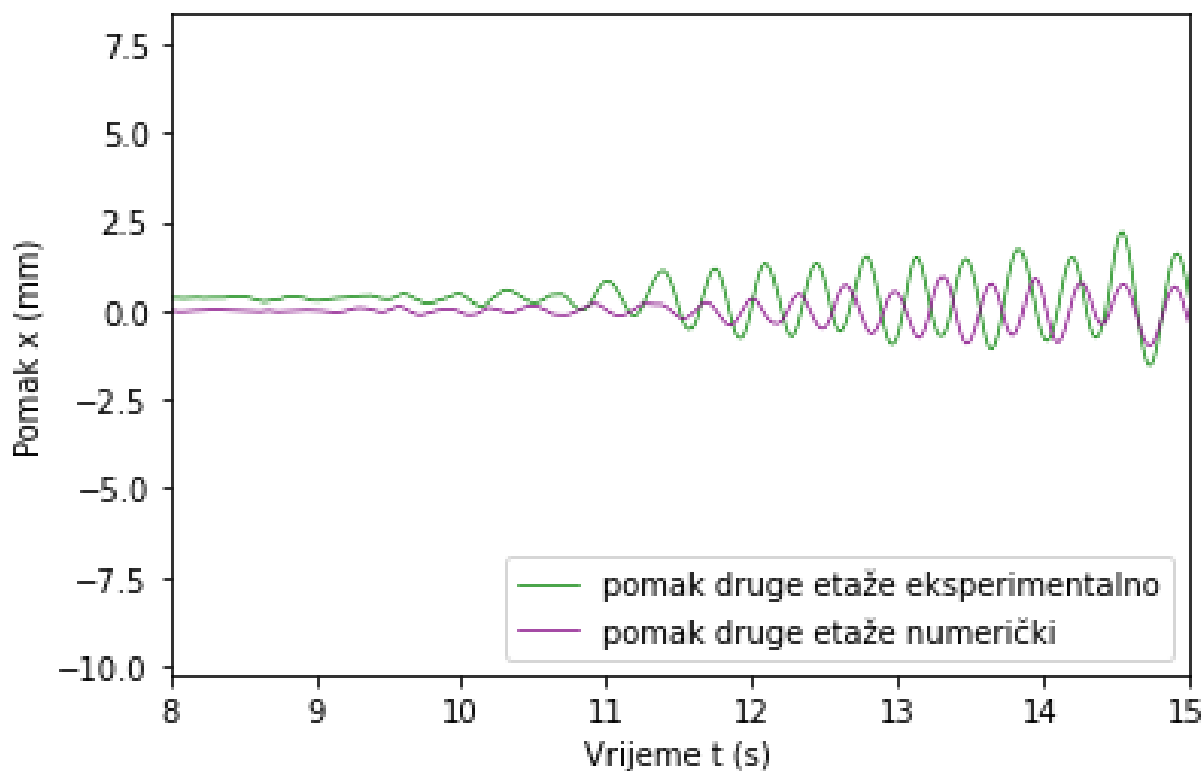
Na slici 60. izdvojeno je područje najvećih oscilacija, odnosno pomaka.



Slika 60. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 24. - 36.sec

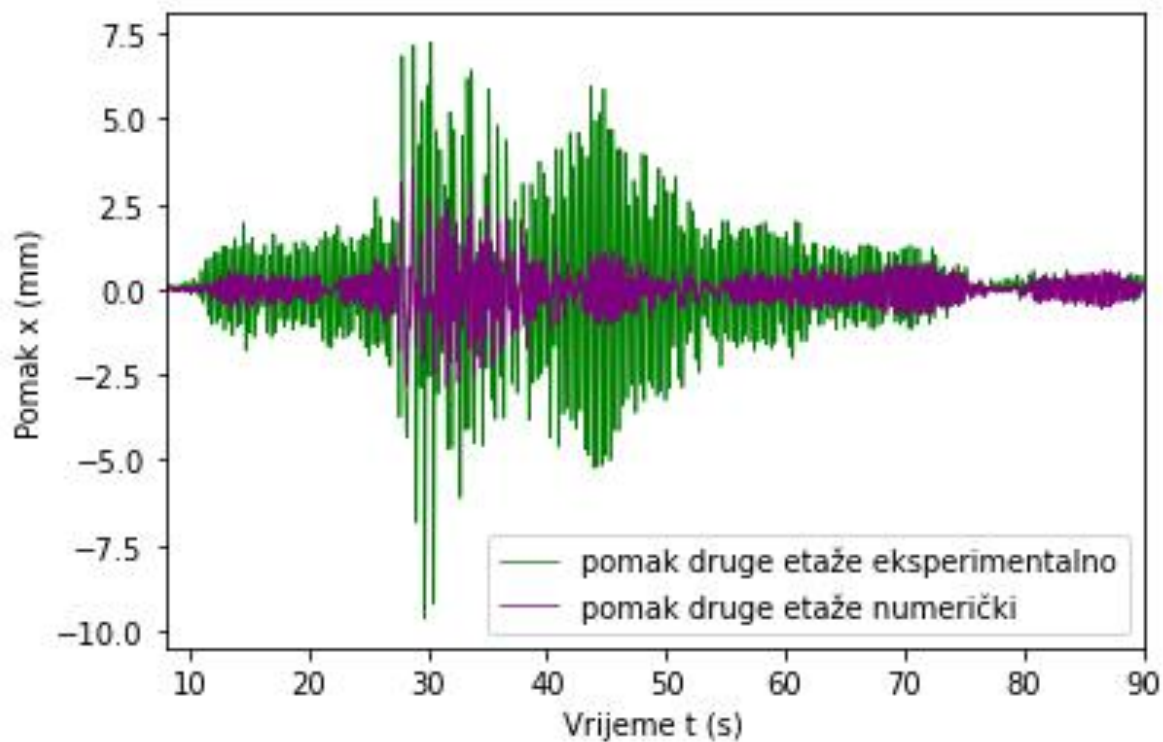


Slika 61. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže

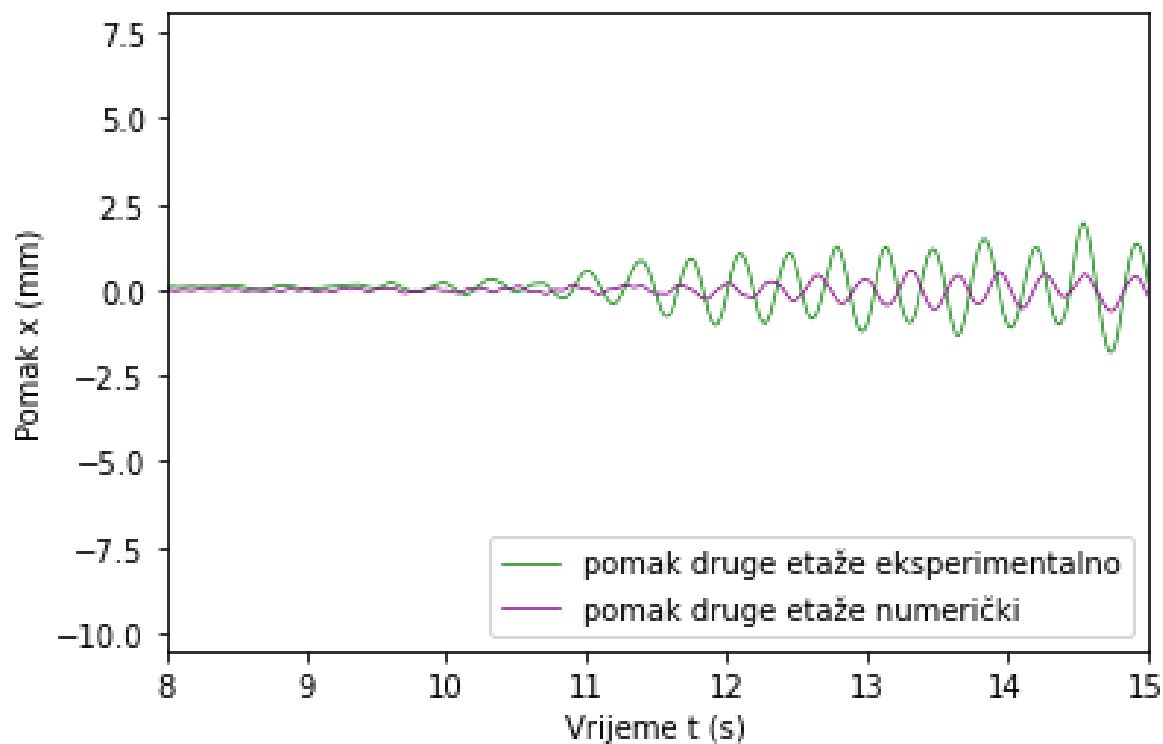


Slika 62. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže - početak zapisa

Na slikama 61. i 62. vidljiva je razlika u početnim pomacima eksperimentalnih i numeričkih rezultata. Ova razlika mogla bi biti posljedica šuma u mjerenjima ili mogućeg pomaka konstrukcije (mada vrlo malenog, približno četvrtine milimetra) koji se dogodio između referentne fotografije i početka potresnog zapisa. Radi toga, za dobivanje sljedećih slika (slike 63. i 64.) korišten je Python kod u Prilogu 9.11 u kojem su se rezultati eksperimentalnog ispitivanja korigirali na način da su spuštteni po vertikalnoj osi za 0,25 mm kako bi počinjali iz jednakog početnog položaja.



Slika 63. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže

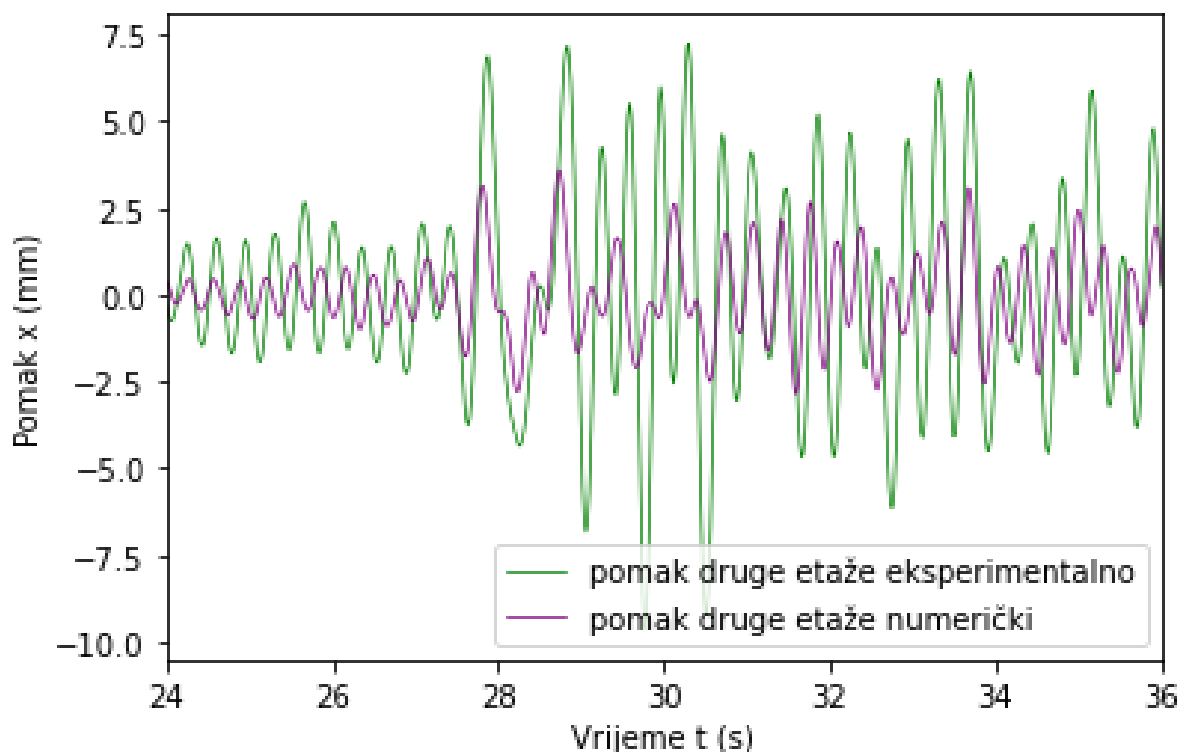


Slika 64. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže - početak zapisa

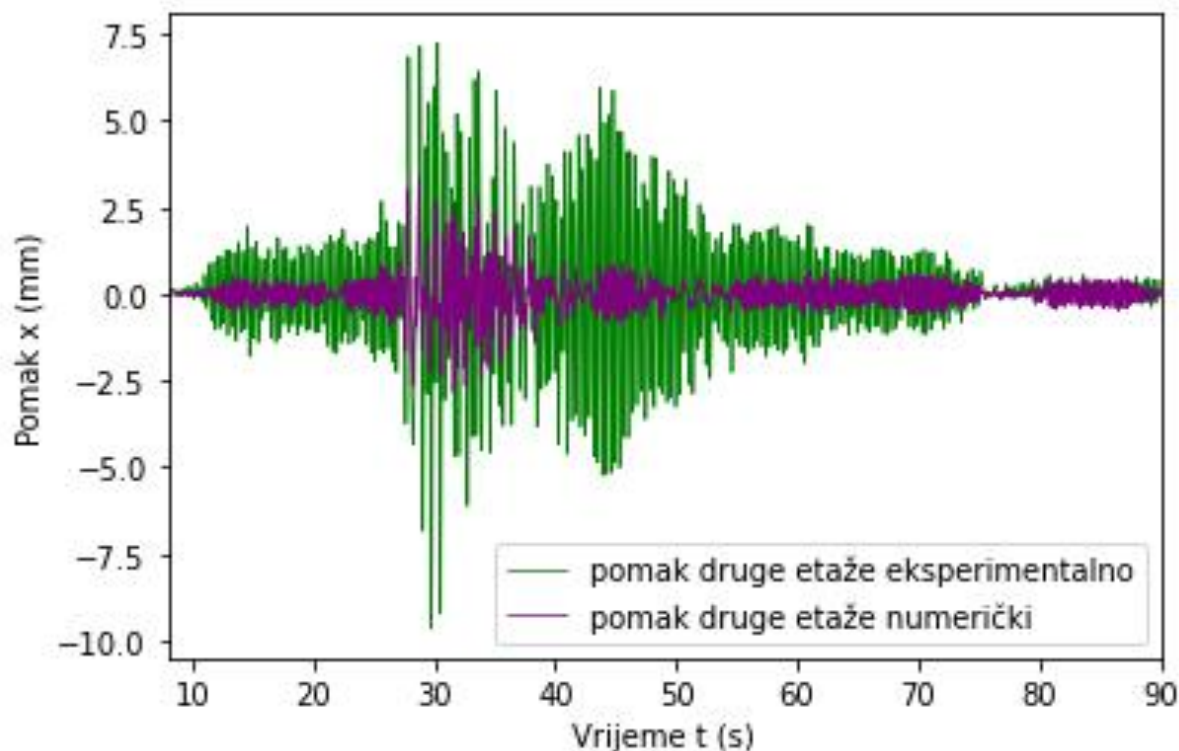


Također, kod numeričkog pomaka druge etaže, na slici 65. od oko 27. do 31. sekunde, primjećuje se pojava viših tonova, najvjerojatnije drugog tona, dok u ostatku osciliranja dominira prvi ton. Razlike u amplitudama rezultat su prigušenja.

Naime, ako je u numeričkoj analizi frekvencija nešto niža od stvarne, ta će se frekvencija ranije pobuditi nego u stvarnosti. Za potrese je karakteristično da sadrže niz frekvencija, ali ne i sve. Svaka konstrukcija ima skup vlastitih frekvencija na kojima će prirodno oscilirati. Prvi ton (ili prva vlastita frekvencija) je najniža frekvencija na kojoj će konstrukcija oscilirati. Viši tonovi odnose se na više frekvencije oscilacija. Potresi donose širok spektar frekvencija, ali ne nužno sve moguće frekvencije. Ako frekvencija unutar potresnog zapisa odgovara jednoj od vlastitih frekvencija konstrukcije, ta će se frekvencija pobuditi i konstrukcija će na toj frekvenciji oscilirati intenzivnije. Ovo je poznato kao rezonancija. Nemoguće je u numeričkom modelu postići identične dinamičke parametre kao u stvarnom okruženju. Numerički modeli su aproksimacije stvarnih konstrukcija. Iako su napredne metode i algoritmi sposobni vrlo precizno modelirati stvarne sustave, uvijek postoji neka razlika između modela i stvarnosti [18].



Slika 65. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže 24. - 36. sec



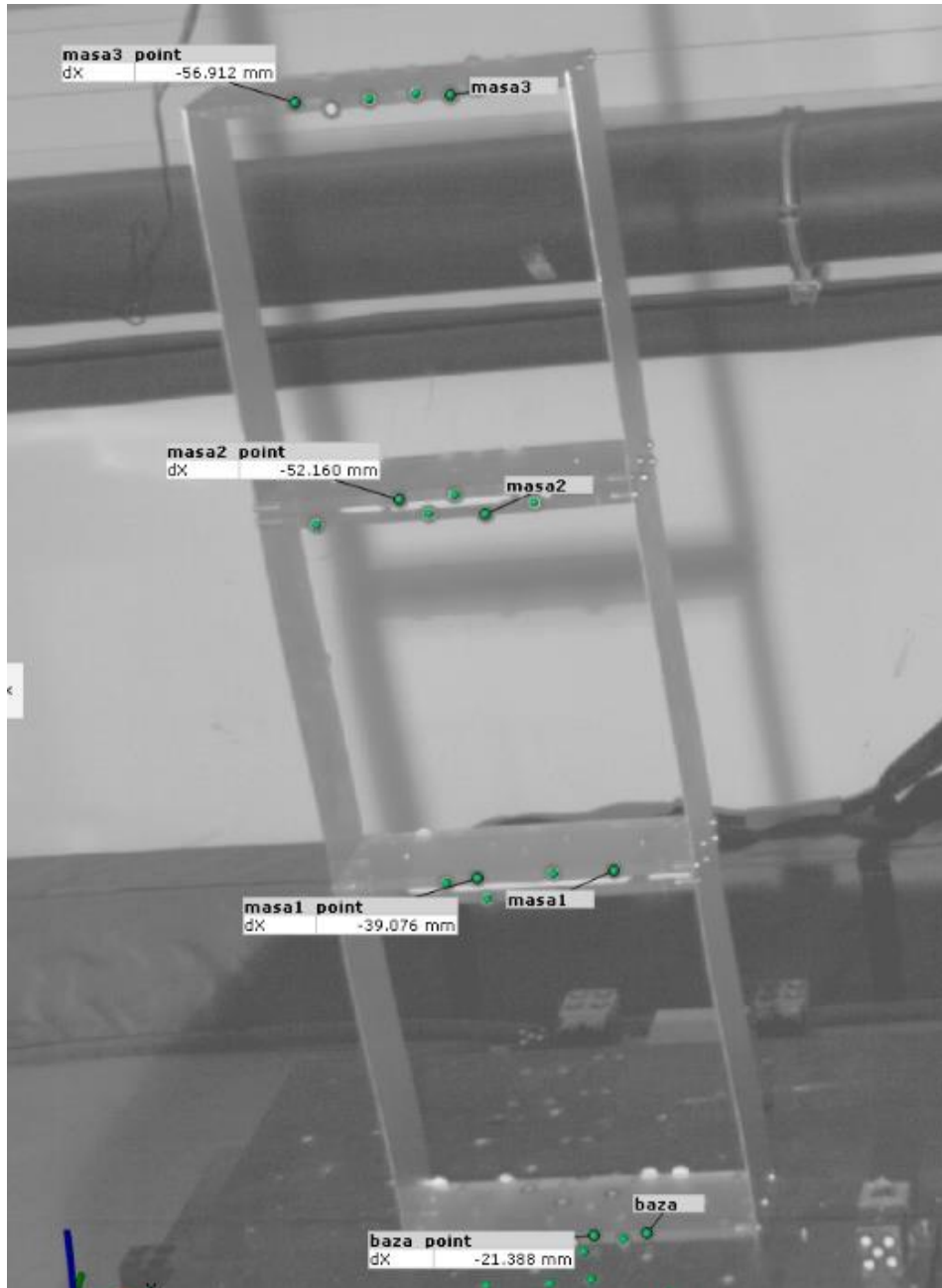
Slika 66. Kobe - usporedba relativnih pomaka 2.etaže - veće prigušenje

Radi provedene analize u potpoglavlju 6.1.2, gdje je primijenjen povećani koeficijent prigušenja ( $\zeta = 0.011777$ ), izvedena je usporedba i za potresni zapis Kobe. Sve dok oscilacije ostaju unutar malenih amplituda i dok je sustav u linearnom području, koeficijent prigušenja održava konstantnu vrijednost kroz vrijeme, a periode oscilacija su konstantne. Međutim, kad sustav izađe izvan linearnog područja, ova pravilnost se gubi. Kod slobodnih prigušenih oscilacija (potpoglavlje 6.1.2), gdje su pomaci značajno veći, prigušenje na početku oscilacija je veće od onog u kasnijim fazama. U ovom konkretnom slučaju, gdje su pomaci bili ograničeni na 6 mm, promjena koeficijenta prigušenja nije imala značajniji utjecaj (slika 66.).

### 6.6.2 Potres Northridge

Potres u Northridge-u dogodio se 17. siječnja 1994. godine u Kaliforniji, SAD. Magnituda potresa bila je 6,7 po Richterovoj ljestvici, a epicentar se nalazio u predgrađu Los Angelesa. Veliki broj građevina, uključujući i one koje su smatrane otpornima na potrese, pretrpjele su značajna oštećenja. Potres je izazvao oštećenja ili rušenje mnogih mostova i nadvožnjaka [11].

Na slici 67. prikazan je deformirani oblik troetažne konstrukcije te pomaci svakog pojedinog kata prilikom osciliranja.

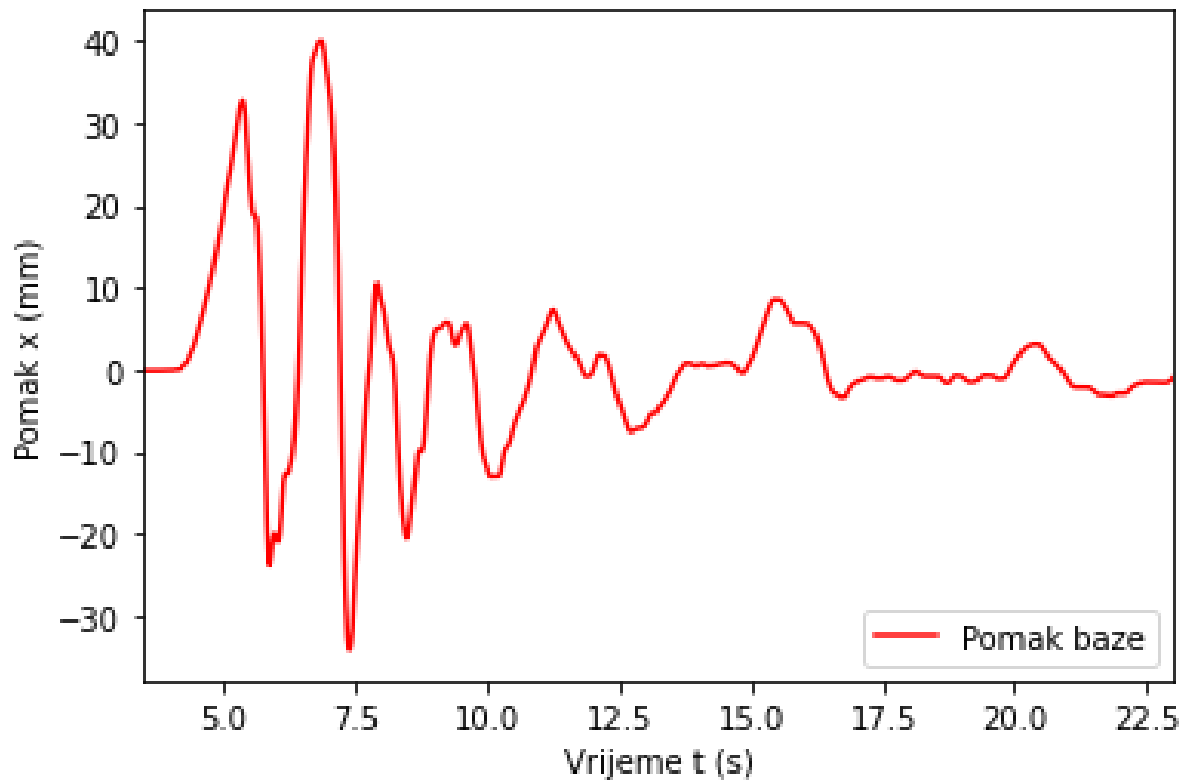


Slika 67. Deformacija konstrukcije - Potres Northridge

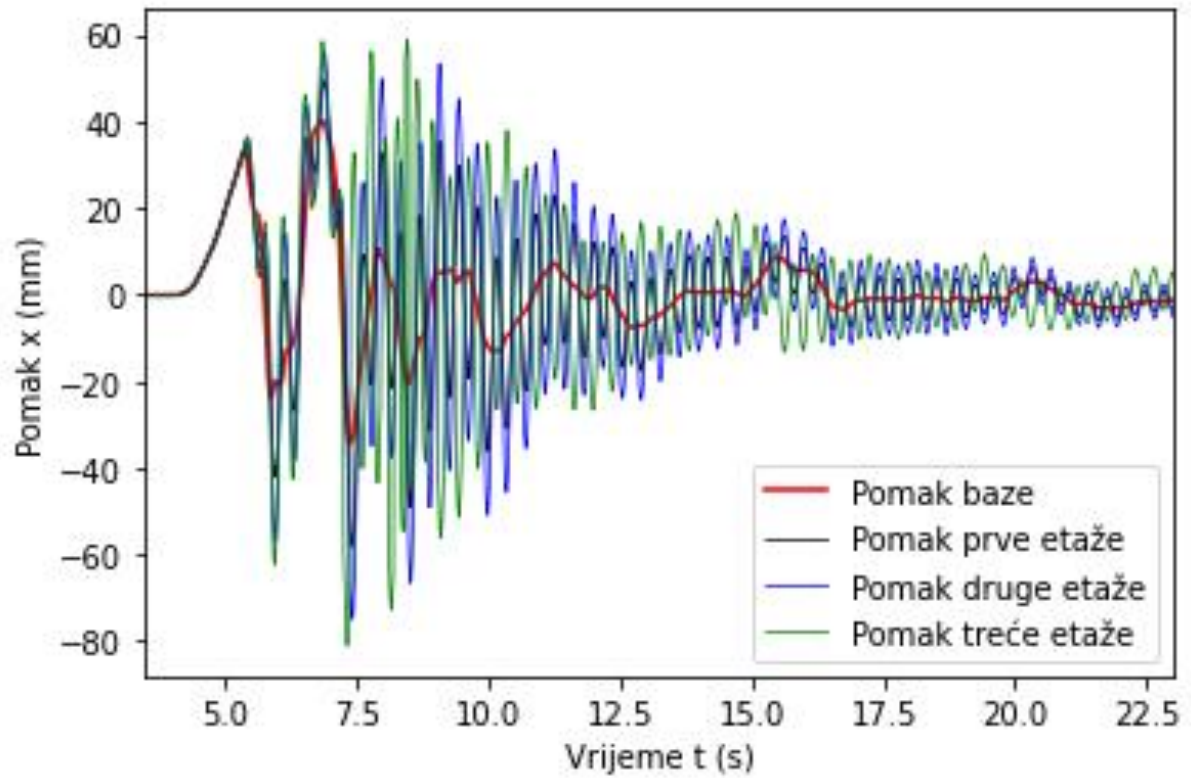
### 6.6.2.1 Eksperimentalni rezultati

Dijagrami eksperimentalnih rezultata prikazuju apsolutne pomake.

