

# Usporedba ponašanja grede na konačnom i beskonačnom modelu tla

---

Cetin, Antonio

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:157:741844>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-20**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering - FCERI Repository](#)



image not found or type unknown

**SVEUČILIŠTE U RIJECI**  
**GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Antonio Cetin**

**Usporedba ponašanja grede na konačnom i beskonačnom modelu tla**

**Diplomski rad**

**Rijeka, 2024.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**Sveučilišni diplomski studij  
Modul hidrotehnika  
Računalno modeliranje**

**Antonio Cetin**  
**JMBAG: 0114031172**

**Usporedba ponašanja grede na konačnom i beskonačnom modelu tla**

**Diplomski rad**

**Rijeka, rujan 2024.**

## IZJAVA

Diplomski rad izradio sam samostalno, u suradnji s mentorom prof. dr. sc. Ivicom Kožarom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.



---

Antonio Cetin

U Rijeci, 11.09.2024.

## **ZAHVALA**

Posebno se zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Ivici Kožaru na nesebičnom pružanju znanja i podrške tijekom izrade ovog diplomskog rada. Hvala Vam na svim savjetima, ispravljanju, poticanju i prenesenom znanju koje ste mi pružili tijekom studiranja. Zahvaljujući Vašoj stručnosti, uloženom vremenu i trudu, spremno ću koračati kroz daljnje izazove na profesionalnom planu. Ovaj rad ne bi bio moguć bez Vašeg vodstva i predanosti.

## SAŽETAK

U ovom radu istražuju se ponašanje tla s posebnim naglaskom na elastično tlo, modele konačnog i beskonačnog tla, te betonsku gredu koja služi kao temelj kranske dizalice. Elastično tlo predstavlja osnovni koncept u geotehnici, gdje se ponašanje tla pod opterećenjem modelira kao elastično, s linearnom vezom između naprezanja i deformacija. Ključna svojstva elastičnog tla uključuju povratnost deformacija nakon rasterećenja i granicu elastičnosti, koja označava prijelaz u trajne plastične deformacije. Razumijevanje ovih svojstava ključno je za projektiranje temelja, nasipa i drugih geotehničkih konstrukcija, a inženjeri koriste različite matematičke i numeričke metode za analizu elastičnog ponašanja tla.

Model konačnog elastičnog tla koristi se za analizu lokalnih deformacija i naprezanja, dok model beskonačnog elastičnog tla omogućava analizu tla koje se proteže u beskonačnost, izbjegavajući utjecaj granica. Oba modela koriste principe elastičnosti, ali se primjenjuju u različitim situacijama, ovisno o specifičnim uvjetima opterećenja. U radu će se usporediti rezultati dobiveni korištenjem oba modela, čime će se osigurati sveobuhvatno razumijevanje ponašanja tla.

Sve u svemu, ovaj rad pruža detaljan uvid u ključne aspekte elastičnog tla, modele analize, te značaj betonske grede i kranskih dizalica u geotehničkom projektiranju, čime se pridonosi boljem razumijevanju interakcije između tla i konstrukcija.

## **ABSTRACT**

In this paper, the behavior of soil is investigated with a special emphasis on elastic soil, finite and infinite soil models, and the concrete beam that serves as the foundation for the crane. Elastic soil represents a fundamental concept in geotechnics, where the behavior of soil under load is modeled as elastic, with a linear relationship between stress and deformation. Key properties of elastic soil include the recoverability of deformations after unloading and the elastic limit, which marks the transition to permanent plastic deformations. Understanding these properties is crucial for the design of foundations, embankments, and other geotechnical structures, and engineers employ various mathematical and numerical methods to analyze the elastic behavior of soil.

The finite elastic soil model is used to analyze localized deformations and stresses, while the infinite elastic soil model allows for the analysis of soil that extends to infinity, avoiding the influence of boundaries. Both models utilize principles of elasticity but are applied in different situations, depending on the specific loading conditions. The paper will compare the results obtained using both models, ensuring a comprehensive understanding of soil behavior.

Overall, this paper provides a detailed insight into the key aspects of elastic soil, analysis models, and the significance of concrete beams and cranes in geotechnical design, contributing to a better understanding of the interaction between soil and structures.



## Sadržaj

Popis tablica .....	
Popis slika .....	10
Uvod – tehnički opis problema .....	1
1.Ulazni parametri.....	2
1.1. Elastično tlo.....	2
1.1.1. Model konačnog tla.....	2
1.1.2. Model beskonačnog tla .....	3
1.1.3. Usporedba modela konačnog tla i beskonačnog tla.....	3
1.2. Greda .....	4
1.3 Kranska dizalica .....	5
2.Proračun.....	7
2.1. Greda na konačnom tlu .....	9
2.2. Greda na beskonačnom tlu .....	12
3.Rezultati .....	17
3.1. Slučaj 1 .....	17
3.2. Slučaj 2 .....	28
3.3. Slučaj 3 .....	37
3.4. Slučaj 4 .....	48
4.Usporedba i zaključak .....	59
5.Izvori.....	63
6.Prilozi – mathcad file .....	64

## Popis tablica

Tablica 1 - matrica konačne grede A .....	10
Tablica 2 - matrica konačne grede A nakon uvedenih rubnih uvjeta .....	11
Tablica 3 - matrica beskonačne grede AA .....	13
Tablica 4 - matrica beskonačne grede AA nakon uvedenih rubnih uvjeta i uvjeta beskonačnosti .....	16
Tablica 5 - opterećenje po segmentima za slučaj 1 .....	19
Tablica 6 - progibi za konačnu gredu po segmentima .....	20
Tablica 7 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu .....	21
Tablica 8 - momenti za konačnu gredu za slučaj 1 .....	23
Tablica 9 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 1 .....	24
Tablica 10 - opterećenje po segmentima za slučaj 2.....	29
Tablica 11 - progibi za konačnu gredu po segmentima za slučaj 2 .....	30
Tablica 12 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu za slučaj 2 .....	31
Tablica 13 - momenti za konačnu gredu za slučaj 2 .....	33
Tablica 14 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 2 .....	34
Tablica 15 - opterećenje po segmentima za slučaj 3.....	39
Tablica 16 - progibi za konačnu gredu po segmentima za slučaj 3 .....	40
Tablica 17 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu za slučaj 3 .....	41
Tablica 18 - momenti za konačnu gredu za slučaj 3 .....	43
Tablica 19 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 3 .....	44
Tablica 20 - opterećenje po segmentima za slučaj 4.....	50
Tablica 21 - progibi za konačnu gredu po segmentima za slučaj 4 .....	51
Tablica 22 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu za slučaj 4 .....	52
Tablica 23 - momenti za konačnu gredu za slučaj 4 .....	54
Tablica 24 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 4 .....	55

## Popis slika

Slika 1 - uzdužni presjek grede .....	5
Slika 2 - poprečni presjek grede .....	5
Slika 3 - kranska dizalica s 4 osovine .....	6
Slika 4- progibi slučaj 1 .....	22
Slika 5 - momentni dijagram - slučaj 1 .....	25
Slika 6 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 1 .....	26
Slika 7 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 1 .....	26
Slika 8 - progibi za slučaj 1 s okolnim tlom .....	27
Slika 9- progibi za slučaj 2.....	32
Slika 10 - momentni dijagram - slučaj 2 .....	35
Slika 11 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 2 .....	36
Slika 12 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 2 .....	36
Slika 13 - progibi za slučaj 2 s okolnim tlom .....	37
Slika 14 - progibi za slučaj 3 .....	42
Slika 15 - momentni dijagram - slučaj 3 .....	45
Slika 16 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 3 .....	46
Slika 17 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 3 .....	46
Slika 18 - progibi za slučaj 3 s okolnim tlom .....	47
Slika 19 - progibi za slučaj 4 .....	53
Slika 20 - momentni dijagram - slučaj 4 .....	56
Slika 21 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 4 .....	57
Slika 22 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 4 .....	57
Slika 23 - progibi za slučaj 4 s okolnim tlom .....	58
Slika 24 - usporedba progiba za različite slučaje za konačnu gredu .....	59
Slika 25 - momenti dijagrami za različite slučajeve kod konačne grede .....	60
Slika 26 - usporedba progiba za različite slučaje za beskonačnu gredu .....	61
Slika 27 - momenti dijagrami za različite slučajeve kod beskonačne grede .....	62

## Uvod – tehnički opis problema

U ovom diplomskom radu analizirano je ponašanje betonske grede dimenzija 1,2 m × 0,8 m i duljine 8 m pod opterećenjem kranske dizalice nosivosti 30 tona s 4 osovine. Proračun je proveden u softveru Mathcad za dva modela elastične podloge: konačnu i beskonačnu. Razmatrana su 4 slučaja opterećenja za svaki model, ovisno o broju kotača dizalice koji prenose opterećenje na gredu (1, 2, 3 ili 4 kotača). Zadatak je prikazati te usporediti progibe grede i momentne dijagrame za ova dva modela podloge. Prvo će se usporediti rezultati različitih slučajeva na 2 podloge, a potom rezultati različitih slučajeva na istoj podlozi.

## 1. Ulazni parametri

### 1.1. Elastično tlo

Elastično tlo je fundamentalni koncept u geotehnici koji opisuje ponašanje tla pod opterećenjem, pretpostavljajući da se tlo ponaša poput elastičnog materijala. Ova teorija temelji se na pretpostavci da se deformacije tla mogu opisati zakonima elastičnosti, slično kao kod čvrstih materijala poput čelika ili betona. Ključna svojstva elastičnog tla su linearna veza između naprezanja i deformacija, povratnost deformacija nakon rasterećenja, te postojanje granice elastičnosti iznad koje dolazi do trajnih plastičnih deformacija. Modul elastičnosti je parametar koji definira odnos između naprezanja i deformacije, a može varirati ovisno o vrsti tla, vlažnosti, gustoći i drugim faktorima. [1]

U inženjerskoj praksi, elastično tlo se modelira pomoću različitih matematičkih i numeričkih metoda kako bi se analiziralo ponašanje tla pod različitim opterećenjima. Razumijevanje elastičnih svojstava tla ključno je za projektiranje temelja, nasipa, potpornih zidova i drugih geotehničkih konstrukcija. Analiza elastičnog ponašanja tla pod opterećenjem omogućava inženjerima da predvide deformacije konstrukcija i osiguraju njihovu stabilnost i sigurnost. Međutim, treba imati na umu da je model elastičnog tla idealizacija stvarnog ponašanja tla, koje je u stvarnosti nelinearno, anizotropno i ovisi o prethodnoj povijesti opterećenja. Stoga, u složenijim slučajevima, koriste se napredniji modeli tla koji bolje opisuju nelinearno i plastično ponašanje, poput Mohr-Coulombovog ili Cam-Clay modela. Unatoč ograničenjima, model elastičnog tla i dalje ima široku primjenu u geotehničkom inženjerstvu, posebno u preliminarnim analizama i proračunima. Uz pravilnu primjenu i razumijevanje njegovih pretpostavki, ovaj model može pružiti korisne informacije o ponašanju geotehničkih konstrukcija pod opterećenjem. Elastično tlo predstavlja važan koncept u geotehnici koji omogućava inženjerima da analiziraju interakciju tla i konstrukcija. Iako je idealizacija stvarnosti, model elastičnog tla ima svoju vrijednost u projektiranju i analizi geotehničkih sustava, posebno kada se koristi u kombinaciji s naprednijim modelima i laboratorijskim ispitivanjima tla. [2]

#### 1.1.1. Model konačnog tla

Konačni elastični modeli tla koriste se za analizu lokalnih deformacija i naprezanja, što je posebno važno u situacijama kada se opterećenje primjenjuje na ograničenoj

površini, kao što su temelji građevinskih objekata. Ovi modeli omogućuju inženjerima da predviđaju ponašanje tla pod različitim uvjetima opterećenja i da optimiziraju dizajn temelja kako bi se smanjili rizici od slijeganja ili oštećenja. Model konačnog elastičnog tla ima svoja ograničenja, posebno u situacijama kada su naprezanja velika ili kada tlo prelazi u plastičnu fazu. U takvim slučajevima, potrebni su složeniji modeli koji uzimaju u obzir nelinearno ponašanje tla.

### *1.1.2. Model beskonačnog tla*

Model beskonačnog elastičnog tla koristi se za analizu tla koje se proteže u beskonačnost, čime se izbjegavaju granice koje bi mogle utjecati na ponašanje tla. Ovaj model je posebno koristan u situacijama gdje se opterećenje primjenjuje na površinu tla, kao što su nasipi ili temelji, i omogućava analizu ponašanja tla na velikim udaljenostima od opterećenja. U modelu beskonačnog elastičnog tla, tlo se također ponaša kao elastično tijelo, no bez ograničenja koja bi mogla utjecati na raspodjelu naprezanja. Ovaj model omogućava analizu naprezanja i deformacija na temelju teorije elastičnosti, a često se koristi u proračunima za određivanje utjecaja opterećenja na tlo u različitim uvjetima. Jedna od ključnih prednosti modela beskonačnog elastičnog tla je njegova sposobnost da pojednostavi analize složenih geotehničkih problema. Međutim, kao i kod konačnog modela, i ovdje postoje ograničenja, posebno u situacijama kada se tlo ponaša nelinearno ili kada su prisutne plastične deformacije. [3]

### *1.1.3. Usporedba modela konačnog tla i beskonačnog tla*

Kada se usporede modeli konačnog i beskonačnog elastičnog tla, ključna razlika leži u njihovoj primjeni i granicama. Model konačnog elastičnog tla je primjeren za analizu lokaliziranih opterećenja i deformacija, dok model beskonačnog elastičnog tla omogućava analizu tla na većim udaljenostima od opterećenja bez utjecaja granica. Oba modela koriste slične principe elastičnosti, no odabir između njih ovisi o specifičnim uvjetima analize. U praksi, inženjeri često koriste oba modela u kombinaciji kako bi dobili sveobuhvatnu sliku o ponašanju tla pod različitim uvjetima opterećenja, osiguravajući time sigurnost i stabilnost građevinskih objekata.

U ovom radu koristit će se oba modela te će se usporediti rezultati.

## 1.2. Greda

U ovom radu pretpostavlja se betonska greda koja ima funkciju temelja po kojoj se kreće kranska dizalica. Betonska greda je dimenzija širine 0,80 m, visine 1,20 m i duljine 12,0 m, koja je podijeljena na 20 segmenata. Također, razmotrit ćemo važnost modula elastičnosti, koji u ovom slučaju iznosi  $30 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>. Širina i visina grede direktno utječu na njezinu otpornost na savijanje i smicanje, dok duljina grede utječe na način na koji se sile prenose kroz strukturu. Greda je podijeljena na 20 segmenata, što omogućava detaljniju analizu i procjenu ponašanja tla ispod grede pod različitim opterećenjima. Youngov modul elastičnosti (E) je još jedan važan faktor u analizi betonske grede. U ovom slučaju, modul elastičnosti iznosi  $30 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>. Ova vrijednost predstavlja sposobnost betona da se deformira pod opterećenjem i vraća u svoj prvotni oblik kada opterećenje prestane. Visok modul elastičnosti ukazuje na to da će greda imati malu deformaciju pod opterećenjem, što je poželjno za očuvanje stabilnosti i sigurnosti građevinskih objekata.

Moment inercije pravokutnog presjeka betonske grede dimenzija  $bg$  i  $hg$  računa se prema formuli:

$$I = \frac{bg * hg^3}{12}$$

gdje je:

- $bg$  širina grede
- $hg$  visina grede

Uvrštavanjem zadanih dimenzija grede:

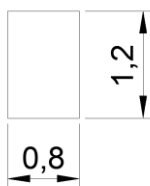
- $bg=0,80$  m
- $hg=1,20$  m

dobiva se:

$$I = \frac{bg * hg^3}{12} = \frac{0,8 * 1,2^3}{12} = 0,1152 \text{ m}^4$$



Slika 1 - uzdužni presjek grede



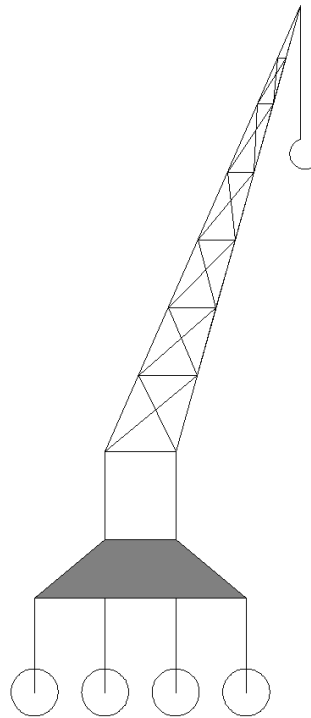
Slika 2 - poprečni presjek grede

### 1.3 Kranska dizalica

Kranske dizalice su neizostavni elementi u građevinskoj industriji, dizajnirane za podizanje, premještanje i spuštanje teških tereta. Ove dizalice igraju ključnu ulogu u različitim fazama građevinskih projekata, od izgradnje visokih zgrada do održavanja industrijskih postrojenja. Njihova sposobnost da podižu velike težine na visoke visine čini ih neophodnima u modernom inženjerstvu. Jedan od popularnih tipova kranskih dizalica su one s četiri osovine. Ove dizalice su posebno dizajnirane za stabilnost i ravnotežu, što je ključno prilikom podizanja teških tereta. Svaka osovina igra važnu ulogu u raspodjeli opterećenja, čime se smanjuje rizik od prevrtanja i osigurava sigurnost operacija. Kranske dizalice s četiri osovine obično su opremljene snažnim motorima i naprednim sustavima kontrole koji omogućuju precizno upravljanje. Ova kontrola je ključna kada se radi o podizanju tereta u uskim ili teško dostupnim prostorima. Osim toga, dizalice su često opremljene sigurnosnim sustavima koji sprječavaju preopterećenje i osiguravaju da se teret podiže i premješta sigurno. U industriji, kranske dizalice s četiri osovine koriste se u raznim aplikacijama, uključujući izgradnju mostova, podizanje betonskih panela, te transport i premještanje opreme unutar tvornica. Njihova svestranost i snaga omogućuju inženjerima da efikasno i sigurno obavljaju složene zadatke. U zaključku, kranske dizalice s četiri osovine predstavljaju ključnu komponentu u modernoj građevinskoj industriji, pružajući stabilnost, sigurnost i učinkovitost prilikom podizanja i premještanja teških tereta.



Njihova primjena doprinosi poboljšanju produktivnosti i sigurnosti na gradilištima diljem svijeta. [4] U proračunu se koristila kranska dizalica težine 300 kN.



*Slika 3 - kranska dizalica s 4 osovine*

## 2. Proračun

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0 \quad (1)$$

Iz jednađbe (1) preko konacnih razlika dobivamo diferencijalnu jednađbu (2):

$$\frac{EI}{\Delta x^4} \cdot (u_{i-2} - 4 \cdot u_{i-1} + 6 \cdot u_i - 4 \cdot u_{i+1} + u_{i+2}) - q = 0 \quad (2)$$

Uvodimo rubne uvjete proste grede:

$$u(0)=0, \quad u(L)=0, \quad u''(0)=0, \quad u''(L)=0$$

Proračun grede:

$$bg=0,8 \text{ m}, \quad hg=1,2 \text{ m}, \quad L=12,0 \text{ m}$$

Moment inercije grede dobivamo pomoću formule:

$$I := \frac{bg \cdot (hg)^3}{12} \quad (3)$$
$$I = \frac{bg * hg^3}{12} = \frac{0,8 * 1,2^3}{12} = 0,1152 \text{ m}^4$$

Youngov modul elastičnosti za beton iznosi:

$$E=30 \cdot 10^6 \text{ GPa} \quad (4)$$

Umnoškom Youngovog modula elastičnosti (4) i momentom inercije (3) dobije se vrijednost od  $3,456 \cdot 10^6$  kNm<sup>2</sup>

$$E * I = 30 * 10^6 * 0,1152 = 3,456 * 10^6 \quad (5)$$

Matrica sistema:

Broj podjela grede je  $n=20$

Greda se dijeli na segmente  $i$

$$i := 0..n \quad (6)$$

$$i1 := 0..n - 1$$

$$i2 := 0..n - 2$$

Zbog dodavanja 2 rubne točke  $\Delta x$ , duljina segmenta grede, dobiva se preko formule:

$$\Delta x = \frac{L}{n - 2} = \frac{12}{20 - 2} = 0,667 \quad (7)$$

Krutost grede  $D$  dobivamo se pomoću formule:

$$D = \frac{EI}{\Delta x^4} = \frac{3,456 * 10^6}{0,667^4} = 1,75 * 10^7 \quad (8)$$

## 2.1. Greda na konačnom tlu

Greda se definira matricom konačne grede A

Uvode se sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned}i_1 &:= 0..n - 1 \\i_2 &:= 0..n - 2\end{aligned}\tag{6}$$

Parametri matrice konačne grede:

$$\begin{aligned}A_{i,i} &:= 6 \cdot D \\A_{i_1, i_1+1} &:= -4 \cdot D \\A_{i_1+1, i_1} &:= -4 \cdot D \\A_{i_2, i_2+2} &:= 1 \cdot D \\A_{i_2+2, i_2} &:= 1 \cdot D\end{aligned}\tag{9}$$

Zadavanjem rubnih uvjeta (10):

$$\begin{aligned}A_{0,0} &:= 1 \cdot D \\A_{0,1} &:= -2 \cdot D \\A_{0,2} &:= 1 \cdot D \\A_{n,n} &:= 1 \cdot D \\A_{n,n-1} &:= -2 \cdot D \\A_{n,n-2} &:= 1 \cdot D \\A_{1,0} &:= -2 \cdot D \\A_{1,1} &:= 5 \cdot D \\A_{n-1,n} &:= -2 \cdot D \\A_{n-1,n-1} &:= 5 \cdot D\end{aligned}\tag{10}$$

Dobivena je matrica konačne grede A

Tablica 1 - matrica konačne grede A

A =

	0	1	2	3	4	5
0	$1.75 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0	0
1	$-3.499 \cdot 10^7$	$8.748 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0
2	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0
3	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
4	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$
5	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$
6	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$
7	0	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	...

## TLO

Usvojen je modul elastičnosti po Nonweileru,  $E=9000 \text{ kn/m}$

Pritisak na tlo je izražen umnoškom modula elastičnosti tla, širinom grede te  $\Delta x$ :

$$p = E \cdot b_g \cdot D_x = 9000 \cdot 0,8 \cdot 0,667 = 4802 \text{ kN} \quad (11)$$

Krutost opruge ( $k_p$ ) je pritisak na tlo,  $p$  (11) podijeljen s duljinom segmenta grede (7)

$$k_p = \frac{p}{\Delta x} = \frac{4802}{0,667} = 7200 \text{ (kN/m)} \quad (12)$$

Uvođenjem opruga (12), dobivene su jednačbe:

$$k := 1, 2..n - 1 \quad (13)$$

$$A_{k,k} := A_{k,k} + k_p$$

$$k := 0, n..n$$

$$A_{k,k} := A_{k,k} + \frac{k_p}{2}$$

Dobivena je nova matrica konačne grede  $A$

*Tablica 2 - matrica konačne grede  $A$  nakon uvedenih rubnih uvjeta*

	0	1	2	3	4	5
0	$1.75 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0	0
1	$-3.499 \cdot 10^7$	$8.748 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0
2	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0
3	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
4	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$
5	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$
6	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$
7	0	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0

$A =$

## 2.2. Greda na beskonačnom tlu

Greda na beskonačnom tlu se definira pomoću matrice AA

Kao i matrica konačne grede, beskonačna ima iste parametre  $\Delta x$  i  $D$

Zbog dodavanja 2 rubne točke  $\Delta x$ , duljina segmenta grede, dobiva se preko formule:

$$\Delta x = \frac{L}{n-2} = \frac{12}{20-2} = 0,667 \quad (7)$$

Krutost grede  $D$  dobivamo se pomoću formule:

$$D = \frac{EI}{\Delta x^4} = \frac{3,456 * 10^6}{0,667^4} = 1,75 * 10^7 \quad (8)$$

Parametri matrice (AA) beskonačne grede:

$$\begin{aligned} AA_{i,i} &:= 6 \cdot D \\ AA_{i,i+1} &:= -4 \cdot D \\ AA_{i+1,i} &:= -4 \cdot D \\ AA_{i,i+2} &:= 1 \cdot D \\ AA_{i+2,i} &:= 1 \cdot D \end{aligned} \quad (14)$$

## Dobivena je matrica konačne grede AA

*Tablica 3 - matrica beskonačne grede AA*

	0	1	2	3	4	5
0	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0	0
1	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.751 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0
2	$1.75 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$8.748 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0
3	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
4	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$
5	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$
6	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$
7	0	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	...