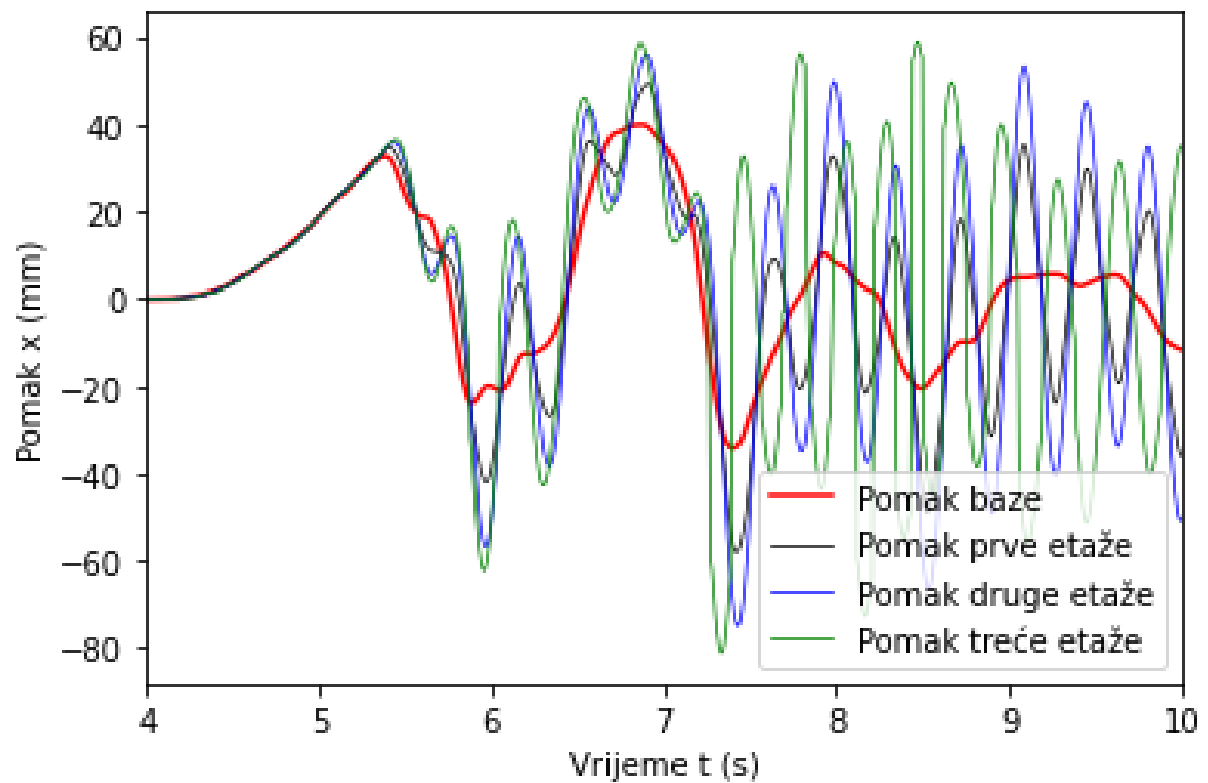
Na slici 68. prikazan je pomak baze, a na slikama 69. i 70. pomaci preostale tri etaže zajedno s pomakom baze.



Slika 68. Potresni zapis Northridge – eksperimentalno - pomak baze



Slika 69. Potresni zapis Northridge – eksperimentalno



Slika 70. Potresni zapis Northridge – eksperimentalno 4. - 10. sec

Na slici 69. pri početku potresnog zapisa vidljivi su veliki pomaci baze, te pomaci konstrukcije prate istu. No nakon 7. sekunde primijete se veliki pomaci etaža dok se pomaci baze smiruju.

Iz dijagrama na slici 70. izračunati su relativni pomaci etaža 1., 2. i 3. ovisno o pomaku baze u trenutku kada su pomaci najveći (oko 7,3 sec) koji iznose:

$$u_1 = 23.893524 \text{ mm}$$

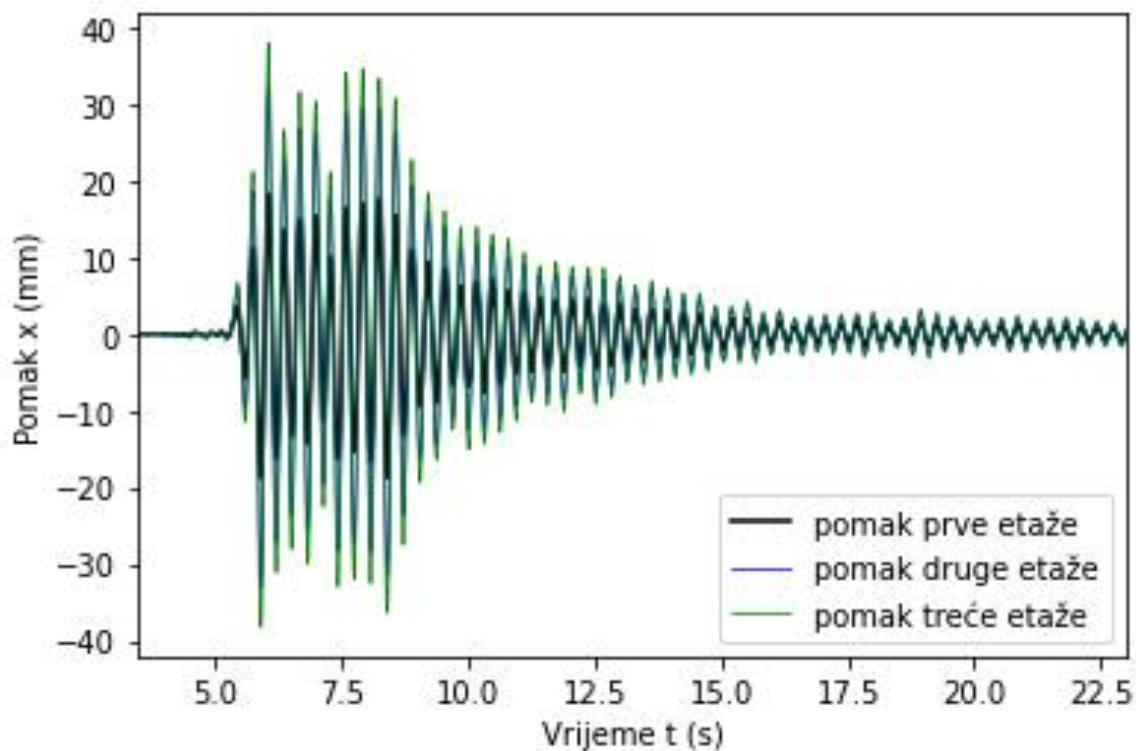
$$u_2 = 40.775328 \text{ mm}$$

$$u_3 = 46.909612 \text{ mm}$$

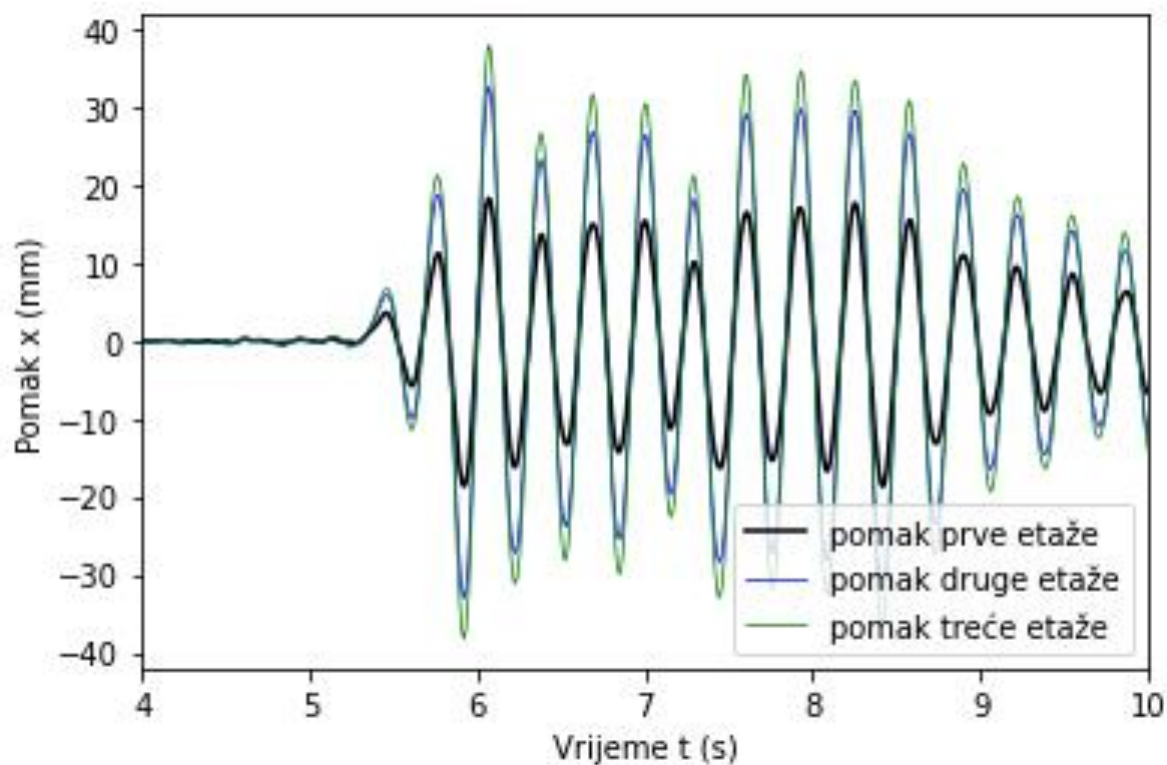
### 6.6.2.2 Numerički rezultati

Numerički rezultati potresnog zapisa prikazuju relativne pomake.

Na slikama 71. i 72. prikazani su također dijagrami potresnog zapisa Northridge, ali dobiveni numeričkim postupkom.



Slika 71. Potresni zapis Northridge – numerički



Slika 72. Northridge potresni zapis numerički - najveće oscilacije

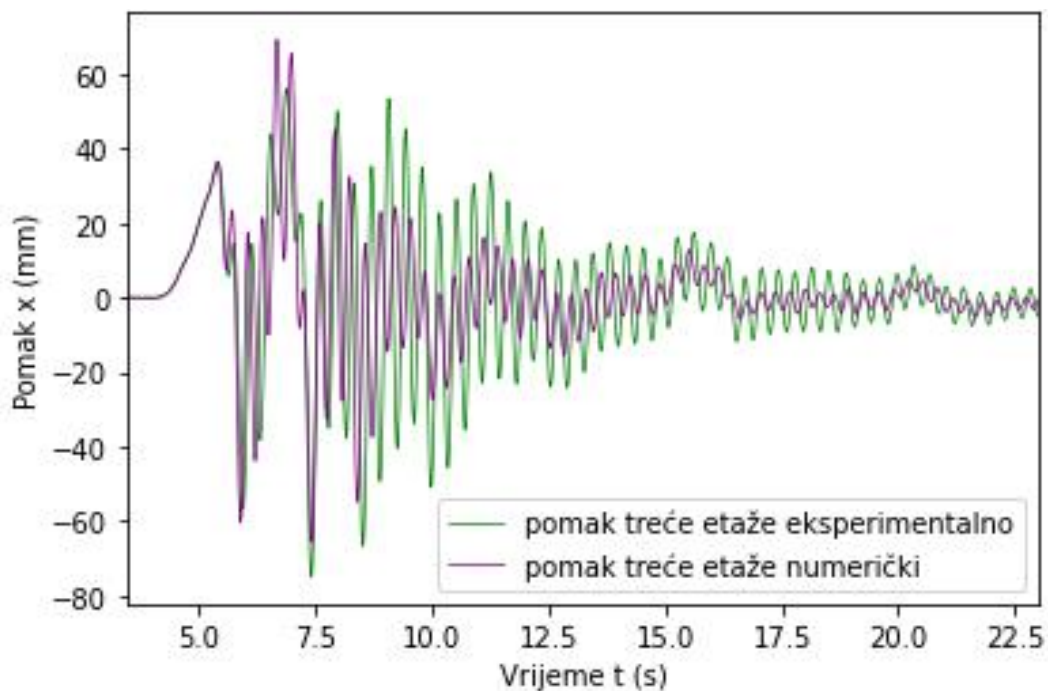
Sa slike 72. za udaljenosti između najvećih amplituda očitana je period osciliranja te je dobivena vrijednost  $T = 0,3$  s. Pomoću perioda osciliranja izračunata je frekvencija osciliranja prema formuli [jednadžba (23)]:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,3} = 3,33 \text{ Hz}$$

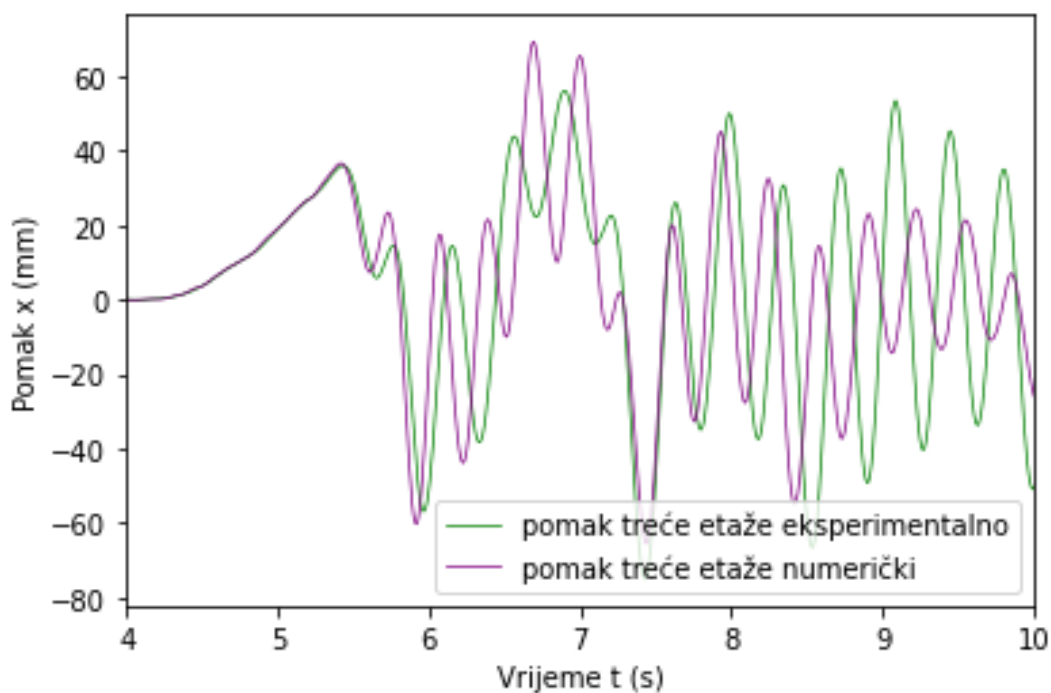
U potpoglavlju 3.5 izračunate su frekvencije za svaki ton osciliranja, a frekvencija osciliranja u 1.-om tonu iznosi  $3.17 \text{ Hz}$ , što znači da se konstrukcija prilikom najvećih pomaka prilikom potresa Northridge nalazi u 1. tonu osciliranja uz razliku od 5%.

### 6.6.2.3 Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka

Slika 73. prikazuje dijagram usporedbe apsolutnih pomaka 3.etaže dok slika 74. prikazuje izdvojeni dio sa najvećim oscilacijama. Za prikaz je izdvojena treća etaža jer ima najveće pomake. Dijagrami usporedbi prve i druge etaže nalaze se u Prilogu 9.13.



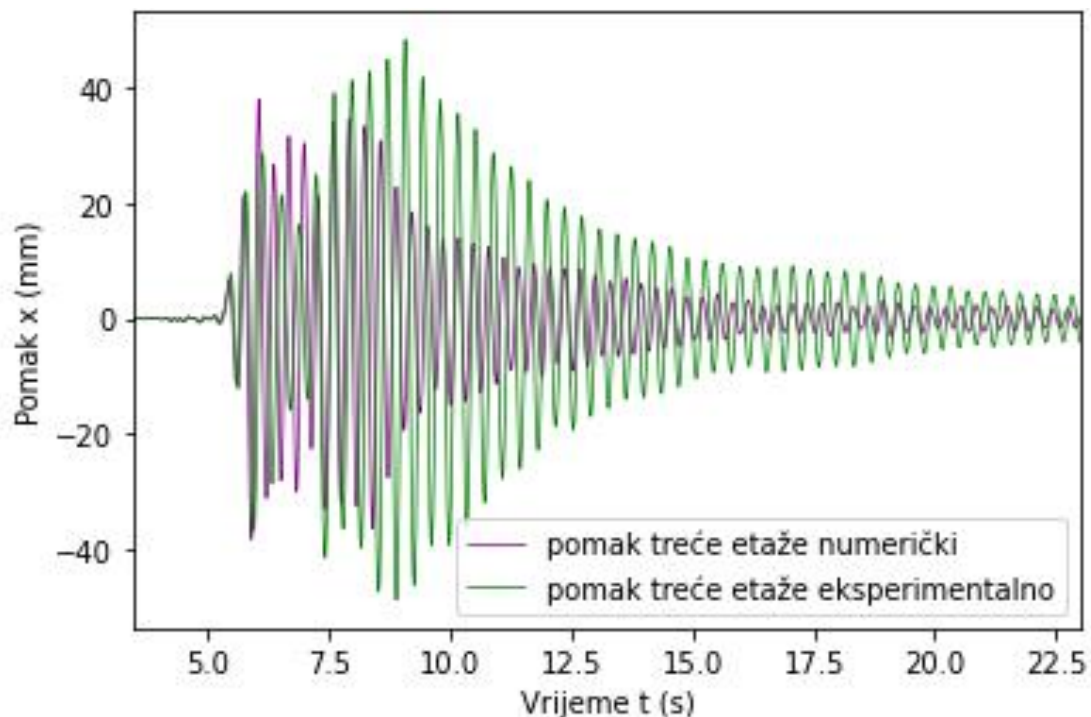
Slika 73. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže



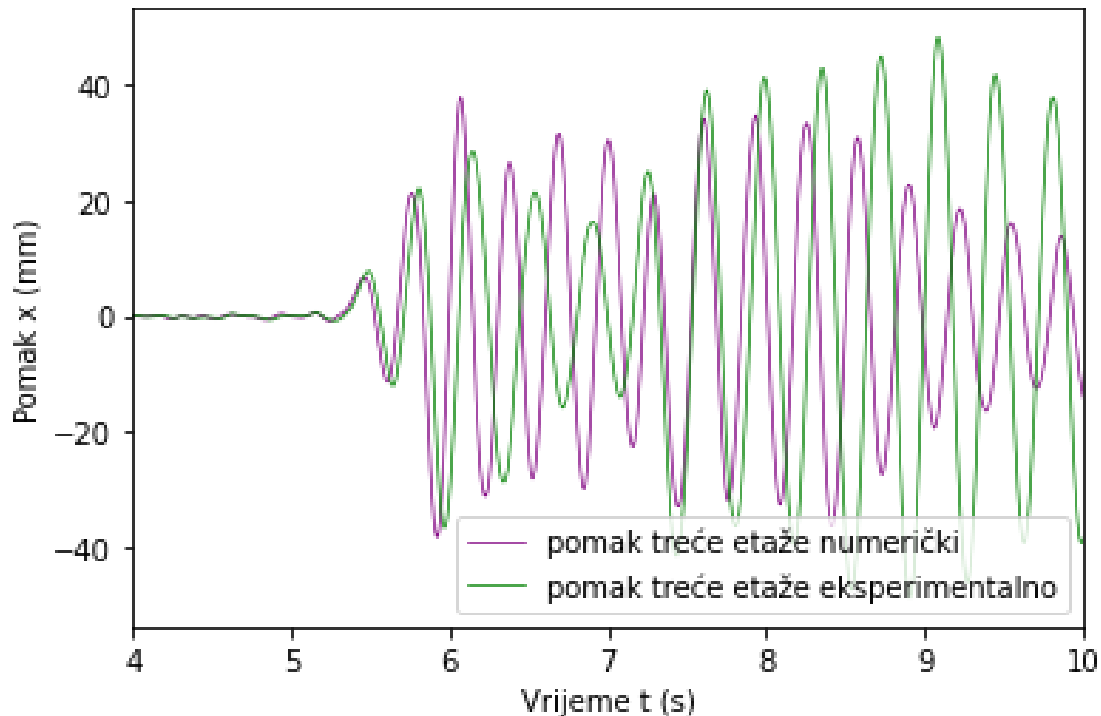
Slika 74. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže 4. -10. sec



Slika 75. prikazuje dijagram usporedbe relativnih pomaka 3.etaže dok slika 76. prikazuje izdvojeni dio s najvećim oscilacijama.



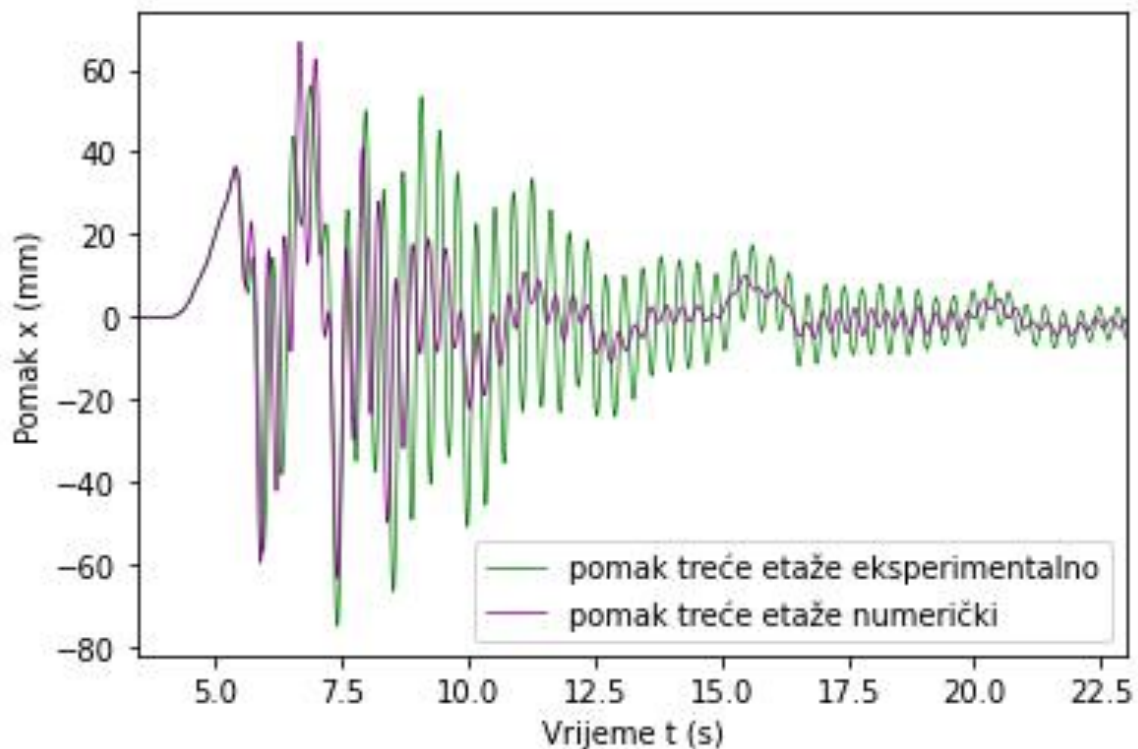
Slika 75. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže



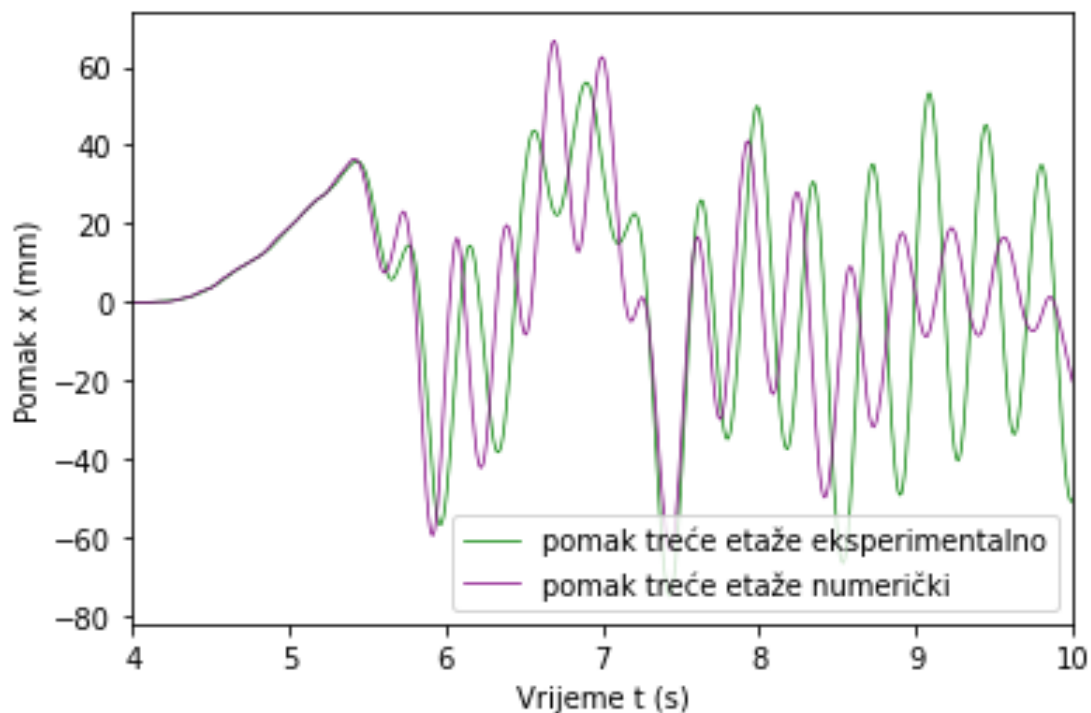
Slika 76. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže 4. - 10. sec

Radi provedene analize u potpoglavlju 6.1.2, gdje je primijenjen povećani koeficijent prigušenja ( $\zeta = 0.011777$ ), izvedena je usporedba i za potresni zapis Northridge.

Na slikama 77. i 78. vidljivo je da veće prigušenje stvara još veće razlike između numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Manje prigušenje daje preciznije numeričke rezultate jer su već početni numerički rezultati manji od onih eksperimentalnih.

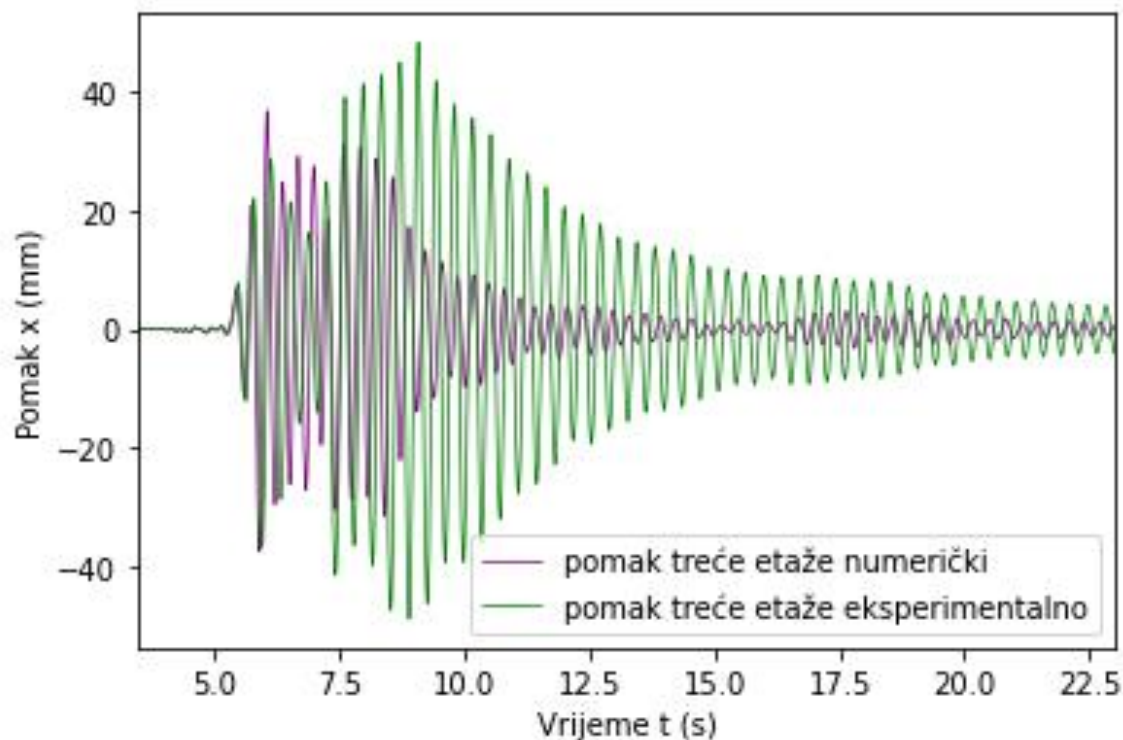


Slika 77. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže (veće prigušenje)

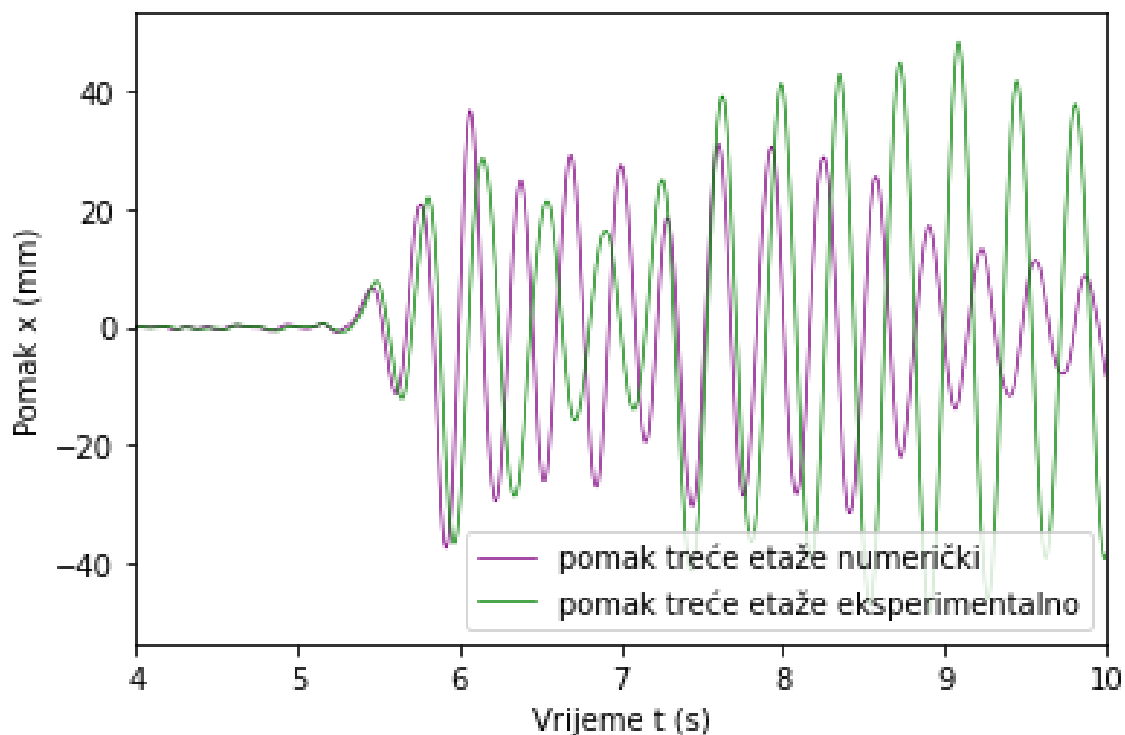


Slika 78. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 3.etaže 4. -10. sec (veće prigušenje)

Na slikama 79. i 80. može se primijetiti da promjena prigušenja ne uzrokuje značajne promjene u relativnim pomacima. Međutim, rezultati su manje precizni.



Slika 79. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže (veće prigušenje)



Slika 80. Northridge - usporedba relativnih pomaka 3. etaže 4. - 10. sec (veće prigušenje)

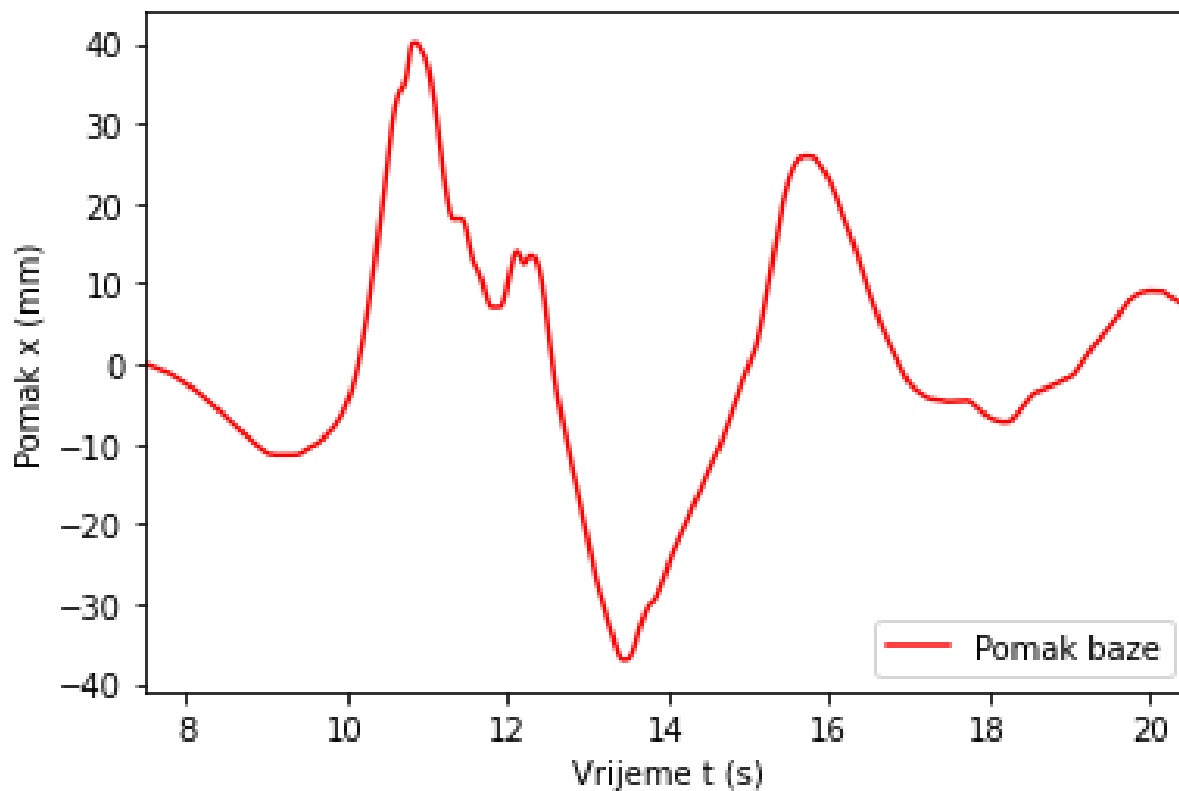
### 6.6.3 Potres El Centro

Jedan je od ključnih događanja u povijesti seizmologije i građevinskog inženjeringa, posebno u kontekstu Sjedinjenih Američkih Država. Dogodio se 18. svibnja 1940. godine u El Centru, Kalifornija, SAD. Bio je jačine 6,9 po Richterovoj ljestvici. Hipocentar je bio na oko 16 km dubine. Ovaj potres bio je jedan od prvih koji je podvrgnut detaljnoj analizi u smislu utjecaja na građevinske konstrukcije. Iako potres nije bio izuzetno snažan, pružio je uvid u ponašanje tektonskih ploča u regiji, što je korisno za procjenu rizika od budućih potresa. Oštećenja koja su nastala pokazala su slabe točke u tadašnjem građevinskom dizajnu i materijalima, potičući inovacije i istraživanja na tom području, a iako su oštećenja bila relativno manja u usporedbi s potresima slične magnitude, bila je jasna potreba za povećanjem otpornosti infrastrukture na potrese [12].

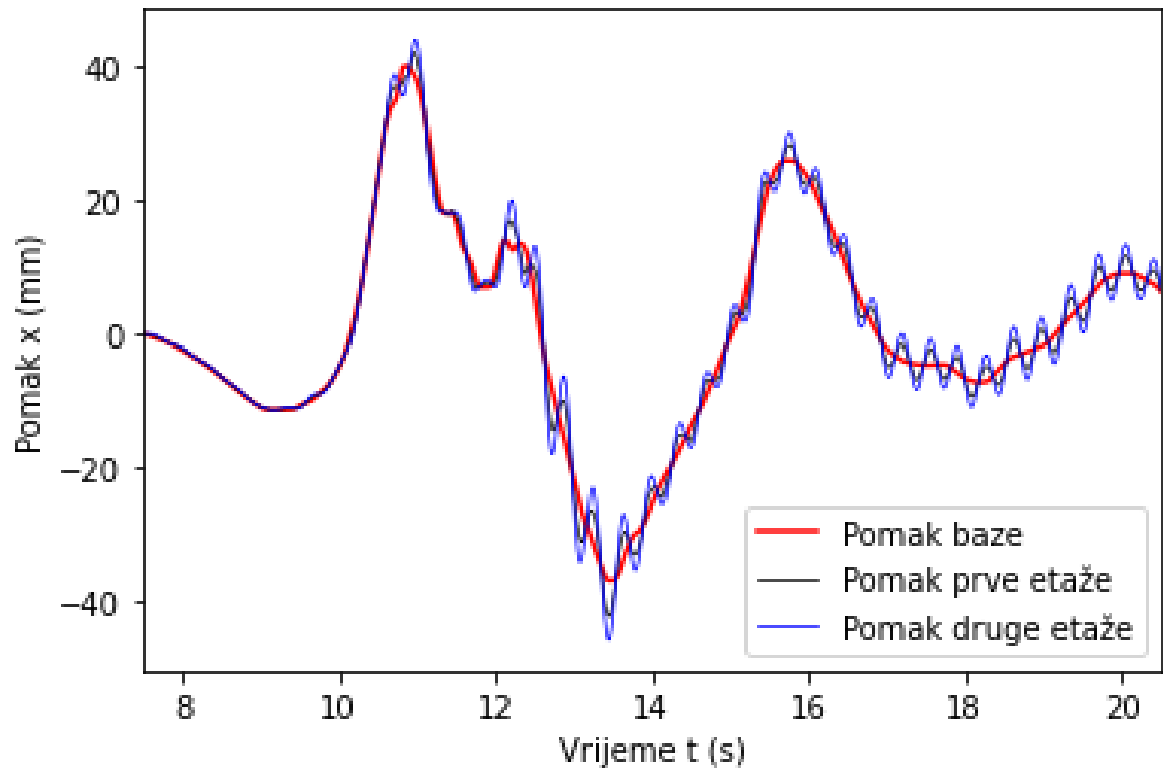
### 6.6.3.1 Eksperimentalni rezultati

Dijagrami eksperimentalnih rezultata prikazuju apsolutne pomake.

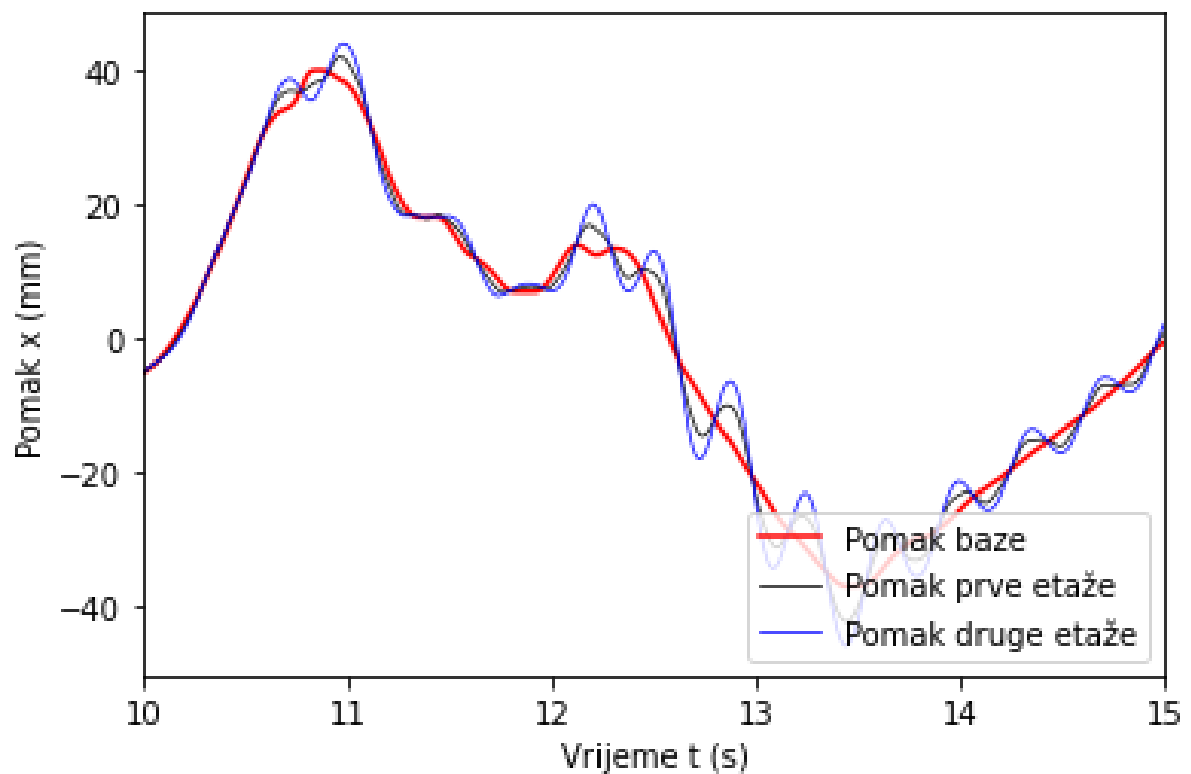
Na slici 81. prikazan je pomak baze, a na slikama 82. i 83. pomaci preostalih dviju etaža zajedno s pomakom baze.



Slika 81. Potresni zapis El Centro – eksperimentalno - pomak baze



Slika 82. Potresni zapis El Centro – eksperimentalno



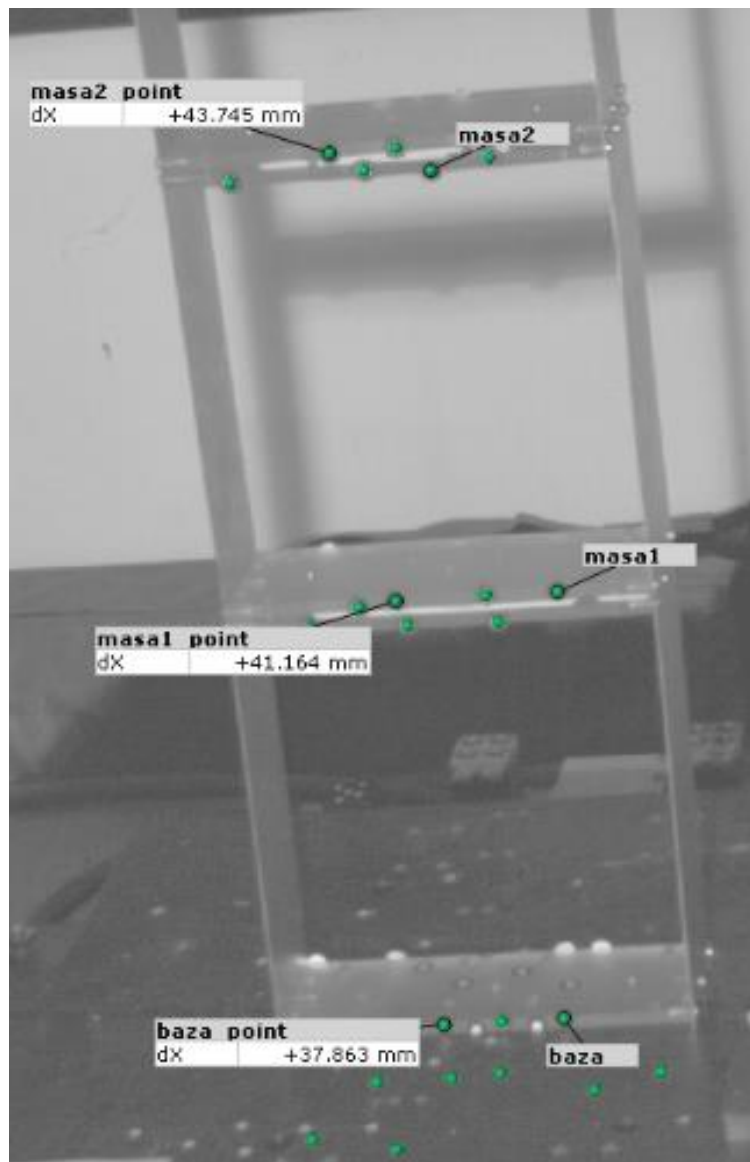
Slika 83. Potresni zapis El Centro – eksperimentalno 10. – 15. sec

Na slici 83. prikazan je potresni zapis El Centro od 10. do 15. sekunde gdje su najveća osciliranja, a na slici 84. deformacija konstrukcije u tim trenucima.

Iz dijagrama na slici 83. izračunati su relativni pomaci etaža 1. i 2., ovisno o pomaku baze u trenutku kada su pomaci najveći (oko 11 sec) koji iznose:

$$u_1 = 2.031904 \text{ mm}$$

$$u_2 = 4.007642 \text{ mm}$$

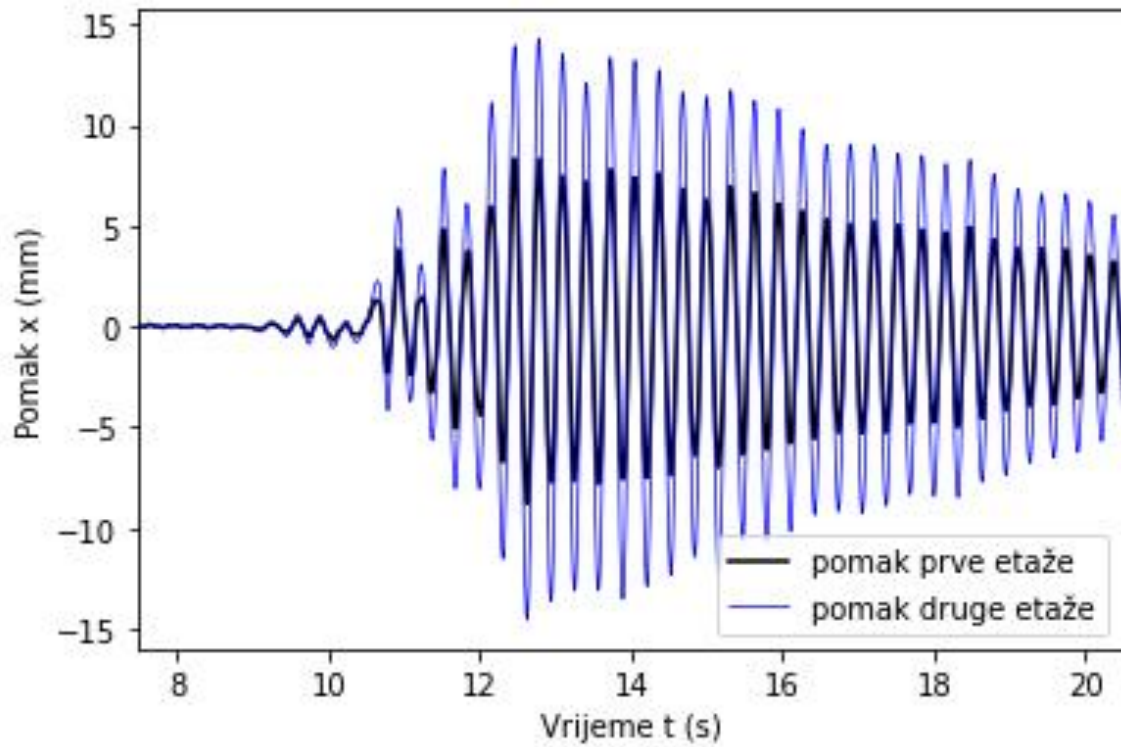


Slika 84. Deformacija konstrukcije - Potres El Centro

### 6.6.3.2 Numerički rezultati

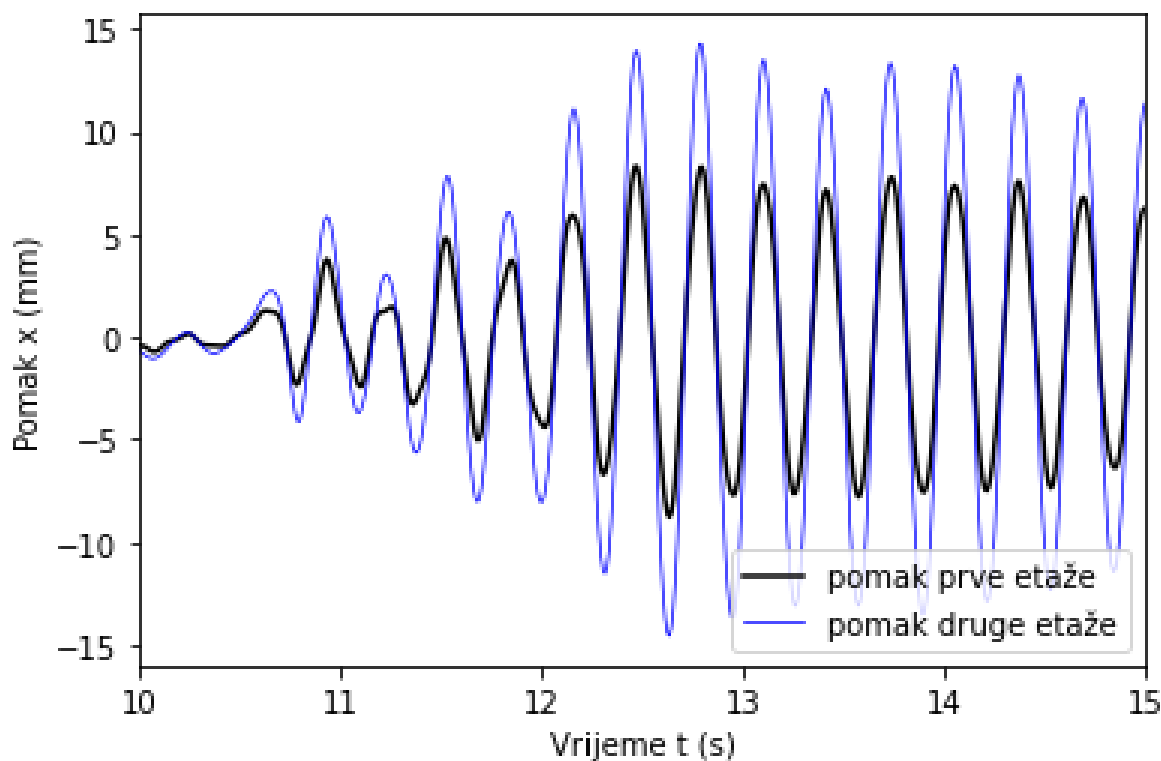
Numerički rezultati potresnog zapisa prikazuju relativne pomake.

Na slikama 85. i 86. prikazani su također dijagrami potresnog zapisa El Centro, ali dobiveni numeričkim postupkom.



Slika 85. Potresni zapis El Centro – numerički





Slika 86. Potresni zapis El Centro – numerički -10. -15. sekunde

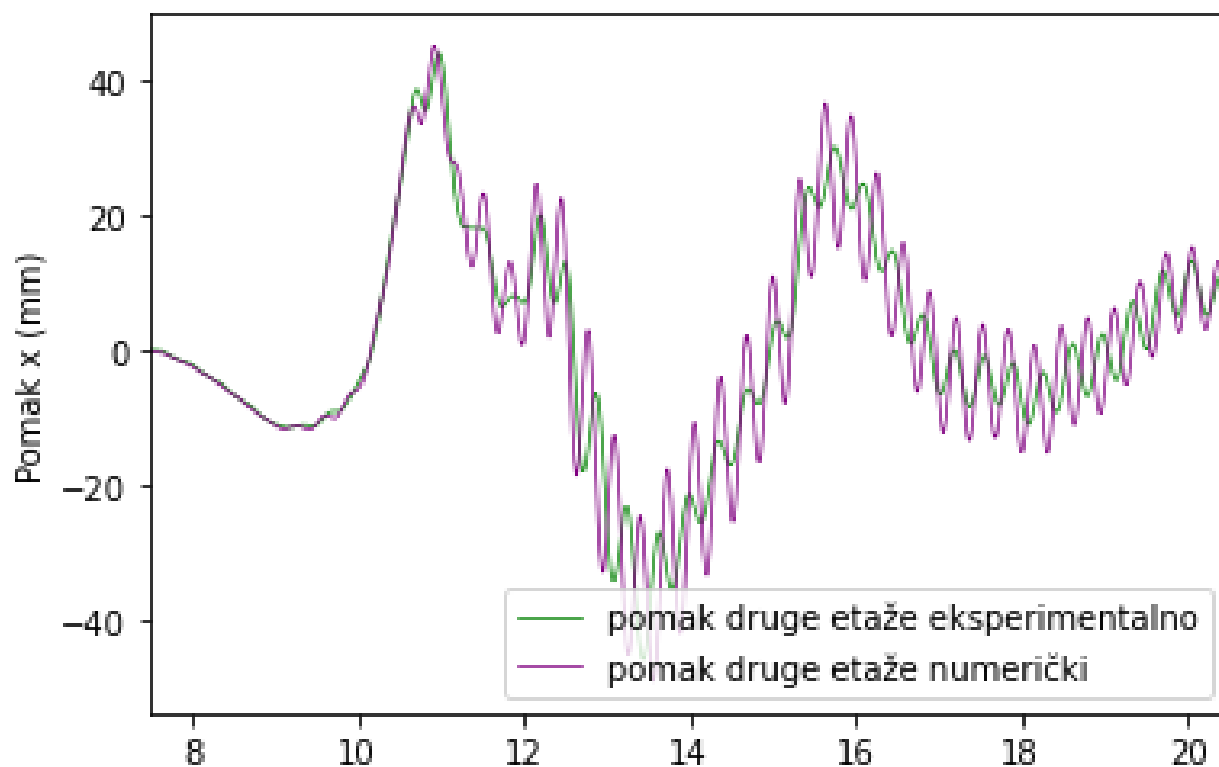
Sa slike 86. za udaljenosti između najvećih amplituda očitana je period osciliranja te je dobivena vrijednost  $T = 0,3$  s. Pomoću perioda osciliranja izračunata je frekvencija osciliranja prema formuli [jednadžba (23)]:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,3} = 3,33 \text{ Hz}$$

U potpoglavlju 3.5 izračunate su frekvencije za svaki ton osciliranja, a frekvencija osciliranja u 1.0m tonu iznosi  $3.17 \text{ Hz}$ , što znači da se konstrukcija prilikom najvećih pomaka prilikom potresa El Centro nalazi u 1. tonu osciliranja uz razliku od 5%.