AA =

Opruge dodajemo u osloncima kao i kod matrice konačne grede, gdje je:

$$k := 1, 2, \dots, n - 1 \quad (15)$$

$$k := 0, n, \dots, n$$

Uvođenjem opruga (15), dobivene su jednadžbe:

$$k := 1, 2, \dots, n - 1 \quad (16)$$

$$AA_{k,k} := AA_{k,k} + k_p$$

$$k := 0, n, \dots, n$$

$$AA_{k,k} := AA_{k,k} + \frac{k_p}{2}$$



Budući da je greda beskonačna, potrebno je uvesti krutost okolnog tla

Položaj singulariteta lijevo  $a_L$  je jednak  $\Delta x$

$$a_L = \Delta x = 0,667 \quad (17)$$

Položaj singulariteta desno  $a_D$  je jednak  $\Delta x$

$$a_D = \Delta x = 0,667$$

Uvodi se parametar B koji je jednak umnošku modula elastičnosti E i širina tla  $b_g$

$$B = E \cdot b_g = 9000 \cdot 0,8 = 7200 \text{ kNm} \quad (18)$$

Krutost beskonačnog okolnog tla označena kao  $K_f$  dobivena je formulom:

$$K_{fL} := \frac{1}{3 \cdot \Delta x} B \cdot a_L \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$K_{fD} := \frac{1}{3 \cdot \Delta x} B \cdot a_D \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Uvrštavanjem parametara u jednadžbu (19) dobiva se matrica krutosti okolnog tla

(20)

$$K_{fL} = \begin{pmatrix} 3.84 \times 10^4 & -4.8 \times 10^3 \\ -4.8 \times 10^3 & 2.4 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$K_{fD} = \begin{pmatrix} 2.4 \times 10^3 & -4.8 \times 10^3 \\ -4.8 \times 10^3 & 3.84 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Uvođenjem rubnih uvjeta u točkama 1 i n-1 dobiva se jednadžba (21)

$$(1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_{i+1} + u_{i+2}) \quad (21)$$

Uvođenjem rubnih uvjeta u točkama 2 i n-2 dobiva se jednadžba (22)

$$(-2 \cdot u_{i-1} + 5 \cdot u_i - 4 \cdot u_{i+1} + u_{i+2}) \quad (22)$$

Uvode se rubni uvjeti za matricu AA

$$AA_{1,1} := 1 \cdot D + \frac{k_p}{\Delta x} \quad (23)$$

$$AA_{1,2} := -2 \cdot D$$

$$AA_{1,3} := 1 \cdot D$$

$$AA_{2,1} := -2 \cdot D$$

$$AA_{2,2} := 5 \cdot D$$

$$AA_{n-1,n-1} := 1 \cdot D + \frac{k_p}{\Delta x}$$

$$AA_{n-1,n-2} := -2 \cdot D$$

$$AA_{n-1,n-3} := 1 \cdot D$$

$$AA_{n-2,n-1} := -2 \cdot D$$

$$AA_{n-2,n-2} := 5 \cdot D$$

Matrica AA, zbog okolnog beskonačnog tla, postaje proširena matrica, stavlja se 0 na proširenja

$$AA_{n,n} := 1 \quad (24)$$

$$AA_{n,n-1} := 0$$

$$AA_{n,n-2} := 0$$

$$AA_{n-1,n} := 0$$

$$AA_{n-2,n} := 0$$

$$AA_{0,0} := 1 \quad (25)$$

$$AA_{0,1} := 0$$

$$AA_{0,2} := 0$$

$$AA_{1,0} := 0$$

$$AA_{2,0} := 0$$

Na proširenu matricu dodaje se uticaj beskonačnog tla lijevo i desno

$$AA_{n-1,n-1} := AA_{n-1,n-1} + K_{fD_{0,0}} \quad (26)$$

$$AA_{n-1,n} := AA_{n-1,n} + K_{fD_{0,1}}$$

$$AA_{n,n-1} := AA_{n,n-1} + K_{fD_{0,1}}$$

$$AA_{n,n} := AA_{n,n} + K_{fD_{1,1}}$$

$$AA_{0,0} := AA_{0,0} + K_{fL_{0,0}} \quad (27)$$

$$AA_{0,1} := AA_{0,1} + K_{fL_{0,1}}$$

$$AA_{1,0} := AA_{1,0} + K_{fL_{1,0}}$$

$$AA_{1,1} := AA_{1,1} + K_{fL_{1,1}}$$

Dobivena je nova matrica konačne grede AA

Tablica 4 - matrica beskonačne grede AA nakon uvedenih rubnih uvjeta i uvjeta beskonačnosti

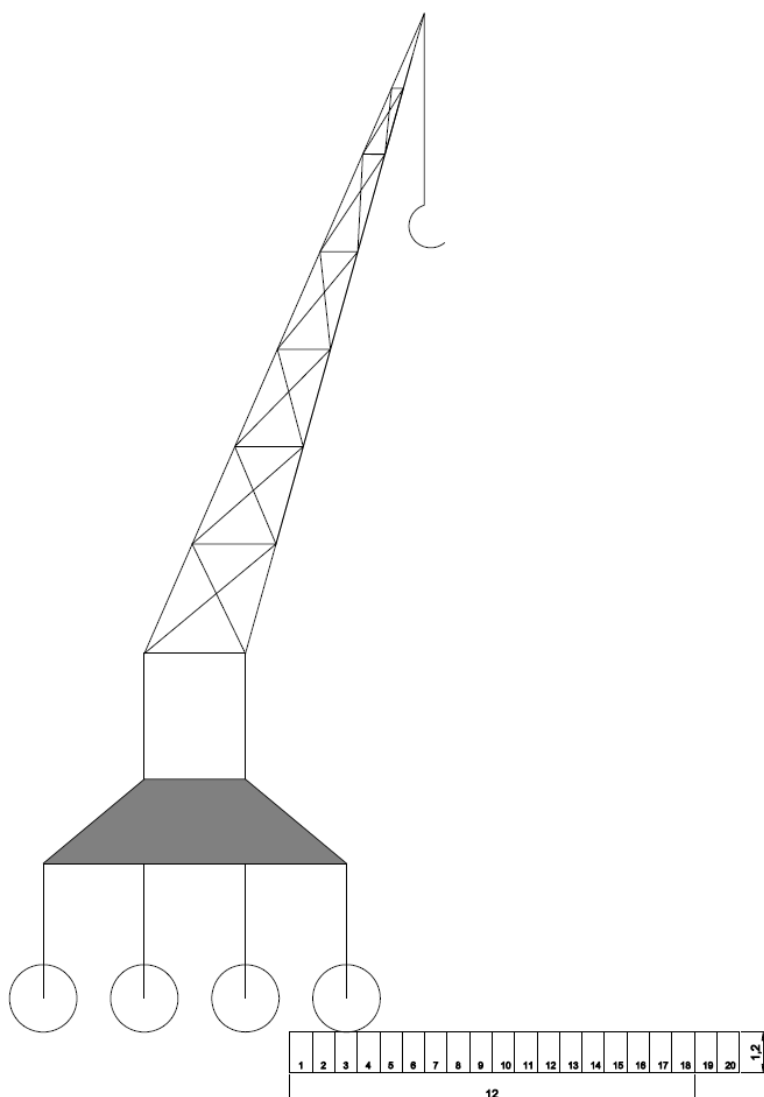
	0	1	2	3	4	5
0	3.84·10 <sup>4</sup>	-4.8·10 <sup>3</sup>	0	0	0	0
1	-4.8·10 <sup>3</sup>	1.751·10 <sup>7</sup>	-3.499·10 <sup>7</sup>	1.75·10 <sup>7</sup>	0	0
2	0	-3.499·10 <sup>7</sup>	8.748·10 <sup>7</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>	1.75·10 <sup>7</sup>	0
3	0	1.75·10 <sup>7</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>	1.05·10 <sup>8</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>	1.75·10 <sup>7</sup>
4	0	0	1.75·10 <sup>7</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>	1.05·10 <sup>8</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>
5	0	0	0	1.75·10 <sup>7</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>	1.05·10 <sup>8</sup>
6	0	0	0	0	1.75·10 <sup>7</sup>	-6.998·10 <sup>7</sup>
7	0	0	0	0	0	1.75·10 <sup>7</sup>
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	...

### 3.Rezultati

Proračun je napravljen za 4 slučaja te promatra kransku dizalicu na gredi. Svaki slučaj ima 1 kotač više. Težina dizalice je 30 tona te se sile ravnomjerno raspoređuju preko 4 kotača, svaki kotač prenosi silu od 75 kN. Budući da je greda dužine 12,0 m te je podijeljena na 20 segmenata. Sile se nalaze na  $1/8$ ,  $2/8$  ili  $1/4$ ,  $3/8$  te  $4/8$  ili  $1/2$ . Svaki idući slučaj uključuje jednu silu više. Usporediti će se rezultati progiba grede, momenta grede za isti slučaj na beskonačnoj podlozi te na konačnoj podlozi. Prikazati će se i progibi tla u proračunu beskonačne grede.

#### 3.1. Slučaj 1

Slučaj 1 prikazuje prvi kotač kranske dizalice na gredi težine 75 kN



Pretpostavlja se položaj sile na 1/8 grede

$$x_{P1} := \frac{1 \cdot L}{8} \quad (28)$$

Pomoću formule (29) tražimo najbliži segment grede točki  $X_{P1}$

$$k_{P1} := \text{Round} \left( \frac{x_{P1}}{\Delta x}, \Delta x \right) + 1 \quad (29)$$
$$k_{P1} = 3$$

Budući da je sila  $P$  koja označava 1/4 težine ukupne dizalice =75 kN, te segment grede  $\Delta x=0,667$  m, kako bi dobili kontinuirano opterećenje koristi se formula (30)

$$P_{k_{P1}} := \frac{P}{\Delta x} \quad (30)$$

Uvodi se krutost opruge u osloncima

$$k_L := 0 \quad (31)$$

$$k_D := 0$$

te se uvode sljedeći uvjeti

$$p_1 := 0 \quad (32)$$

$$q_1 := p_j$$

$$q_0 := 0$$

$$q_n := 0$$

Opterećenje izraženo u (kN/m) po segmentima na gredu iznosi:

Tablica 5 - opterećenje po segmentima za slučaj 1

(33)

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

q =

Uzimanjem rubnih vrijednosti (34) u obzir

$$i := 2..n - 2$$

(34)

$$j := 0..n$$

progibe grede dobivamo umnoškom matrice krutosti grede te matricom opterećenja grede (33)

Progibi po segmentima za konačnu gredu označavaju se y1

$$y1 := A^{-1} \cdot q$$

(35)

Tablica 6 - progibi za konačnu gredu po segmentima

	0
0	$2.508 \cdot 10^{-3}$
1	$2.329 \cdot 10^{-3}$
2	$2.149 \cdot 10^{-3}$
3	$1.967 \cdot 10^{-3}$
4	$1.781 \cdot 10^{-3}$
5	$1.594 \cdot 10^{-3}$
6	$1.408 \cdot 10^{-3}$
7	$1.226 \cdot 10^{-3}$
8	$1.048 \cdot 10^{-3}$
9	$8.753 \cdot 10^{-4}$
10	$7.086 \cdot 10^{-4}$
11	$5.477 \cdot 10^{-4}$
12	$3.922 \cdot 10^{-4}$
13	$2.417 \cdot 10^{-4}$
14	$9.543 \cdot 10^{-5}$
15	$-4.736 \cdot 10^{-5}$
16	$-1.875 \cdot 10^{-4}$
17	$-3.258 \cdot 10^{-4}$
18	$-4.629 \cdot 10^{-4}$
19	$-5.995 \cdot 10^{-4}$
20	$-7.359 \cdot 10^{-4}$

$y_1 =$

$$\min(y_1) = -7.359 \times 10^{-4} \quad (36)$$

$$\max(y_1) = 2.508 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $2,5 \cdot 10^{-3}$  m ili 2,5 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,74 mm.

Progibi po segmentima za beskonačnu gredu označavaju se  $yy1$

Tablica 7 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu

(37)

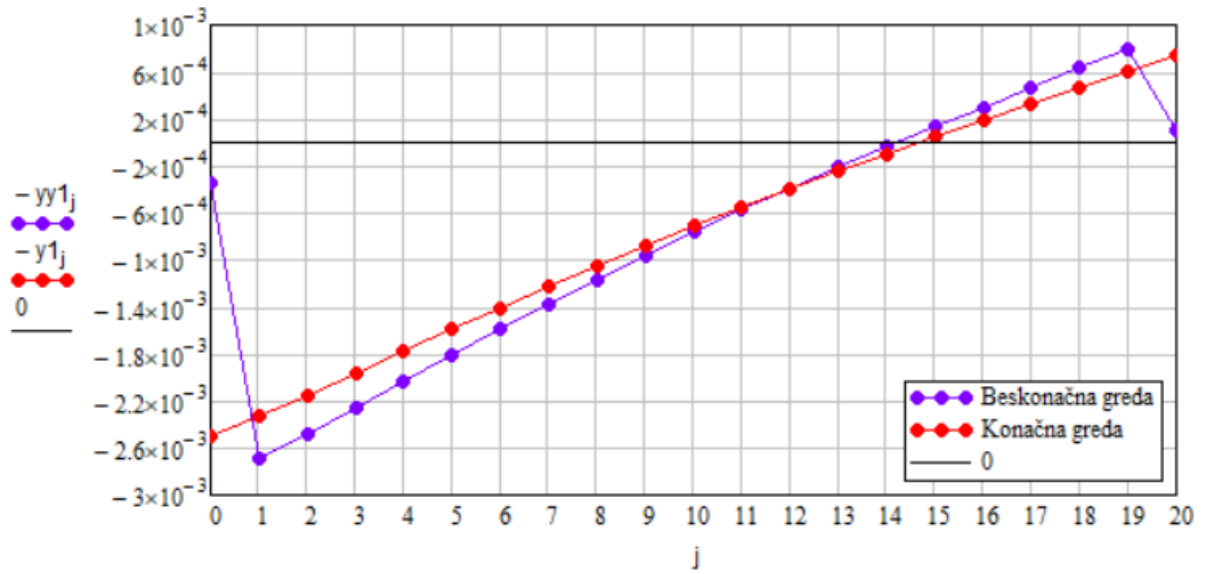
	0
0	$3.367 \cdot 10^{-4}$
1	$2.694 \cdot 10^{-3}$
2	$2.477 \cdot 10^{-3}$
3	$2.259 \cdot 10^{-3}$
4	$2.036 \cdot 10^{-3}$
5	$1.814 \cdot 10^{-3}$
6	$1.593 \cdot 10^{-3}$
7	$1.377 \cdot 10^{-3}$
8	$1.167 \cdot 10^{-3}$
9	$9.634 \cdot 10^{-4}$
10	$7.663 \cdot 10^{-4}$
11	$5.759 \cdot 10^{-4}$
12	$3.917 \cdot 10^{-4}$
13	$2.129 \cdot 10^{-4}$
14	$3.877 \cdot 10^{-5}$
15	$-1.316 \cdot 10^{-4}$
16	$-2.992 \cdot 10^{-4}$
17	$-4.649 \cdot 10^{-4}$
18	$-6.294 \cdot 10^{-4}$
19	$-7.934 \cdot 10^{-4}$
20	$-9.917 \cdot 10^{-5}$

$$\min(yy1) = -7.934 \times 10^{-4} \quad (38)$$

$$\max(yy1) = 2.694 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $2,694 \cdot 10^{-3}$  m ili 2,7 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,79 mm.





Slika 4- progibi slučaj 1

Momentni dijagram za konačnu gredu dobiva se preko formule (39)

(39)

$$M1_i := \frac{(y1_{i+1} - 2 \cdot y1_i + y1_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$M1_n := 0$$

(40)

Tablica 8 - momenti za konačnu gredu za slučaj 1

	0
0	0
1	0
2	-15.477
3	-33.818
4	-8.454
5	11.211
6	25.776
7	35.835
8	41.972
9	44.756
10	44.74
11	42.455
12	38.418
13	33.126
14	27.06
15	20.689
16	14.47
17	8.85
18	4.273
19	0
20	0

M1 =

$$\min(M1) = -33.8181 \quad (41)$$

$$\max(M1) = 44.756$$

Maksimalni moment od 44,756 kNm javlja se na segmentu 9, dok se minimalni od -33,81 javlja na segmentu 3 gdje i djeluje opterećenje

Momentni dijagram za beskonačnu gredu dobiva se preko formule (42)

$$MM1_i := \frac{(yy1_{i+1} - 2 \cdot yy1_i + yy1_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2} \quad (42)$$

$$MM1_n := C$$

Tablica 9 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 1

(43)

	0
0	0
1	0
2	-15.085
3	-30.169
4	-2.482
5	18.69
6	34.058
7	44.328
8	50.19
9	52.317
10	51.362
11	47.954
12	42.703
13	36.199
14	29.014
15	21.705
16	14.817
17	8.886
18	4.443
19	0
20	0

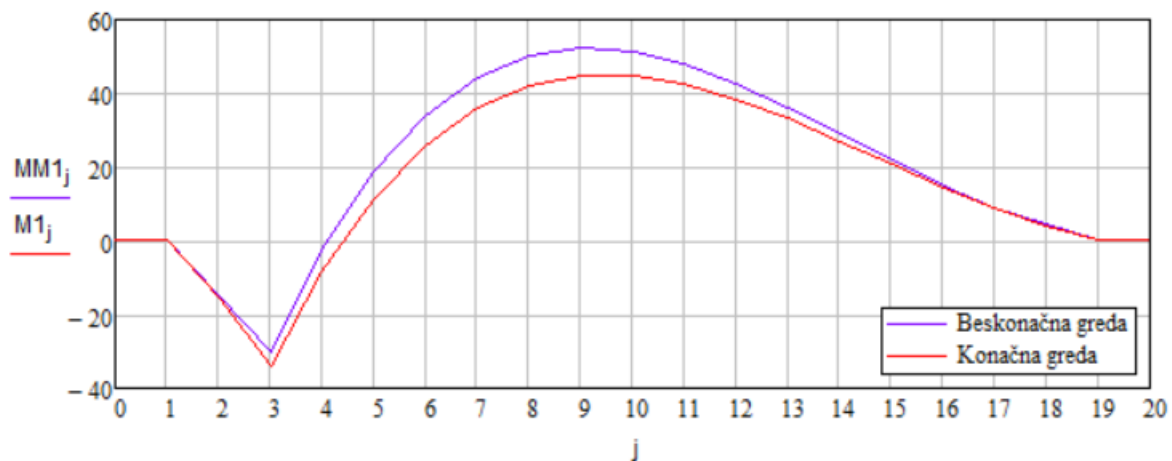
MM1 =

$$\min(\text{MM1}) = -30.169$$

(44)

$$\max(\text{MM1}) = 52.317$$

Maksimalni moment od 52,32 kNm javlja se na segmentu 9, dok se minimalni od -30,17 javlja na segmentu 3 gdje i djeluje opterećenje



Slika 5 - momentni dijagram - slučaj 1

Zbog utjecaja okolnog tla na beskonačnu gredu potrebno je opisati njeno ponašanje

$$M1(\xi) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) & 1 - \xi^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\Phi_{1L} := \begin{pmatrix} yy1_1 \\ yy1_0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\Phi_{1D} := \begin{pmatrix} yy1_{n-1} \\ yy1_n \end{pmatrix}$$

Uvrštavanjem progiba u matricu (46) dobivamo matricu pomaka okolnog tla

$$\Phi_{1L} = \begin{pmatrix} 2.694 \times 10^{-3} \\ 3.367 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{1D} = \begin{pmatrix} -7.934 \times 10^{-4} \\ -9.917 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

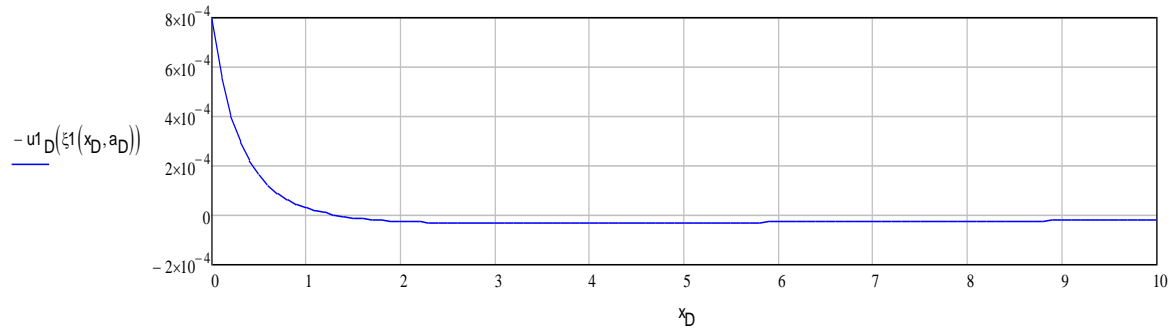
$$\xi_1(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad (47)$$

$x = 0 \dots$  beskonacno

Progib s desne strane računa se preko formule (48)

$$x_D := 0, 0.1.. 10 \quad (48)$$

$$u_{1D}(\xi) := N1(\xi) \cdot \Phi_{1D}$$

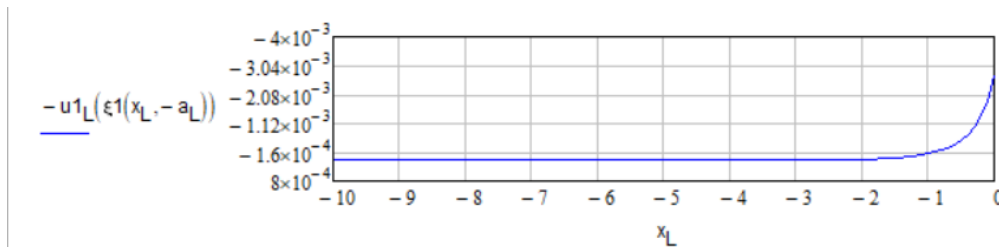


Slika 6 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 1

Progib s lijeve strane računa se preko formule (49)

$$x_L := 0, -0.1.. -10 \quad (49)$$

$$u_{1L}(\xi) := N1(\xi) \cdot \Phi_{1L}$$



Slika 7 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 1

$$k := 0.. n - 2 \quad (50)$$

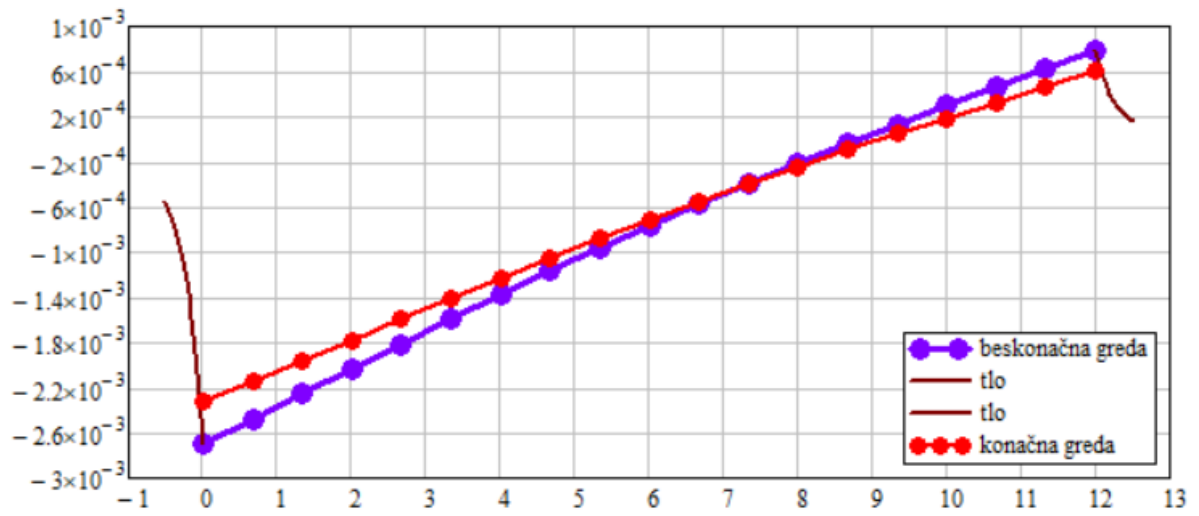
$$x_L := 0, -0.05.. -0.4$$

$$x_D := 0, 0.05.. 0.4$$

$$x_{M_k} := \Delta x \cdot k$$

$$x_M^T =$$

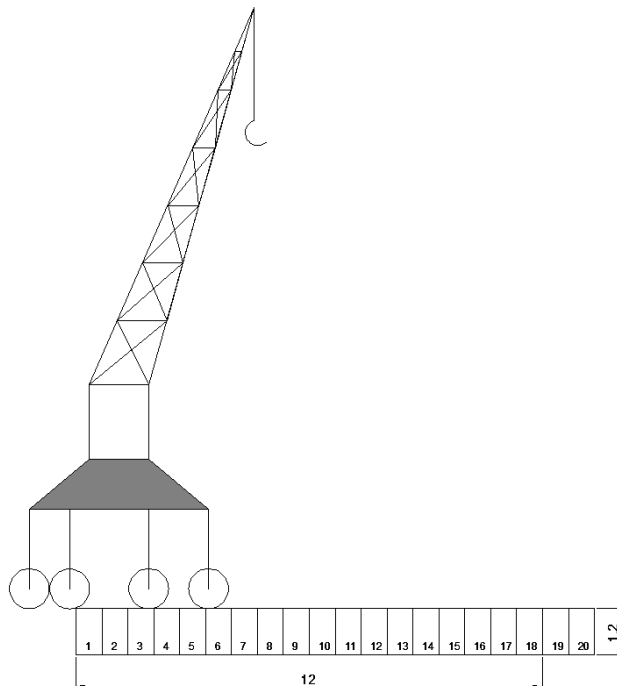
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0.667	1.333	2	2.667	3.333	4	4.667	5.333	6	6.667	7.333	8	...



Slika 8 - progibi za slučaj 1 s okolnim tlom

### 3.2. Slučaj 2

Slučaj 2 prikazuje dva kotača kranse dizalice na gredi težine 75 kN svaki



Pretpostavlja se položaj nove sile na 1/4 grede

$$x_{P2} := \frac{1 \cdot L}{4} \quad (51)$$

Pomoću formule (52) tražimo najbliži segment grede točki  $X_{p2}$

$$k_{P2} := \text{Round} \left( \frac{x_{P2}}{\Delta x}, \Delta x \right) + 1 \quad (52)$$

$$k_{P2} = 5.667$$

$$k_{P2} := 6$$

Budući da je sila  $P$  koja označava 1/4 težine ukupne dizalice =75 kN, te segment grede  $\Delta x=0,667$  m, kako bi dobili kontinuirano opterećenje koristi se formula (53)

$$p_{k_{P2}} := \frac{P}{\Delta x} \quad (53)$$

Uvodi se krutost opruge u osloncima

$$k_L := 0 \quad (31)$$

$$k_D := 0$$

te se uvode sljedeći uvjeti

$$p_i := 0 \quad (32)$$

$$q_i := p_i$$

$$q_0 := 0$$

$$q_n := 0$$

Opterećenje izraženo u (kN/m) po segmentima na gredu iznosi:

Tablica 10 - opterećenje po segmentima za slučaj 2

(54)

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	112.5
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

q =



Uzimanjem rubnih vrijednosti (55) u obzir

$$i := 2..n - 2 \quad (55)$$

$$j := 0..n$$

progibe grede dobivamo umnoškom matrice krutosti grede te matricom opterećenja grede (54)

Progibi po segmentima za konačnu gredu označavaju se  $y_2$

$$y_2 := A^{-1} \cdot q \quad (56)$$

Tablica 11 - progibi za konačnu gredu po segmentima za slučaj 2

	0
0	$4.084 \cdot 10^{-3}$
1	$3.85 \cdot 10^{-3}$
2	$3.614 \cdot 10^{-3}$
3	$3.375 \cdot 10^{-3}$
4	$3.129 \cdot 10^{-3}$
5	$2.877 \cdot 10^{-3}$
6	$2.619 \cdot 10^{-3}$
7	$2.353 \cdot 10^{-3}$
8	$2.084 \cdot 10^{-3}$
9	$1.814 \cdot 10^{-3}$
10	$1.546 \cdot 10^{-3}$
11	$1.28 \cdot 10^{-3}$
12	$1.019 \cdot 10^{-3}$
13	$7.624 \cdot 10^{-4}$
14	$5.095 \cdot 10^{-4}$
15	$2.602 \cdot 10^{-4}$
16	$1.386 \cdot 10^{-5}$
17	$-2.303 \cdot 10^{-4}$
18	$-4.732 \cdot 10^{-4}$
19	$-7.153 \cdot 10^{-4}$
20	$-9.572 \cdot 10^{-4}$

$$\min(y_2) = -9.572 \times 10^{-4}$$

$$\max(y_2) = 4.084 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $4,1 \cdot 10^{-3}$  m ili 4,1 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,95 mm.

Progibi po segmentima za beskonačnu gredu označavaju se  $yy_2$

Tablica 12 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu za slučaj 2

(57)

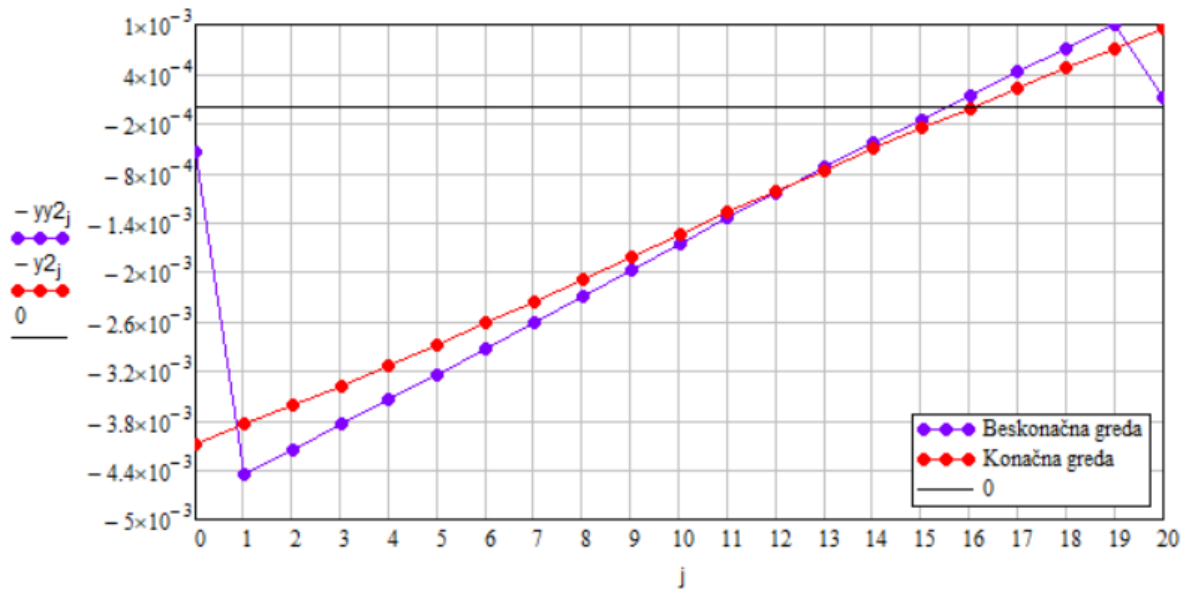
	0
0	$5.554 \cdot 10^{-4}$
1	$4.443 \cdot 10^{-3}$
2	$4.149 \cdot 10^{-3}$
3	$3.852 \cdot 10^{-3}$
4	$3.548 \cdot 10^{-3}$
5	$3.24 \cdot 10^{-3}$
6	$2.926 \cdot 10^{-3}$
7	$2.608 \cdot 10^{-3}$
8	$2.287 \cdot 10^{-3}$
9	$1.968 \cdot 10^{-3}$
10	$1.652 \cdot 10^{-3}$
11	$1.341 \cdot 10^{-3}$
12	$1.036 \cdot 10^{-3}$
13	$7.35 \cdot 10^{-4}$
14	$4.394 \cdot 10^{-4}$
15	$1.479 \cdot 10^{-4}$
16	$-1.402 \cdot 10^{-4}$
17	$-4.261 \cdot 10^{-4}$
18	$-7.105 \cdot 10^{-4}$
19	$-9.943 \cdot 10^{-4}$
20	$-1.243 \cdot 10^{-4}$

$$\min(yy_2) = -9.943 \times 10^{-4}$$

(58)

$$\max(yy_2) = 4.443 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $4,44 \cdot 10^{-3}$  m ili 4,4 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,99 mm.



Slika 9- progibi za slučaj 2

Momentni dijagram za konačnu gredu dobiva se preko formule (59)

$$M2_i := \frac{(y2_{i+1} - 2 \cdot y2_i + y2_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2} \quad (59)$$

$$M2_n := 0$$

Tablica 13 - momenti za konačnu gredu za slučaj 2

(60)

	0
0	0
1	0
2	-25.389
3	-55.808
4	-47.027
5	-48.26
6	-58.699
7	-27.518
8	-3.867
9	13.117
10	24.297
11	30.532
12	32.669
13	31.544
14	27.98
15	22.785
16	16.758
17	10.687
18	5.352
19	0
20	0

$$\min(M2) = -58.6988$$

$$\max(M2) = 32.669$$

(61)

Maksimalni moment od 32,669 kNm javlja se na segmentu 12, dok se minimalni od -58,70 javlja na segmentu 6 gdje je koncentrirano opterećenje

Momentni dijagram za beskonačnu gredu dobiva se preko formule (62)

$$MM2_i := \frac{(yy2_{i+1} - 2 \cdot yy2_i + yy2_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2} \quad (62)$$

$$MM2_n := 0$$

Tablica 14 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 2 (63)

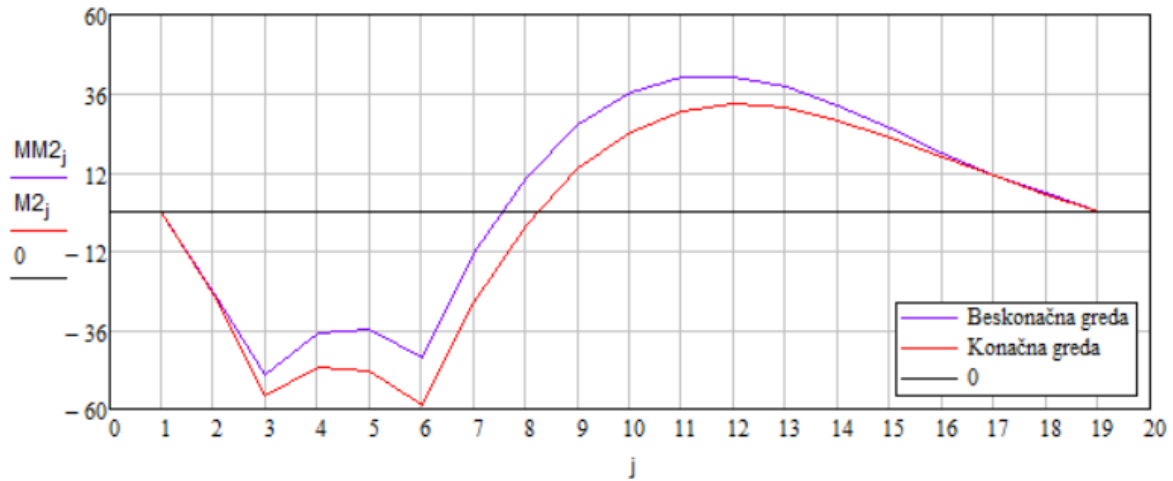
	0
0	0
1	0
2	-24.884
3	-49.767
4	-36.977
5	-35.541
6	-44.471
7	-12.766
8	10.595
9	26.637
10	36.382
11	40.839
12	41.004
13	37.855
14	32.354
15	25.447
16	18.067
17	11.136
18	5.568
19	0
20	0

MM2 =

$$\min(MM2) = -49.767 \quad (64)$$

$$\max(MM2) = 41.004$$

Maksimalni moment od 41,00 kNm javlja se na segmentu 12, dok se minimalni od -49,78 javlja na segmentu 3 gdje i djeluje opterećenje



Slika 10 - momentni dijagram - slučaj 2

Zbog utjecaja okolnog tla na beskonačnu gredu potrebno je opisati njeno ponašanje

(65)

$$N2(\xi) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) & 1 - \xi^2 \end{bmatrix}$$

(66)

$$\Phi2_L := \begin{pmatrix} yy2_1 \\ yy2_0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi2_D := \begin{pmatrix} yy2_{n-1} \\ yy2_n \end{pmatrix}$$

Uvrštavanjem progiba u matricu (66) dobivamo matricu pomaka okolnog tla

$$\Phi2_L = \begin{pmatrix} 4.443 \times 10^{-3} \\ 5.554 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\Phi2_D = \begin{pmatrix} -9.943 \times 10^{-4} \\ -1.243 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

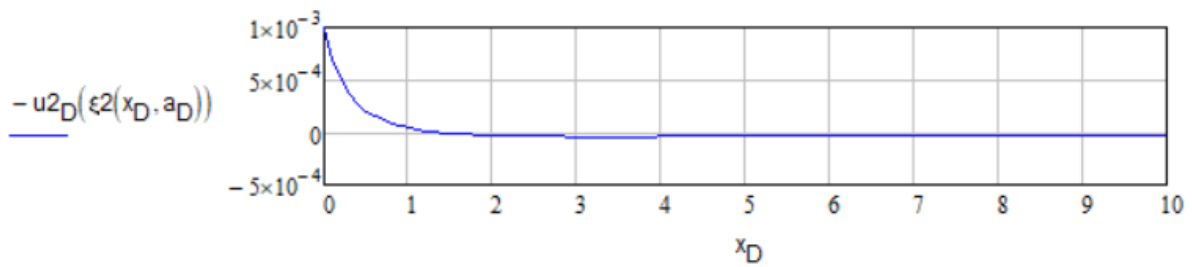
$$\xi2(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad (67)$$

$x = 0 \dots \text{beskonacno}$

Progib s desne strane računa se preko formule (68)

$$x_D := 0, 0.1.. 10 \quad (68)$$

$$u_{2D}(\xi) := N_2(\xi) \cdot \Phi_{2D}$$

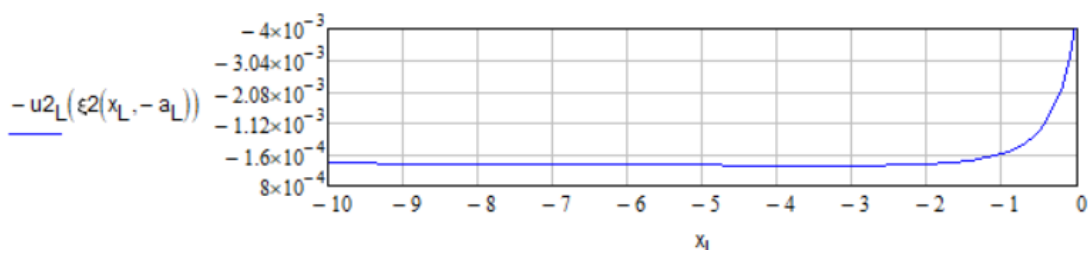


Slika 11 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 2

Progib s lijeve strane računa se preko formule (69)

$$x_L := 0, -0.1.. -10 \quad (69)$$

$$u_{2L}(\xi) := N_2(\xi) \cdot \Phi_{2L}$$



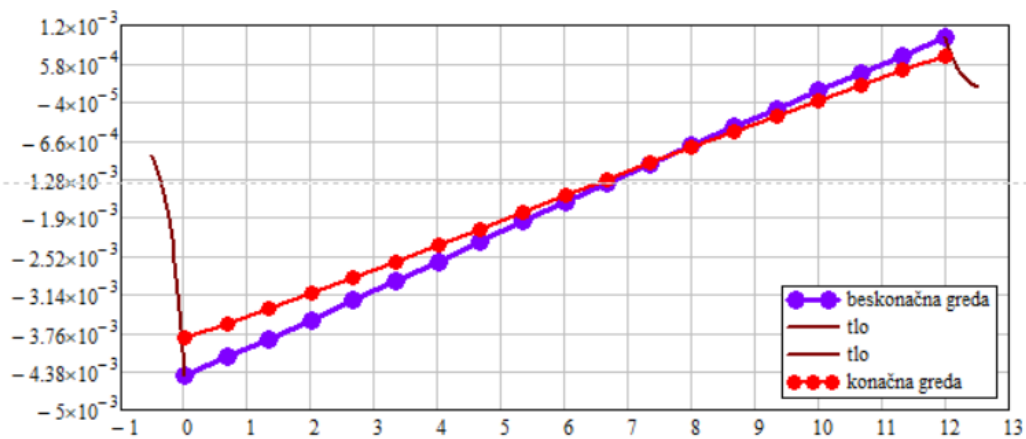
Slika 12 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 2

$$k := 0.. n - 2 \quad (70)$$

$$x_L := 0, -0.05.. -0.5$$

$$x_D := 0, 0.05.. 0.5$$

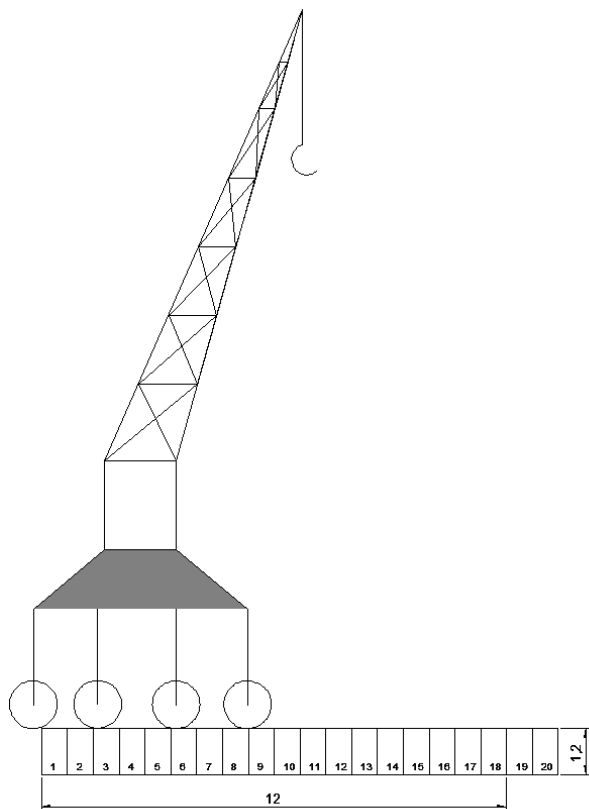
$$x_{M_k} := \Delta x \cdot k$$



Slika 13 - progibi za slučaj 2 s okolnim tlom

### 3.3. Slučaj 3

Slučaj 3 prikazuje tri kotača kranske dizalice na gredi težine 75 kN svaki



Pretpostavlja se položaj nove sile na 3/8 grede

$$x_{P3} := \frac{3 \cdot L}{8} \quad (71)$$



Pomoću formule (72) tražimo najbliži segment grede točki  $X_{p3}$

$$k_{p3} := \text{Round}\left(\frac{x_{p3}}{\Delta x}, \Delta x\right) + 1 \quad (72)$$

$$k_{p3} = 7.667$$

$$k_{p3} := 8$$

Budući da je sila  $P$  koja označava 1/4 težine ukupne dizalice =75 kN, te segment grede  $\Delta x=0,667$  m, kako bi dobili kontinuirano opterećenje koristi se formula (73)

$$p_{k_{p3}} := \frac{P}{\Delta x} \quad (73)$$

Uvodi se krutost opruge u osloncima

$$k_L := 0 \quad (31)$$

$$k_D := 0$$

te se uvode sljedeći uvjeti

$$p_i := 0 \quad (32)$$

$$q_i := p_i$$

$$q_0 := 0$$

$$q_n := 0$$

Opterećenje izraženo u (kN/m) po segmentima na gredu iznosi:

Tablica 15 - opterećenje po segmentima za slučaj 3

(74)

q =

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	112.5
7	0
8	112.5
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

Uzimanjem rubnih vrijednosti (34) u obzir

$$i := 2..n - 2$$

(34)

$$j := 0..n$$

progibe grede dobivamo umnoškom matrice krutosti grede te matricom opterećenja grede (74)

Progibi po segmentima za konačnu gredu označavaju se  $y_3$

$$y_3 := A^{-1} \cdot q \quad (75)$$

Tablica 16 -

Tablica 16 - progibi za konačnu gredu po segmentima za slučaj 3

	0
0	$5.124 \cdot 10^{-3}$
1	$4.892 \cdot 10^{-3}$
2	$4.66 \cdot 10^{-3}$
3	$4.423 \cdot 10^{-3}$
4	$4.177 \cdot 10^{-3}$
5	$3.922 \cdot 10^{-3}$
6	$3.655 \cdot 10^{-3}$
7	$3.372 \cdot 10^{-3}$
8	$3.076 \cdot 10^{-3}$
9	$2.765 \cdot 10^{-3}$
10	$2.445 \cdot 10^{-3}$
11	$2.12 \cdot 10^{-3}$
12	$1.793 \cdot 10^{-3}$
13	$1.464 \cdot 10^{-3}$
14	$1.137 \cdot 10^{-3}$
15	$8.102 \cdot 10^{-4}$
16	$4.854 \cdot 10^{-4}$
17	$1.619 \cdot 10^{-4}$
18	$-1.606 \cdot 10^{-4}$
19	$-4.827 \cdot 10^{-4}$
20	$-8.045 \cdot 10^{-4}$

$y_3 =$

$$\min(y_3) = -8.045 \times 10^{-4} \quad (76)$$

$$\max(y_3) = 5.124 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $5,1 \cdot 10^{-3}$  m ili 5,1 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,80 mm.