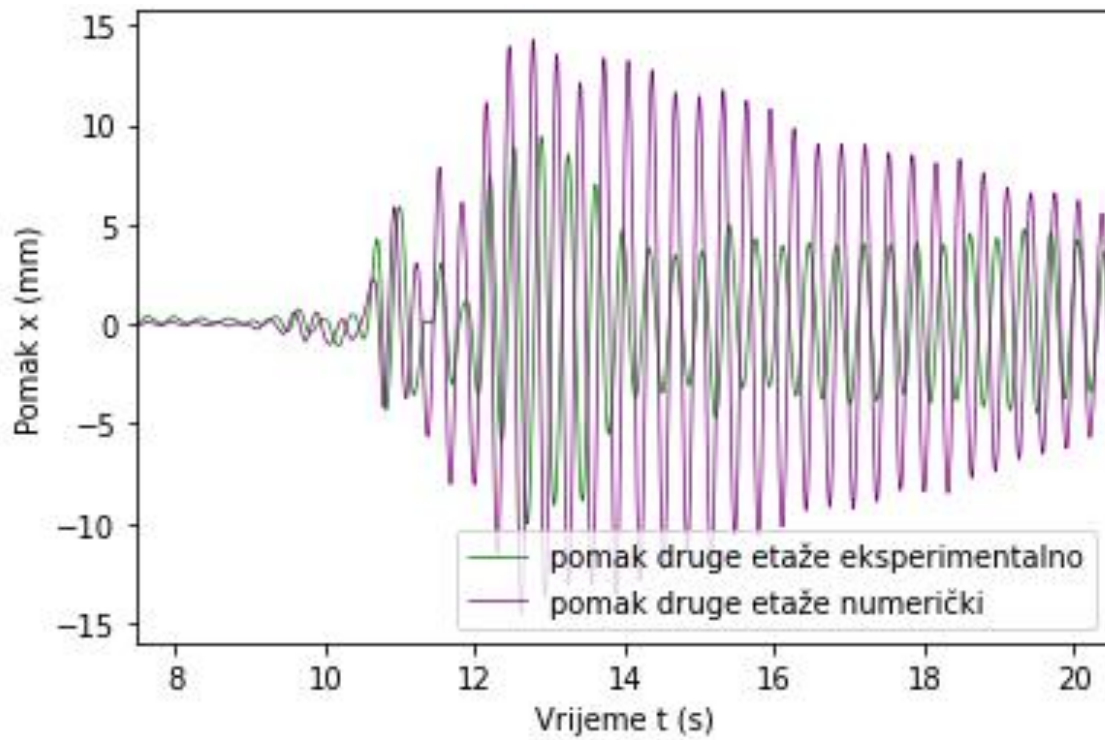
### 6.6.3.3 Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka

Slika 87. prikazuje dijagram usporedbe apsolutnih pomaka 2.etaže. Za prikaz je izdvojena druga etaža jer ima najveće pomake. Dijagrami usporedbi prve etaže nalaze se u Prilogu 9.14. Rezultati dobiveni numeričkim putem i eksperimentalno su usporedivi, iako postoje određene razlike, one su unutar zadovoljavajućih granica.

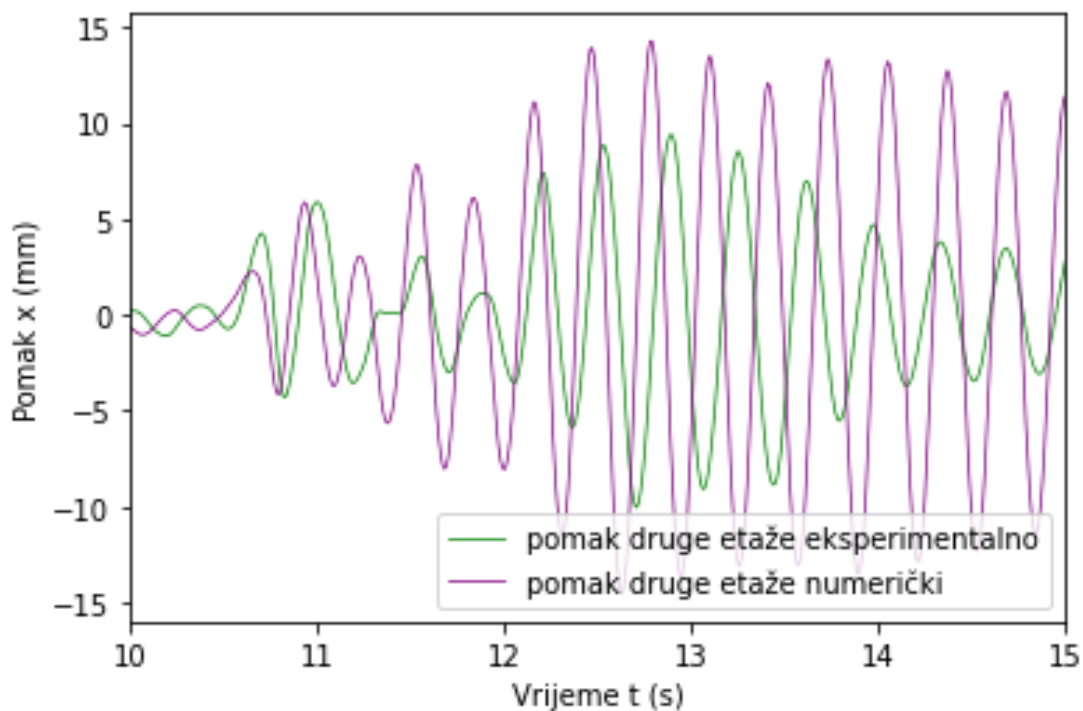


Slika 87. El Centro - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže

Na slikama 88. i 89. predstavljeni su dijagrami koji uspoređuju relativne pomake 2. etaže. Budući da su numerički dobiveni pomaci veći u odnosu na eksperimentalne, pretpostavka je da će u ovom slučaju odgovarati veće prigušenje. To će biti provjereno u nastavku.

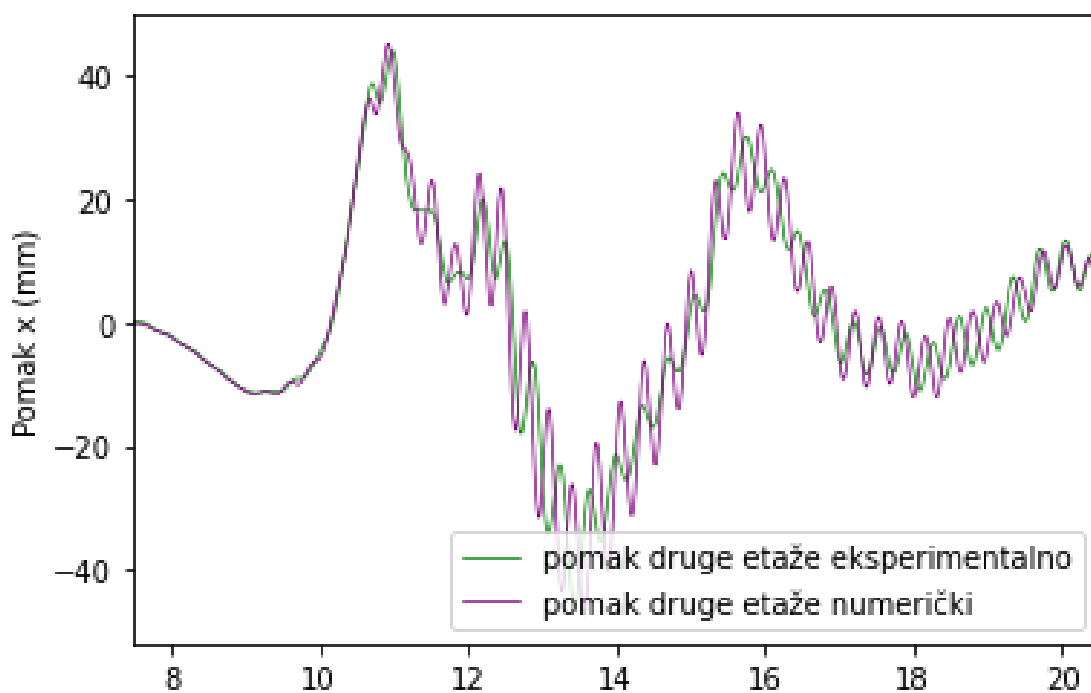


Slika 88. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže



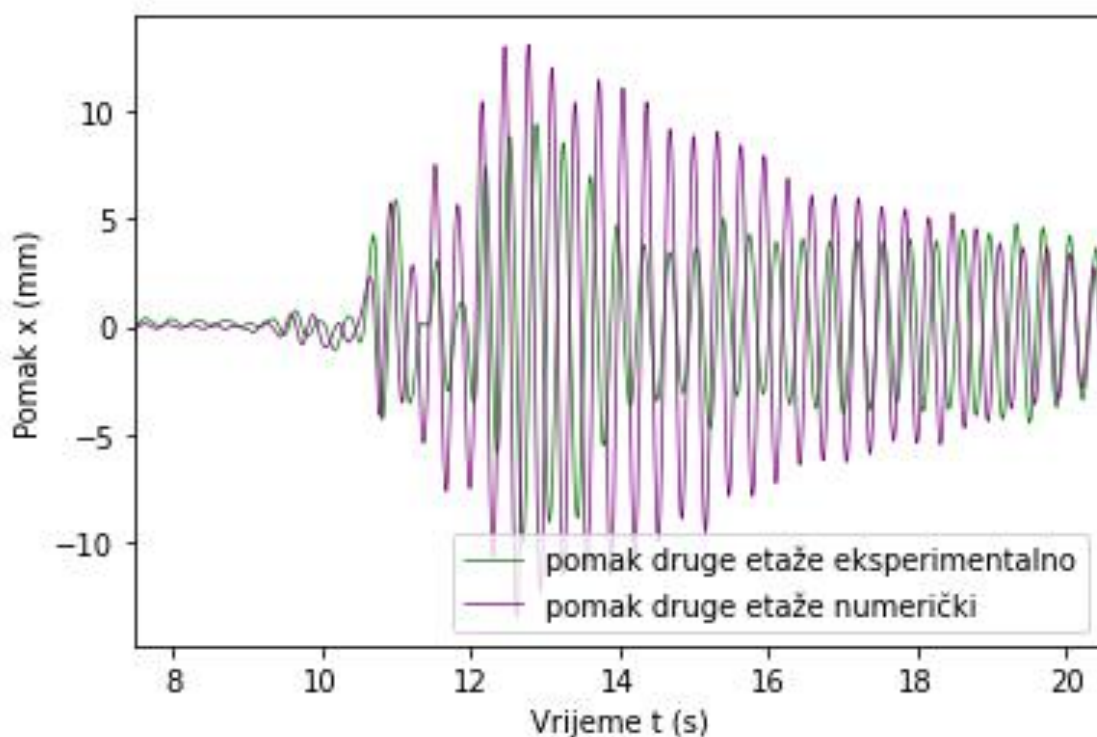
Slika 89. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže 10. - 15. sec

Na sljedećim slikama (90., 91. i 92.) prikazani su dijagrami pomaka druge etaže no sa većim prigušenjem ( $\zeta = 0.011777$ ).

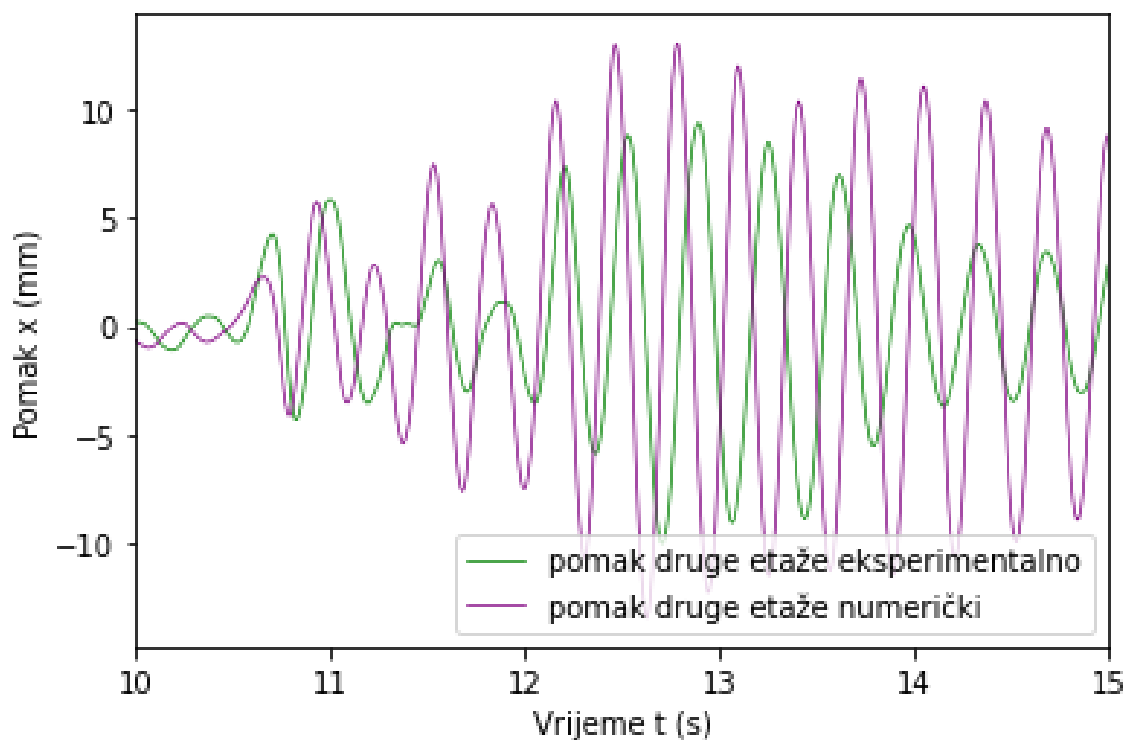


Slika 90. El Centro - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže (veće prigušenje)

Na slikama 91. i 92. može se primijetiti da veće prigušenje daje bolje rezultate te da je pretpostavka bila točna.



Slika 91. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže (veće prigušenje)



Slika 92. El Centro - usporedba relativnih pomaka 2.etaže 10. - 15. sec (veće prigušenje)

#### 6.6.4 Potres Cape Mendocino

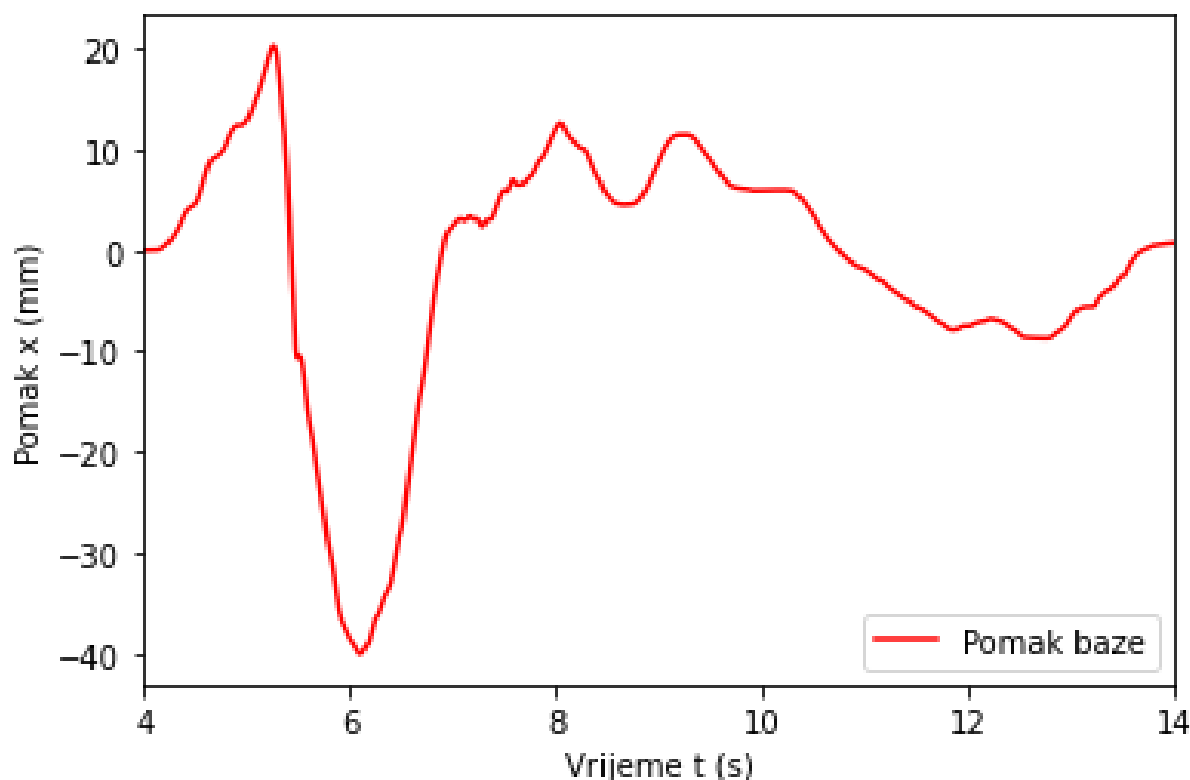
Potres u Cape Mendocino području u Kaliforniji posebno je zanimljiv za seizmologe i građevinske inženjere zbog lokacije koja je blizu spoja triju tektonskih ploča: Gorde, Sjevernoameričke i Pacifičke ploče [14].

Dogodio se 25. travnja. 1992. godine na području Cape Mendocina u Kaliforniji, SAD. Bio je jačine 7.2 na Richterovoj ljestvici, sa dubinom hipocentra na 9,6 km. U narednim danima iza potresa dogodili su se brojni sekundarni potresi, uključujući one s magnitudom većom od 6,0 po Richterovoj ljestvici [14].

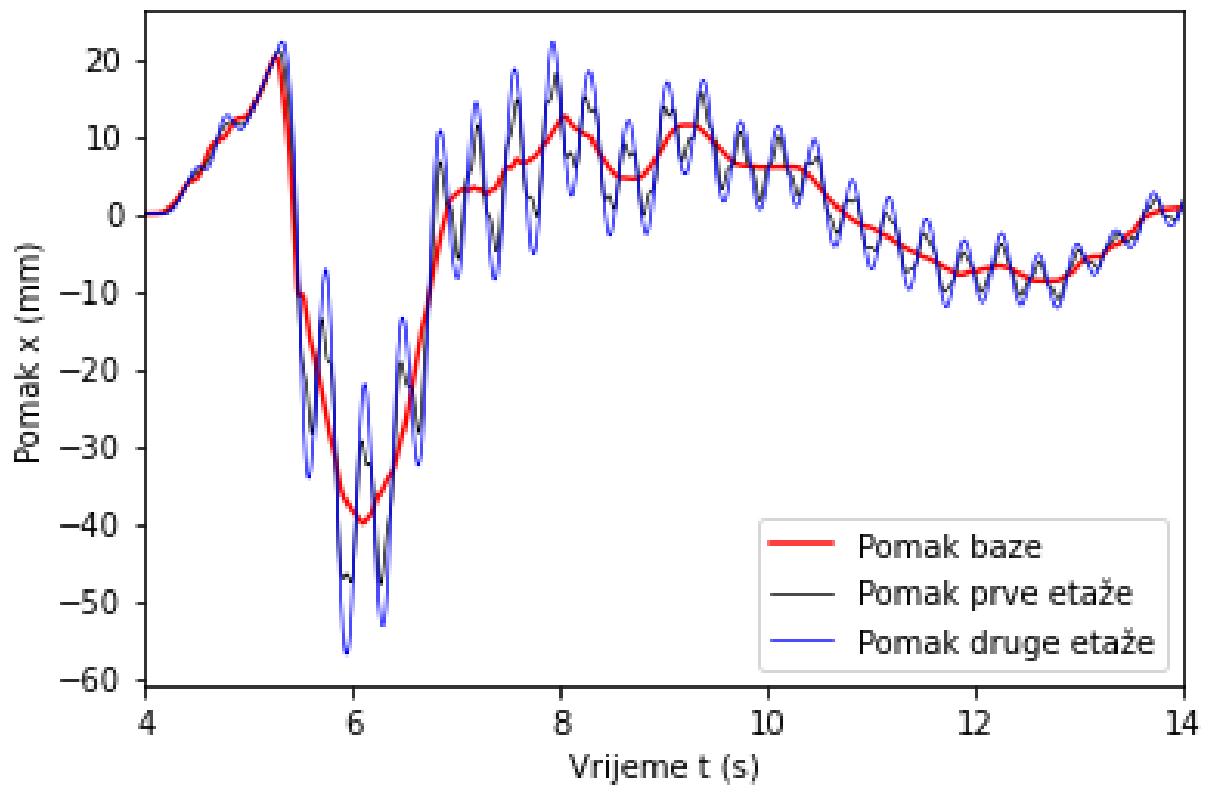
##### 6.6.4.1 Eksperimentalni rezultati

Dijagrami eksperimentalnih rezultata prikazuju apsolutne pomake.

Na slici 93. prikazan je pomak baze, a na slici 94. pomaci preostale dvije etaže zajedno s pomakom baze.



Slika 93. Potresni zapis Cape Mendocino – eksperimentalno - pomak baze



Slika 94. Potresni zapis Cape Mendocino – eksperimentalno

Iz dijagrama na slici 94. izračunati su relativni pomaci etaža 1. i 2. ovisno o pomaku baze u trenutku kada su pomaci najveći (oko 6 sec) koji iznose:

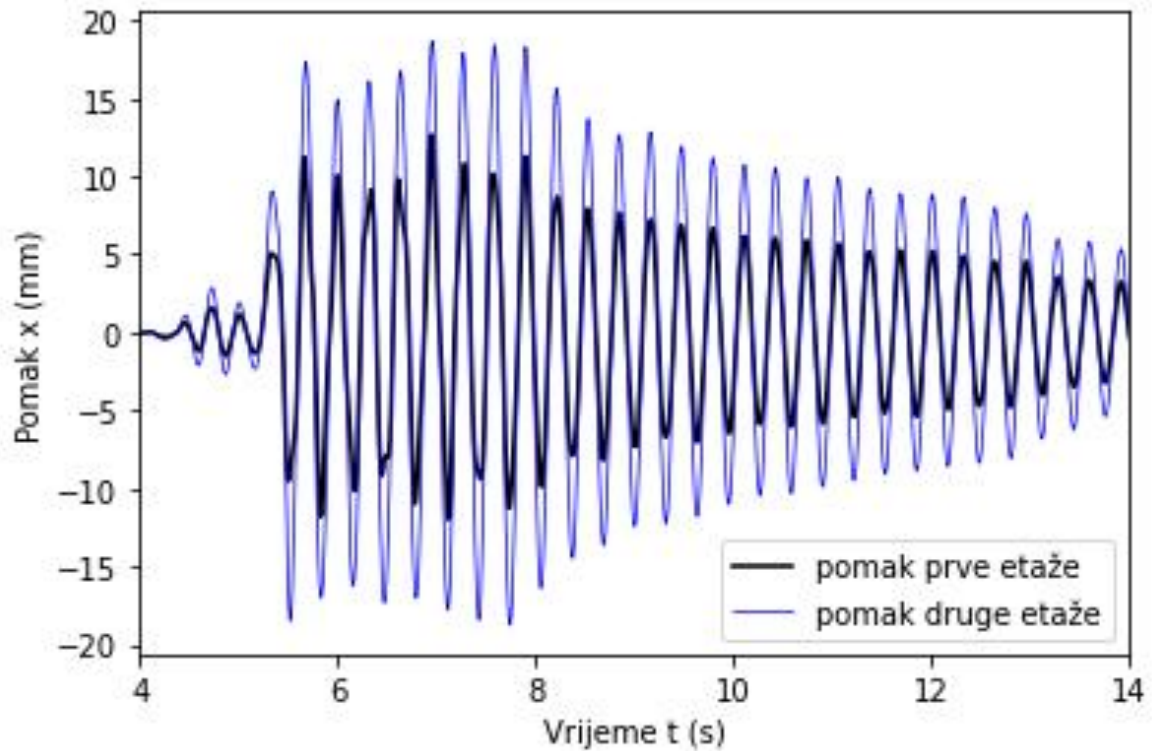
$$u_1 = 7.92036 \text{ mm}$$

$$u_2 = 16.942914 \text{ mm}$$

#### 6.6.4.2 Numerički rezultati

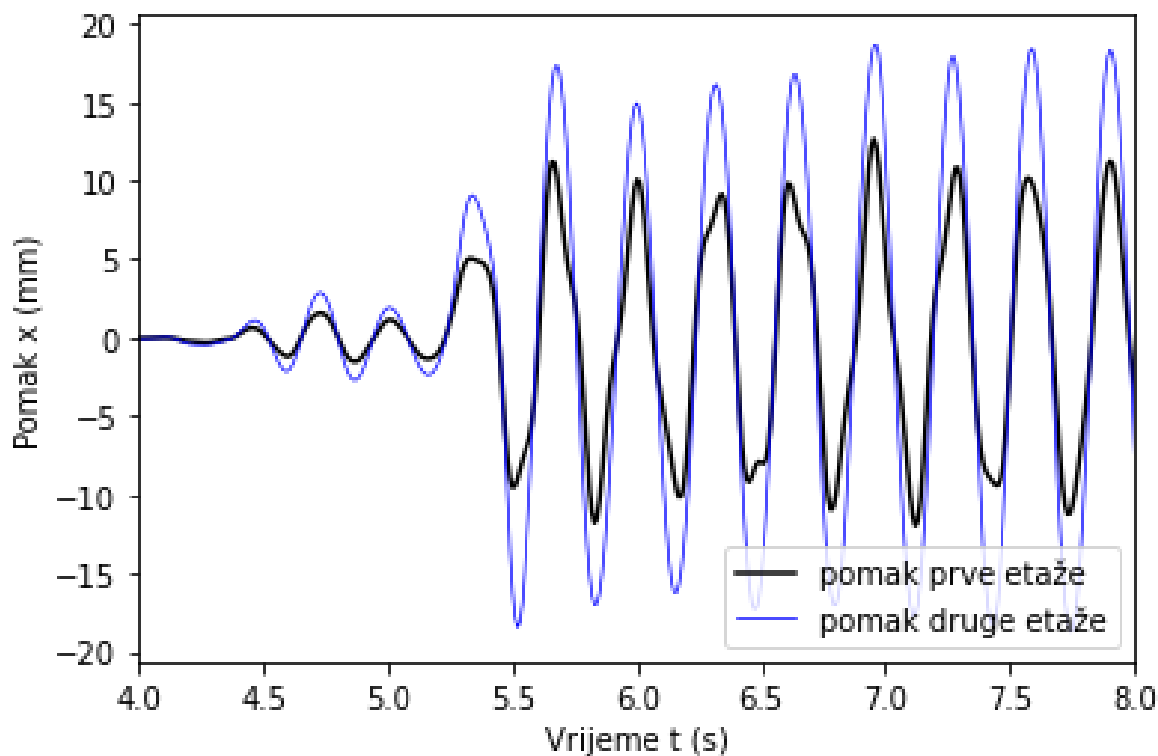
Numerički rezultati potresnog zapisa prikazuju relativne pomake.