Progibi po segmentima za beskonačnu gredu označavaju se  $yy_3$

(77)

Tablica 17 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu za slučaj 3

	0
0	$7.038 \cdot 10^{-4}$
1	$5.631 \cdot 10^{-3}$
2	$5.327 \cdot 10^{-3}$
3	$5.019 \cdot 10^{-3}$
4	$4.703 \cdot 10^{-3}$
5	$4.38 \cdot 10^{-3}$
6	$4.046 \cdot 10^{-3}$
7	$3.7 \cdot 10^{-3}$
8	$3.343 \cdot 10^{-3}$
9	$2.974 \cdot 10^{-3}$
10	$2.598 \cdot 10^{-3}$
11	$2.219 \cdot 10^{-3}$
12	$1.839 \cdot 10^{-3}$
13	$1.46 \cdot 10^{-3}$
14	$1.083 \cdot 10^{-3}$
15	$7.087 \cdot 10^{-4}$
16	$3.363 \cdot 10^{-4}$
17	$-3.446 \cdot 10^{-5}$
18	$-4.041 \cdot 10^{-4}$
19	$-7.732 \cdot 10^{-4}$
20	$-9.664 \cdot 10^{-5}$

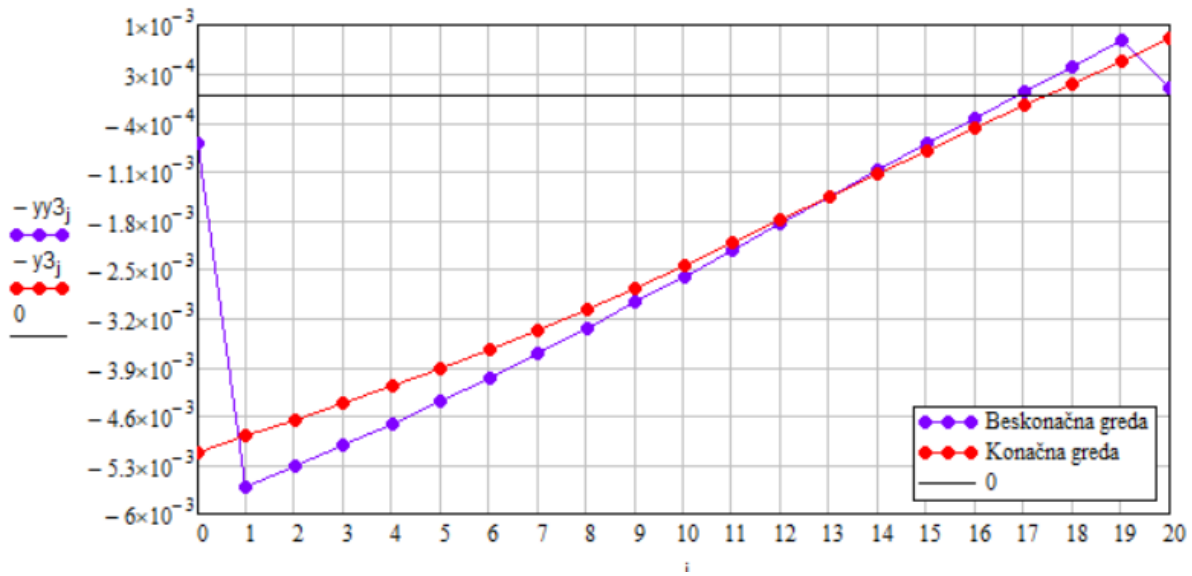
$yy_3 =$

(78)

$$\min(yy_3) = -7.732 \times 10^{-4}$$

$$\max(yy_3) = 5.631 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $5,63 \cdot 10^{-3}$  m ili 5,63 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,77 mm.



Slika 14 - progibi za slučaj 3

Momentni dijagram za konačnu gredu dobiva se preko formule (79)

(79)

$$M3_i := \frac{(y3_{i+1} - 2 \cdot y3_i + y3_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$M3_n := 0$$

(80)

Tablica 18 - momenti za konačnu gredu za slučaj 3

	0
0	0
1	0
2	-32.053
3	-70.819
4	-73.739
5	-90.024
6	-118.859
7	-109.388
8	-110.709
9	-71.873
10	-41.886
11	-19.724
12	-4.347
13	5.293
14	10.249
15	11.567
16	10.293
17	7.465
18	4.119
19	0
20	0

M3 =

$$\min(M3) = -118.8591$$

$$\max(M3) = 11.567$$

(81)

Maksimalni moment od 11,57 kNm javlja se na segmentu 15, dok se minimalni od -118,86 javlja na segmentu 6 gdje je koncentrirano opterećenje

Momentni dijagram za beskonačnu gredu dobiva se preko formule (82)

$$MM3_i := \frac{(yy3_{i+1} - 2 \cdot yy3_i + yy3_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2} \quad (82)$$

$$MM3_n := 0$$

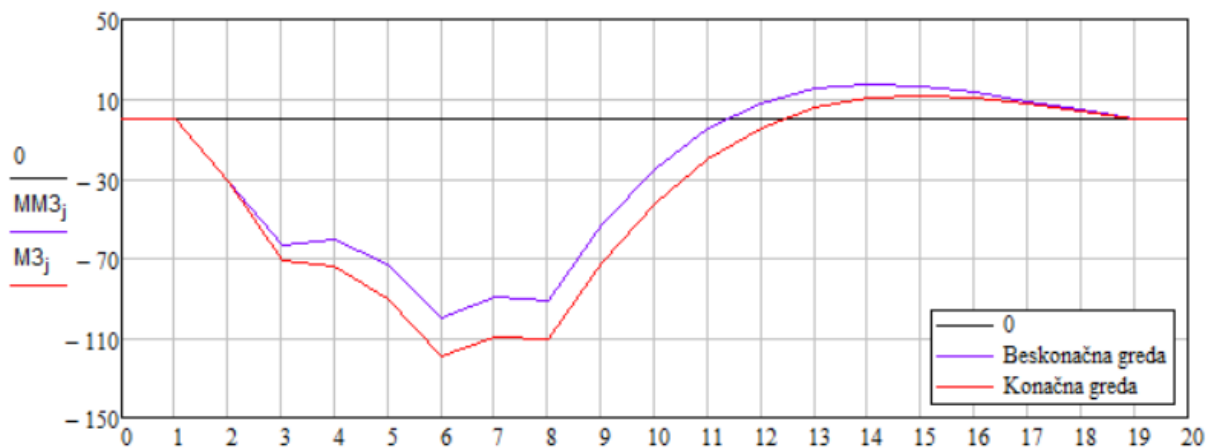
Tablica 19 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 3 (83)

	0
0	0
1	0
2	-31.531
3	-63.062
4	-60.654
5	-73.295
6	-99.952
7	-89.557
8	-91.003
MM3 = 9	-53.147
10	-24.807
11	-4.781
12	8.146
13	15.189
14	17.559
15	16.463
16	13.099
17	8.659
18	4.33
19	...

$$\min(MM3) = -99.952 \quad (84)$$

$$\max(MM3) = 17.559$$

Maksimalni moment od 17,56 kNm javlja se na segmentu 14, dok se minimalni od -99,95 javlja na segmentu 6 gdje je i koncentrirano opterećenje



Slika 15 - momentni dijagram - slučaj 3

Zbog utjecaja okolnog tla na beskonačnu gredu potrebno je opisati njeno ponašanje

(85)

$$N3(\xi) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) & 1 - \xi^2 \end{bmatrix}$$

(86)

$$\Phi_{3L} := \begin{pmatrix} yy_{31} \\ yy_{30} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{3D} := \begin{pmatrix} yy_{3n-1} \\ yy_{3n} \end{pmatrix}$$

Uvrštavanjem progiba u matricu (86) dobivamo matricu pomaka okolnog tla

$$\Phi_{3L} = \begin{pmatrix} 5.631 \times 10^{-3} \\ 7.038 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{3D} = \begin{pmatrix} -7.732 \times 10^{-4} \\ -9.664 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$



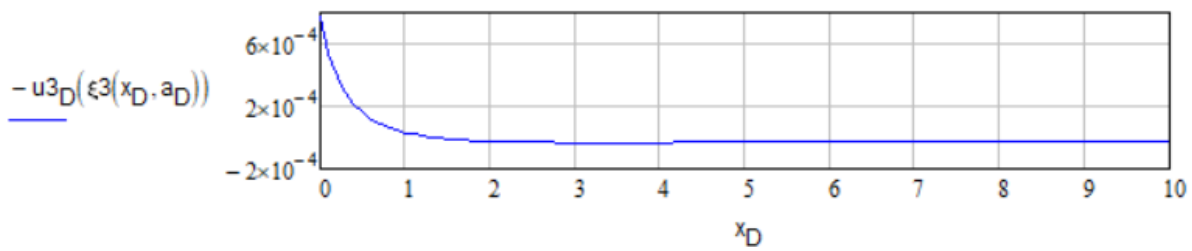
$$\xi_3(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad (87)$$

$x = 0 \dots \text{beskonacno}$

Progib s desne strane računa se preko formule (88)

$$x_D := 0, 0.1.. 10 \quad (88)$$

$$u_{3D}(\xi) := N_3(\xi) \cdot \Phi_{3D}$$

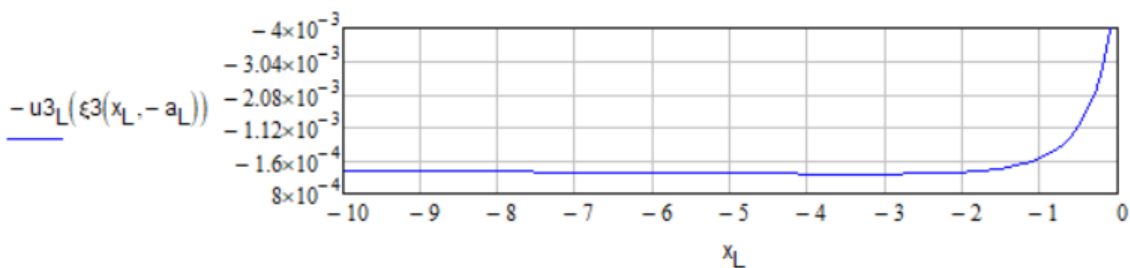


Slika 16 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 3

Progib s lijeve strane računa se preko formule (89)

$$x_L := 0, -0.1.. -10 \quad (89)$$

$$u_{3L}(\xi) := N_3(\xi) \cdot \Phi_{3L}$$



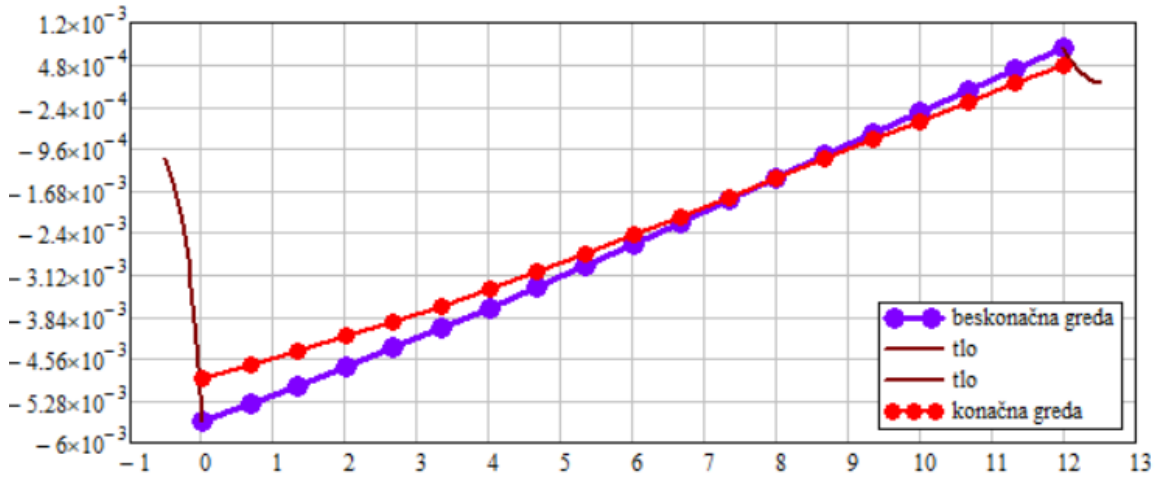
Slika 17 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 3

$$k := 0.. n - 2 \tag{90}$$

$$x_L := 0, -0.05.. -0.5$$

$$x_D := 0, 0.05.. 0.5$$

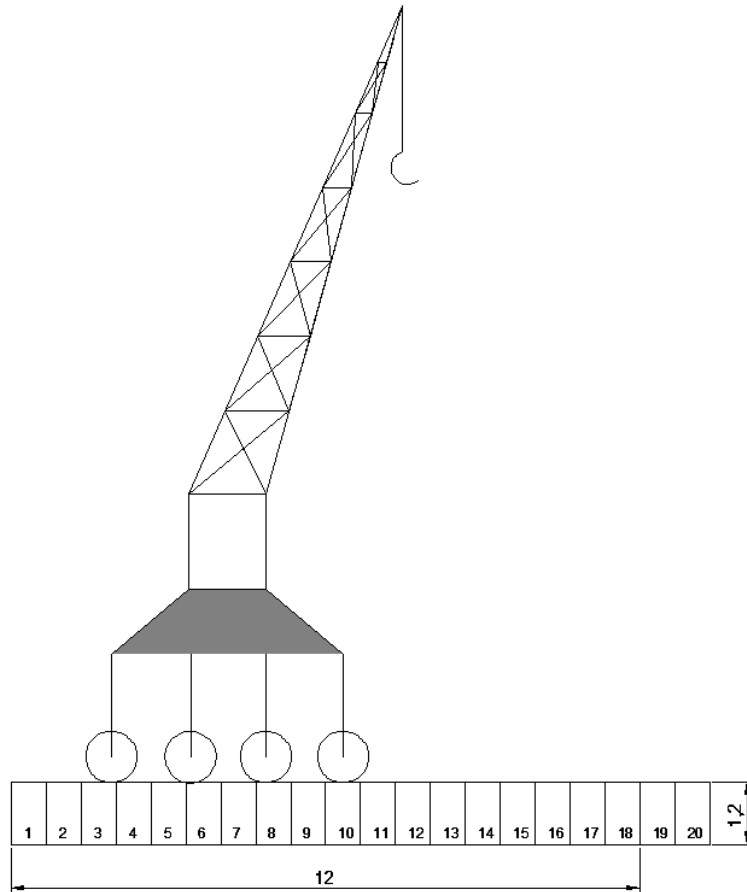
$$x_{M_k} := \Delta x \cdot k$$



Slika 18 - progibi za slučaj 3 s okolnim tlom

### 3.4. Slučaj 4

Slučaj 4 prikazuje sva četiri kotača kranске dizalice na gredi težine 75 kN svaki, 300 kN sveukupno



Pretpostavlja se položaj nove sile na 1/2 grede

$$x_{P4} := \frac{1 \cdot L}{2} \quad (91)$$

Pomoću formule (92) tražimo najbliži segment grede točki  $X_{p4}$

$$k_{P4} := \text{Round} \left( \frac{x_{P4}}{\Delta x}, \Delta x \right) + 1 \quad (92)$$

$$k_{P4} = 10.333$$

$$k_{P4} := 10$$

Budući da je sila  $P$  koja označava 1/4 težine ukupne dizalice =75 kN, te segment grede  $\Delta x=0,667$  m, kako bi dobili kontinuirano opterećenje koristi se formula (93)

$$p_{kP4} := \frac{P}{\Delta x} \quad (93)$$

Uvodi se krutost opruge u osloncima

$$\begin{aligned} k_L &:= 0 \\ k_D &:= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

te se uvode sljedeći uvjeti

$$\begin{aligned} p_i &:= 0 \\ q_i &:= p_i \\ q_0 &:= 0 \\ q_n &:= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Opterećenje izraženo u (kN/m) po segmentima na gredu iznosi:

Tablica 20 - opterećenje po segmentima za slučaj 4

(94)

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	112.5
7	0
8	112.5
9	0
10	112.5
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

q =

Uzimanjem rubnih vrijednosti (34) u obzir

$$i := 2..n - 2$$

(34)

$$j := 0..n$$

progibe grede dobivamo umnoškom matrice krutosti grede te matricom opterećenja grede (94)

Progibi po segmentima za konačnu gredu označavaju se  $y_4$

$$y_4 := A^{-1} \cdot q \quad (95)$$

Tablica 21 - progibi za konačnu gredu po segmentima za slučaj 4

	0
0	$5.693 \cdot 10^{-3}$
1	$5.508 \cdot 10^{-3}$
2	$5.322 \cdot 10^{-3}$
3	$5.132 \cdot 10^{-3}$
4	$4.931 \cdot 10^{-3}$
5	$4.719 \cdot 10^{-3}$
6	$4.491 \cdot 10^{-3}$
7	$4.244 \cdot 10^{-3}$
8	$3.976 \cdot 10^{-3}$
9	$3.684 \cdot 10^{-3}$
10	$3.372 \cdot 10^{-3}$
11	$3.039 \cdot 10^{-3}$
12	$2.693 \cdot 10^{-3}$
13	$2.336 \cdot 10^{-3}$
14	$1.973 \cdot 10^{-3}$
15	$1.607 \cdot 10^{-3}$
16	$1.239 \cdot 10^{-3}$
17	$8.705 \cdot 10^{-4}$
18	$5.016 \cdot 10^{-4}$
19	$1.328 \cdot 10^{-4}$
20	$-2.36 \cdot 10^{-4}$

$y_4 =$

$$\min(y_4) = -2.36 \times 10^{-4} \quad (96)$$

$$\max(y_4) = 5.693 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $5,69 \cdot 10^{-3}$  m ili 5,7 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,24 mm.

Progibi po segmentima za beskonačnu gredu označavaju se yy4

Tablica 22 - progibi po segmentima za beskonačnu gredu za slučaj 4

(97)

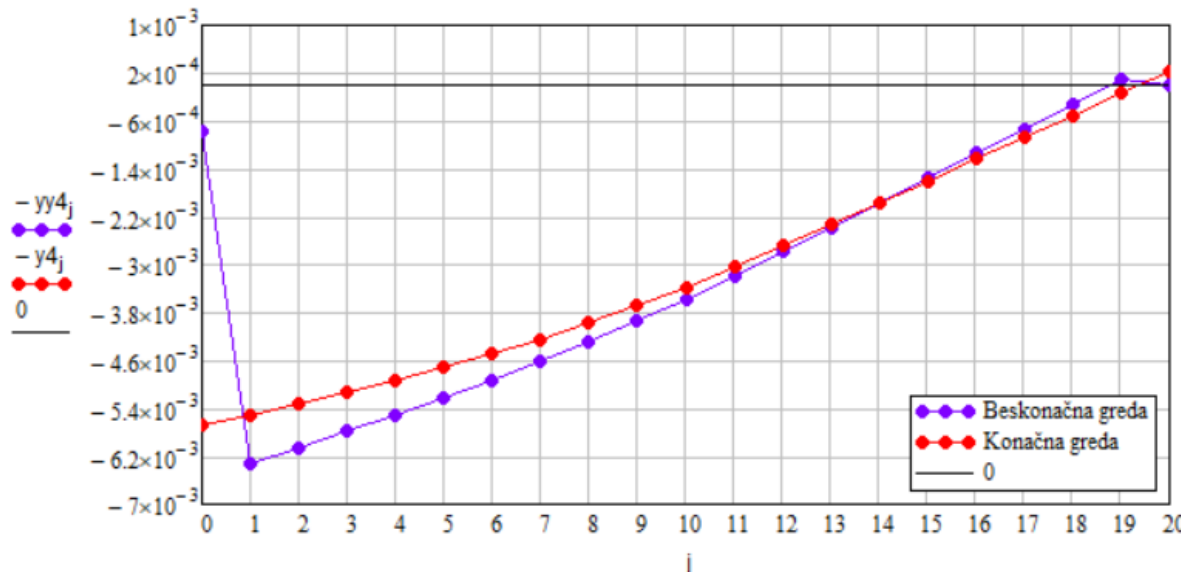
	0
0	$7.888 \cdot 10^{-4}$
1	$6.31 \cdot 10^{-3}$
2	$6.05 \cdot 10^{-3}$
3	$5.785 \cdot 10^{-3}$
4	$5.512 \cdot 10^{-3}$
5	$5.228 \cdot 10^{-3}$
6	$4.932 \cdot 10^{-3}$
7	$4.619 \cdot 10^{-3}$
8	$4.289 \cdot 10^{-3}$
9	$3.938 \cdot 10^{-3}$
10	$3.569 \cdot 10^{-3}$
11	$3.182 \cdot 10^{-3}$
12	$2.784 \cdot 10^{-3}$
13	$2.379 \cdot 10^{-3}$
14	$1.969 \cdot 10^{-3}$
15	$1.557 \cdot 10^{-3}$
16	$1.145 \cdot 10^{-3}$
17	$7.319 \cdot 10^{-4}$
18	$3.192 \cdot 10^{-4}$
19	$-9.334 \cdot 10^{-5}$
20	$-1.167 \cdot 10^{-5}$

yy4 =

$$\min(yy4) = -9.334 \times 10^{-5} \quad (98)$$

$$\max(yy4) = 6.31 \times 10^{-3}$$

Najveći progib od  $6,31 \cdot 10^{-3}$  m ili 6,3 mm i nalazi se na prvom segmentu grede, na kraju grede zbog njene krutosti dolazi do uzdizanja od 0,09 mm.



Slika 19 - progibi za slučaj 4

Momentni dijagram za konačnu gredu dobiva se preko formule (99)

$$M4_i := \frac{(y4_{i+1} - 2 \cdot y4_i + y4_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2} \quad (99)$$

$$M4_n := 0$$

(100)



Tablica 23 - momenti za konačnu gredu za slučaj 4

	0
0	0
1	0
2	-35.842
3	-79.606
4	-89.791
5	-115.755
6	-156.819
7	-162.255
8	-181.272
9	-163.013
10	-156.543
11	-110.864
12	-74.91
13	-47.573
14	-27.711
15	-14.164
16	-5.76
17	-1.322
18	0.33
19	0
20	0

M4 =

$$\min(M4) = -181.2725$$

$$\max(M4) = 0.33$$

(101)

Maksimalni moment od 0,33 kNm javlja se na segmentu 18, dok se minimalni od -181,27 javlja na segmentu 8 gdje je koncentrirano opterećenje

Momentni dijagram za beskonačnu gredu dobiva se preko formule (102)

$$MM4_j := \frac{(yy4_{i+1} - 2 \cdot yy4_i + yy4_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2} \quad (102)$$

$$MM4_n := 0$$

Tablica 24 - momenti za beskonačnu gredu za slučaj 4 (103)

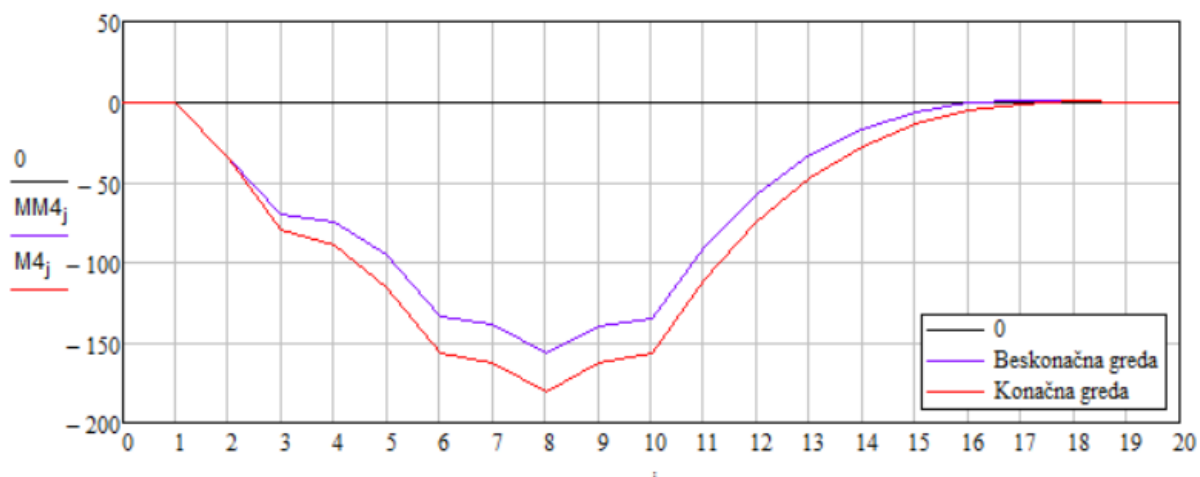
	0
0	0
1	0
2	-35.338
3	-70.676
4	-74.527
5	-96.015
6	-134.233
7	-138.235
8	-157.018
9	-139.525
10	-134.632
11	-91.159
12	-57.869
13	-33.489
14	-16.722
15	-6.256
16	-0.774
17	1.045
18	0.523
19	0
20	0

MM4 =

$$\min(MM4) = -157.018 \quad (104)$$

$$\max(MM4) = 1.045$$

Maksimalni moment od 1,04 kNm javlja se na segmentu 17, dok se minimalni od -99,95 javlja na segmentu 8 gdje je i koncentrirano opterećenje



Slika 20 - momentni dijagram - slučaj 4

Zbog utjecaja okolnog tla na beskonačnu gredu potrebno je opisati njeno ponašanje

(105)

$$N4(\xi) := \left[ \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) \quad 1 - \xi^2 \right]$$

(106)

$$\Phi_{4L} := \begin{pmatrix} yy_{41} \\ yy_{40} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{4D} := \begin{pmatrix} yy_{4n-1} \\ yy_{4n} \end{pmatrix}$$

Uvrštavanjem progiba u matricu (106) dobivamo matricu pomaka okolnog tla

$$\Phi_{4L} = \begin{pmatrix} 6.31 \times 10^{-3} \\ 7.888 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{4D} = \begin{pmatrix} -9.334 \times 10^{-5} \\ -1.167 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

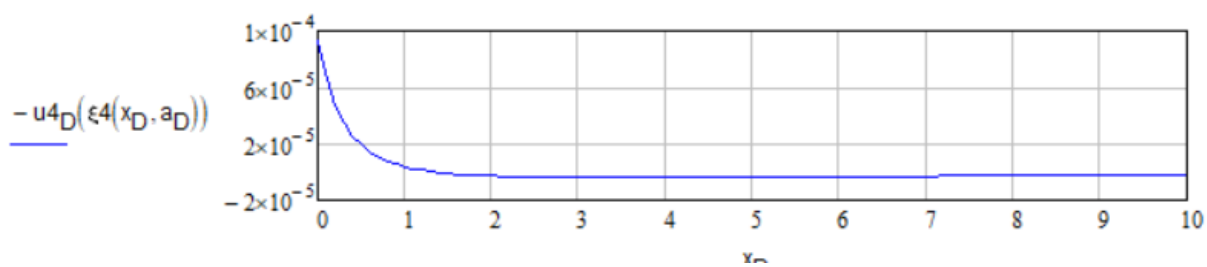
$$\xi_4(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad (107)$$

$x = 0 \dots \infty$

Progib s desne strane računa se preko formule (108)

$$x_D := 0, 0.1.. 10 \quad (108)$$

$$u_{4D}(\xi_4) := N_4(\xi_4) \cdot \Phi_{4D}$$

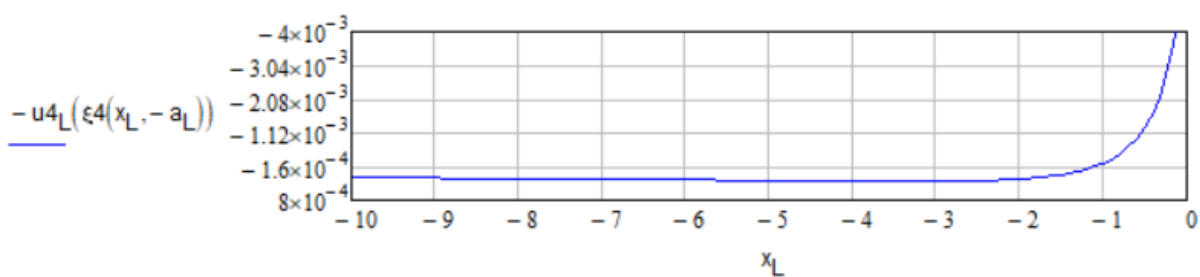


Slika 21 - progib beskonačne podloge s desne strane za slučaj 4

Progib s lijeve strane računa se preko formule (109)

$$x_L := 0, -0.1.. -10 \quad (109)$$

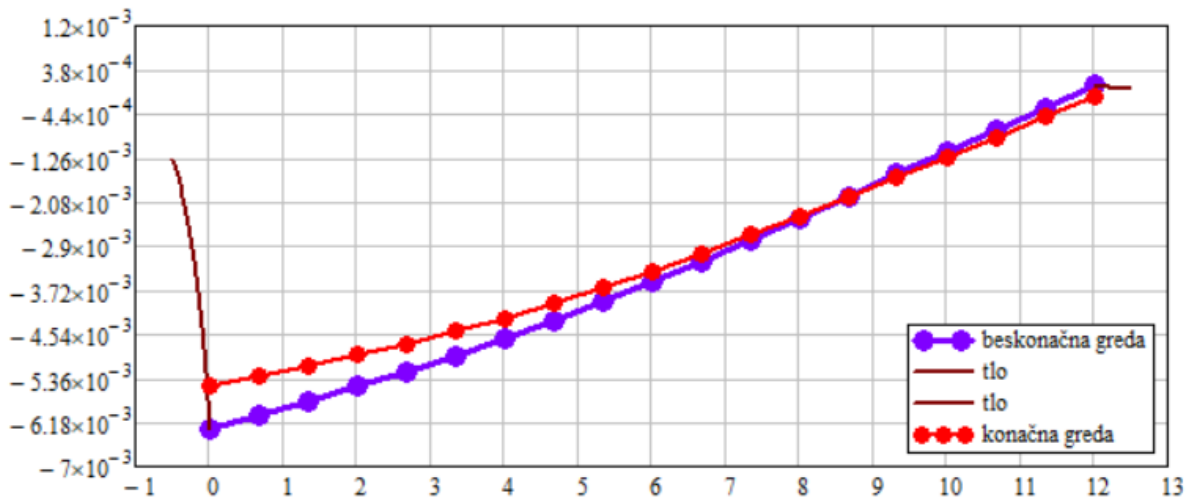
$$u_{4L}(\xi_4) := N_4(\xi_4) \cdot \Phi_{4L}$$



Slika 22 - progib beskonačne grede s lijeve strane za slučaj 4

(110)

$$k := 0.. n - 2$$
$$x_L := 0, -0.05.. -0.5$$
$$x_D := 0, 0.05.. 0.5$$
$$x_{M_k} := \Delta x \cdot k$$

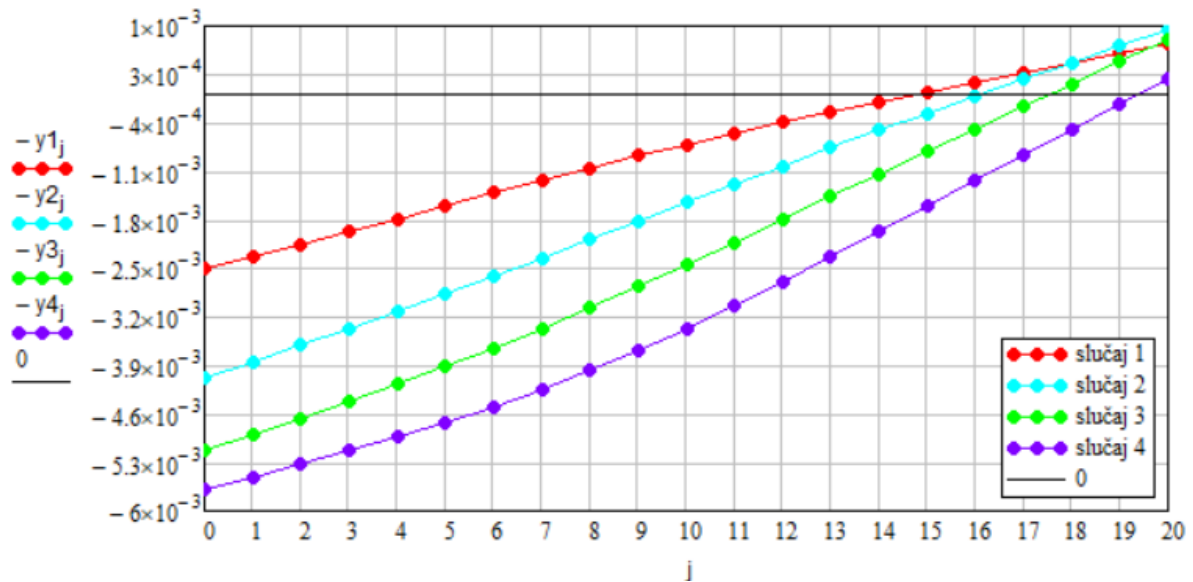


Slika 23 - progibi za slučaj 4 s okolnim tlom

#### 4.Usporedba i zaključak

Usporediti će se progibi i momenti za konačnu gredu te za beskonačnu gredu.

Konačna greda - progibi



Slika 24 - usporedba progiba za različite slučaje za konačnu gredu

$$\max(y_1) = 2.508 \times 10^{-3} \quad \min(y_1) = -7.359 \times 10^{-4}$$

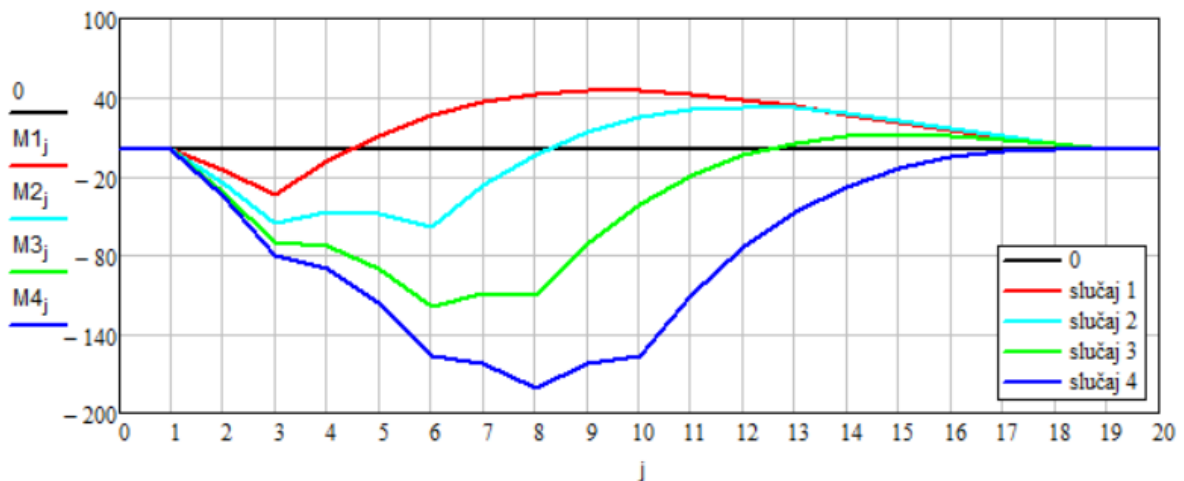
$$\max(y_2) = 4.084 \times 10^{-3} \quad \min(y_2) = -9.572 \times 10^{-4}$$

$$\max(y_3) = 5.124 \times 10^{-3} \quad \min(y_3) = -8.045 \times 10^{-4}$$

$$\max(y_4) = 5.693 \times 10^{-3} \quad \min(y_4) = -2.36 \times 10^{-4}$$

Može se zaključiti da kod konačne grede koja nema fiksne oslonce povećanjem opterećenja dolazi do sve većih progiba. Najveći progib javlja se na prvom segmentu te dolazi do deformacije grede.

## Konačna greda – momenti



Slika 25 - momenti dijagrami za različite slučajeve kod konačne grede

$$\max(M1) = 44.756 \quad \min(M1) = -33.818$$

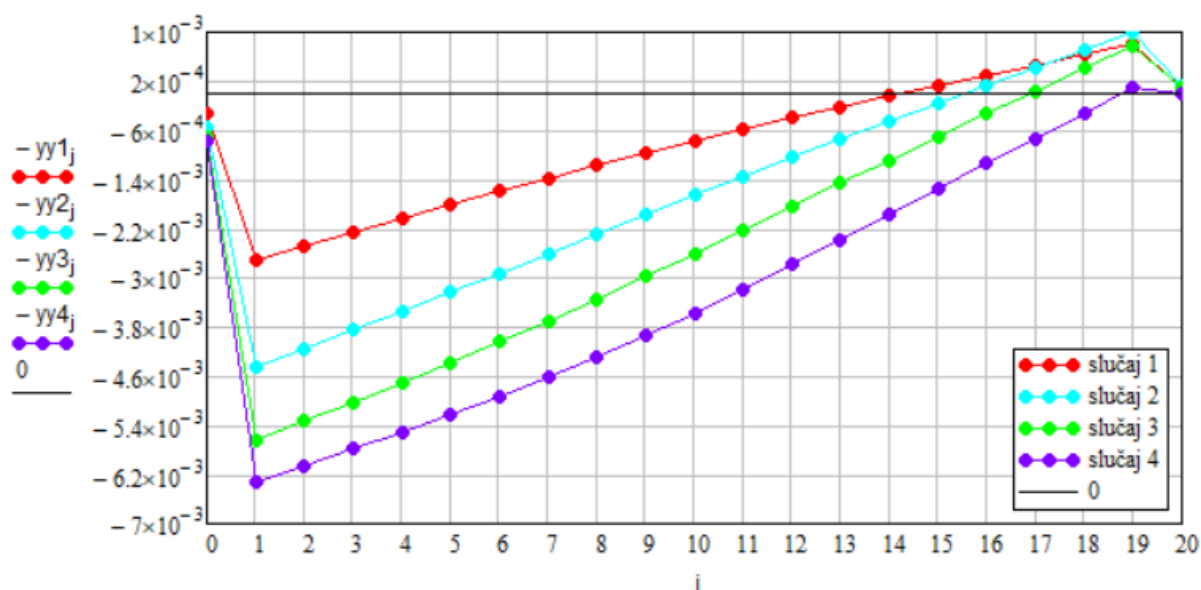
$$\max(M2) = 32.669 \quad \min(M2) = -58.699$$

$$\max(M3) = 11.567 \quad \min(M3) = -118.859$$

$$\max(M4) = 0.33 \quad \min(M4) = -181.272$$

Iz priloženog dijagrama momenata za različite slučajeve može se zaključiti da povećanjem opterećenja te pomakom kranske dizalice prema sredini grede dolazi do povećanja momenata. U 3. i 4. slučaju maksimalni moment javlja se na predzadnjem kotaču tj. na mjestu gdje se nalazi težište krasne dizalice.

## Beskonačna greda - progibi



Slika 26 - usporedba progiba za različite slučaje za beskonačnu gredu

$$\max(yy1) = 2.694 \times 10^{-3} \quad \min(yy1) = -7.934 \times 10^{-4}$$

$$\max(yy2) = 4.443 \times 10^{-3} \quad \min(yy2) = -9.943 \times 10^{-4}$$

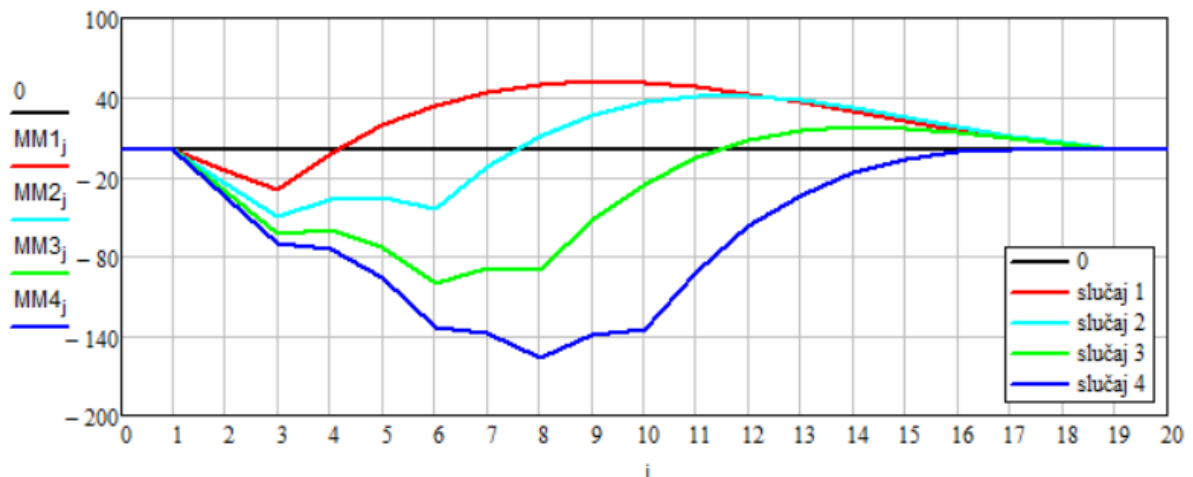
$$\max(yy3) = 5.631 \times 10^{-3} \quad \min(yy3) = -7.732 \times 10^{-4}$$

$$\max(yy4) = 6.31 \times 10^{-3} \quad \min(yy4) = -9.334 \times 10^{-5}$$

Iz priloženog grafa pomaka može se zaključiti da kod beskonačne grede koja nema krajnje oslonce povećanjem opterećenja dolazi do sve većih progiba. Najveći progib javlja se na prvom segmentu te dolazi do deformacije grede. Vrlo teško se određuju parametri te rubni uvjeti za ovakav model. Usporedbom progiba konačne i beskonačne grede vidljivo je da beskonačna greda ima veće progibe zbog pružanja u beskonačnost što je bilo i očekivano. Maksimalni progib javlja se na segmentu 1 u slučaju 4 za beskonačnu gredu te iznosi 6,31 mm.



## Beskonačna greda – momenti



Slika 27 - momenti dijagrami za različite slučajeve kod beskonačne grede

$$\max(MM1) = 52.317 \quad \min(MM1) = -30.169$$

$$\max(MM2) = 41.004 \quad \min(MM2) = -49.767$$

$$\max(MM3) = 17.559 \quad \min(MM3) = -99.952$$

$$\max(MM4) = 1.045 \quad \min(MM4) = -157.018$$

Iz priloženog dijagrama momenata za različite slučajeve može se zaključiti da povećanjem opterećenja te pomakom kranske dizalice prema sredini grede dolazi do povećanja momenata. U 3. i 4. slučaju maksimalni moment javlja se na predzadnjem kotaču tj. na mjestu gdje se nalazi težište dizalice kao i kod konačne grede. Usporedbom maksimalnih i minimalnih momenata konačne i beskonačne grede zaključujemo da se javljaju veći momenti na konačnoj gredi. Budući da beskonačna greda nema krajnje oslonce te da ih je teško odrediti takvi rezultati su bili i očekivani. Maksimalni moment javlja se na segmentu 8 u slučaju 4 za konačnu gredu te iznosi -181,27 kN.

## 5.Izvori

[1] Nauka o čvrstoći, Sveučilište u Splitu, sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2019.

[2] Percel, B., Primjenjena mehanika tla 2, Rudarsko-geološki naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1982.

[3] Trenutno stanje modela mehanike tla, Elektronički zbornik radova Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2022.

## 6.Prilozi – mathcad file

## Usporedba ponašanja grede na konačnom i beskonačnom modelu tla

Jednadžba štapa (prosta greda)

 *dodatne elastične opruge  
umjesto krajnjih oslonaca*s dodatkom beskonacnog okolnog tla

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0$$

preko konacnih razlika dobivamo diferencnu jednadžbu:

$$\frac{EI}{\Delta x^4} \cdot (u_{i-2} - 4 \cdot u_{i-1} + 6 \cdot u_i - 4 \cdot u_{i+1} + u_{i+2}) - q = 0$$

rubni uvjeti proste grede:

$$u(0)=0, \quad u(L)=0, \quad u''(0)=0, \quad u''(L)=0$$

Parametri grede( bg=širina grede, hg=visina grede, I=moment inercije, E=Youngov modul elastičnosti

$$bg := 0.8 \quad hg := 1.2 \quad I := \frac{bg \cdot (hg)^3}{12} \quad I = 0.1 \text{ m}^4$$

$$E := 30 \cdot 10^6 \quad E \cdot I = 3.456 \times 10^6 \text{ (kNm}^2) \quad EI := 3.456 \times 10^6$$

$$L := 12 \quad (\text{duljina grede})$$

Matrica sistema:

$$n := 20 \quad (\text{broj podjela grede})$$

$$i := 0..n$$

$$i1 := 0..n-1$$

$$i2 := 0..n-2$$

$$\Delta x := \frac{L}{n-2} \quad \text{zbog dodavanja dvije tocke treba 'n-2' a ne 'n'!}$$

$$\Delta x = 0.667$$

$$D := \frac{E \cdot I}{\Delta x^4}$$

$$D = 1.75 \times 10^7$$

TLO

Nonweiler : pijesak E=9000 kN/m<sup>2</sup>

krutost Winklerove opruge : E\*bg\*Dx

$$9000 \cdot 0.8 \cdot 0.667 = 4.802 \times 10^3$$

prvi slučaj (1/4 opterećenja)

Desna strana: položaj sile:  $x_{P1} := \frac{1 \cdot L}{8}$

nadji najblizu točku:  $k_{P1} := \text{Round}\left(\frac{x_{P1}}{\Delta x}, \Delta x\right) + 1$   $k_{P1} = 3$

$P := 75.0$  (kN)  $p_i := 0$   $p_{k_{P1}} := \frac{P}{\Delta x}$  krutost opruge:

$q_i := p_i$   $q_0 := 0$   $q_n := 0$   $k_L := 0$   $k_D := 0$

$\Delta x = 0.667$   $D = 1.75 \times 10^7$

KONAČNA GREDA -A

Matrica konacne grede:

$i1 := 0..n-1$   $i2 := 0..n-2$

$A_{i,i} := 6 \cdot D$   $A_{i1,i1+1} := -4 \cdot D$   $A_{i1+1,i1} := -4 \cdot D$

$A_{i2,i2+2} := 1 \cdot D$   $A_{i2+2,i2} := 1 \cdot D$

zadavanje rubnih uvjeta:

$A_{0,0} := 1 \cdot D$   $A_{0,1} := -2 \cdot D$   $A_{0,2} := 1 \cdot D$

$A_{n,n} := 1 \cdot D$   $A_{n,n-1} := -2 \cdot D$   $A_{n,n-2} := 1 \cdot D$

$A_{1,0} := -2 \cdot D$   $A_{1,1} := 5 \cdot D$   $A_{n-1,n} := -2 \cdot D$

$A_{n-1,n-1} := 5 \cdot D$

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

	0	1	2	3	4	5
0	$1.75 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0	0
1	$-3.499 \cdot 10^7$	$8.748 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0
2	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0
3	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
4	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$
5	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$
6	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$
7	0	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	...

TLO

krutost opruge:

$$k_p := \frac{9000 \cdot 0.8 \cdot 0.667}{0.667} \text{ kN/m} \quad \text{opruge dodajemo u osloncima!}$$

$$k_p = 7.2 \times 10^3 \quad k := 1, 2 \dots n - 1 \quad A_{k,k} := A_{k,k} + k_p$$

$$k := 0, n \dots n \quad A_{k,k} := A_{k,k} + \frac{k_p}{2}$$

## BESKONAČNA GREDA - AA

Matrica beskonacne grede:

Matrica sistema:

$$\Delta x := \frac{L}{n-2} \quad \text{zbog dodavanja dvije tocke treba 'n-2' a ne 'n'!}$$

$$\Delta x = 0.667 \quad D := \frac{EI}{\Delta x^4} \quad D = 1.75 \times 10^7$$

$i := 0..n$

$$i1 := 0..n-1 \quad AA_{i,i} := 6 \cdot D \quad AA_{i1,i1+1} := -4 \cdot D \quad AA_{i1+1,i1} := -4 \cdot D$$

$$i2 := 0..n-2 \quad AA_{i2,i2+2} := 1 \cdot D \quad AA_{i2+2,i2} := 1 \cdot D \quad k := 1, 2..n-1 \quad AA_{k,k} := AA_{k,k} + k_p$$

opruge dodajemo u osloncima!  $k := 0, n..n \quad AA_{k,k} := AA_{k,k} + \frac{k_p}{2}$  ■

krutost beskonacnog okolnog tla lijevo(L) i desno(D)

polozaj singulariteta:  $a_L := \Delta x \quad a_D := \Delta x$

krutost tla \* sirina grede:  $B := 9000 \cdot 0.8 \quad B = 7.2 \times 10^3$

$$K_{fL} := \frac{1}{3 \cdot \Delta x} B \cdot a_L \cdot \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad K_{fL} = \begin{pmatrix} 3.84 \times 10^4 & -4.8 \times 10^3 \\ -4.8 \times 10^3 & 2.4 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{fD} := \frac{1}{3 \cdot \Delta x} B \cdot a_D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix} \quad K_{fD} = \begin{pmatrix} 2.4 \times 10^3 & -4.8 \times 10^3 \\ -4.8 \times 10^3 & 3.84 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

uvodjenje rubnog uvjet u tocki '1' i 'n-1' daje jednadzbu  $(1 \cdot u_i - 2 \cdot u_{i+1} + u_{i+2})$

uvodjenje rubnog uvjet u tocki '2' i 'n-2' daje jednadzbu  $(-2 \cdot u_{i-1} + 5 \cdot u_i - 4 \cdot u_{i+1} + u_{i+2})$

$$a_L = 0.667 \quad a_D = 0.667$$

zadavanje rubnih uvjeta:  $AA_{1,1} := 1 \cdot D + \frac{k_p}{\Delta x} \quad AA_{1,2} := -2 \cdot D$

$$AA_{1,3} := 1 \cdot D \quad AA_{2,1} := -2 \cdot D \quad AA_{2,2} := 5 \cdot D$$

$$AA_{n-1,n-1} := 1 \cdot D + \frac{k_p}{\Delta x} \quad AA_{n-1,n-2} := -2 \cdot D \quad AA_{n-1,n-3} := 1 \cdot D$$

$$AA_{n-2,n-1} := -2 \cdot D$$

$$AA_{n-2,n-2} := 5 \cdot D$$

	0	1	2	3	4	5
0	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0	0
1	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.751 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0
2	$1.75 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$8.748 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0
3	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
4	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$
5	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$
6	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$
7	0	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$
8	0	0	0	0	0	...