Na slikama 95 i 96. također su prikazani dijagrami potresnog zapisa Cape Mendocino, ali dobiveni numeričkim postupkom.



Slika 95. Potresni zapis Cape Mendocino – numerički





Slika 96. Potresni zapis Cape Mendocino – numerički 4. - 8. sec

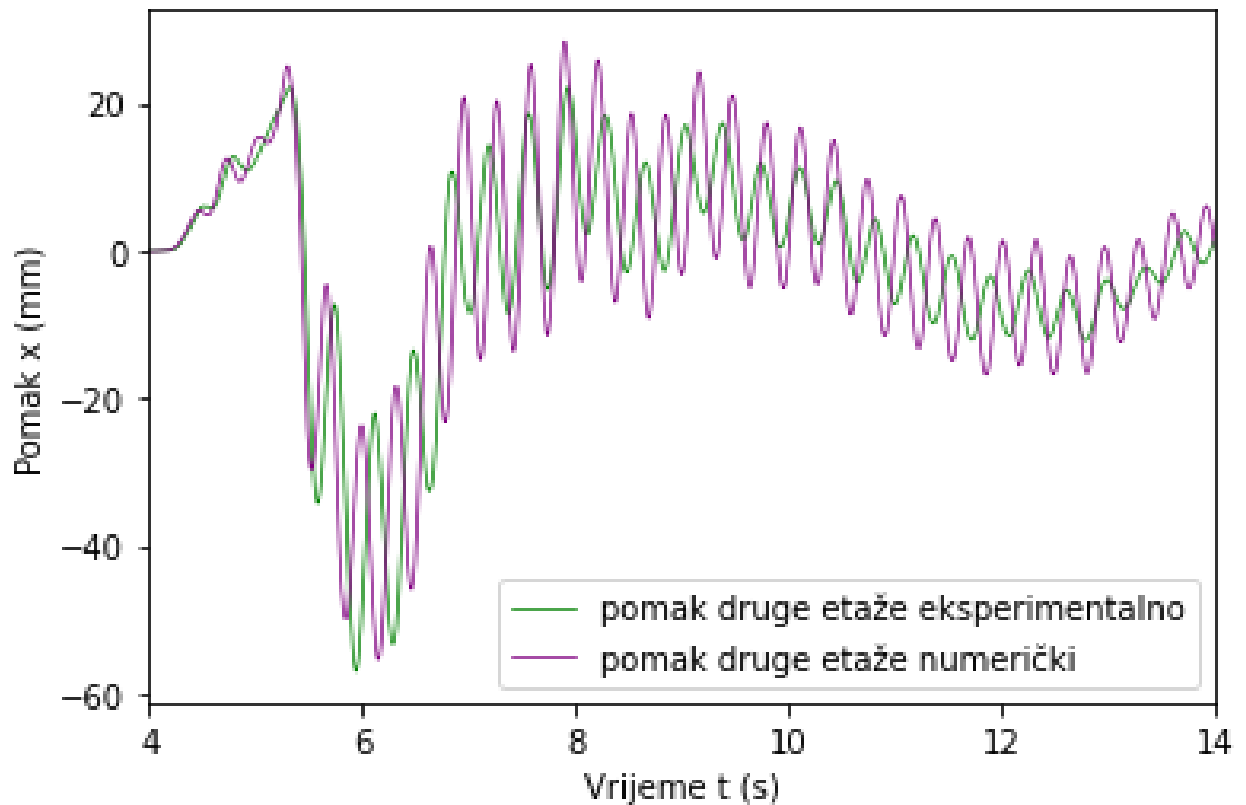
Sa slike 96. za udaljenosti između najvećih amplituda očitana je period osciliranja te je dobivena vrijednost  $T = 0,11$  s. Pomoću perioda osciliranja izračunata je frekvencija osciliranja prema formuli [jednadžba (23)]:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,11} = 9,09 \text{ Hz}$$

U potpoglavlju 3.5 izračunate su frekvencije za svaki ton osciliranja, a frekvencija osciliranja u 2.-om tonu iznosi  $8,6619 \text{ Hz}$ , što znači da se konstrukcija prilikom najvećih pomaka prilikom potresa Cape Mendocino nalazi u 1. tonu osciliranja uz razliku od 4,94%.

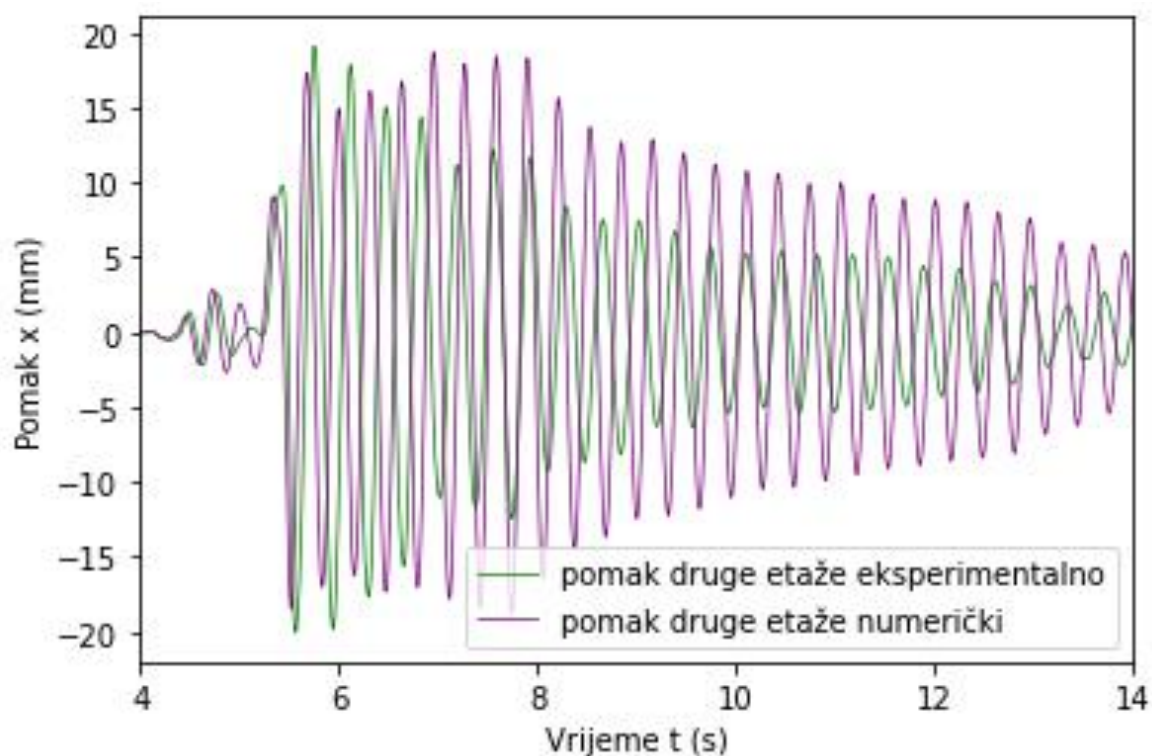
### 6.6.4.3 Usporedba apsolutnih i relativnih pomaka

Slika 97. prikazuje dijagram usporedbe apsolutnih pomaka 2.etaže. Za prikaz je izdvojena druga etaža jer ima najveće pomake. Dijagrami usporedbe prve etaže nalaze se u Prilogu 9.15.

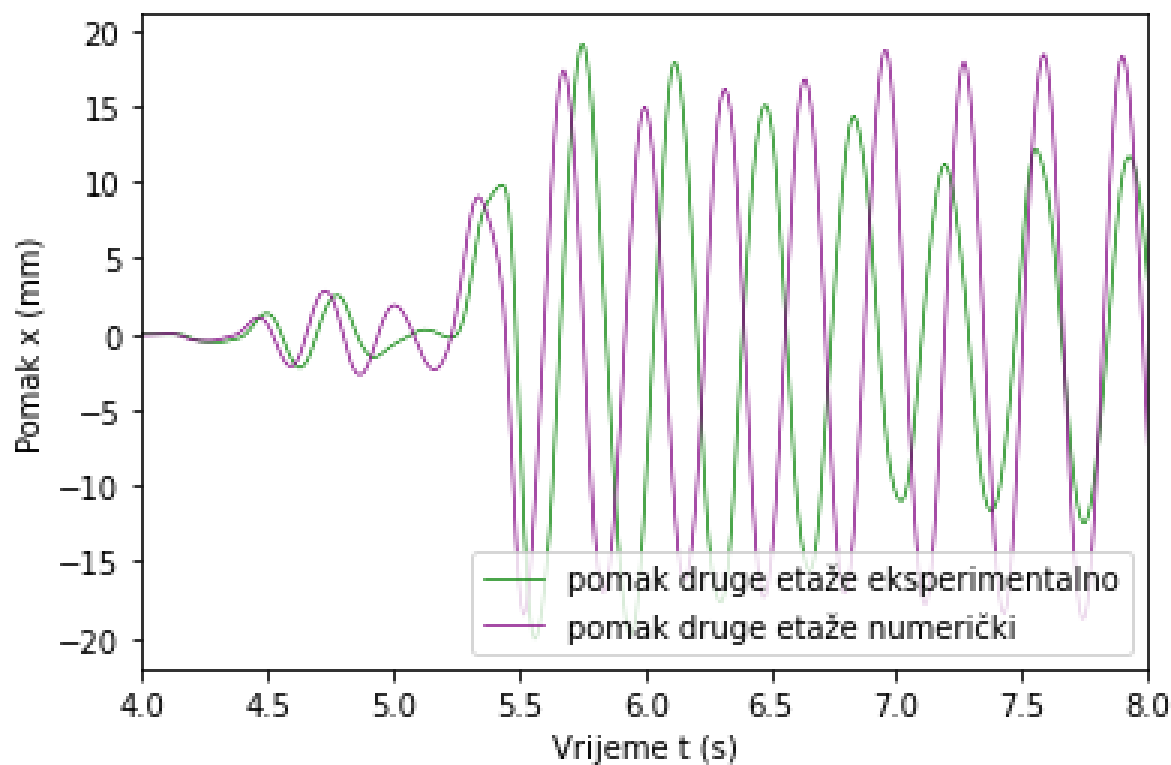


Slika 97. Cape Mendocino - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže

Slika 98. prikazuje dijagram usporedbe relativnih pomaka 2.etaže dok slika 99. prikazuje izdvojeni dio sa najvećim oscilacijama.



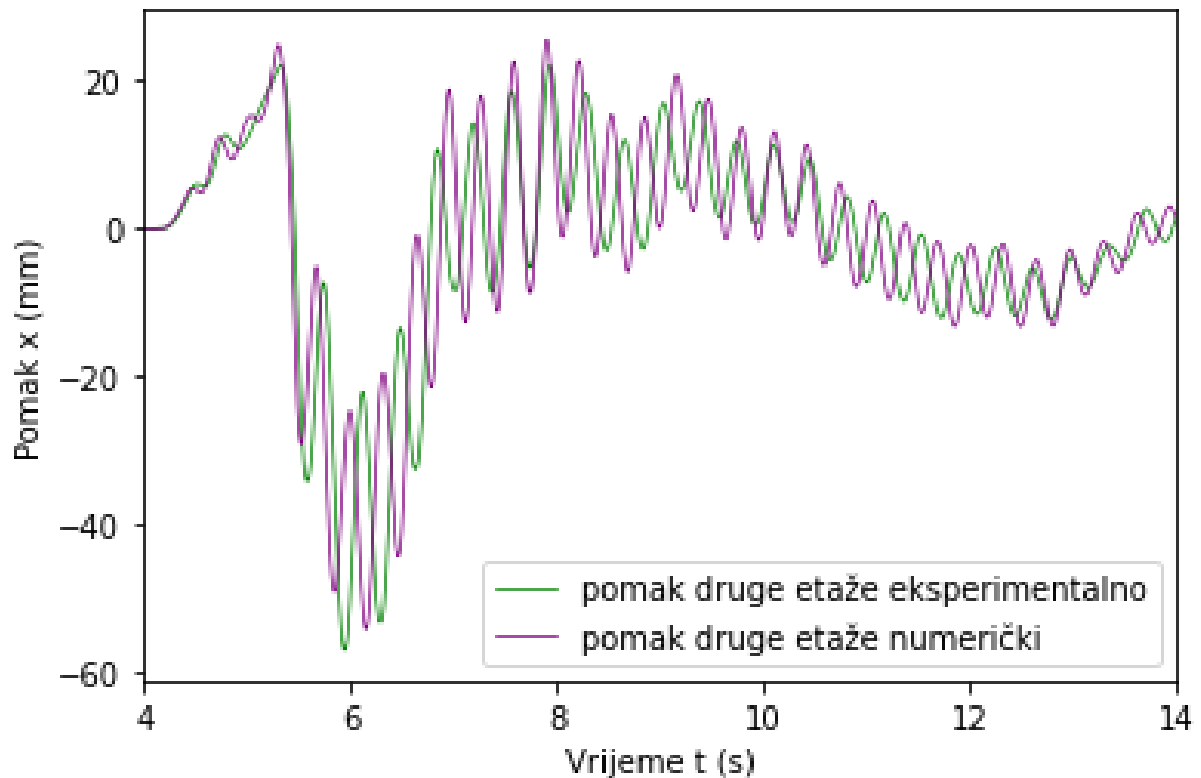
Slika 98. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2.etaže



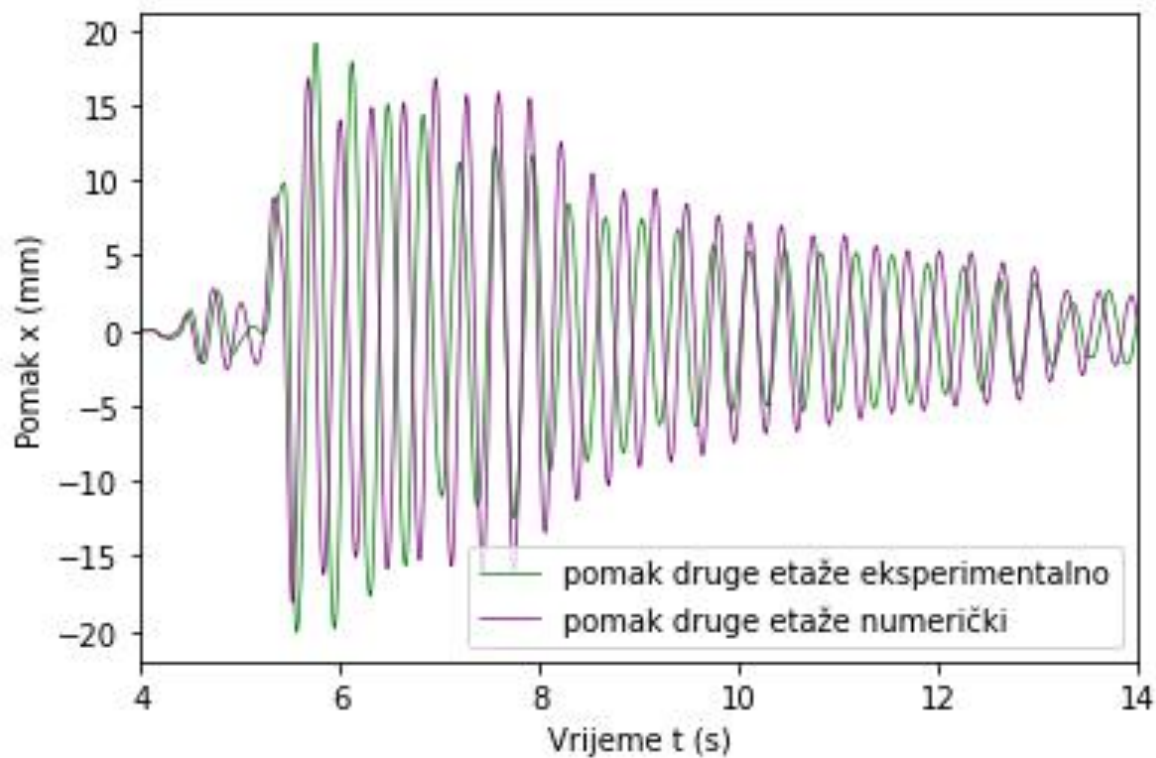
Slika 99. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2. etaže 4. - 8. sec

Kao i u prethodnom slučaju, radi toga što su numerički dobiveni pomaci veći u odnosu na eksperimentalne, pretpostavka je da će u ovom slučaju odgovarati veće prigušenje.

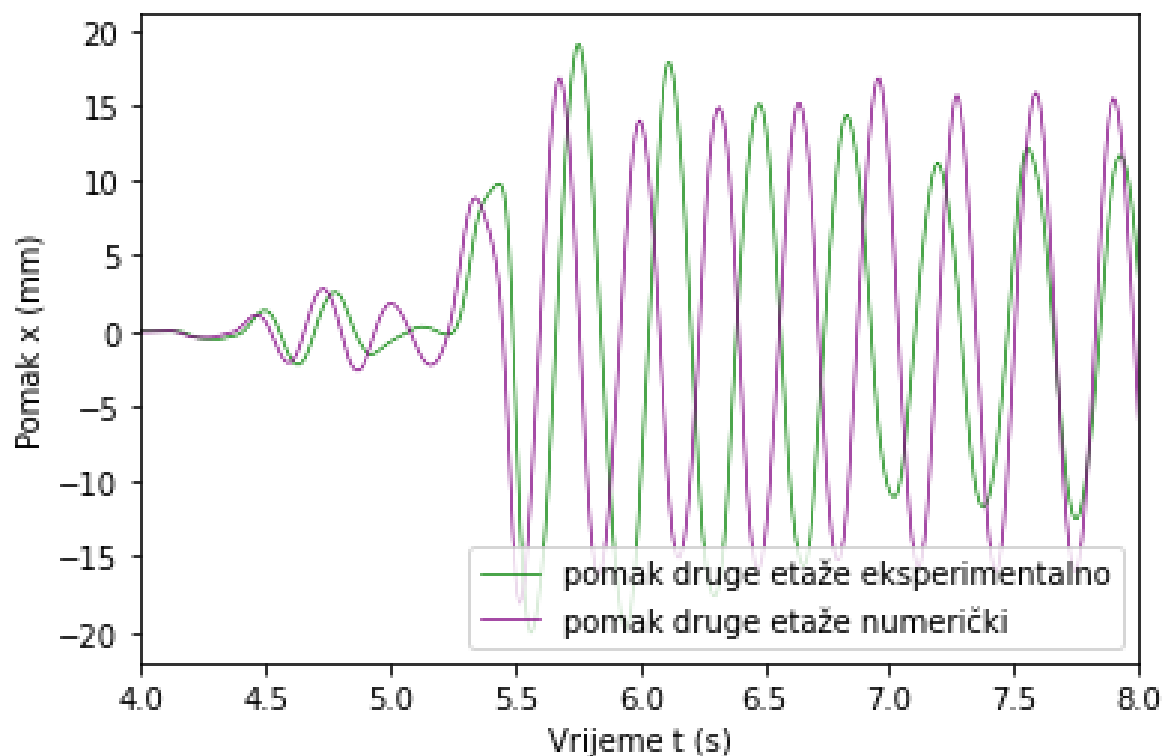
Na slikama 100., 101. i 102. prikazani su dijagrami pomaka druge etaže s većim prigušenjem ( $\zeta = 0.011777$ ).



Slika 100. Cape Mendocino - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže (veće prigušenje)



Slika 101. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2. etaže (veće prigušenje)



Slika 102. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 2. etaže 4. - 8. sec (veće prigušenje)

Na slikama 100., 101. i 102. vidljivo je da veće prigušenje čini numeričke rezultate sličnijima eksperimentalnim. Rezultati s većim prigušenjem su precizniji, tj. bliži stvarnim vrijednostima.

## 7 ZAKLJUČAK

Ovaj diplomski rad usmjeren je na razumijevanje ponašanja troetažne konstrukcije izložene utjecajima potresa. Integrirajući teorijske osnove s praktičnim laboratorijskim ispitivanjima, rad uspostavlja temelj za razumijevanje dinamičkog ponašanja ove konstrukcije.

U prvom dijelu rada, definirane su geometrijske i materijalne karakteristike troetažnog okvira, uključujući masu i krutost. Ove informacije bile su temelj za daljnje analize i eksperimente.

Jednadžbe kretanja i pripadajuće matrice masa  $m$  i krutosti  $k$  izvedene su koristeći teorijske osnove, a zatim su potvrđene kroz laboratorijska ispitivanja. Eksperimentalni i numerički rezultati dobiveni su za različite tipove oscilacija, uključujući slobodne prigušene i prisilne oscilacije.

Analiza osciliranja u 1. i 2. tonu provedena je primjenom statičkog i dinamičkog pomaka, što je potvrdilo njihovu sličnost.

Numerička rješenja jednadžbi kretanja dobivena su korištenjem Newmarkove metode integracije i korištena su u eksperimentima. Analiza je dodatno proširena kroz simulacije koje koriste stvarne potresne zapise, uključujući potrese u Kobeu, Northridgeu, El Centru i Cape Mendocinu.

Rad također uključuje kompletan Python kod za sve simulacije. Bitan rezultat ovog rada su usporedbe, za koje je bio cilj da izračunata rješenja budu što točnija, što se i pokazalo uspješnim. Usporedbe relativnih i apsolutnih pomaka između numeričkih i eksperimentalnih rezultata to i potvrđuju. Iako postoje razlike, moguće je da one proizlaze iz netočnosti u karakteristikama modela, poput krutosti. Na primjer, teško je precizno odrediti vrijednost krutosti jer se mjeri za pojedinačni okvir, dok je model troetažan. Zaključuje se da manje diskretizacije ili pojednostavljivanja u modelu mogu dovesti do razlika. Također, prigušenje, za koje je utvrđeno da za isti okvir, ali različite potresne zapise, ne odgovara identična vrijednost. U dinamičkoj analizi, postoji šansa da model nije savršeno rekreirao sve frekvencije i oblike vibracija prisutne u stvarnom sustavu. Zanimljivo je napomenuti i rezultate potresnog zapisa iz Koba; iako za

konstrukciju u ovom radu nije bio razoran, u stvarnosti je taj potres imao razarajući učinak.

Analize poput ovih su ključne za istraživanja potresa jer pružaju smjernice za kvalitetnije projektiranje. Prikazano je da numerički modeli i testiranja pružaju iako ne identičan, približan opis potresa. Takva saznanja mogu biti od velike koristi u budućem projektiranju i sličnim inicijativama.



## 8 LITERATURA

- [1] Chopra, Anil K., *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering* – University of California at Berkeley, Pearson, Fourth Edition
- [2] Paz Mario, Leigh William, *Structural Dynamics: Theory and Computation* – Kluwer Academic Publishers, Fifth Edition
- [3] Čaušević, Mehmed, *Dinamika konstrukcija: Potresno inženjerstvo- Aerodinamika – Konstrukcijske euronorme*, Golden marketing – Tehnička knjiga, 2010
- [4] Jozić, Gabriela, "Oscilacije jednoetažnog okvira s različitim priključcima grede i stupova," Jul. 2021, Accessed: Jun. 23, 2023. [Online]. Available: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:157:164448>.
- [5] Prof. dr.sc Jelenić, Gordan, *Dinamika konstrukcija- bilješke s predavanja*, Građevinski fakultet u Rijeci
- [6] Bathe, Klaus-Jürgen, *Finite Element procedures*, Massachusetts Institute of Technology, Prentice-Hall, 1996
- [7] Quanser, Shake Table III XY, <https://quanserinc.app.box.com/s/9zbu613zdzesja1hb9koswuv767g7f4x> , pristup 30.08.2023.
- [8] PA HILTON HDA 200, <https://www.advance.co.th/wp-content/uploads/2019/06/PA-Hilton-HST-STRUCTURES-Brochure.pdf>, pristup 10.09.2023.
- [9] Mitutoyo mikroura, <https://www.mitutoyo.com/webfoo/wp-content/uploads/ID-S-Digimatic-Indicators.pdf>, pristup 10.09.2023.
- [10] Potres Kobe, <https://education.nationalgeographic.org/resource/kobe-earthquake/> , pristup 10.09.2023.
- [12] Potres Northridge, <https://hr.wordssidekick.com/30288-northridge-earthquake-20th-anniversary-in-photos>, pristup 10.09.2023.

[13] Potres El Centro, [https://en.wikipedia.org/wiki/1940\\_El\\_Centro\\_earthquake](https://en.wikipedia.org/wiki/1940_El_Centro_earthquake), pristup 10.09.2023.

[14] Potres Cape Mendocino, [https://en.wikipedia.org/wiki/1992\\_Cape\\_Mendocino\\_earthquakes](https://en.wikipedia.org/wiki/1992_Cape_Mendocino_earthquakes) i <https://rctwg.humboldt.edu/capemendo92>, pristup 10.09.2023.

[15] J. L. Meriam, L.G. Kraige, *Engineering Mechanics: Dynamics* – Konstrukcijske euronorme, Wiley – Seventh Edition

[16] GOM Correlate, <https://www.gom.com/en/products/zeiss-quality-suite/gom-correlate-pro>, pristup 12.09.2023.

[17] A. Malešević, "Eksperimentalna analiza savijanja 3D printanog uslojenog materijala," pristup 05.09.2023 [Online].