*Dodatak za beskonacno tlo:*

radimo s prosirenom matricom, stavlja se 0 na prosirenja

$$AA_{0,0} := 1 \quad AA_{0,1} := 0 \quad AA_{0,2} := 0$$

$$AA_{1,0} := 0 \quad AA_{2,0} := 0$$

$$AA_{n,n} := 1 \quad AA_{n,n-1} := 0 \quad AA_{n,n-2} := 0$$

$$AA_{n-1,n} := 0 \quad AA_{n-2,n} := 0$$

dodaj uticaj beskonacnog tla lijevo i desno:

$$AA_{0,0} := AA_{0,0} + K_{fL_{0,0}} \quad AA_{0,1} := AA_{0,1} + K_{fL_{0,1}}$$

$$AA_{1,0} := AA_{1,0} + K_{fL_{1,0}} \quad AA_{1,1} := AA_{1,1} + K_{fL_{1,1}}$$

$$AA_{n-1,n-1} := AA_{n-1,n-1} + K_{fD_{0,0}} \quad AA_{n-1,n} := AA_{n-1,n} + K_{fD_{0,1}}$$



$$AA_{n,n-1} := AA_{n,n-1} + K_{fD_{0,1}}$$

$$AA_{n,n} := AA_{n,n} + K_{fD_{1,1}}$$

	0	1	2	3	4	5
0	$3.84 \cdot 10^4$	$-4.8 \cdot 10^3$	0	0	0	0
1	$-4.8 \cdot 10^3$	$1.751 \cdot 10^7$	$-3.499 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0	0
2	0	$-3.499 \cdot 10^7$	$8.748 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	0
3	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
4	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$	$-6.998 \cdot 10^7$
5	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$	$1.05 \cdot 10^8$
6	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$	$-6.998 \cdot 10^7$
7	0	0	0	0	0	$1.75 \cdot 10^7$
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	...

Rjesavanje:

$$y1 := A^{-1} \cdot q$$

$$yy1 := AA^{-1} \cdot q$$

uzimanje rubnih vrijednosti u obzir:

$$i := 2..n-2$$

$$j := 0..n$$

	0
0	$2.508 \cdot 10^{-3}$
1	$2.329 \cdot 10^{-3}$
2	$2.149 \cdot 10^{-3}$
3	$1.967 \cdot 10^{-3}$
4	$1.781 \cdot 10^{-3}$
5	$1.594 \cdot 10^{-3}$
6	$1.408 \cdot 10^{-3}$
7	$1.226 \cdot 10^{-3}$
8	$1.048 \cdot 10^{-3}$
9	$8.753 \cdot 10^{-4}$
10	$7.086 \cdot 10^{-4}$
11	$5.477 \cdot 10^{-4}$
12	$3.922 \cdot 10^{-4}$
13	$2.417 \cdot 10^{-4}$
14	$9.543 \cdot 10^{-5}$
15	$-4.736 \cdot 10^{-5}$
16	$-1.875 \cdot 10^{-4}$
17	$-3.258 \cdot 10^{-4}$
18	$-4.629 \cdot 10^{-4}$
19	$-5.995 \cdot 10^{-4}$
20	$-7.359 \cdot 10^{-4}$

y1 =

	0
0	$3.367 \cdot 10^{-4}$
1	$2.694 \cdot 10^{-3}$
2	$2.477 \cdot 10^{-3}$
3	$2.259 \cdot 10^{-3}$
4	$2.036 \cdot 10^{-3}$
5	$1.814 \cdot 10^{-3}$
6	$1.593 \cdot 10^{-3}$
7	$1.377 \cdot 10^{-3}$
8	$1.167 \cdot 10^{-3}$
9	$9.634 \cdot 10^{-4}$
10	$7.663 \cdot 10^{-4}$
11	$5.759 \cdot 10^{-4}$
12	$3.917 \cdot 10^{-4}$
13	$2.129 \cdot 10^{-4}$
14	$3.877 \cdot 10^{-5}$
15	$-1.316 \cdot 10^{-4}$
16	$-2.992 \cdot 10^{-4}$
17	$-4.649 \cdot 10^{-4}$
18	$-6.294 \cdot 10^{-4}$
19	$-7.934 \cdot 10^{-4}$
20	$-9.917 \cdot 10^{-5}$

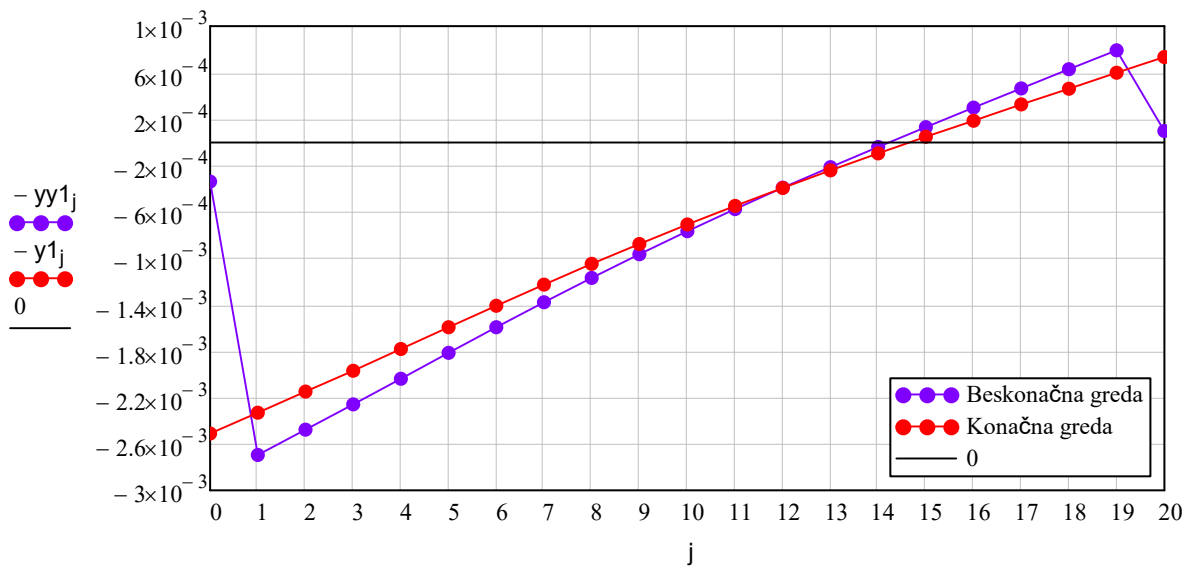
yy1 =

$$\min(y1) = -7.359 \times 10^{-4}$$

$$\max(y1) = 2.508 \times 10^{-3}$$

$$\min(yy1) = -7.934 \times 10^{-4}$$

$$\max(yy1) = 2.694 \times 10^{-3}$$



**Momenti:**

$$M1_j := \frac{(y1_{i+1} - 2 \cdot y1_i + y1_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$MM1_j := \frac{(yy1_{i+1} - 2 \cdot yy1_i + yy1_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$M1_n := 0$$

$$MM1_n := 0$$

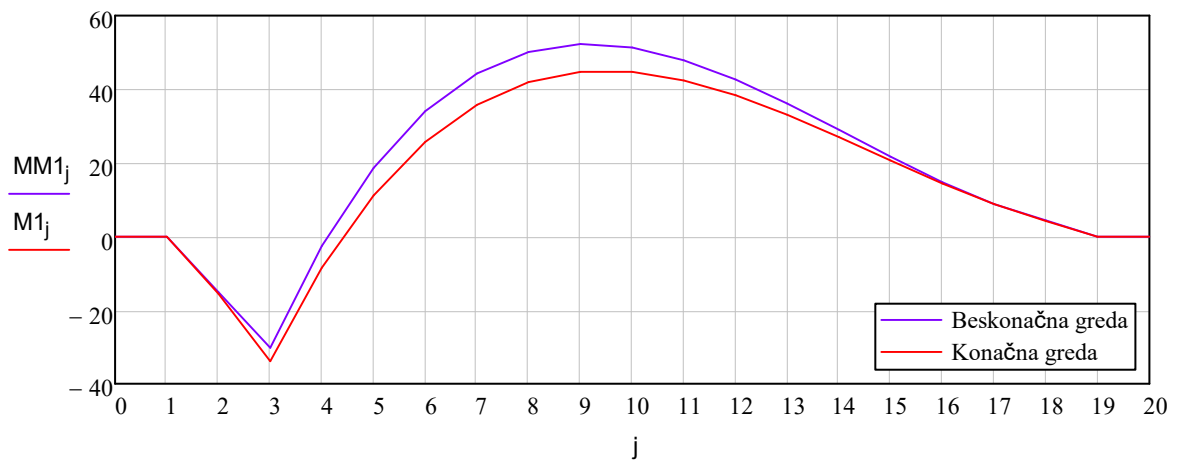
	0
0	0
1	0
2	-15.477
3	-33.818
4	-8.454
5	11.211
6	25.776
7	35.835
8	41.972
9	44.756
10	44.74
11	42.455
12	38.418
13	33.126
14	27.06
15	20.689
16	14.47
17	8.85
18	4.273
19	0
20	0

min(M1) = -33.8181  
max(M1) = 44.756

	0
0	0
1	0
2	-15.085
3	-30.169
4	-2.482
5	18.69
6	34.058
7	44.328
8	50.19
9	52.317
10	51.362
11	47.954
12	42.703
13	36.199
14	29.014
15	21.705
16	14.817
17	8.886
18	4.443
19	0
20	0

min(MM1) = -30.169  
max(MM1) = 52.317

$$\max(y1) - y1_1 = 1.793 \times 10^{-4}$$



crtanje s beskonacnim dijelovima:

$$N1(\xi) := \left[ \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) \quad 1 - \xi^2 \right]$$

$$\Phi1_L := \begin{pmatrix} yy1_1 \\ yy1_0 \end{pmatrix}$$

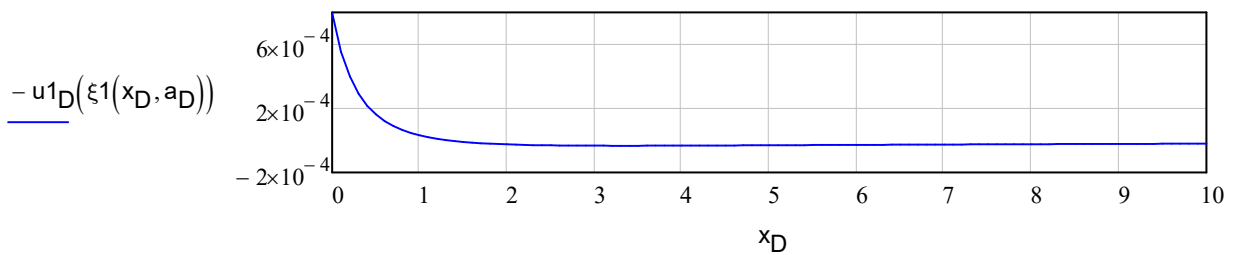
$$\Phi1_D := \begin{pmatrix} yy1_{n-1} \\ yy1_n \end{pmatrix}$$

$$\Phi1_L = \begin{pmatrix} 2.694 \times 10^{-3} \\ 3.367 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

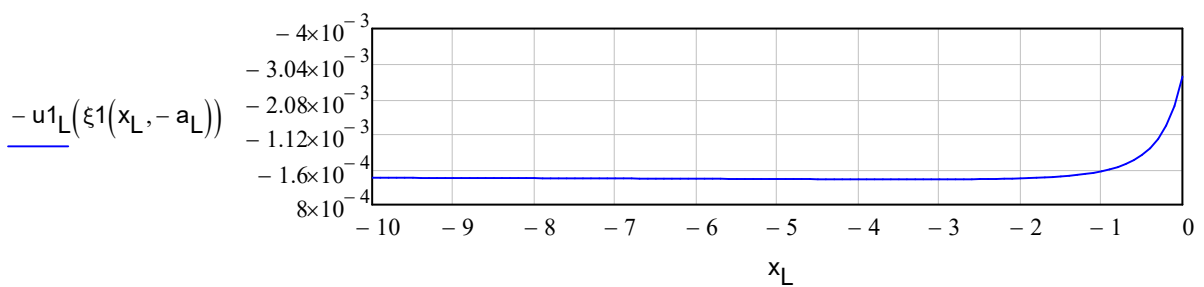
$$\Phi1_D = \begin{pmatrix} -7.934 \times 10^{-4} \\ -9.917 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\xi1(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad x = 0 \dots \text{beskonacno}$$

$$x_D := 0, 0.1 \dots 10 \quad u1_D(\xi) := N1(\xi) \cdot \Phi1_D$$



$$x_L := 0, -0.1 \dots -10 \quad u1_L(\xi) := N1(\xi) \cdot \Phi1_L$$

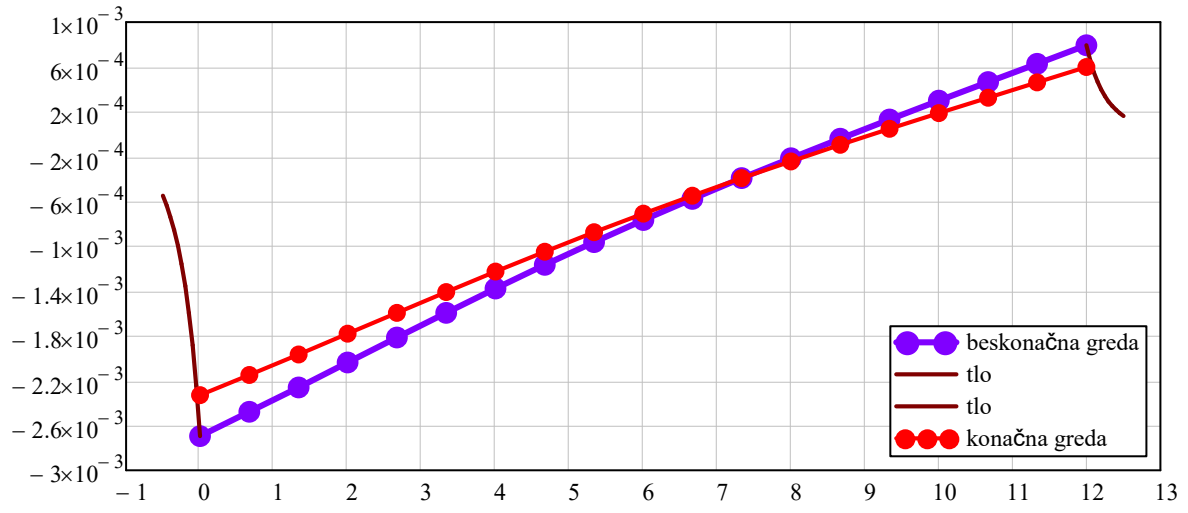


$$k := 0 \dots n-2 \quad x_L := 0, -0.05 \dots -0.5$$

$$x_{M_k} := \Delta x \cdot k \quad x_D := 0, 0.05 \dots 0.5$$

$$x_M^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.667	1.333	2	2.667	3.333	4	4.667	...



drugi slučaj (2/4 opterećenja)

$$x_{P2} := \frac{1 \cdot L}{4} \quad \text{najdi najblizu točku:} \quad k_{P2} := \text{Round}\left(\frac{x_{P2}}{\Delta x}, \Delta x\right) + 1$$

$$k_{P2} = 5.667 \quad k_{P2} := 6 \quad p_{k_{P2}} := \frac{P}{\Delta x}$$

$$q_i := p_i \quad q_0 := 0 \quad q_n := 0$$

$$\Delta x = 0.667 \quad D = 1.75 \times 10^7$$

q =

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	112.5
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

**Rjesavanje:**

$$y2 := A^{-1} \cdot q$$

$$yy2 := AA^{-1} \cdot q$$

uzimanje rubnih vrijednosti u obzir:

$$i := 2 .. n - 2$$

$$j := 0 .. n$$

y2 =

	0
0	$4.084 \cdot 10^{-3}$
1	$3.85 \cdot 10^{-3}$
2	$3.614 \cdot 10^{-3}$
3	$3.375 \cdot 10^{-3}$
4	$3.129 \cdot 10^{-3}$
5	$2.877 \cdot 10^{-3}$
6	$2.619 \cdot 10^{-3}$
7	$2.353 \cdot 10^{-3}$
8	$2.084 \cdot 10^{-3}$
9	$1.814 \cdot 10^{-3}$
10	$1.546 \cdot 10^{-3}$
11	$1.28 \cdot 10^{-3}$
12	$1.019 \cdot 10^{-3}$
13	$7.624 \cdot 10^{-4}$
14	$5.095 \cdot 10^{-4}$
15	$2.602 \cdot 10^{-4}$
16	$1.386 \cdot 10^{-5}$
17	$-2.303 \cdot 10^{-4}$
18	$-4.732 \cdot 10^{-4}$
19	$-7.153 \cdot 10^{-4}$
20	$-9.572 \cdot 10^{-4}$

yy2 =

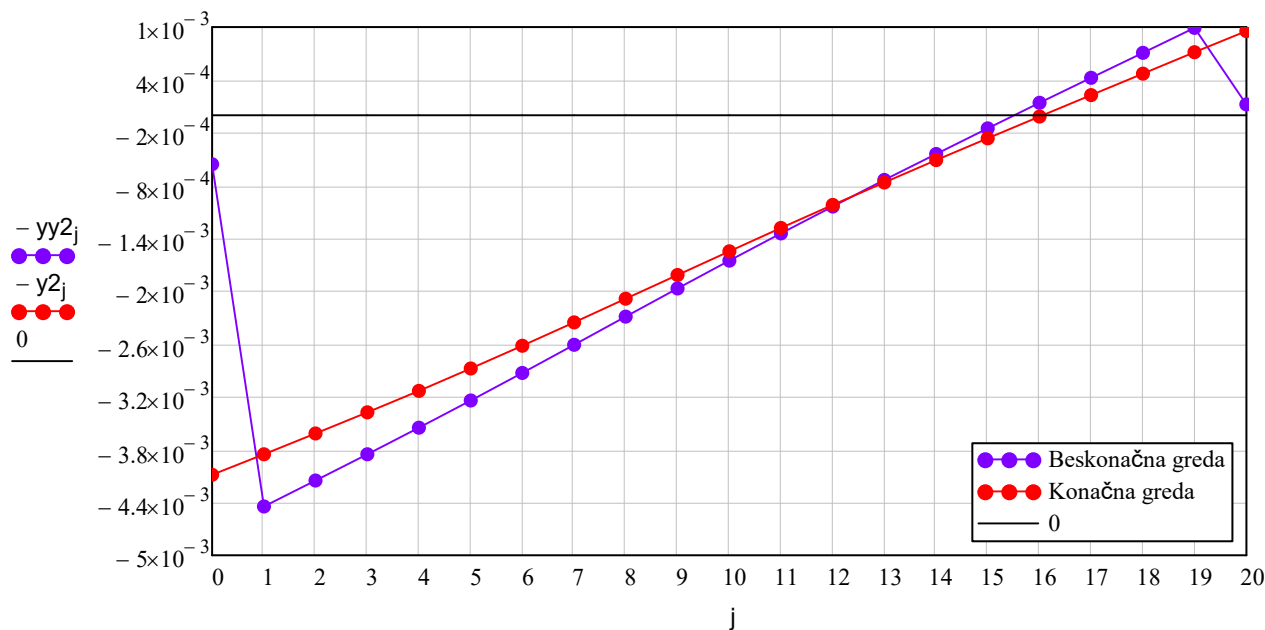
	0
0	$5.554 \cdot 10^{-4}$
1	$4.443 \cdot 10^{-3}$
2	$4.149 \cdot 10^{-3}$
3	$3.852 \cdot 10^{-3}$
4	$3.548 \cdot 10^{-3}$
5	$3.24 \cdot 10^{-3}$
6	$2.926 \cdot 10^{-3}$
7	$2.608 \cdot 10^{-3}$
8	$2.287 \cdot 10^{-3}$
9	$1.968 \cdot 10^{-3}$
10	$1.652 \cdot 10^{-3}$
11	$1.341 \cdot 10^{-3}$
12	$1.036 \cdot 10^{-3}$
13	$7.35 \cdot 10^{-4}$
14	$4.394 \cdot 10^{-4}$
15	$1.479 \cdot 10^{-4}$
16	$-1.402 \cdot 10^{-4}$
17	$-4.261 \cdot 10^{-4}$
18	$-7.105 \cdot 10^{-4}$
19	$-9.943 \cdot 10^{-4}$
20	$-1.243 \cdot 10^{-4}$

$$\min(y2) = -9.572 \times 10^{-4}$$

$$\max(y2) = 4.084 \times 10^{-3}$$

$$\min(yy2) = -9.943 \times 10^{-4}$$

$$\max(yy2) = 4.443 \times 10^{-3}$$



**Momenti:**

$$M2_i := \frac{(y2_{i+1} - 2 \cdot y2_i + y2_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$MM2_i := \frac{(yy2_{i+1} - 2 \cdot yy2_i + yy2_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

	0
0	0
1	0
2	-25.389
3	-55.808
4	-47.027
5	-48.26
6	-58.699
7	-27.518
8	-3.867
9	13.117
10	24.297
11	30.532
12	32.669
13	31.544
14	27.98
15	22.785
16	16.758
17	10.687
18	5.352
19	0
20	0

$$M2_n := 0$$

$$\min(M2) = -58.6988$$

$$\max(M2) = 32.669$$

$$\max(y2) - y2_1 = 2.348 \times 10^{-4}$$

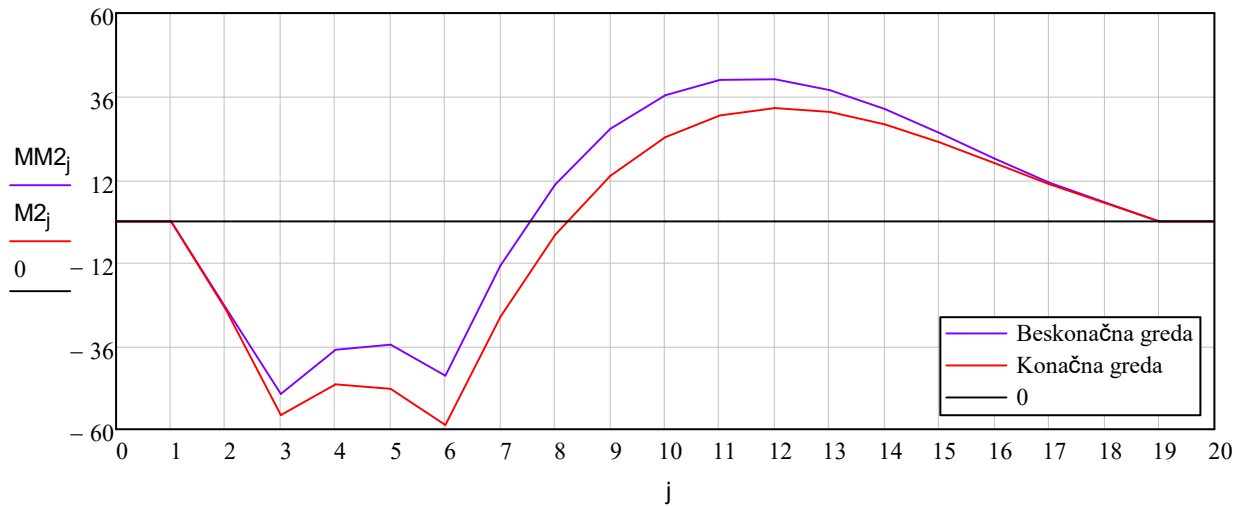
	0
0	0
1	0
2	-24.884
3	-49.767
4	-36.977
5	-35.541
6	-44.471
7	-12.766
8	10.595
9	26.637
10	36.382
11	40.839
12	41.004
13	37.855
14	32.354
15	25.447
16	18.067
17	11.136
18	5.568
19	0
20	0

$$MM2_n := 0$$

$$\min(MM2) = -49.767$$

$$\max(MM2) = 41.004$$





crtanje s beskonacnim dijelovima:

$$N2(\xi) := \left[ \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) \quad 1 - \xi^2 \right]$$

$$\Phi2_L := \begin{pmatrix} yy2_1 \\ yy2_0 \end{pmatrix}$$

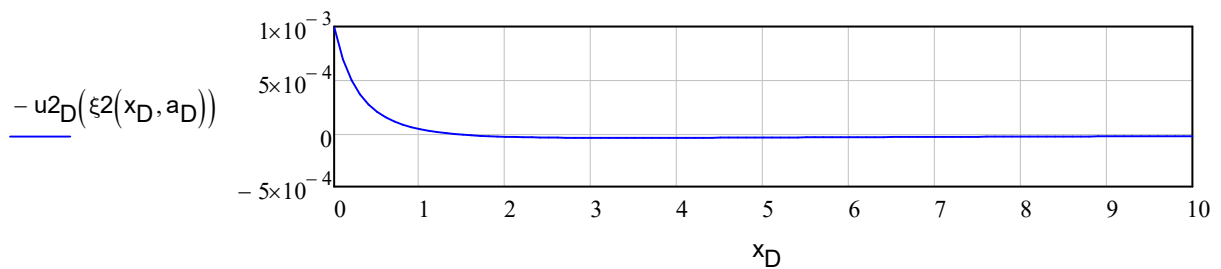
$$\Phi2_D := \begin{pmatrix} yy2_{n-1} \\ yy2_n \end{pmatrix}$$

$$\Phi2_L = \begin{pmatrix} 4.443 \times 10^{-3} \\ 5.554 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

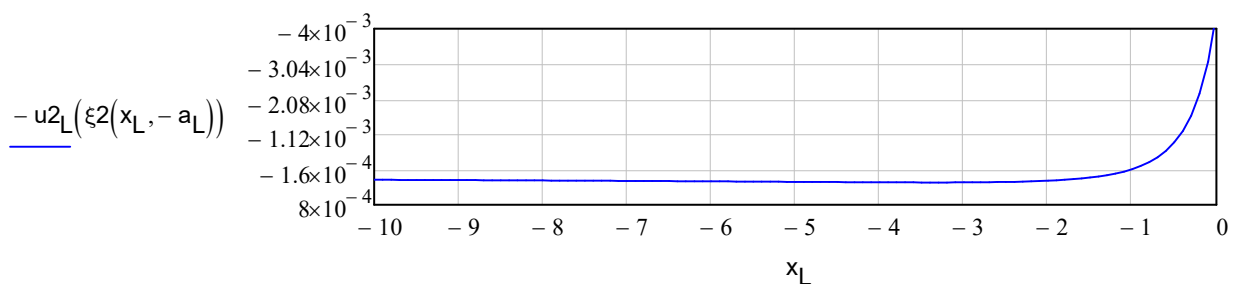
$$\Phi2_D = \begin{pmatrix} -9.943 \times 10^{-4} \\ -1.243 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\xi2(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad x = 0 \dots \text{beskonacno}$$

$$x_D := 0, 0.1 \dots 10 \quad u2_D(\xi) := N2(\xi) \cdot \Phi2_D$$



$$x_L := 0, -0.1 \dots -10 \quad u2_L(\xi) := N2(\xi) \cdot \Phi2_L$$



$$k := 0 .. n - 2$$

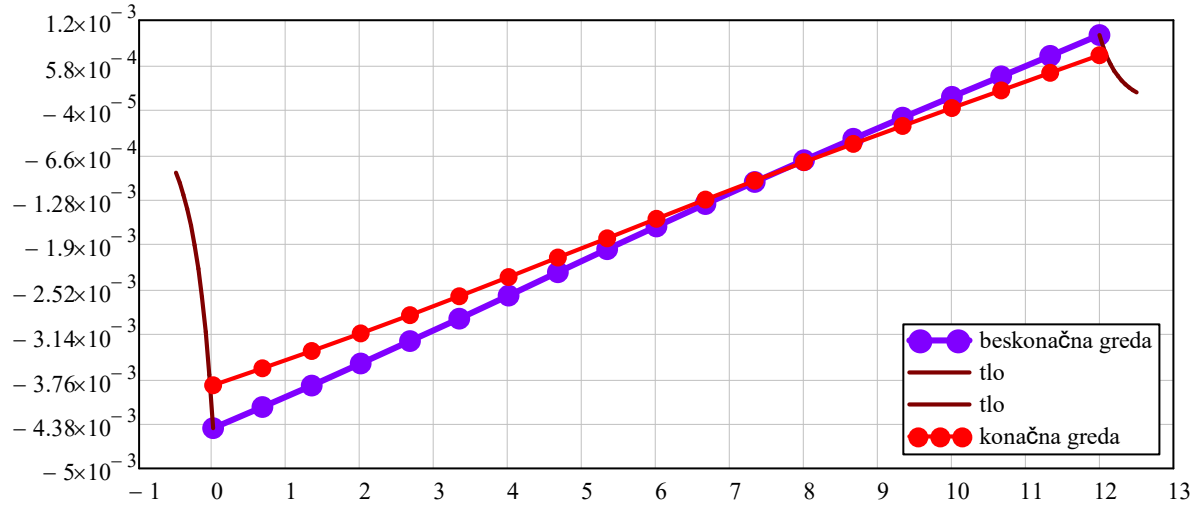
$$x_L := 0, -0.05 .. -0.5$$

$$x_{M2_k} := \Delta x \cdot k$$

$$x_D := 0, 0.05 .. 0.5$$

$$x_{M2}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.667	1.333	2	2.667	3.333	4	4.667	...



treći slučaj (3/4 opterećenja)

$$x_{P3} := \frac{3 \cdot L}{8} \quad \text{najdi najblizu točku:} \quad k_{P3} := \text{Round}\left(\frac{x_{P3}}{\Delta x}, \Delta x\right) + 1$$

$$k_{P3} = 7.667 \quad \underline{k_{P3}} := 8 \quad p_{k_{P3}} := \frac{P}{\Delta x}$$

$$q_i := p_i \quad q_0 := 0 \quad q_n := 0$$

$$\Delta x = 0.667 \quad D = 1.75 \times 10^7$$

	0
0	0
1	0
2	0
3	112.5
4	0
5	0
6	112.5
7	0
8	112.5
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

q =

**Rjesavanje:**

$$y3 := A^{-1} \cdot q$$

$$yy3 := AA^{-1} \cdot q$$

uzimanje rubnih vrijednosti u obzir:

$$i := 2.. n - 2$$

$$j := 0.. n$$

	0
0	$5.124 \cdot 10^{-3}$
1	$4.892 \cdot 10^{-3}$
2	$4.66 \cdot 10^{-3}$
3	$4.423 \cdot 10^{-3}$
4	$4.177 \cdot 10^{-3}$
5	$3.922 \cdot 10^{-3}$
6	$3.655 \cdot 10^{-3}$
7	$3.372 \cdot 10^{-3}$
8	$3.076 \cdot 10^{-3}$
9	$2.765 \cdot 10^{-3}$
10	$2.445 \cdot 10^{-3}$
11	$2.12 \cdot 10^{-3}$
12	$1.793 \cdot 10^{-3}$
13	$1.464 \cdot 10^{-3}$
14	$1.137 \cdot 10^{-3}$
15	$8.102 \cdot 10^{-4}$
16	$4.854 \cdot 10^{-4}$
17	$1.619 \cdot 10^{-4}$
18	$-1.606 \cdot 10^{-4}$
19	$-4.827 \cdot 10^{-4}$
20	$-8.045 \cdot 10^{-4}$

y3 =

	0
0	$7.038 \cdot 10^{-4}$
1	$5.631 \cdot 10^{-3}$
2	$5.327 \cdot 10^{-3}$
3	$5.019 \cdot 10^{-3}$
4	$4.703 \cdot 10^{-3}$
5	$4.38 \cdot 10^{-3}$
6	$4.046 \cdot 10^{-3}$
7	$3.7 \cdot 10^{-3}$
8	$3.343 \cdot 10^{-3}$
9	$2.974 \cdot 10^{-3}$
10	$2.598 \cdot 10^{-3}$
11	$2.219 \cdot 10^{-3}$
12	$1.839 \cdot 10^{-3}$
13	$1.46 \cdot 10^{-3}$
14	$1.083 \cdot 10^{-3}$
15	$7.087 \cdot 10^{-4}$
16	$3.363 \cdot 10^{-4}$
17	$-3.446 \cdot 10^{-5}$
18	$-4.041 \cdot 10^{-4}$
19	$-7.732 \cdot 10^{-4}$
20	$-9.664 \cdot 10^{-5}$

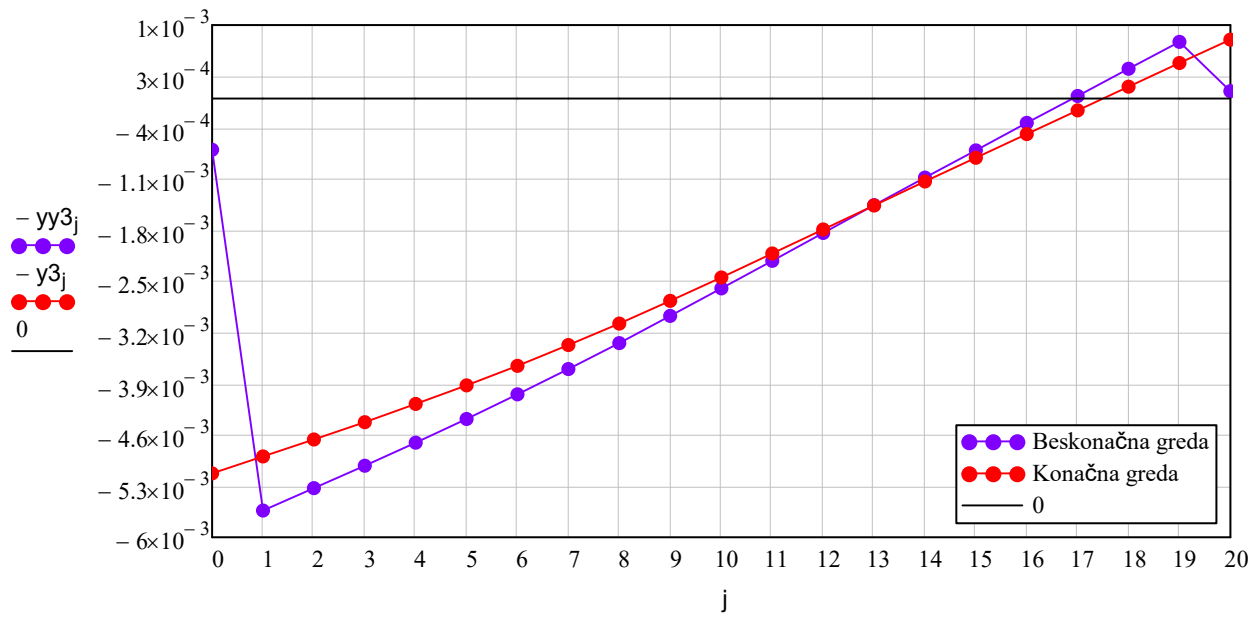
yy3 =

$$\min(y3) = -8.045 \times 10^{-4}$$

$$\max(y3) = 5.124 \times 10^{-3}$$

$$\min(yy3) = -7.732 \times 10^{-4}$$

$$\max(yy3) = 5.631 \times 10^{-3}$$



**Momenti:**

$$M3_j := \frac{(y3_{i+1} - 2 \cdot y3_i + y3_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$MM3_j := \frac{(yy3_{i+1} - 2 \cdot yy3_i + yy3_{i-1}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

	0
0	0
1	0
2	-32.053
3	-70.819
4	-73.739
5	-90.024
6	-118.859
7	-109.388
8	-110.709
9	-71.873
10	-41.886
11	-19.724
12	-4.347
13	5.293
14	10.249
15	11.567
16	10.293
17	7.465
18	4.119
19	...

M3 =

$$M3_n := 0$$

$$\min(M3) = -118.8591$$

$$\max(M3) = 11.567$$

$$\max(y3) - y3_1 = 2.317 \times 10^{-4}$$

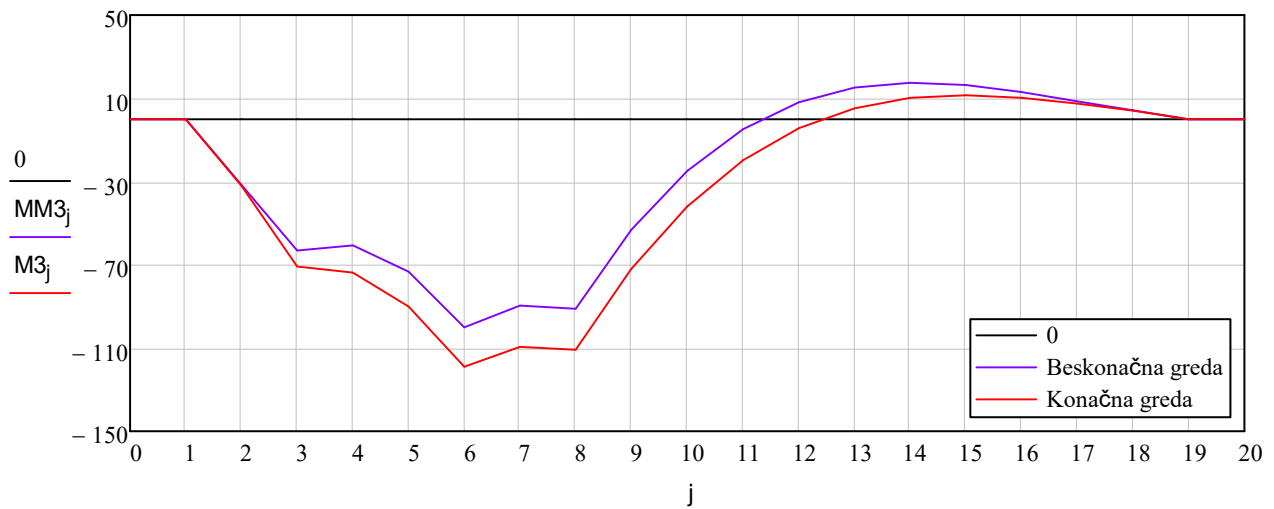
	0
0	0
1	0
2	-31.531
3	-63.062
4	-60.654
5	-73.295
6	-99.952
7	-89.557
8	-91.003
9	-53.147
10	-24.807
11	-4.781
12	8.146
13	15.189
14	17.559
15	16.463
16	13.099
17	8.659
18	4.33
19	...

MM3 =

$$MM3_n := 0$$

$$\min(MM3) = -99.952$$

$$\max(MM3) = 17.559$$



crtanje s beskonacnim dijelovima:

$$N3(\xi) := \left[ \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) \quad 1 - \xi^2 \right]$$

$$\Phi3_L := \begin{pmatrix} yy3_1 \\ yy3_0 \end{pmatrix}$$

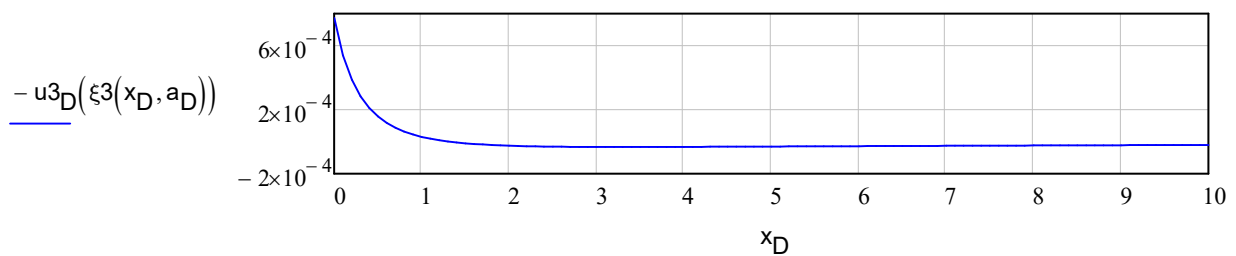
$$\Phi3_D := \begin{pmatrix} yy3_{n-1} \\ yy3_n \end{pmatrix}$$

$$\Phi3_L = \begin{pmatrix} 5.631 \times 10^{-3} \\ 7.038 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

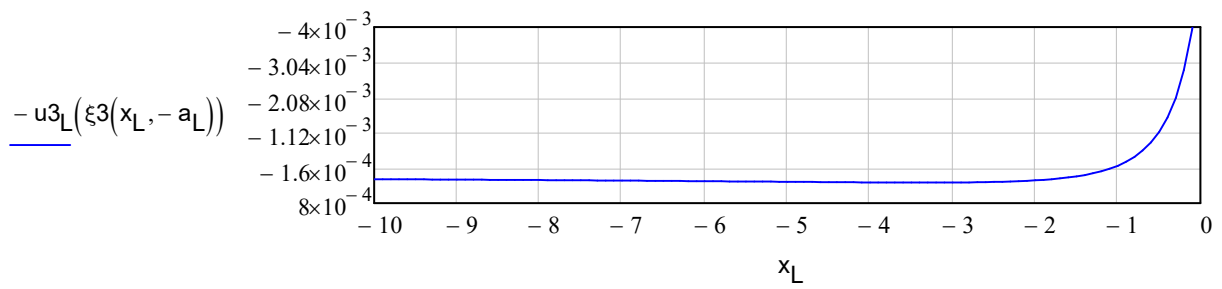
$$\Phi3_D = \begin{pmatrix} -7.732 \times 10^{-4} \\ -9.664 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\xi3(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a} \quad x = 0 \dots \text{beskonacno}$$

$$x_D := 0, 0.1 \dots 10 \quad u3_D(\xi) := N3(\xi) \cdot \Phi3_D$$



$$x_L := 0, -0.1 \dots -10 \quad u3_L(\xi) := N3(\xi) \cdot \Phi3_L$$

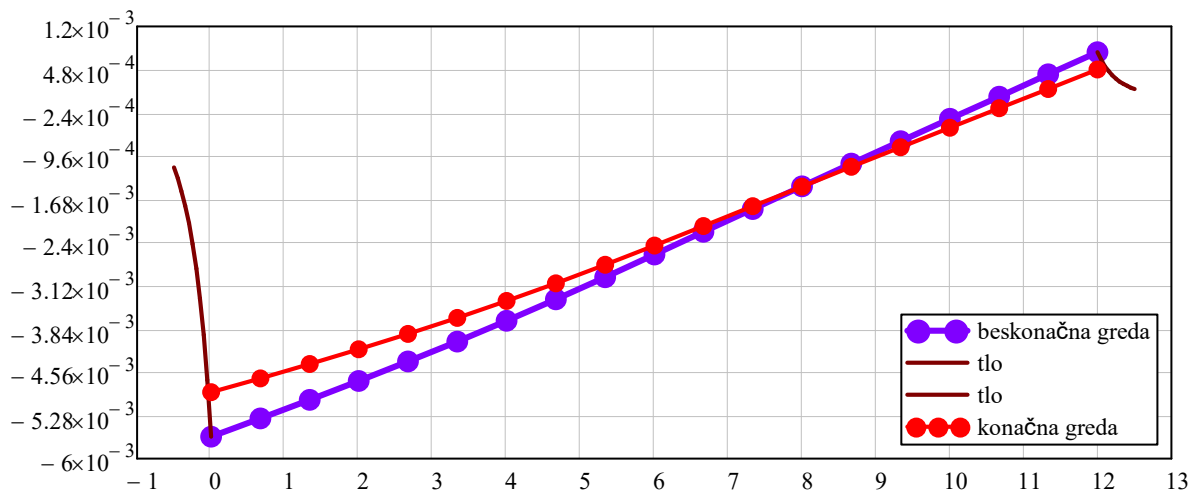


$$k := 0..n-2 \quad x_L := 0, -0.05..-0.5$$

$$x_{M3_k} := \Delta x \cdot k \quad x_D := 0, 0.05..0.5$$

$$x_{M3}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.667	1.333	2	2.667	3.333	4	4.667	...