[18] Craig, J. I., & Kurdila, A. J., *Fundamentals of Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, 2006

## 9 PRILOZI

### 9.1 PRILOG - Kod u Pythonu – pomaci etaža za 1.ton

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
pomak3 = 3.5 #zadan pomak 3.etaže

u_1 = phi_1[0] * pomak3 / phi_1[2]
u_2 = phi_1[1] * pomak3 / phi_1[2]
u_3 = pomak3

print("Pomak prve etaže:", u_1)
print("Pomak druge etaže:", u_2)

print("Pomak treće etaže:", u_3)
```

## 9.2 PRILOG - Kod u Pythonu – pomaci etaža za 2.ton

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

m = 0.5189
h = 0.333
E = 7 * 10**10 #modul elastičnosti
I = 2.4696*10**(-11) #moment inercije
k = 24*E*I/h**3 #krutost u primjeru
m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]

pomak3 = 3.5 #zadan pomak 3.etaže

u_1 = phi_2[0] * pomak3 / phi_2[2]
u_2 = phi_2[1] * pomak3 / phi_2[2]
u_3 = pomak3

print("Pomak prve etaže:", u_1)
print("Pomak druge etaže:", u_2)

print("Pomak treće etaže:", u_3)
```

### 9.3 PRILOG - Kod u Pythonu – pomaci etaža za 3.ton

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w)

phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]

pomak3 = 3.5 #zadan pomak 3.etaže

u_1 = phi_3[0] * pomak3 / phi_3[2]
u_2 = phi_3[1] * pomak3 / phi_3[2]
u_3 = pomak3

print("Pomak prve etaže:", u_1)
print("Pomak druge etaže:", u_2)
print("Pomak treće etaže:", u_3)
```

#### 9.4 PRILOG - Kod u Pythonu- za matricu krutosti zadanu temeljem mjerenja, te računanje svojstvenih vrijednosti

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

m = 0.5189
h = 0.310
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]
```

### 9.5 PRILOG - Kod u Pythonu- za matricu krutosti uz pretpostavku $E = 7 \cdot 10^{10}$ (aluminij)

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

m = 0.5189
h = 0.310
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]
```

## 9.6 PRILOG - Kod u Pythonu - za usporedbu numeričkih i eksperimentalnih rezultata slobodnih prigušenih oscilacija

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]

# RJESAVANJE JEDNADZBE KRETANJA NUMERICKOM ANALIZOM

t_end = 30 # ukupno trajanje simulacije
dt = 0.0001 # veličina vremenskog koraka
n = int(t_end / dt) # broj vremenskih koraka

# Newmarkovi parametri:
delta = 1 / 2
```



```
alpha = 1 / 4
b1 = 1 / (alpha * dt**2)
b2 = -1 / (alpha * dt)
b3 = 1 - 1 / (2 * alpha)
b4 = delta / (alpha * dt)
b5 = 1 - delta / alpha
b6 = (1 - delta / (2 * alpha)) * dt

zeta = 0.00756188 # koeficijent prigušenja
om1om3 = omega[0] * omega[2]
om1plusom3 = omega[0] + omega[2]

a0 = zeta * ((2 * om1om3) / om1plusom3)
a1 = zeta * ((2) / om1plusom3)

c_matrica = a0 * m_matrica + a1 * k_matrica
e = np.array([1, 1, 1]).T

# prazne matrice u koje se spremaju t, x, v i a u svakom koraku:
t = np.zeros(n)
x = np.zeros([3, n])
v = np.zeros([3, n])
a = np.zeros([3, n])

# pocetni uvjeti:
x[:, 0] = [22.16, 43.19, 61.52]
a[:, 0] = np.dot(inv(m_matrica), np.dot(k_matrica, x[:, 0]))
```

# efektivna matrica krutosti (konstantna je):

$$K_{\text{eff}} = b1 * m_{\text{matrica}} + k_{\text{matrica}} + b4 * c_{\text{matrica}}$$

$$K_{\text{eff\_inv}} = \text{inv}(K_{\text{eff}})$$

# petlja kojom se koraca u vremenu i računaju nepoznati pomaci, brzine i ubrzanja u svakom koraku:

for i in range(n - 1):

$$t[i + 1] = (i + 1) * dt$$

# Efektivni vektor opterećenja (mijenja se u svakom trenutku):

$$F_{\text{eff}} = \text{np.dot}(m_{\text{matrica}}, (b1 * x[:, i] - b2 * v[:, i] - b3 * a[:, i])) + \text{np.dot}(c_{\text{matrica}}, (b4 * x[:, i] - b5 * v[:, i] - b6 * a[:, i]))$$

# Pomaci dobiveni iz diskretizirane jednadžbe kretanja s Newmarkovim izrazima za ubrzanje:

$$x[:, i + 1] = \text{np.dot}(K_{\text{eff\_inv}}, F_{\text{eff}})$$

# Brzine i ubrzanja iz Newmarkovih izraza:

$$v[:, i + 1] = b4 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b5 * v[:, i] + b6 * a[:, i]$$

$$a[:, i + 1] = b1 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b2 * v[:, i] + b3 * a[:, i]$$

vrijeme= [] #prazne matrice u koje se sprema vrijeme

baza = [] #prazne matrice u koje se spremaju pomaci

masa\_1 = []

masa\_2 = []

masa\_3 = []

file = "Slobodneprigušene.txt" #pomaci iz excela

with open(file) as f:

for row in f:

$$\text{ново} = \text{row.strip}(\backslash\text{n}).\text{split}(\backslash\text{t})$$

$$\text{vrijeme.append}(\text{float}(\text{ново}[0]))$$

$$\text{baza.append}(\text{float}(\text{ново}[1]))$$

```
masa_1.append(float(novo[2]))
masa_2.append(float(novo[3]))
masa_3.append(float(novo[3]))

plt.plot(vrijeme, masa_1, 'k', t, x[0, :], 'b')

plt.plot(t, x[0, :])
#plt.plot(t, x[1, :])
# plt.plot(t, x[2, :])
# plt.plot([0, t[-1]], [0, 0], 'k--')

plt.legend(['pomak prve etaže eksperimentalno', 'pomak prve etaže numerički],
loc="lower right")
plt.xlabel('Vrijeme t (s)')
plt.ylabel('Pomak x (mm)')
plt.xlim(1, t[-1]) #plotanje
plt.title('Slobodne prigušene oscilacije 1.ton')
plt.show()
```

## 9.7 PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – numerički

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)
omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]

# RJESAVANJE JEDNADZBE KRETANJA NUMERICKOM ANALIZOM
t_end = 40 # ukupno trajanje simulacije
dt = 0.01 # veličina vremenskog koraka
n = int(t_end / dt) # broj vremenskih koraka

Y = []
file = "Kobe_ubrzanje.txt" #ubrzanja iz excela
with open(file) as f:
    for row in f:
        row.strip('\n').strip('ÿþ')
```

```
Y.append(float(row.replace(',', '.')))
```

```
# Newmarkovi parametri:
```

```
delta = 1 / 2
```

```
alpha = 1 / 4
```

```
b1 = 1 / (alpha * dt**2)
```

```
b2 = -1 / (alpha * dt)
```

```
b3 = 1 - 1 / (2 * alpha)
```

```
b4 = delta / (alpha * dt)
```

```
b5 = 1 - delta / alpha
```

```
b6 = (1 - delta / (2 * alpha)) * dt
```

```
zeta = 0.007522852 # koeficijent prigušenja
```

```
om1om3 = omega[0] * omega[2]
```

```
om1plusom3 = omega[0] + omega[2]
```

```
a0 = zeta * ((2 * om1om3) / om1plusom3)
```

```
a1 = zeta * ((2) / om1plusom3)
```

```
c_matrica = a0 * m_matrica + a1 * k_matrica
```

```
e = np.array([1, 1, 1]).T
```

```
# prazne matrice u koje se spremaju t, x, v i a u svakom koraku:
```

```
t = np.zeros(n)
```

```
x = np.zeros([3, n])
```

```
v = np.zeros([3, n])
```

```
a = np.zeros([3, n])
```

```
F = np.zeros([3, n])
```

# efektivna matrica krutosti (konstantna je):

$$K_{\text{eff}} = b_1 * m_{\text{matrica}} + k_{\text{matrica}} + b_4 * c_{\text{matrica}}$$

$$K_{\text{eff\_inv}} = \text{inv}(K_{\text{eff}})$$

# petlja kojom se koraca u vremenu i računaju nepoznati pomaci, brzine i ubrzanja u svakom koraku:

for i in range(n-1):

$$t[i+1] = (i+1)*dt$$

$$F[:, i] = -Y[i] * \text{np.dot}(m_{\text{matrica}}, e)$$

#efektivni vektor opterećenja (mijenja se u svakom trenutku):

$$F_{\text{eff}} = \text{np.dot}(m_{\text{matrica}}, (b_1 * x[:, i] - b_2 * v[:, i] - b_3 * a[:, i])) + \text{np.dot}(c_{\text{matrica}}, (b_4 * x[:, i] - b_5 * v[:, i] - b_6 * a[:, i])) + F[:, i]$$

# Pomaci dobiveni iz diskretizirane jednadžbe kretanja s Newmarkovim izrazima za ubrzanje:

$$x[:, i + 1] = \text{np.dot}(K_{\text{eff\_inv}}, F_{\text{eff}})$$

# Brzine i ubrzanja iz Newmarkovih izraza:

$$v[:, i + 1] = b_4 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b_5 * v[:, i] + b_6 * a[:, i]$$

$$a[:, i + 1] = b_1 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b_2 * v[:, i] + b_3 * a[:, i]$$

$$\text{plt.plot}(t, x[0, :], \text{color}='black')$$

$$\text{plt.plot}(t, x[1, :], \text{color}='blue')$$

$$\text{plt.plot}(t, x[2, :], \text{color}='grey')$$

$$\text{plt.plot}([0, t[-1]], [0, 0], 'k--')$$

$$\text{plt.legend}(['\text{pomak prve etaže}', '\text{pomak druge etaže}', '\text{pomak treće etaže}'], \text{loc}="lower right")$$

$$\text{plt.xlabel}('Vrijeme t (s)')$$

$$\text{plt.ylabel}('Pomak x (mm)')$$

$$\text{plt.title}('Kobe')$$

```
plt.xlim(5, t[-1])
```

```
plt.show()
```

## 9.8 PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – eksperimentalno

```
import matplotlib.pyplot as plt

vrijeme= [] #prazne matrice u koje se sprema vrijeme
baza = [] #prazne matrice u koje se spremaju pomaci
masa_1 = []
masa_2 = []

file = "Kobe.txt" #pomaci iz excela
with open(file) as f:
    for row in f:
        novo = row.strip('\n').split('\t')
        vrijeme.append(float(novo[0]))
        baza.append(float(novo[1]))
        masa_1.append(float(novo[2]))
        masa_2.append(float(novo[3]))

plt.plot(vrijeme, baza, 'r') #Pomak baze
plt.plot(vrijeme, masa_1, 'b') #Pomak prve etaže
plt.plot(vrijeme, masa_2, 'k') #Pomak druge etaže

plt.xlabel('Vrijeme t (s)')
plt.ylabel('Pomak x (mm)')
#plt.xlim(25,35) #plotanje u određenom vremenskom intervalu
plt.title('Kobe') #naslov
plt.legend(['Pomak baze','Pomak prve etaže','Pomak druge etaže' ], loc="lower right")

plt.show()
```



### 9.9 PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – usporedba apsolutnih pomaka

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w)

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]

t_end = 29
dt = 0.01
n = int(t_end / dt)

Y = []
file = "Northridge_ubrzanje.txt"
with open(file) as f:
```

```
for row in f:
    row.strip('\n').strip('ÿb')
    Y.append(float(row.replace(',', '.')))

delta = 1 / 2
alpha = 1 / 4
b1 = 1 / (alpha * dt**2)
b2 = -1 / (alpha * dt)
b3 = 1 - 1 / (2 * alpha)
b4 = delta / (alpha * dt)
b5 = 1 - delta / alpha
b6 = (1 - delta / (2 * alpha)) * dt

zeta = 0.007522852

om1om3 = omega[0] * omega[2]
om1plusom3 = omega[0] + omega[2]

a0 = zeta * ((2 * om1om3) / om1plusom3)
a1 = zeta * ((2) / om1plusom3)

c_matrica = a0 * m_matrica + a1 * k_matrica
e = np.array([1, 1, 1]).T

t = np.zeros(n)
x = np.zeros([3, n])
v = np.zeros([3, n])
a = np.zeros([3, n])
F = np.zeros([3, n])
```

```
K_eff = b1 * m_matrica + k_matrica + b4 * c_matrica
```

```
K_eff_inv = inv(K_eff)
```

```
for i in range(n-1):
```

```
    t[i+1] = (i+1)*dt
```

```
    F[:, i] = -Y[i] * np.dot(m_matrica, e)
```

```
    F_eff = np.dot(m_matrica, (b1 * x[:, i] - b2 * v[:, i] - b3 * a[:, i])) + np.dot(c_matrica,
    (b4 * x[:, i] - b5 * v[:, i] - b6 * a[:, i])) + F[:, i]
```

```
    x[:, i + 1] = np.dot(K_eff_inv, F_eff)
```

```
    v[:, i + 1] = b4 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b5 * v[:, i] + b6 * a[:, i]
```

```
    a[:, i + 1] = b1 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b2 * v[:, i] + b3 * a[:, i]
```

```
vrijeme= [] #prazne matrice u koje se sprema vrijeme
```

```
baza = [] #prazne matrice u koje se spremaju pomaci
```

```
masa_1 = []
```

```
masa_2 = []
```

```
masa_3 = []
```

```
file = "Northridge.txt" #pomaci iz excela
```

```
with open(file) as f:
```

```
    for row in f:
```

```
        novo = row.strip('\n').split('\t')
```

```
        vrijeme.append(float(novo[0]))
```

```
        baza.append(float(novo[1]))
```

```
        masa_1.append(float(novo[2]))
```

```
masa_2.append(float(novo[3]))
masa_3.append(float(novo[3]))

x1_abs = [] #apsolutni pomaci dobiveni iz relativnih
for i in range(len(x[2])):
    x1_abs.append(x[0,i]+baza[i])

plt.plot(vrijeme, masa_1, 'green' , t, x1_abs, 'purple',linewidth=0.7)

plt.legend(['pomak prve etaže eksperimentalno', 'pomak prve etaže numerički' ],
loc="lower right")

plt.xlabel('Vrijeme t (s)')
plt.ylabel('Pomak x (mm)')
plt.xlim(3.5, 23) #plotanje
#plt.xlim(4,10) #plotanje
#plt.title('Northridge')
plt.show()
```

### 9.10 PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – usporedba relativnih pomaka

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w)

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]

t_end = 29
dt = 0.01
n = int(t_end / dt)

Y = []
file = "Northridge_ubrzanje.txt"
with open(file) as f:
```

```
for row in f:
    row.strip('\n').strip('ÿb')
    Y.append(float(row.replace(',', '.')))

delta = 1 / 2
alpha = 1 / 4
b1 = 1 / (alpha * dt**2)
b2 = -1 / (alpha * dt)
b3 = 1 - 1 / (2 * alpha)
b4 = delta / (alpha * dt)
b5 = 1 - delta / alpha
b6 = (1 - delta / (2 * alpha)) * dt

zeta = 0.007522852
om1om3 = omega[0] * omega[2]
om1plusom3 = omega[0] + omega[2]

a0 = zeta * ((2 * om1om3) / om1plusom3)
a1 = zeta * ((2) / om1plusom3)

c_matrica = a0 * m_matrica + a1 * k_matrica
e = np.array([1, 1, 1]).T

t = np.zeros(n)
x = np.zeros([3, n])
v = np.zeros([3, n])
a = np.zeros([3, n])
F = np.zeros([3, n])
```

```
K_eff = b1 * m_matrica + k_matrica + b4 * c_matrica
```

```
K_eff_inv = inv(K_eff)
```

```
for i in range(n-1):
```

```
    t[i+1] = (i+1)*dt
```

```
    F[:, i] = -Y[i] * np.dot(m_matrica, e)
```

```
    F_eff = np.dot(m_matrica, (b1 * x[:, i] - b2 * v[:, i] - b3 * a[:, i])) + np.dot(c_matrica, (b4 * x[:, i] - b5 * v[:, i] - b6 * a[:, i])) + F[:, i]
```

```
    x[:, i + 1] = np.dot(K_eff_inv, F_eff)
```

```
    v[:, i + 1] = b4 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b5 * v[:, i] + b6 * a[:, i]
```

```
    a[:, i + 1] = b1 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b2 * v[:, i] + b3 * a[:, i]
```

```
vrijeme= [] #prazne matrice u koje se sprema vrijeme
```

```
baza = [] #prazne matrice u koje se spremaju pomaci
```

```
masa_1 = []
```

```
masa_2 = []
```

```
masa_3 = []
```

```
file = "Northridge.txt" #pomaci unijeti iz excela
```

```
with open(file) as f:
```

```
    for row in f:
```

```
        novo = row.strip('\n').split('\t')
```

```
        vrijeme.append(float(novo[0]))
```

```
        baza.append(float(novo[1]))
```

```
        masa_1.append(float(novo[2]))
```

```
        masa_2.append(float(novo[3]))
```

```
masa_3.append(float(novo[3]))

masa_1_rel = [] #relativni pomaci dobiveni iz apsolutnih
for i in range(len(masa_2)):
    masa_1_rel.append(masa_1[i]-baza[i])

plt.plot( t, x[0, :], 'purple',linewidth=0.7)
plt.plot(vrijeme, masa_1_rel, 'g',linewidth=0.7)

plt.legend(['pomak prve etaže numerički','pomak prve etaže eksperimentalno'],
loc="lower right")
plt.xlabel('Vrijeme t (s)')
plt.ylabel('Pomak x (mm)')
plt.xlim(3.5, 23) #plotanje
#plt.title('Northridge')
plt.show()
```



### 9.11 PRILOG - Kod u Pythonu – Prisilne prigušene oscilacije – usporedba relativnih pomaka – korigirana vertikalna os

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh
from numpy.linalg import inv
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.5189
h = 0.333
k = 1537

m_matrica = m * np.array([[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
k_matrica = k * np.array([[2, -1, 0], [-1, 2, -1], [0, -1, 1]])

w, v = eigh(k_matrica, m_matrica)

omega = np.sqrt(w) # prirodne frekvencije

phi_1 = v[:, 0] / v[0, 0]
phi_2 = v[:, 1] / v[1, 1]
phi_3 = v[:, 2] / v[2, 2]

# RJESAVANJE JEDNADZBE KRETANJA NUMERICKOM ANALIZOM

t_end = 90 # ukupno trajanje simulacije
dt = 0.02 # veličina vremenskog koraka
n = int(t_end / dt) # broj vremenskih koraka

Y = []
```

```
file = "Kobe_ubrzanje.txt" #podaci iz excela
```

```
with open(file) as f:
```

```
    for row in f:
```

```
        row.strip('\n').strip('ÿb')
```

```
        Y.append(float(row.replace(',', '.')))
```

```
# Newmarkovi parametri:
```

```
delta = 1 / 2
```

```
alpha = 1 / 4
```

```
b1 = 1 / (alpha * dt**2)
```

```
b2 = -1 / (alpha * dt)
```

```
b3 = 1 - 1 / (2 * alpha)
```

```
b4 = delta / (alpha * dt)
```

```
b5 = 1 - delta / alpha
```

```
b6 = (1 - delta / (2 * alpha)) * dt
```

```
zeta = 0.007522852 # koeficijent prigušenja
```

```
om1om3 = omega[0] * omega[2]
```

```
om1plusom3 = omega[0] + omega[2]
```

```
a0 = zeta * ((2 * om1om3) / om1plusom3)
```

```
a1 = zeta * ((2) / om1plusom3)
```

```
c_matrica = a0 * m_matrica + a1 * k_matrica
```

```
e = np.array([1, 1, 1]).T
```

```
# prazne matrice u koje se spremaju t, x, v i a u svakom koraku:
```

```
t = np.zeros(n)
```

```
x = np.zeros([3, n])
```

```
v = np.zeros([3, n])
```

```
a = np.zeros([3, n])
```

```
F = np.zeros([3, n])
```

```
# efektivna matrica krutosti (konstantna je):
```

```
K_eff = b1 * m_matrica + k_matrica + b4 * c_matrica
```

```
K_eff_inv = inv(K_eff)
```

```
#petlja kojom se korača u vremenu i računaju nepoznati pomaci, brzine i ubrzanja u svakom trenutku:
```

```
for i in range(n-1):
```

```
    t[i+1] = (i+1)*dt
```

```
    F[:, i] = -Y[i] * np.dot(m_matrica, e)
```

```
    #efektivni vektor opterećenja (mijenja se u svakom trenutku):
```

```
    F_eff = np.dot(m_matrica, (b1 * x[:, i] - b2 * v[:, i] - b3 * a[:, i])) + np.dot(c_matrica, (b4 * x[:, i] - b5 * v[:, i] - b6 * a[:, i])) + F[:, i]
```

```
    # Pomaci dobiveni iz diskretizirane jednadžbe kretanja s Newmarkovim izrazima za ubrzanje:
```

```
    x[:, i + 1] = np.dot(K_eff_inv, F_eff)
```

```
    # Brzine i ubrzanja iz Newmarkovih izraza:
```

```
    v[:, i + 1] = b4 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b5 * v[:, i] + b6 * a[:, i]
```

```
    a[:, i + 1] = b1 * (x[:, i + 1] - x[:, i]) + b2 * v[:, i] + b3 * a[:, i]
```

```
vrijeme= [] #prazne matrice u koje se sprema vrijeme
```

```
baza = [] #prazne matrice u koje se spremaju pomaci
```

```
masa_1 = []
```

```
masa_2 = []
```

```
masa_3 = []
file = "Kobe.txt" #pomaci unijeti iz excela
with open(file) as f:
    for row in f:
        novo = row.strip('\n').split('\t')
        vrijeme.append(float(novo[0]))
        baza.append(float(novo[1]))
        masa_1.append(float(novo[2]))
        masa_2.append(float(novo[3]))

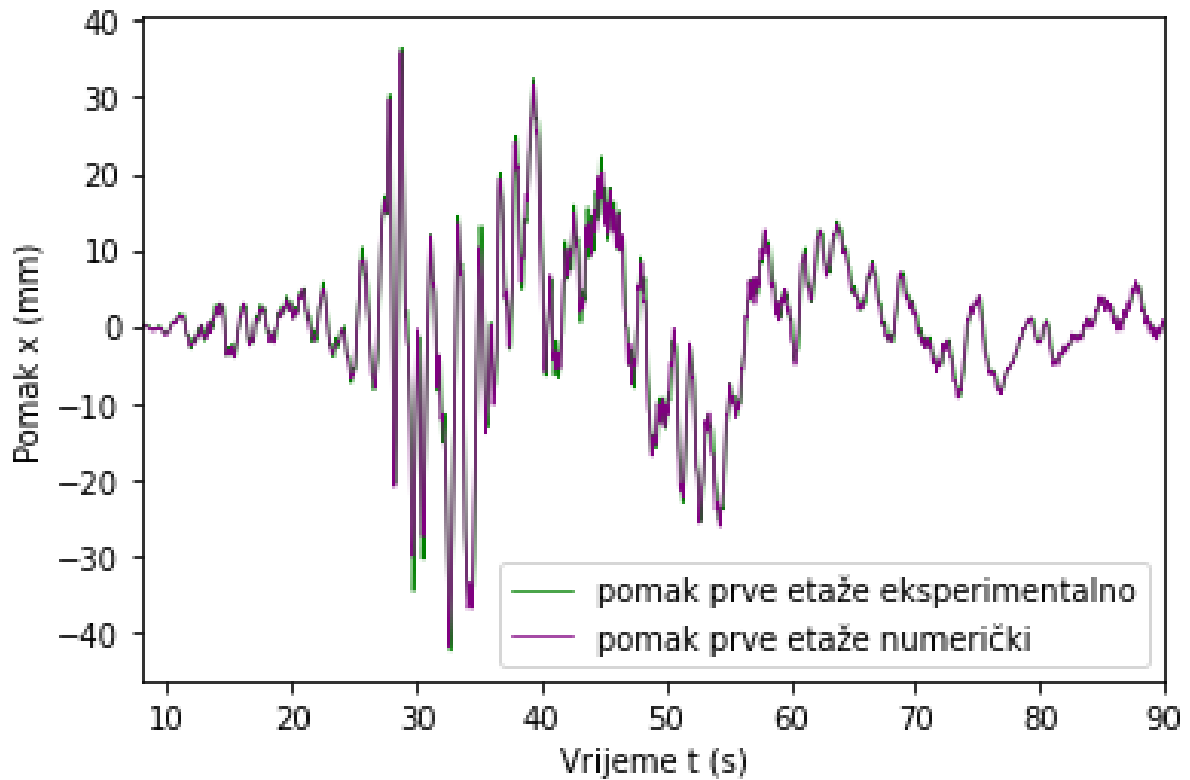
masa_1_rel = []
for i in range(len(masa_1)):
    masa_1_rel.append(masa_1[i]-baza[i])

offset = 0.25

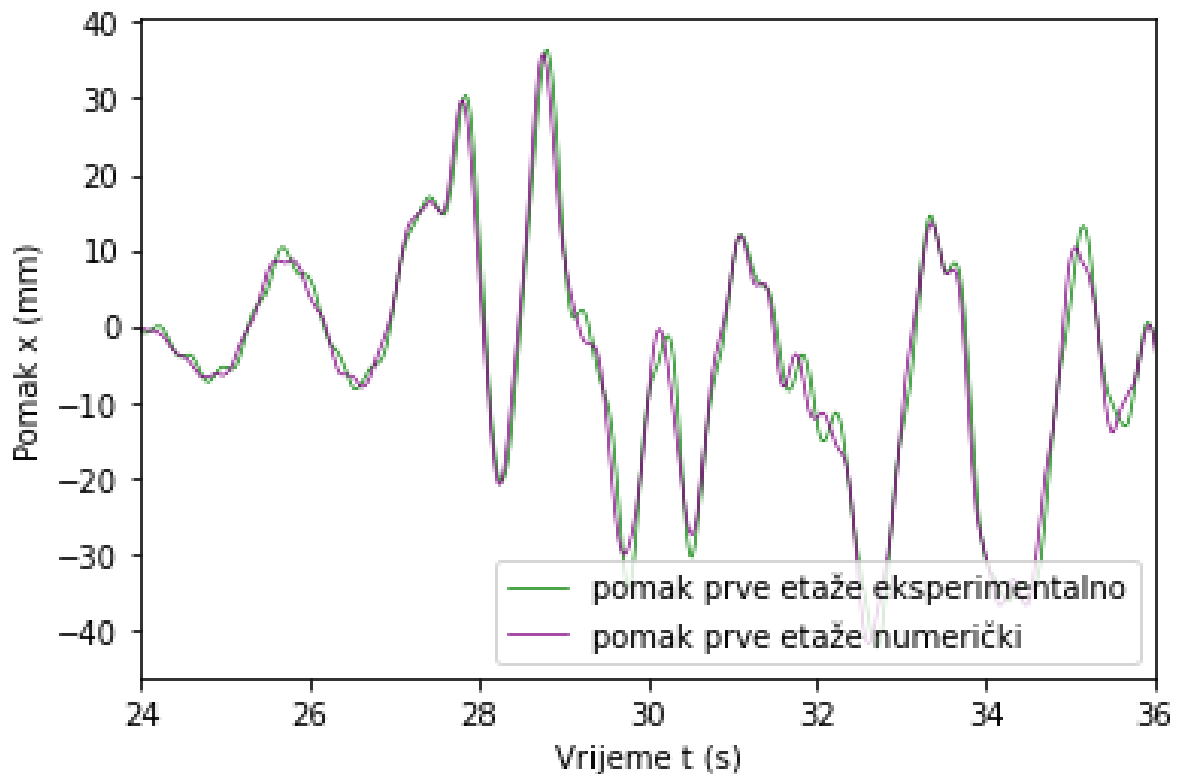
masa_1_rel_adjusted = [m - offset for m in masa_1_rel]

plt.plot(vrijeme, masa_1_rel_adjusted, 'g', linewidth=0.7)
plt.plot(t, x[0, :], 'purple', linewidth=0.7)

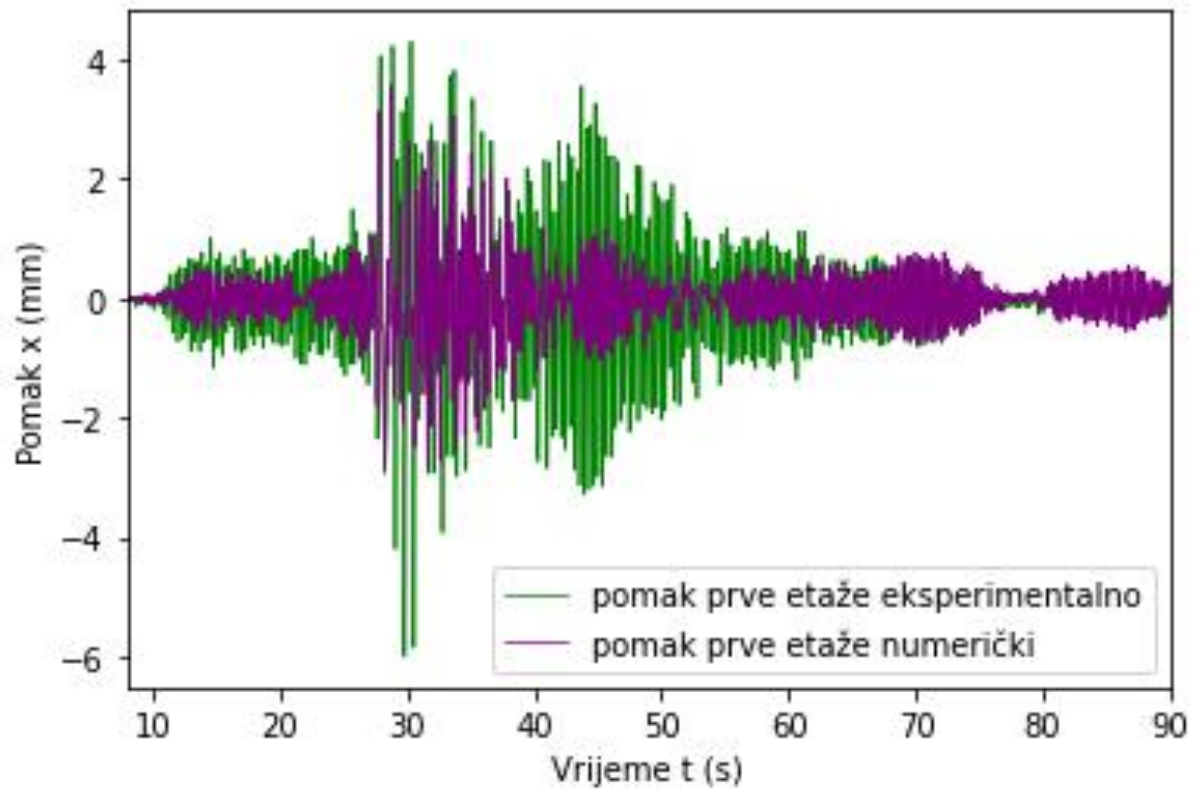
plt.legend(['pomak prve etaže eksperimentalno','pomak prve etaže numerički'],
loc="lower right")
plt.xlabel('Vrijeme t (s)')
plt.ylabel('Pomak x (mm)')
plt.xlim(8,90) #plotanje
#plt.title('Kobe')
plt.show()
```