četvrti slučaj (cijelo opterećenje)

$$x_{P4} := \frac{1 \cdot L}{2}$$

nadji najblizu točku:

$$k_{P4} := \text{Round}\left(\frac{x_{P4}}{\Delta x}, \Delta x\right) + 1$$

	0
0	0
1	0
2	0

$$k_{P4} = 10.333$$

$$k_{P4} := 10$$

$$p_{k_{P4}} := \frac{P}{\Delta x}$$

$$q_i := p_i$$

$$q_0 := 0$$

$$q_n := 0$$

$$\Delta x = 0.667 \quad D = 1.75 \times 10^7$$

$$q =$$

3	112.5
4	0
5	0
6	112.5
7	0
8	112.5
9	0
10	112.5
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

### Rjesavanje:

$$y4 := A^{-1} \cdot q$$

$$yy4 := AA^{-1} \cdot q$$

uzimanje rubnih vrijednosti u obzir:

$$i := 2 .. n - 2$$

$$j := 0 .. n$$

$$y4 =$$

	0
0	$5.693 \cdot 10^{-3}$
1	$5.508 \cdot 10^{-3}$
2	$5.322 \cdot 10^{-3}$
3	$5.132 \cdot 10^{-3}$
4	$4.931 \cdot 10^{-3}$
5	$4.719 \cdot 10^{-3}$
6	$4.491 \cdot 10^{-3}$
7	$4.244 \cdot 10^{-3}$
8	$3.976 \cdot 10^{-3}$
9	$3.684 \cdot 10^{-3}$
10	$3.372 \cdot 10^{-3}$
11	$3.039 \cdot 10^{-3}$
12	$2.693 \cdot 10^{-3}$
13	$2.336 \cdot 10^{-3}$
14	$1.973 \cdot 10^{-3}$
15	$1.607 \cdot 10^{-3}$
16	$1.239 \cdot 10^{-3}$
17	$8.705 \cdot 10^{-4}$
18	$5.016 \cdot 10^{-4}$
19	$1.328 \cdot 10^{-4}$
20	$-2.36 \cdot 10^{-4}$

$$yy4 =$$

	0
0	$7.888 \cdot 10^{-4}$
1	$6.31 \cdot 10^{-3}$
2	$6.05 \cdot 10^{-3}$
3	$5.785 \cdot 10^{-3}$
4	$5.512 \cdot 10^{-3}$
5	$5.228 \cdot 10^{-3}$
6	$4.932 \cdot 10^{-3}$
7	$4.619 \cdot 10^{-3}$
8	$4.289 \cdot 10^{-3}$
9	$3.938 \cdot 10^{-3}$
10	$3.569 \cdot 10^{-3}$
11	$3.182 \cdot 10^{-3}$
12	$2.784 \cdot 10^{-3}$
13	$2.379 \cdot 10^{-3}$
14	$1.969 \cdot 10^{-3}$
15	$1.557 \cdot 10^{-3}$
16	$1.145 \cdot 10^{-3}$
17	$7.319 \cdot 10^{-4}$
18	$3.192 \cdot 10^{-4}$
19	$-9.334 \cdot 10^{-5}$
20	$-1.167 \cdot 10^{-5}$

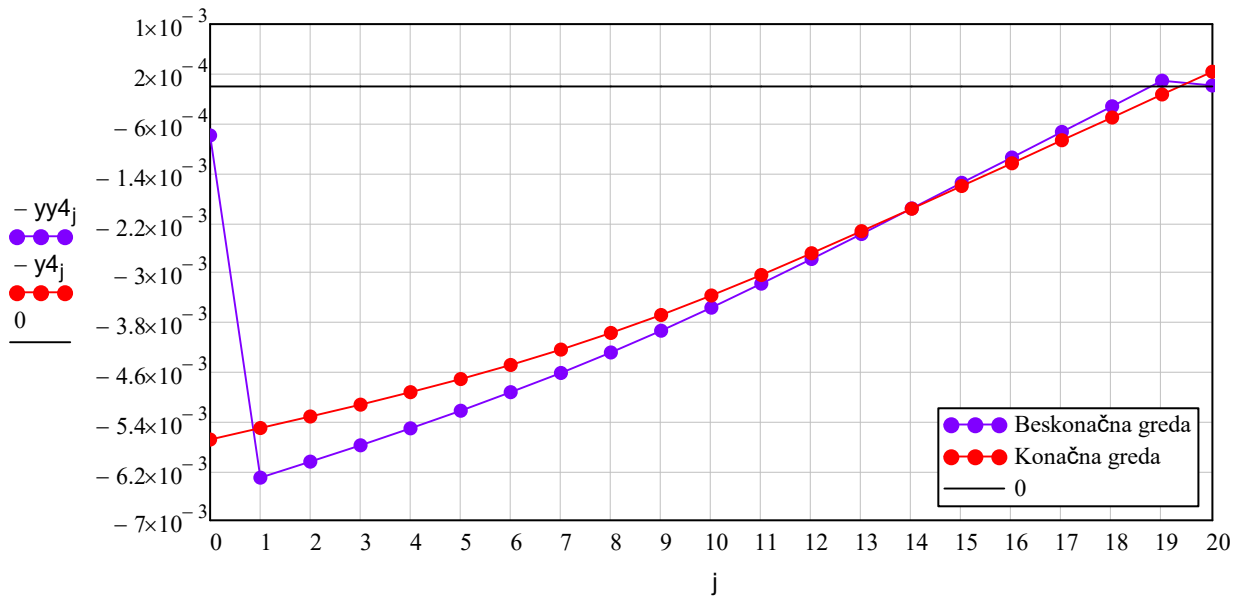
$$\min(y4) = -2.36 \times 10^{-4}$$

$$\min(yy4) = -9.334 \times 10^{-5}$$



$$\max(y_4) = 5.693 \times 10^{-3}$$

$$\max(yy_4) = 6.31 \times 10^{-3}$$



**Momenti:**

$$M4_j := \frac{(y_{4_{i+1}} - 2 \cdot y_{4_i} + y_{4_{i-1}}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

$$MM4_j := \frac{(yy_{4_{i+1}} - 2 \cdot yy_{4_i} + yy_{4_{i-1}}) \cdot EI}{\Delta x^2}$$

	0
0	0
1	0
2	-35.842
3	-79.606
4	-89.791
5	-115.755
6	-156.819
7	-162.255
8	-181.272
9	-163.013
10	-156.543
11	-110.864
12	-74.91
13	-47.573
14	-27.711
15	-14.164
16	-5.76
17	-1.322
18	0.33
19	0
20	0

$$M4_n := 0$$

$$\min(M4) = -181.2725$$

$$\max(M4) = 0.33$$

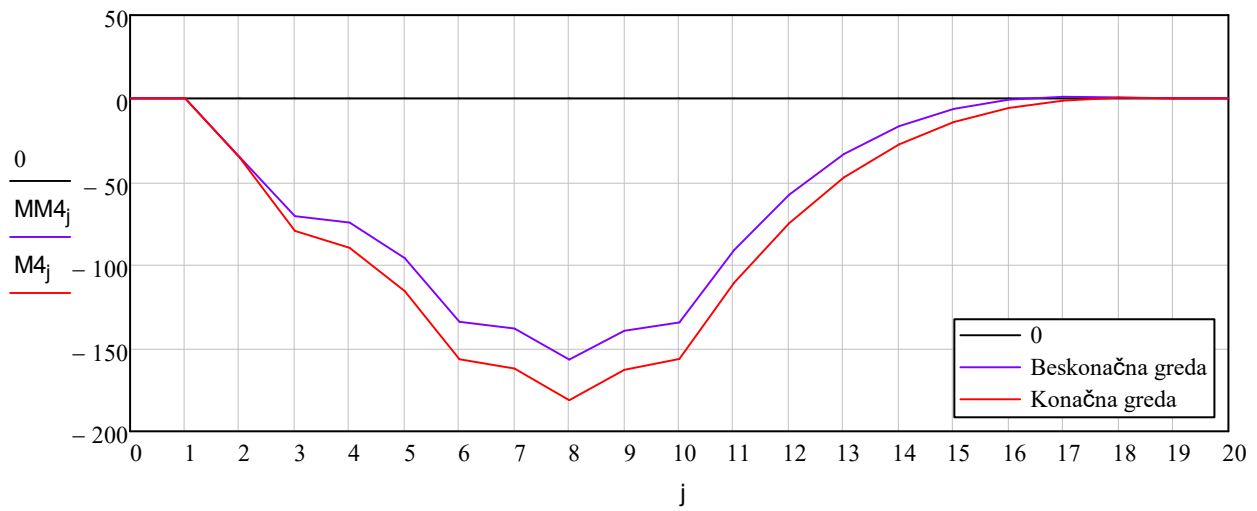
	0
0	0
1	0
2	-35.338
3	-70.676
4	-74.527
5	-96.015
6	-134.233
7	-138.235
8	-157.018
9	-139.525
10	-134.632
11	-91.159
12	-57.869
13	-33.489
14	-16.722
15	-6.256
16	-0.774
17	1.045
18	0.523
19	0
20	0

$$MM4_n := 0$$

$$\min(MM4) = -157.018$$

$$\max(MM4) = 1.045$$

$$\max(y_4) - y_{41} = 1.847 \times 10^{-4}$$



crtanje s beskonacnim dijelovima:

$$N_4(\xi) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-\xi + \xi^2) & 1 - \xi^2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{4L} := \begin{pmatrix} yy_{41} \\ yy_{40} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{4D} := \begin{pmatrix} yy_{4n-1} \\ yy_{4n} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{4L} = \begin{pmatrix} 6.31 \times 10^{-3} \\ 7.888 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

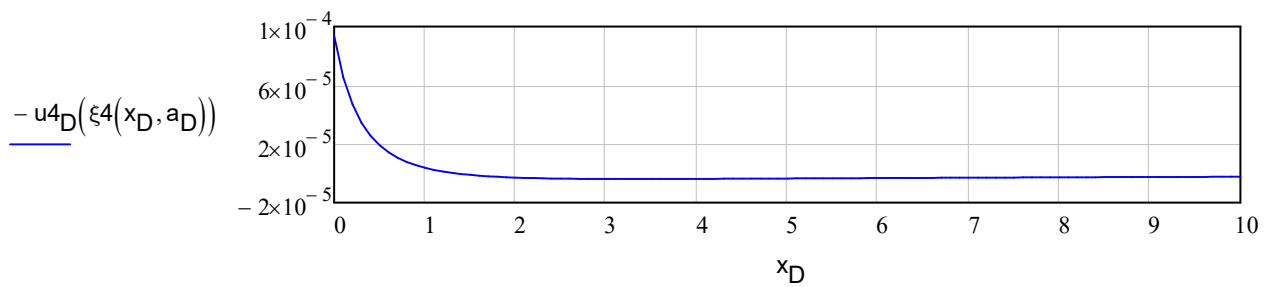
$$\Phi_{4D} = \begin{pmatrix} -9.334 \times 10^{-5} \\ -1.167 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\xi_4(x, a) := 1 - \frac{2 \cdot a}{x + a}$$

$x = 0 \dots \text{beskonacno}$

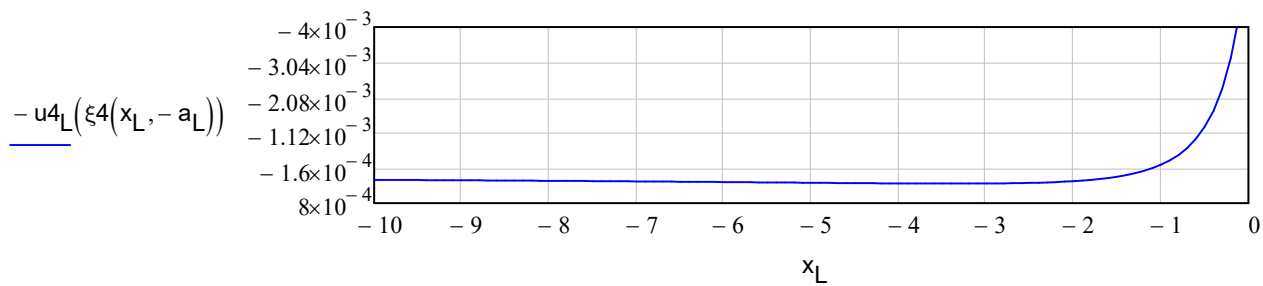
$x_D := 0, 0.1 \dots 10$

$$u_{4D}(\xi_4) := N_4(\xi_4) \cdot \Phi_{4D}$$



$x_L := 0, -0.1 \dots -10$

$$u_{4L}(\xi_4) := N_4(\xi_4) \cdot \Phi_{4L}$$

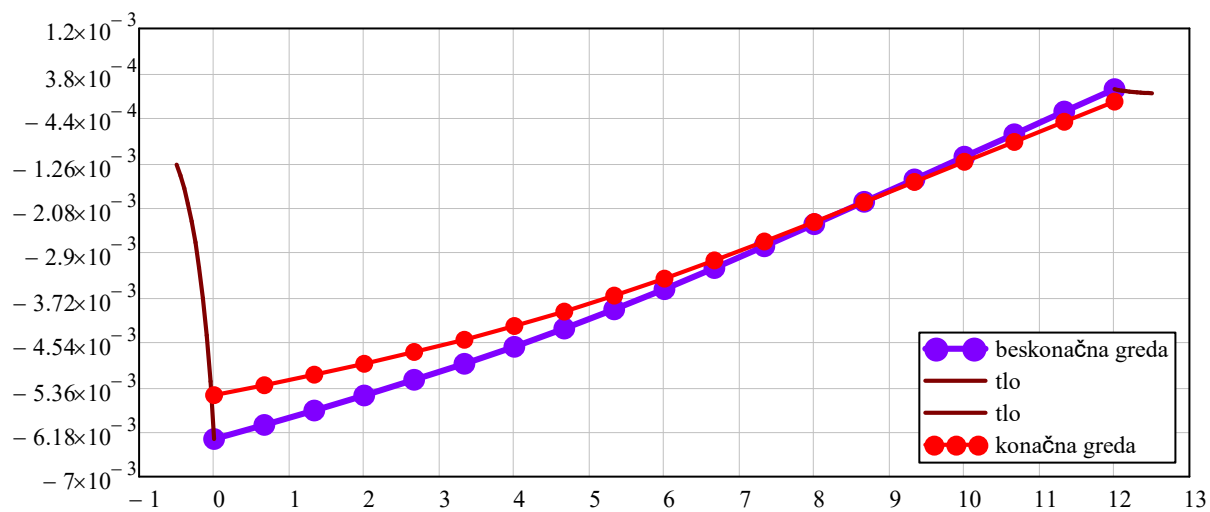


$k := 0..n-2$        $x_L := 0, -0.05..-0.5$

$x_{M4_k} := \Delta x \cdot k$        $x_D := 0, 0.05..0.5$

$$x_{M4}^T =$$

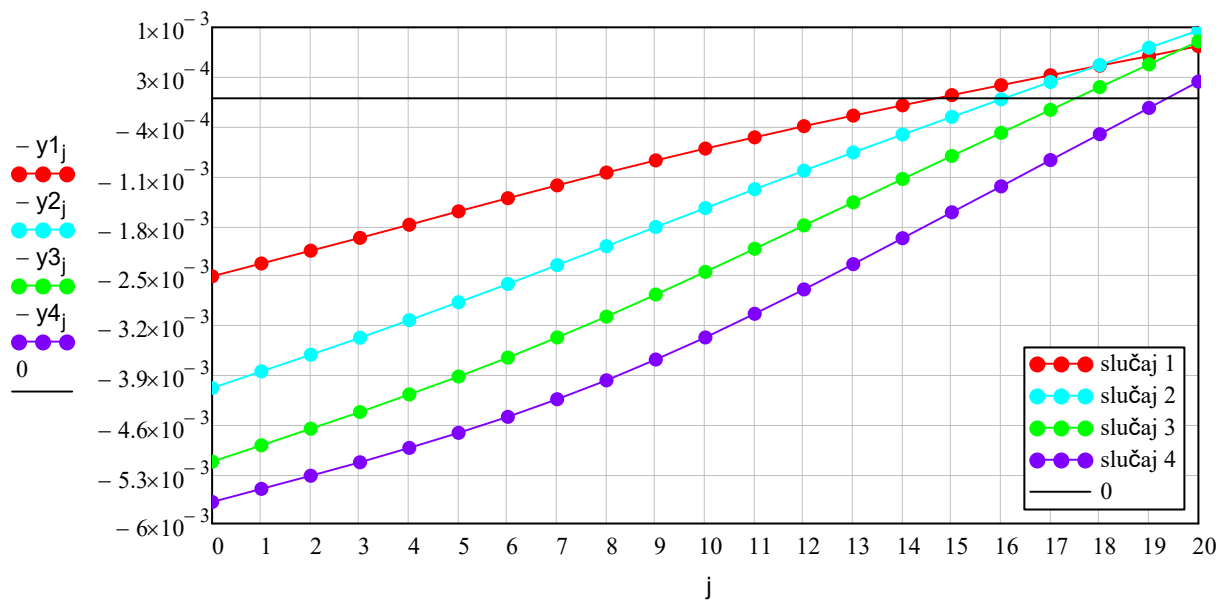
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.667	1.333	2	2.667	3.333	4	4.667	...



USPOREDBA PROGIBA I MOMENATA ZA ISTU PODLOGU

KONAČNA GREDA

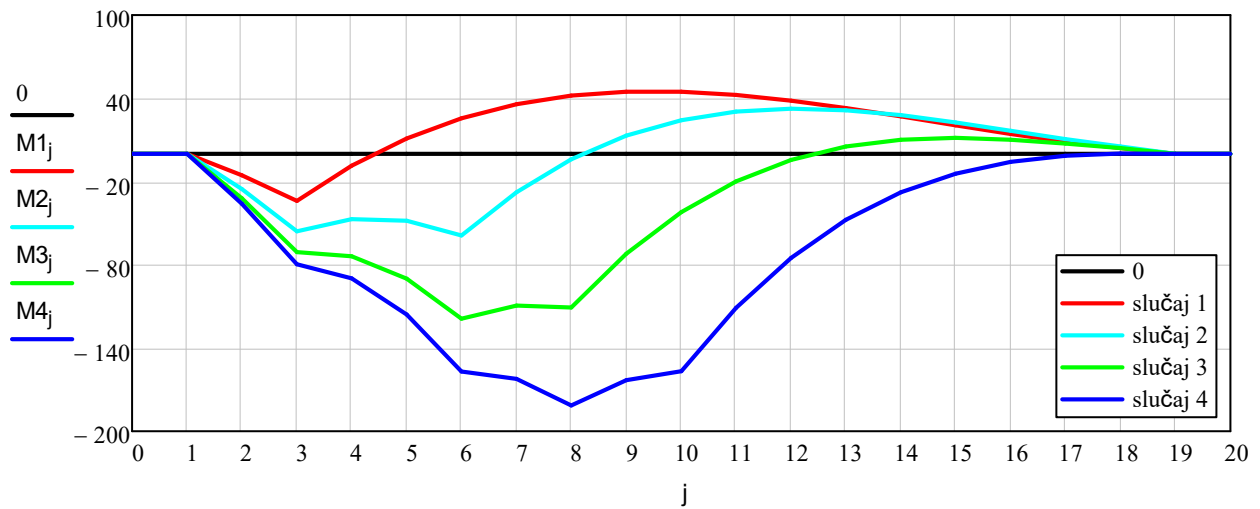
PROGIBI



$\max(y_1) = 2.508 \times 10^{-3}$      $\max(y_2) = 4.084 \times 10^{-3}$      $\max(y_3) = 5.124 \times 10^{-3}$      $\max(y_4) = 5.693 \times 10^{-3}$

$\min(y_1) = -7.359 \times 10^{-4}$      $\min(y_2) = -9.572 \times 10^{-4}$      $\min(y_3) = -8.045 \times 10^{-4}$      $\min(y_4) = -2.36 \times 10^{-4}$

MOMENTI



max(M1) = 44.756

max(M2) = 32.669

max(M3) = 11.567

max(M4) = 0.33

min(M1) = -33.818

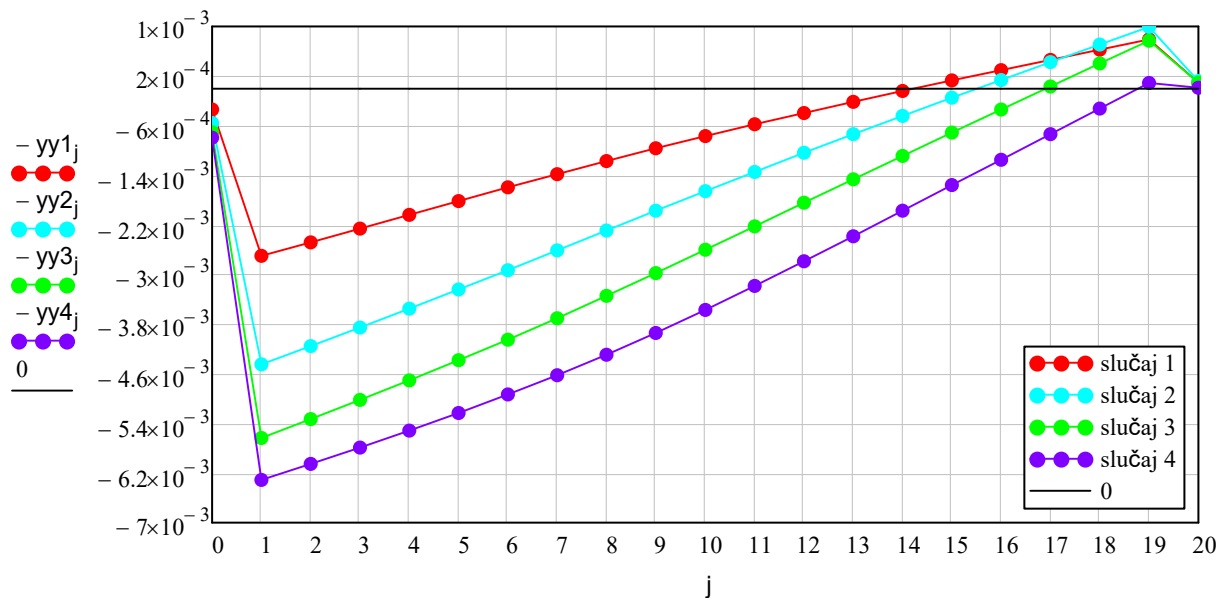
min(M2) = -58.699

min(M3) = -118.859

min(M4) = -181.272

### BESKONAČNA GREDA

#### PROGIBI



max(yy1) =  $2.694 \times 10^{-3}$

max(yy2) =  $4.443 \times 10^{-3}$

max(yy3) =  $5.631 \times 10^{-3}$

max(yy4) =  $6.31 \times 10^{-3}$

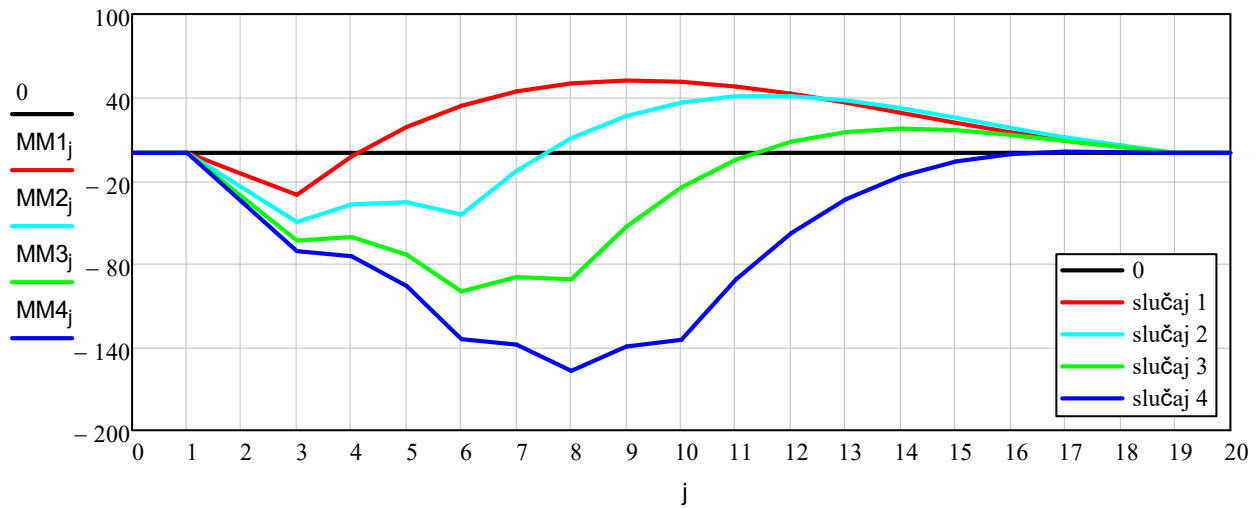
min(yy1) =  $-7.934 \times 10^{-4}$

min(yy2) =  $-9.943 \times 10^{-4}$

min(yy3) =  $-7.732 \times 10^{-4}$

min(yy4) =  $-9.334 \times 10^{-5}$

#### MOMENTI



$$\max(\text{MM1}) = 52.317$$

$$\max(\text{MM2}) = 41.004$$

$$\max(\text{MM3}) = 17.559$$

$$\max(\text{MM4}) = 1.045$$

$$\min(\text{MM1}) = -30.169$$

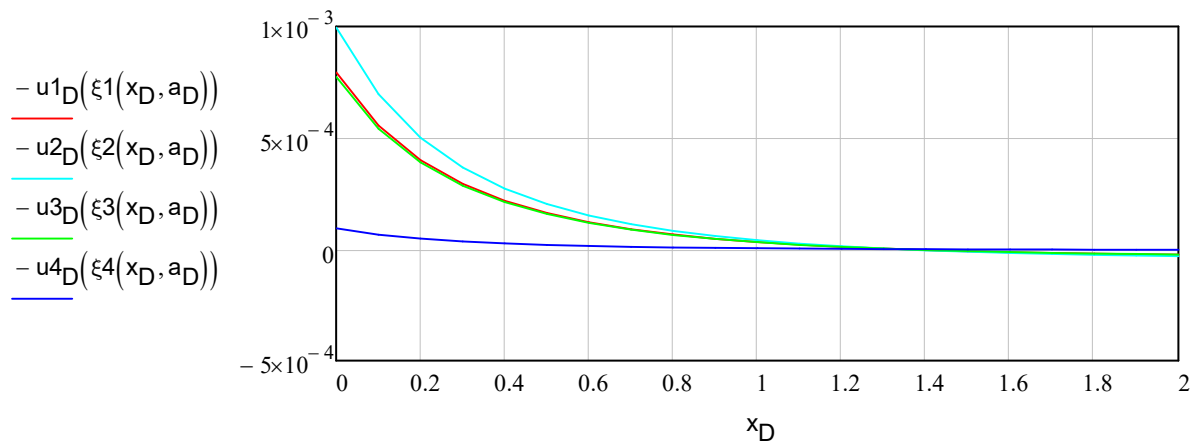
$$\min(\text{MM2}) = -49.767$$

$$\min(\text{MM3}) = -99.952$$

$$\min(\text{MM4}) = -157.018$$

### POMAK TLAPORED GREDE

$$x_D := 0, 0.1 \dots 2$$



$$x_L := 0, -0.1 \dots -2$$