**9.12 PRILOG - Dijagrami Kobe potresnog zapisa**

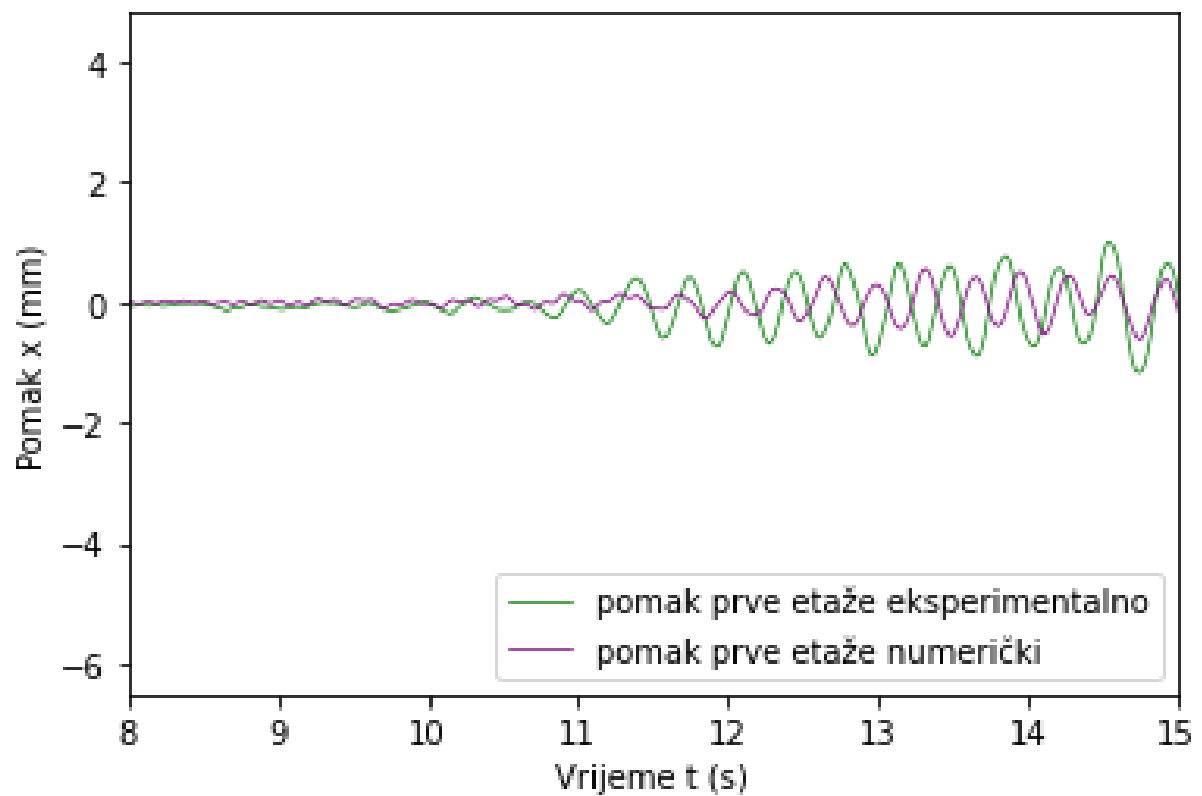
Slika 103. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže



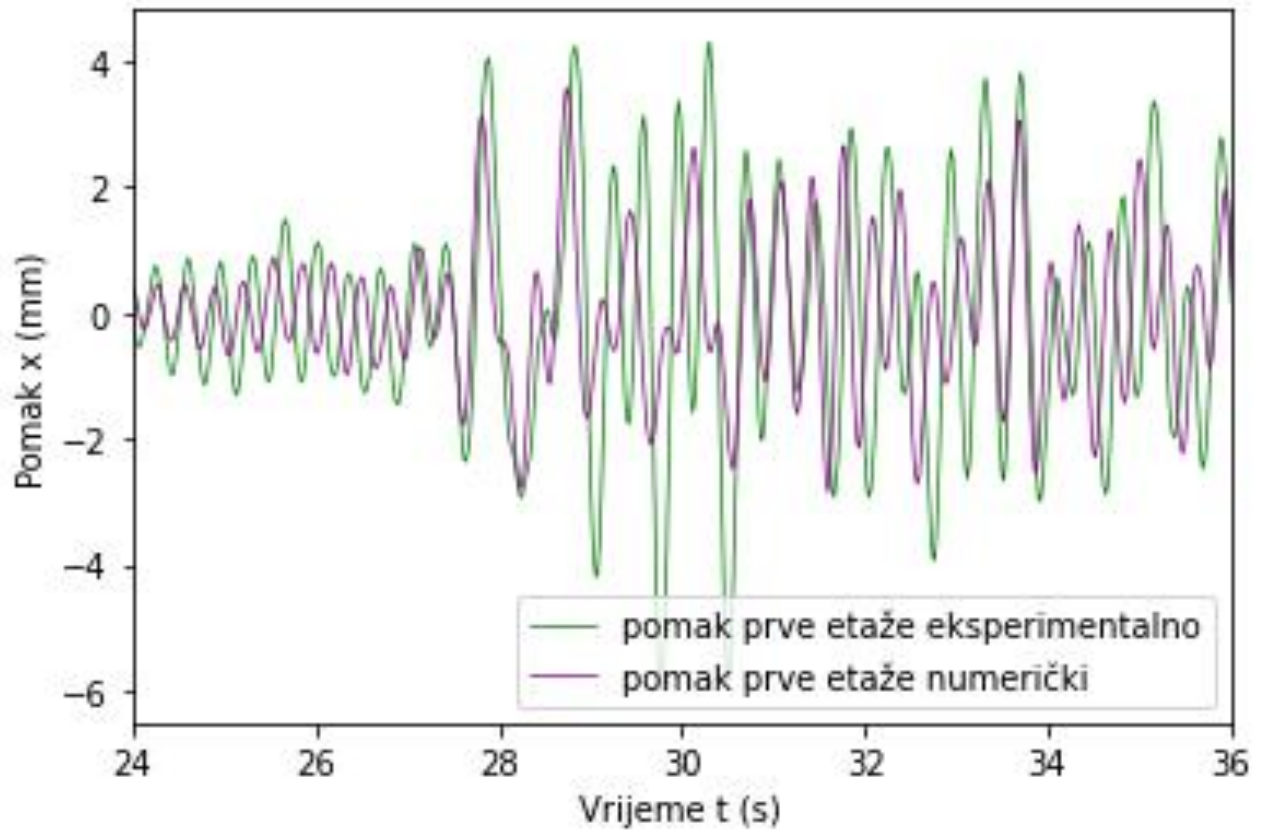
Slika 104. Kobe - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže 24. - 36.sec



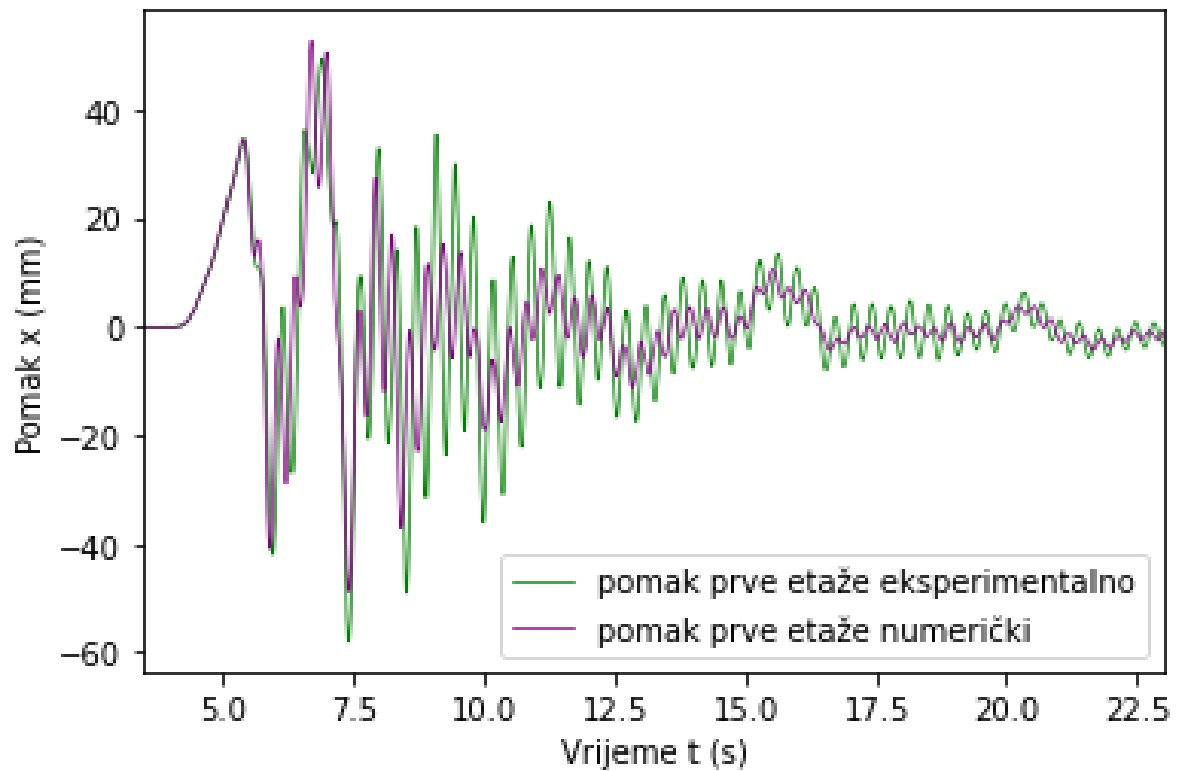
Slika 105. Kobe - usporedba relativnih pomaka 1.etaže



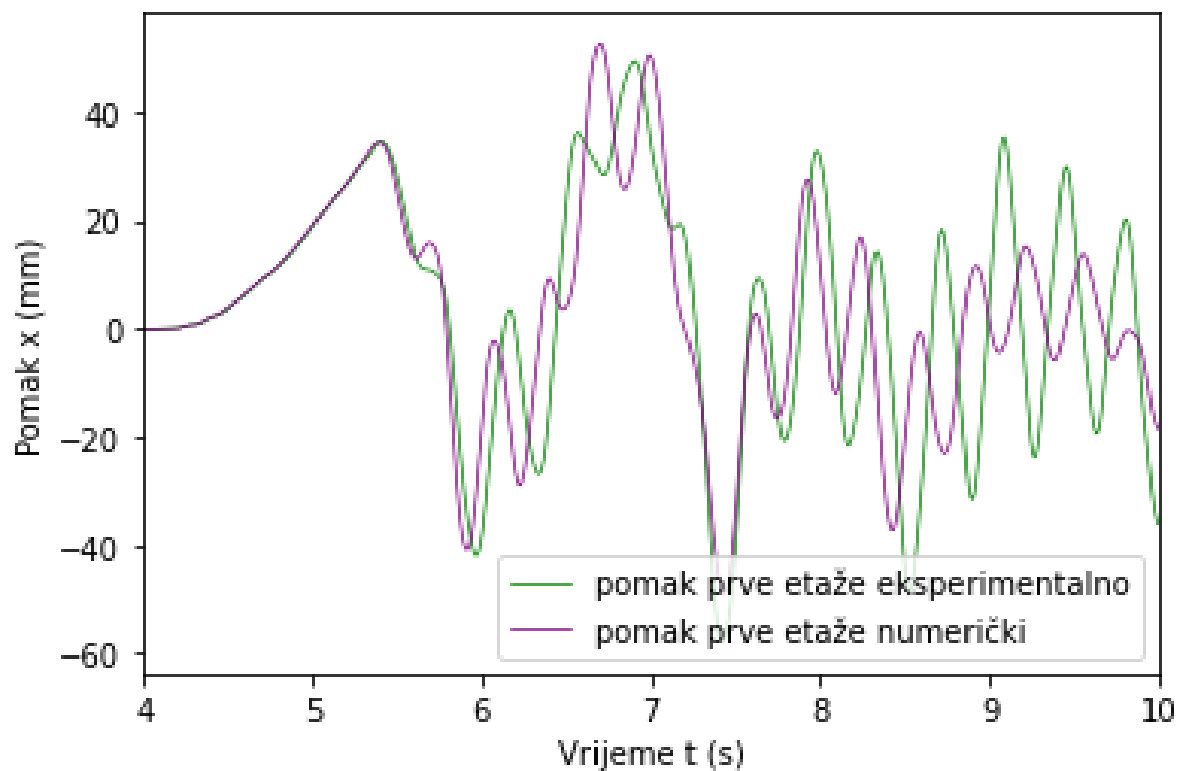
Slika 106. Kobe - usporedba relativnih pomaka 1.etaže - početak zapisa



Slika 107. Kobe - usporedba relativnih pomaka 1.etaže 24. - 36. sec

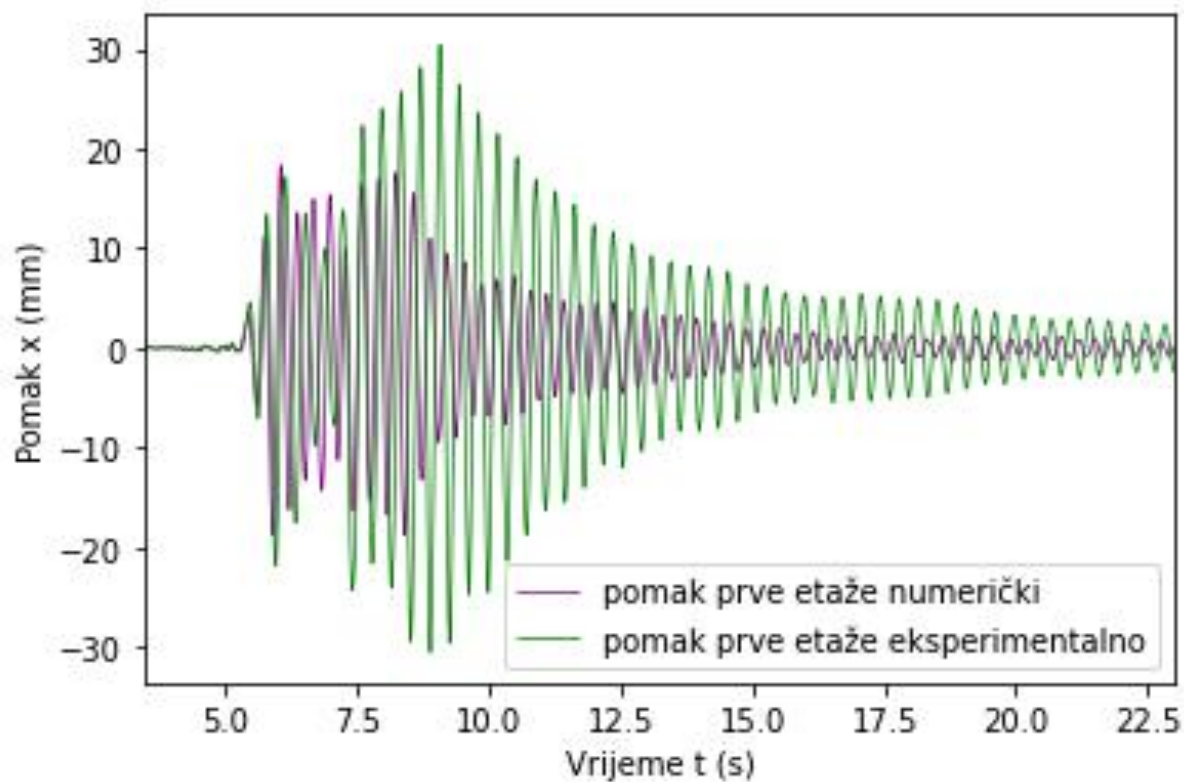
**9.13 PRILOG - Dijagrami Northridge potresnog zapisa**

Slika 108. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže

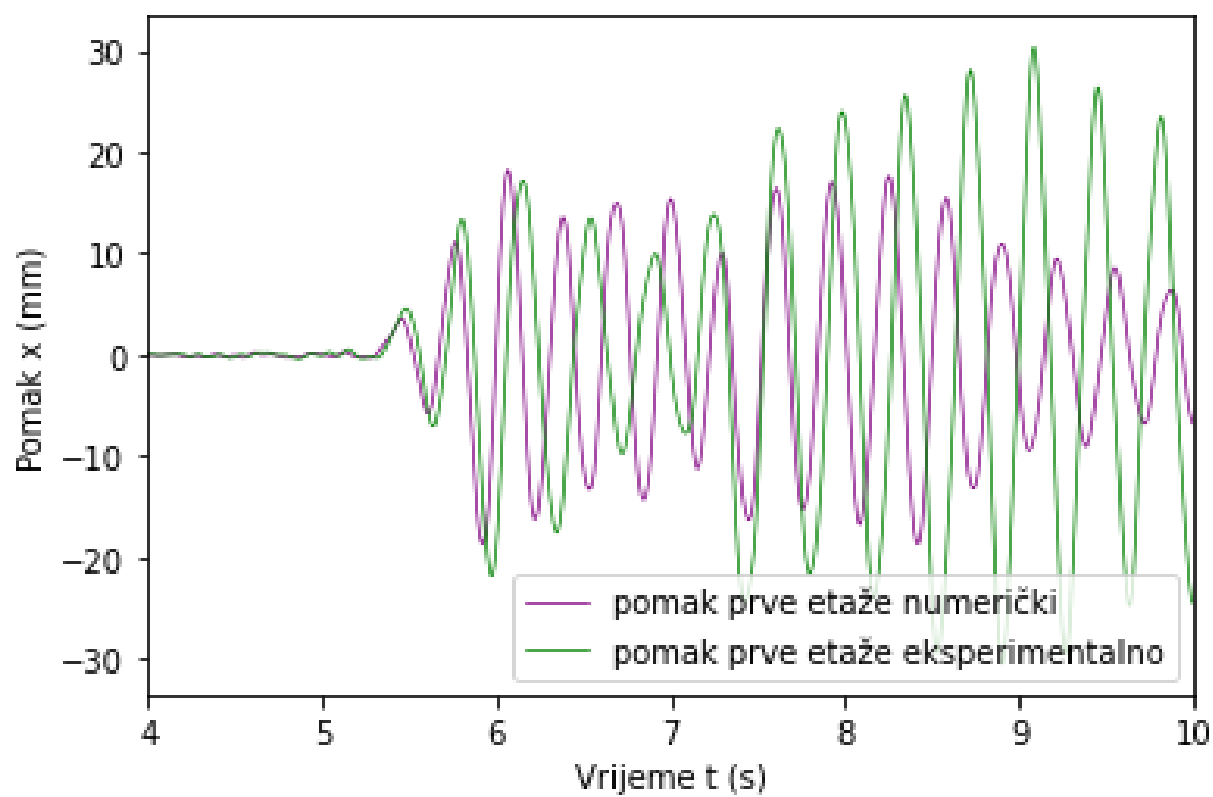


Slika 109. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 1. etaže 4. -10. sec

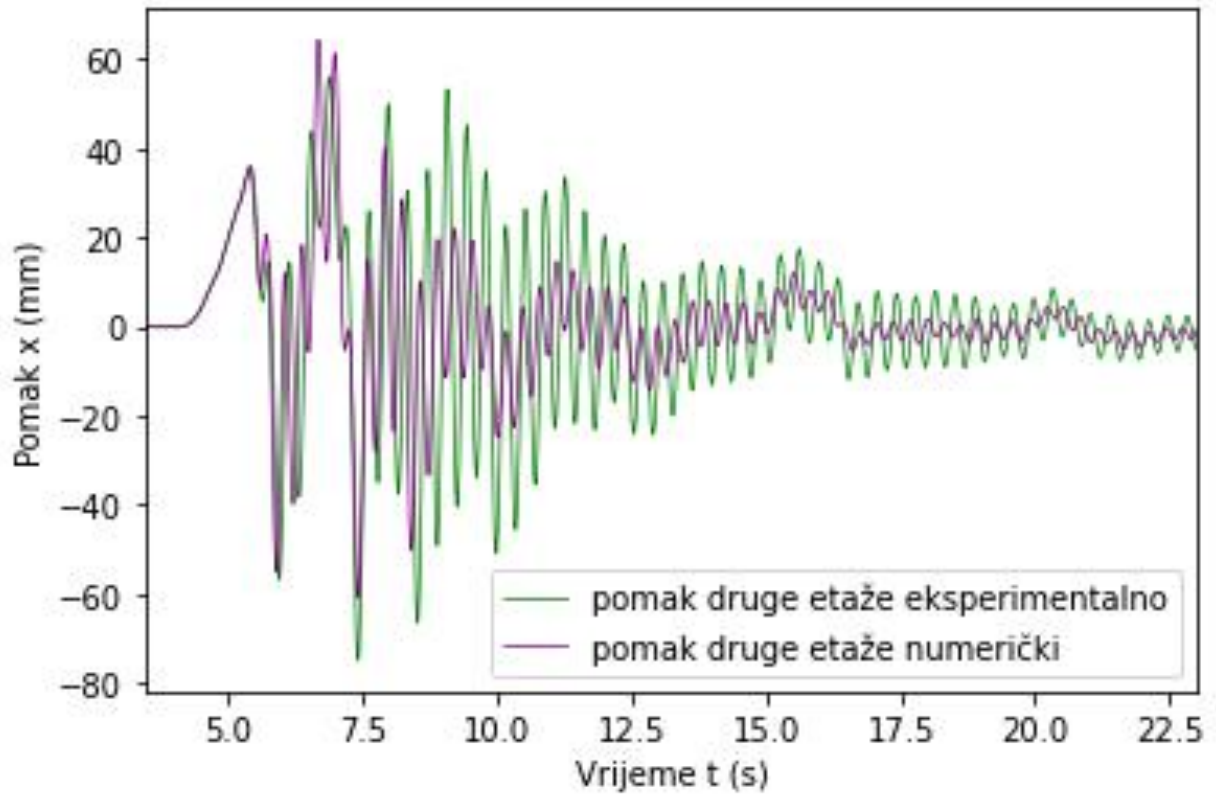




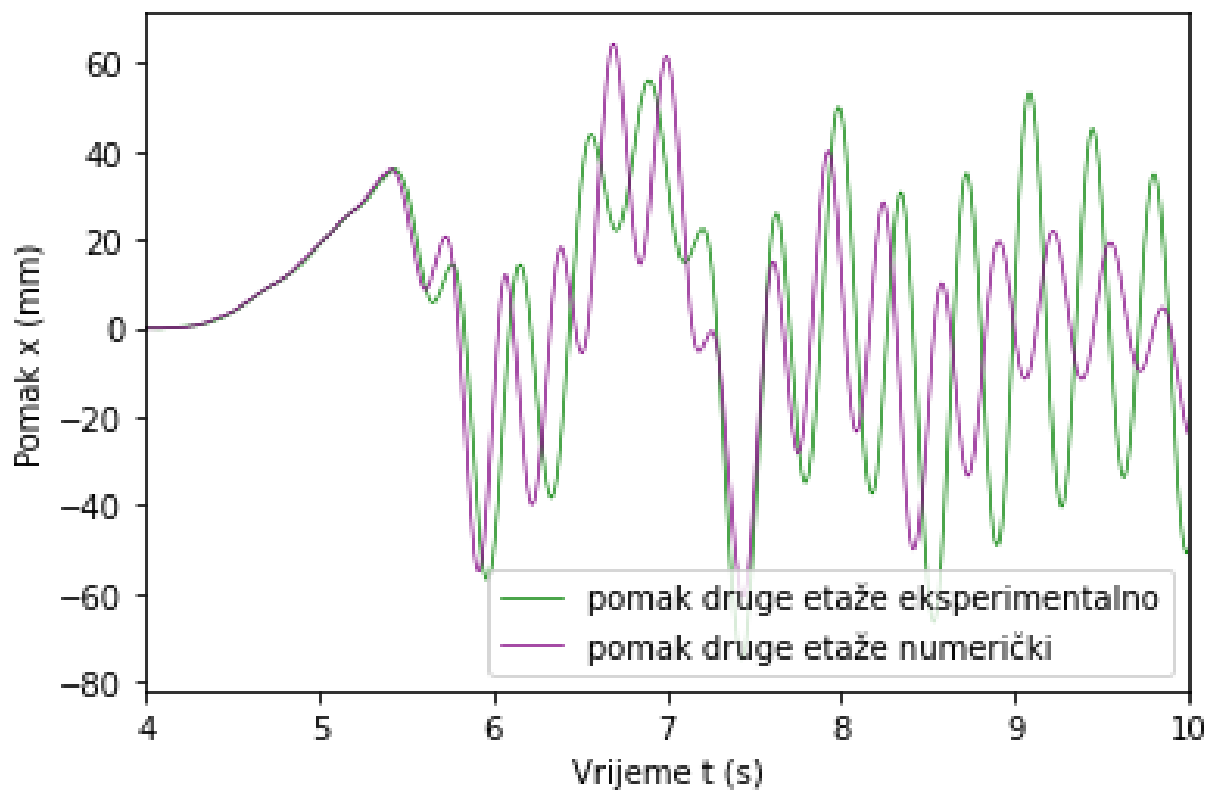
Slika 110. Northridge - usporedba relativnih pomaka 1. etaže



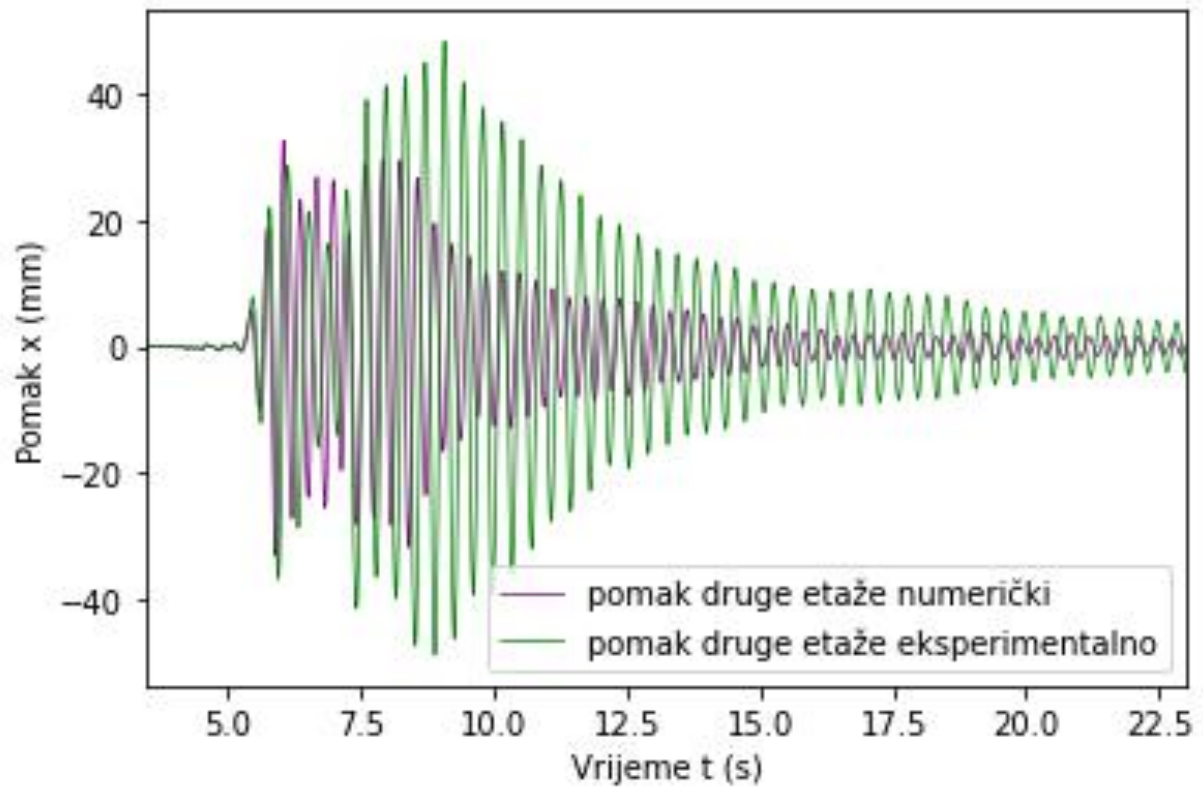
Slika 111. Northridge - usporedba relativnih pomaka 1. etaže 4. - 10. sec



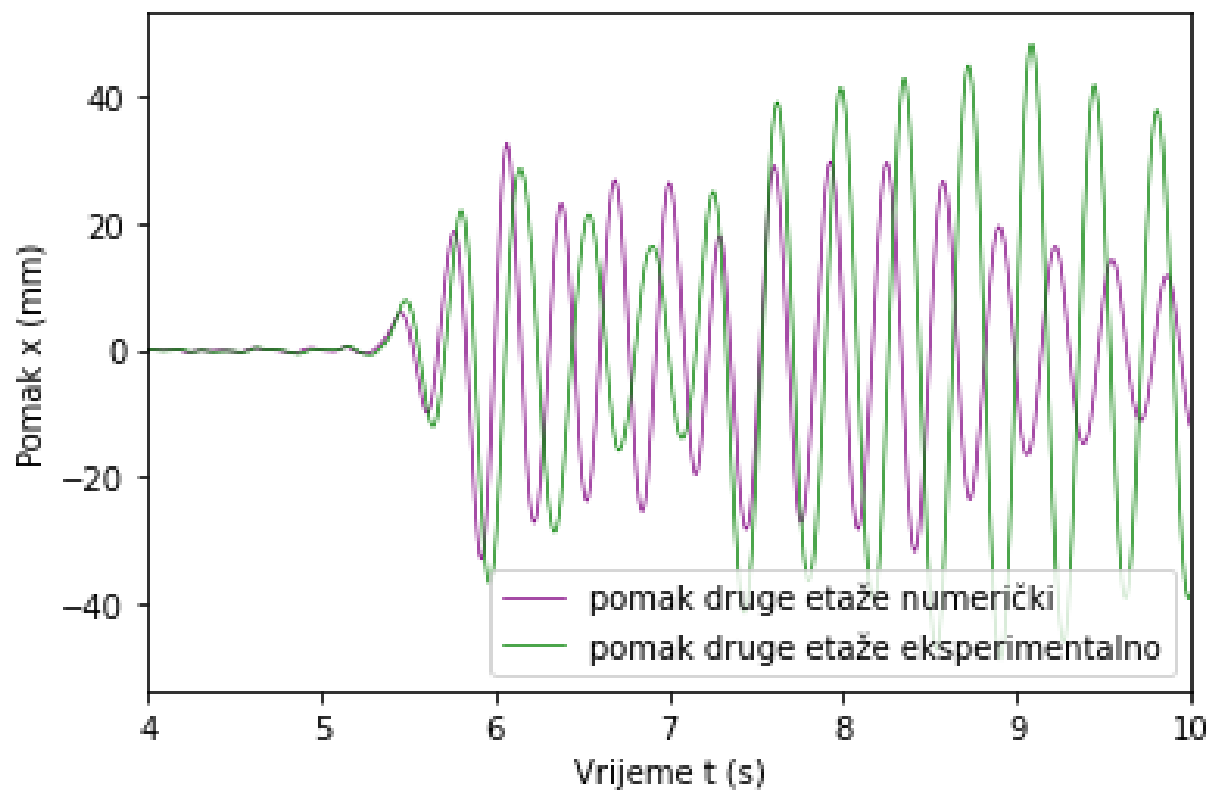
Slika 112. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 2.etaže



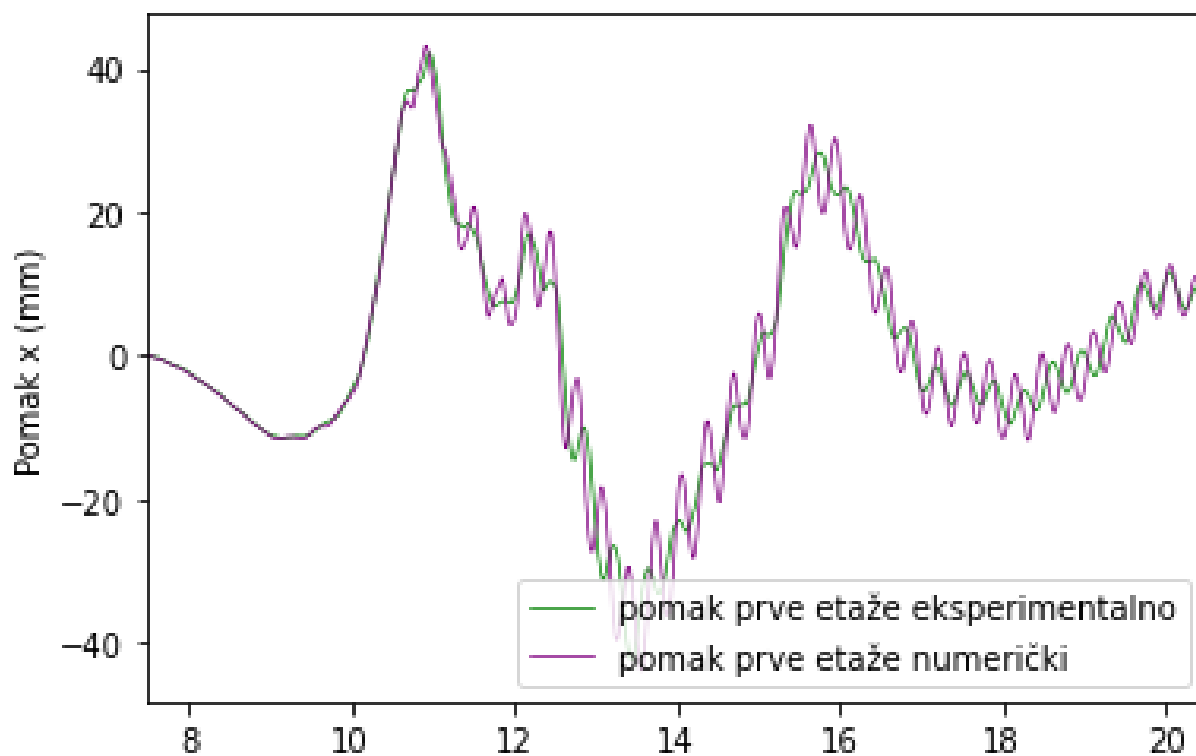
Slika 113. Northridge - usporedba apsolutnih pomaka 2. etaže 4. -10. sec



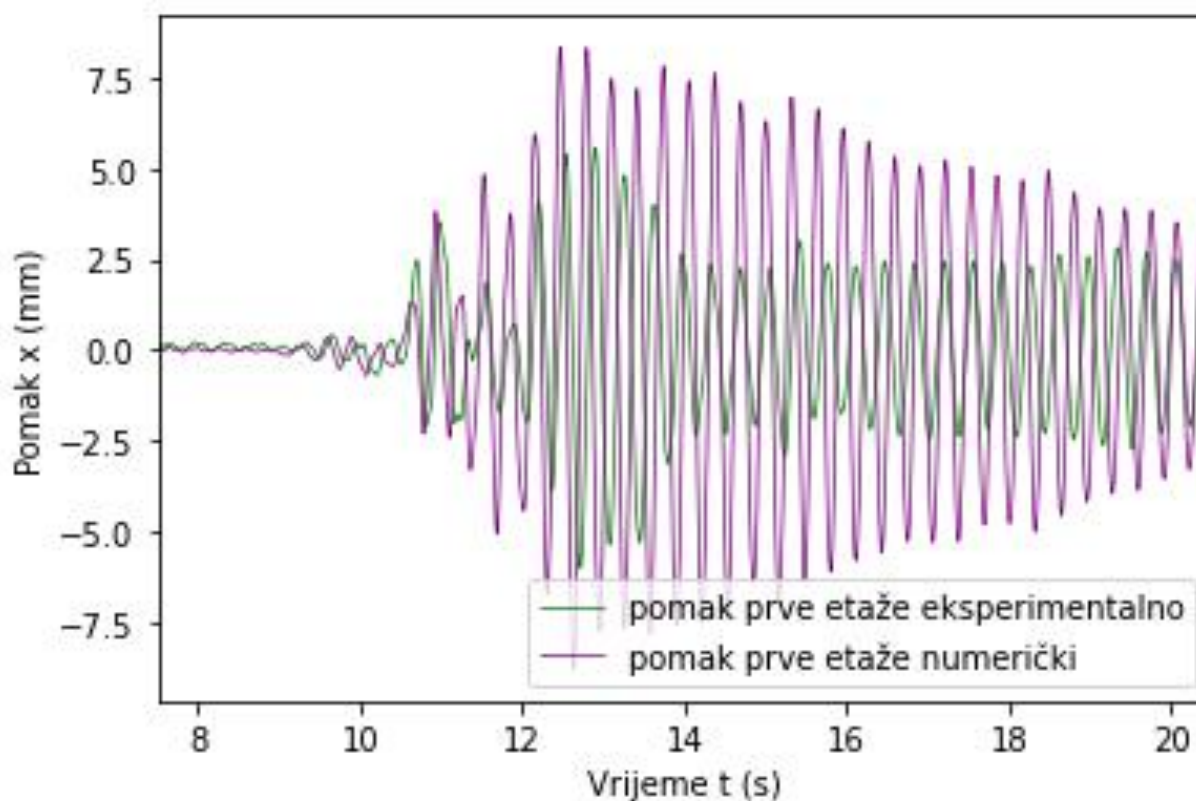
Slika 114. Northridge - usporedba relativnih pomaka 2. etaže



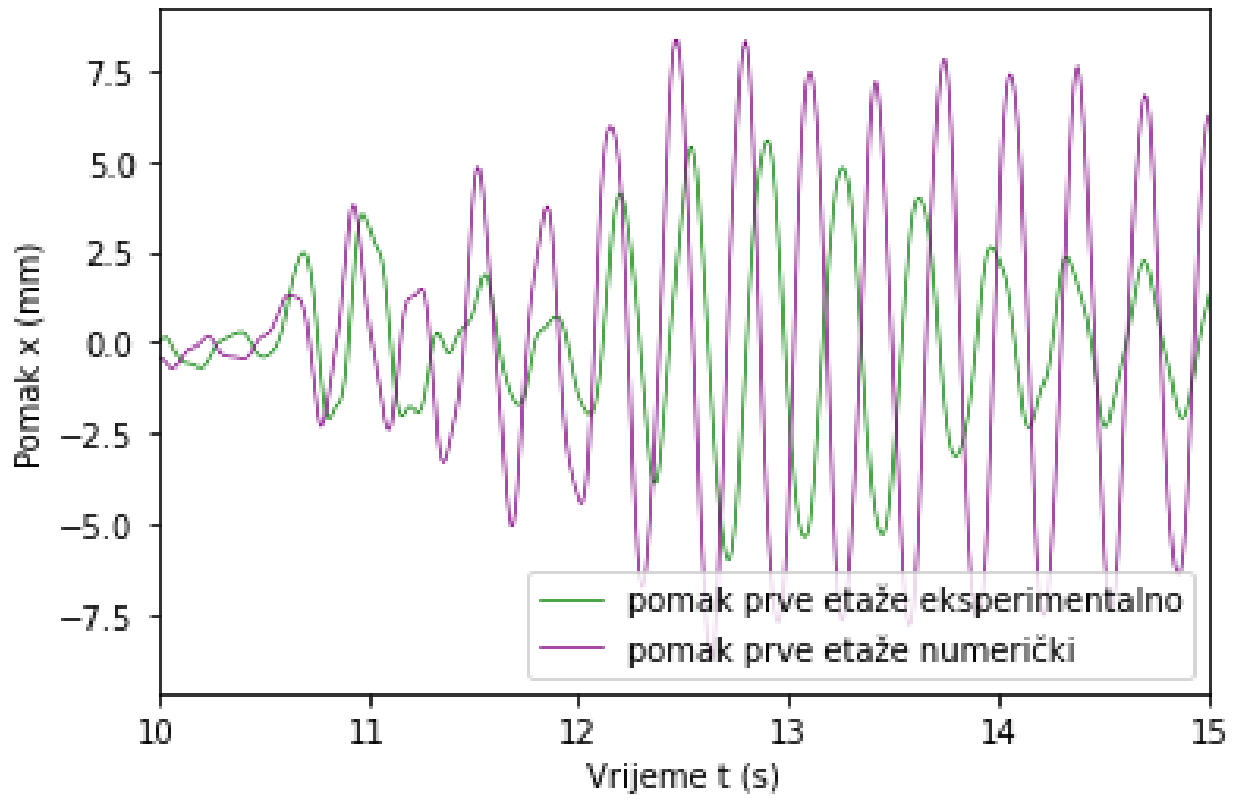
Slika 115. Northridge - usporedba relativnih pomaka 2. etaže 4. - 10. sec

**9.14 PRILOG - Dijagrami El Centro potresnog zapisa**

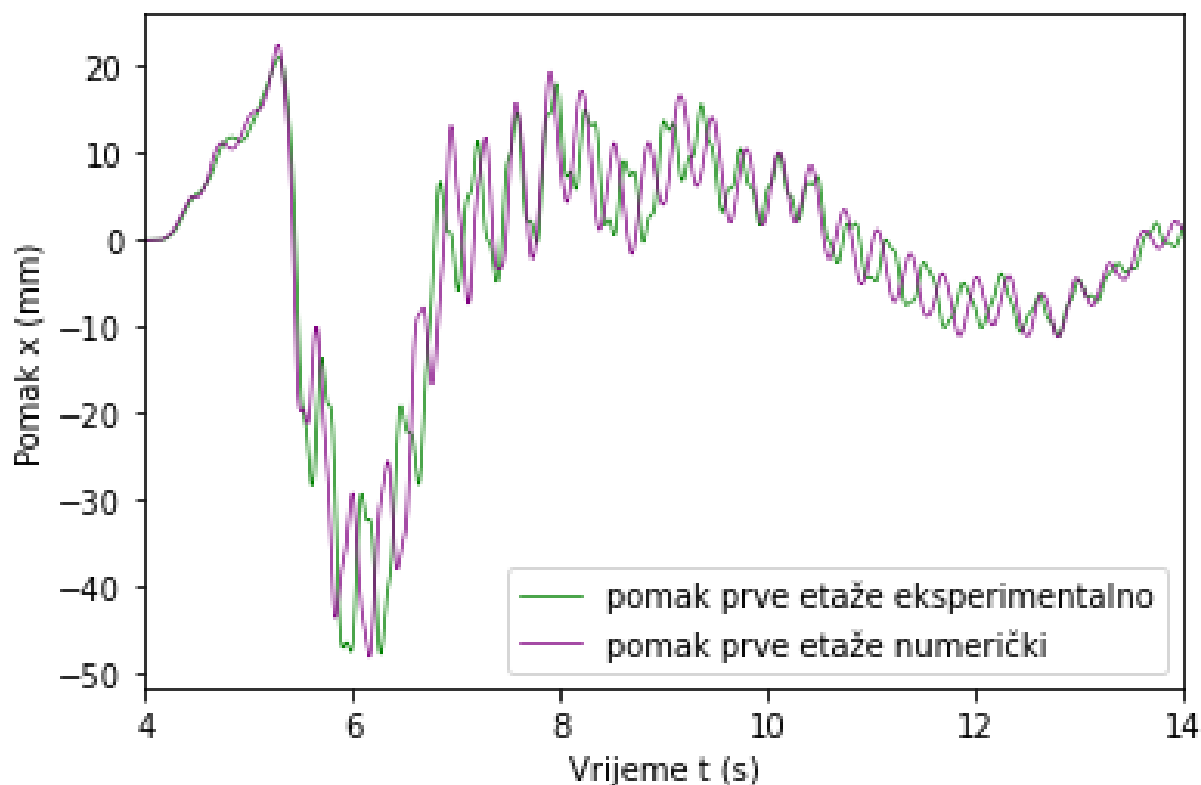
Slika 116. El Centro - usporedba apsolutnih pomaka 1.etaže



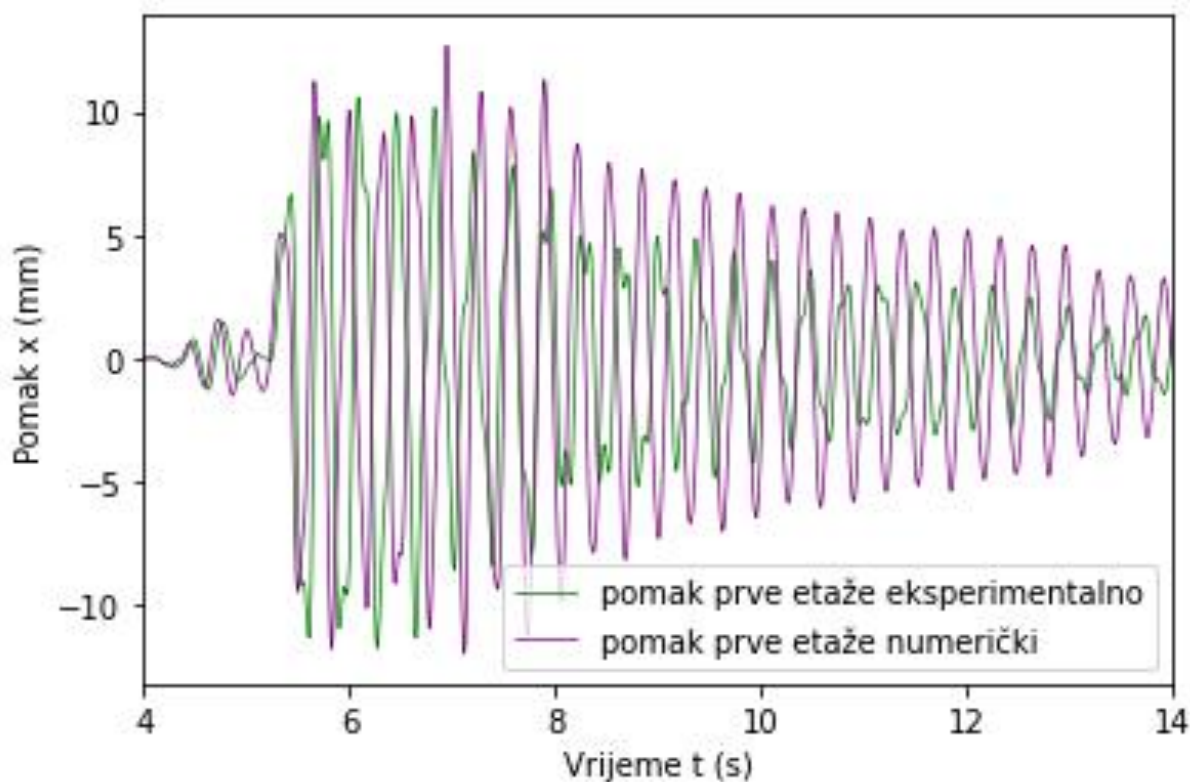
Slika 117. El Centro - usporedba relativnih pomaka 1.etaže



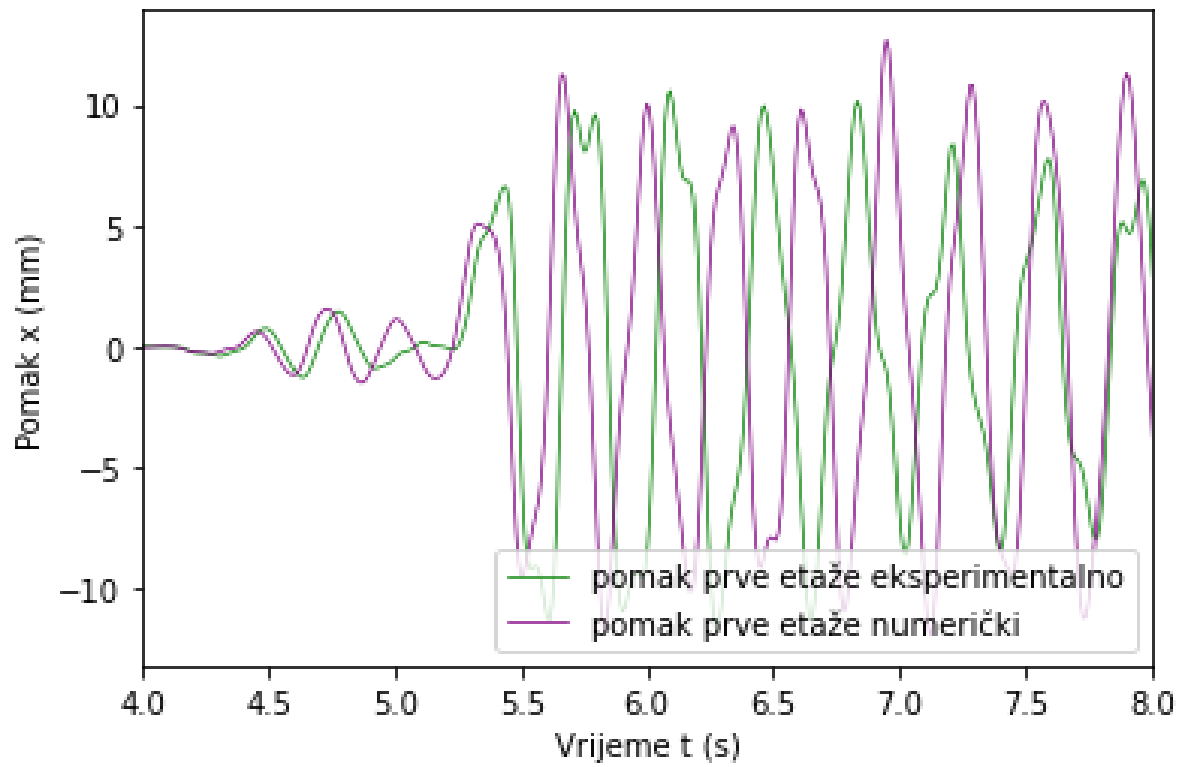
Slika 118. El Centro - usporedba relativnih pomaka 1.etaže 10. - 15. sec

**9.15 PRILOG - Dijagrami Cape Mendocino potresnog zapisa**

Slika 119. Cape Mendocino - usporedba apsolutnih pomaka 1. etaže



Slika 120. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 1. etaže



Slika 121. Cape Mendocino - usporedba relativnih pomaka 1. etaže 4. - 8. sec